UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématique et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématique

Option : Analyse fonctionnelle

Présenté par

Anouar Islam GHEHIOUECHE

Sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable

Soutenu le : 02/07/2019

Devant le jury :

Mr. Rabah HERAIZ	M.C.B. Univ de M'sila	Président
Mr. Bachir GAGUI	M.C.A. Univ de M'sila	Examinateur
Mr. Hellal ABDELAZIZ	M.A.A. Univ de M'sila	Rapporteur

Promotion : 2018/2019

Dédicaces

A MA TRÈS CHÈRE MÈRE : **Chrifa Abdelkrim** Autant de phrases aussi expressives soient-elles ne sauraient montrer le degré d'amour et d'affection que j'éprouve pourtoi. Tu m'as comblé avec ta tendresse et affection tout au long de mon parcours. Tu n'as cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études, tu as toujours été présente à mes cotés pour me consoler quand il fallait. En ce jour mémorable, pour moi ainsi que pour toi, reçoit ce travail en signe de ma vive reconnaissance et mon profond estime. Puisse le tout puissant tedonner santé, bonheur et longue vie afin que je puisse te combler à mon tour.

A MON TRÈS CHER PÈRE : **Abdelkader Ghehioueche** Autant de phrases et d'expressions aussi éloquentes soit-elles ne sauraient exprimer ma gratitude et ma reconnaissance. Tu as su m'inculquer le sens de la responsabilité, de l'optimisme et de la confiance en soi face aux difficultés de la vie. Tes conseils onttoujours guidé mes pas vers la réussite. Ta patience sans fin, ta compréhension et ton encouragement sont pour moi le soutien indispensable que tu as toujours su m'apporter. Je te dois ce que je suis aujourd'hui et ce que je serai demain et je ferai toujours de mon mieux pour rester ta fierté et ne jamais te décevoir. que Dieu le tout puissant te préserve, t'accorde santé, bonheur, quiétude de l'esprit et te protège de tout mal.

A mon cher petit frère **Anes Ghehioueche** Pour toute l'ambiance dont tu m'as entouré, pour toute la spontanéité et ton élan chaleureux, Je te dédie ce travail . Puisse Dieu le tout puissant exhausser tous tes voeux.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes remerciements à mon Directeur de thèse Monsieur **Hellal ABDELAZIZ** , enseignant à université de M'sila pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur **Rabah HERAIZ**, enseignant à université de M'sila pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie vivement Monsieur **Bachir GAGUI**, enseignant à université de M'sila qui a bien voulu faire partie du jury. Je remercie egalement toute l'équipe pédagogique de département de mathématiques et Laboratoire d'analyse fonctionnelle et géométrie des espaces de université Mohamed Boudiaf M'sila.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance aux personnes suivantes, pour leur aide dans la réalisation de ce mémoire :

Messieurs **Lahcène Mezrag** et **Douadi Drihem**, pour m'avoir accordé des entretiens et avoir répondu à mes questions sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables, ainsi que leur expérience personnelle. Ils ont été d'un grand soutien dans l'élaboration de ce mémoire.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Mes parents, pour leur soutien constant et leurs encouragements.

Abstract

The work presented in this thesis focuses on the study of some properties of Lebesgue and Sobolev spaces, $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$, where p is a real-valued function. These results provide the necessary framework for the study variational problems, elliptic and parabolic equations with non-standard growth conditions depends on $p(x)$, which has been the subject of intense research in recent years.

keywords : Variable exponents, Lebesgue spaces, Sobolev spaces, Orlicz spaces, Orlicz-Musielak spaces, Sobolev embeddings.

Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse, portent sur l'étude de quelques propriétés des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable (généralisés). Ces résultats fournissent le cadre nécessaire à l'étude de problèmes variationnels et d'équations elliptiques paraboliques avec des conditions de croissance non standard depend de $p(x)$, qui ont fait l'objet d'intenses recherches au cours des dernières années.

mots-clés : Exposant variable, espace de Lebesgue, espace de Sobolev, espace d'Orlicz, espace d'Orlicz-Musielak, inejection de Sobolev.

Notation

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes.

$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension N, N un nombre naturel non nul
x	Vecteur de $\mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$
$d\mu$	ou dx Mesure de Lebesgue N-dimensionnelle
$\|E\|$	ou mes (E) Mesure de Lebesgue d'un ensemble E
$\|\Omega\|$	Mesure de l'ensemble Ω
$p.p.$	presque partout
χ_E	Fonction caractéristique de E
Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	La frontière de Ω
$M(\Omega)$	L'ensemble des fonctions $\mu-$mesurables sur $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,
$S(\Omega, \mu)$	L'ensemble des fonctions simples sur $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,
$C_0(\Omega)$	L'ensemble des fonctions de $C(\Omega)$ à support compact dans Ω
ρ	Semi-modulaire ou modulaire
ρ^*	Semi-modulaire (ou modulaire) conjugée
φ	Fonction d'Orlicz-Musielak
$\phi(\Omega, \mu)$	Ensemble des fonction d'Orlicz-Musielak
φ^*	La fonction complémentaire de φ
$\langle ., . \rangle$	Crochet de dualité entre X et son dual
$\int_\Omega f(x)\, d\mu$	Intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure de Lebesgue
supp f	Support de la fonction f
$\nabla f = Df$	$= (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_N})$ Gradient de f
div f	Divergence du vecteur u, $div f = \frac{\partial f}{dx_1} + \frac{\partial f}{dx_2} + ... + \frac{\partial f}{dx_N}$
$f_n \to f$ d	enote que la suite $\{f_n\}$ converge vers f
$f_n \rightharpoonup f$ d	enote que la suite $\{f_n\}$ converge faible vers f
$L^p(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable et $\big(\int_\Omega \|u(x)\|^p\big)^{1/p} dx < +\infty$ tel que $1 \leq p < \infty\}$
$\\|u\\|_p$	$= \big(\int_\Omega \|u(x)\|^p dx\big)^{1/p}$

$L^\infty(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable $, \exists M > 0 \mid \lvert u(x)\rvert \leq M$p.p.$\}$ La norme est notée $\|\cdot\|_{L^\infty}$
q	Conjugué de Hölder de p : $q = \frac{p}{p-1}$
$p^\star$	L'exposant de Sobolev associé à p : $p^\star = \frac{Np}{N-p}$
$C_0^\infty(\Omega)$,	ou $\mathcal{D}(\Omega)$ Espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω, à support compact dans Ω
$\rho_{p(.)}(f)$	$= \int_\Omega \lvert f(x)\rvert^{p(x)}\,dx < \infty,$
$F(f)$	$= \left\{\lambda > 0 : \rho_{p(.)}(f/\lambda) \leq 1\right\}$
$\mathcal{M}$	$= \left\{f \in L^{p(x)}(\Omega) : \rho_p(f) \leq 1\right\},$
$C_{log}(\Omega)$	$= \left\{ p \in C^0(\bar{\Omega}) \middle\lvert \begin{cases} \forall x, y \in \Omega, \lvert x-y\rvert < 1/2, \\ \lvert p(x) - p(y)\rvert \leq \omega(\lvert x-y\rvert) \end{cases} \right\},$
$L^{p(\cdot)}(\Omega)$	Espace de Lebesgue généralisé,
$L^{p(\cdot)}(\Omega)$	$= \left\{f \text{ mesurable sur } \Omega : \rho_{p(.)}(f) < \infty\right\}$
$W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$	Espace de Sobolev généralisé
$W_0^{m,p(\cdot)}(\Omega)$	Adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$
$W^{-m,p'(\cdot)}$	Dual de $W_0^{m,p(\cdot)}(\Omega)$
$X^\star$	Espace dual de X
ρ_φ	Modulaire d'Orlicz-Musielak
$L^\varphi(\Omega,\mu)$	Espace d'Orlicz-Musielak
$P(\Omega)$	L'ensemble des exposants variables définis sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
p^+, p^-	$\sup ess$ et $\inf ess$ de p
$\|\cdot\|_\varphi^\circ$	Norme d'Orlicz
$\|\cdot\|_\varphi$	Norme de Luxemburg
$\|\cdot\|_\varphi^A$	Norme d'Amemiya
$\hookrightarrow$	Injection continue
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	Injection compacte

Introduction Générale

Les équations aux dérivées partielles sont omniprésentes dans les sciences puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDPs (voir [18, 24]).

Comme les espaces L^p généralisent les espaces L^2 des fonctions de carré intégrable, mais aussi les espaces l^p de suites de puissance p-ième sommable . Diverses constructions étendent encore cette définition à l'aide de distributions ou en se contentant d'une intégrabilité locale. Tous ces espaces constituent un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle en permettant la résolution d'équations par approximation avec des solutions non nécessairement dérivables ni même continues (voir [1, 6, 7]).

les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équation aux dérivées partielles. Ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergueï Lvovitch Sobolev .

Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme L^p de la fonction elle-même et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions afin de rendre l'espace complet. Les espaces de Sobolev sont donc des espaces de Banach.

Intuitivement, un espace de Sobolev est un espace de Banach de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois, pour donner sens par exemple à une équation aux dérivées partielles et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction. Les espaces de Sobolev sont un outil essentiel pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions de ces équations appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions continues partiellement dérivables au sens classique (voir [7, 12]).

Par ailleurs, les travaux présentés dans cette thèse concernent quelques propriétés des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable aussi les espaces d'Orlicz (qui est une extension de l'espace de Lebesgue), plus de détails voir par exemple ([2, 3, 5, 9, 11, 14, 15, 17, 21]).

Cette thèse est organisée en trois chapitres.

Le premier chapitre, on expose briévement l'historique des espaces de fonctions à exposant variable et les espaces fonctionnels notamment, espace de Lebesgue à exposant variable (généralisé, qui sont un cas particulier des espaces d'Orlicz-Musielak et une généralisation des espaces de Lebesgue classiques L^p) et leur propriétés.

Dans le deuxième, on expose les espaces fonctionnels notamment, espace de Sobolev, espace de Sobolev à exposant variable (généralisé) et leur propriétés.

Dans le dernier chapitre, on expose une généralisation de l'espace d'Orlicz (qui est une extension de l'espace de Lebesgue) ou l'espace connu comme habituelle espace d'Orlicz-Museilak et leur propriétés.

Pour comprendre le role de l'exposant variable dans les problème a la restauration d'image, la modélisation de fluides électrorhéologiques, thermorhéologiques, élasticité, biologie mathématique et le domaine des processus de filtration en médias complexe nous rappelons certaines travails dans [4, 8, 11, 19, 22, 23].

Chapitre 1

Espaces de Lebesgue à exposant variables

Côté historique [2]

Les espaces de Lebesgue à exposant variables sont apparus dans la littérature pour la première fois déjà dans un article 1931 par Orlicz, quand il a considéré l'espace fonctionnel $L^{\varphi}(\Omega, \mu)$ défini par

$$L^{\varphi}(\Omega, \mu) = \Big\{ f \in M(\Omega, \mu), \text{ tel que } \rho(\lambda f) = \int_{\Omega} \varphi(\lambda |f(x)|)dx < +\infty, \text{ pour un certain } \lambda > 0 \Big\}.$$

où φ est une fonction convexe dite fonction d'Orlicz qui possède des propriétés analogues à celles de la fonction puissance, qui définie les espace de Lebesgue usuels. Par la suite H. Nakano s'est concentré sur l'étude des propriétées principales de la fonction ρ, ce qui l'a amené à définir une classe plus large d'espaces fonctionnels, appelés espaces modulaires. En 1959 W. Orlicz et J. Musielak ont développé la théorie des espaces d'Orlicz-Musielak, qui sont un exemple d'espaces modulaires, défini de la même manière que les espaces d'Orlicz, en considérant une fonction φ définie sur $\Omega \times [0; +\infty[$ à valeurs dans $[0; +\infty]$; telle que, $\varphi(\cdot, t)$ est mesurable, et $\varphi(x, \cdot)$ est une fonction d'Orlicz, $\varphi(x, t)$ est appelée fonction d'Orlicz généralisée ou encore fonction de Orlicz-Musielak.

1.1 Les espaces L^p

Dans cette partie nous présentons un rappel sur les espaces L^p avec $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.1 *[6] soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose*

$$L^p = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \ \textit{mesurable et} \ |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

On note

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_\Omega \|f(x)\|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

la démonstration que $\|.\|_{L^p}$ est une norme sur L^p, voir [6].

Définition 1.2 *[6] On pose*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \ \textit{mesurable et} \ \exists \mathrm{C} \ \textit{telle que} |f(x)| \leq \mathrm{C} p.p.sur\Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L_p} = Inf\{\mathrm{C}; |\mathrm{f}\,(\mathrm{x})| \leq \mathrm{C} \ p.p. \ sur \ \Omega\}.$$

la démonstration que $\|.\|_{L^p}$ est une norme sur L^∞, voir [6].

Notation soit$1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1.1 (Inégalié de Hölder) *[7]*

soient $f \in L^p$ et $g \in L^p$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^1$ et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^p}.$$

preuve Pour la preuve voir [7]

Théorème 1.2 (Fisher-Riesz) *[6]*

L^p est une espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

preuve Pour la preuve voir [6]

Théorème 1.3 *[7]*

$L^p(\Omega)$ est reflexif, pour $1 < p < \infty$.

preuve Pour la preuve voir [7]

Théorème 1.4 *[7]*

$L^p(\Omega)$ est séparable, pour $1 \leq p \leq \infty$.

preuve Pour la preuve voir [7]

1.2 Espace Modulaire

Dans cette partie introductif nous présentons une classe importante d'espaces fonctionnels appelés espaces modulaires, nous nous intéressons aux propriétés et résultats essentiels pour l'étude des espaces de Lebesgue à exposant variables.

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.3 *[15] Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. La fonction $\rho : X \longrightarrow [0,\infty]$ est dite semimodulaire dans X, si les propriétés suivantes sont satisfaisantes :*

1. $\rho(0) = 0$.
2. $\rho(\lambda x) = \rho(x), \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ *, avec* $|\lambda| = 1$.
3. ρ *est continue á gauche.*
4. $\rho(\lambda x) = 0, \forall \lambda > 0$ *implique* $x = 0$.

   le semimodulaire ρ est dit continu si ,
5. *l'application* $\lambda \longrightarrow \rho(\lambda x)$ *est continue dans* $(0,\infty]$ *, pour* $x \in X$

Remarque 1.1

1. *Le semimodulaire est toujours convexe.*
2. *Le semimodulaire est dit modulaire si,* $\rho(x) = 0$ *implique* $x = 0$ *.*

Exemple 1.1 *Si $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors*

$$\rho_p(f) = \int_\Omega |f(x)|^p \, dx,$$

definer un modulaire continu sur l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω.

Définition 1.4 *[15] Si ρ est un semimodulaire ou modulaire dans X, alors*

$$X_\rho = \left\{ x \in X; \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\},$$

est appelé espace semimodulaire ou espace modulaire (respectivement).

Théorème 1.5 *[11] Soit ρ une semi-modulaire sur X alors X_ρ, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

preuve Pour la preuve voir [11]

Remarque 1.2 *[15] Puisque $\rho(\lambda x) = \rho(|\lambda| x)$ require à $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} \rho(\lambda x)$, avec $\lambda \in \lambda(0, \infty]$, on peut définir X_ρ par*

$$X_\rho = \{x \in X, \rho(\lambda x) < \infty; \ \textit{pour} \ \lambda > 0\}.$$

Théorème 1.6 *[15] Soit ρ un semimodulaire dans X, alors X_ρ est un espace vectoriel normè sur le corps $\mathbb{K}$, oú la norme définie par*

$$\|x\|_\rho = inf\left\{\lambda > 0, \rho\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \leq 1\right\}.$$

preuve Pour la preuve voir [11]

Proposition 1.1 (Continuité d'une modulaire) *[11] La modulaire ρ est dite*

1. *continue à droite si $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 1} \rho(\lambda x) = \rho(x)$ lim pour tout $x \in X_\rho$,*
2. *continue à gauche si $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 1} \rho(\lambda x) = \rho(x)$ lim pour tout $x \in X_\rho$,*
3. *continue si elle est continue à droite et à gauche.*

1.2.2 Propriétés de la modulaire et norme

Lemme 1.1 *[11]*

1. *Soit ρ un semimodulaire sur X, alors $\|x\|_\rho \leq 1$ et $\rho(x) \leq 1$ sont équivalent.*
2. *si ρ est continu, alors aussi $\|x\|_\rho < 1$ et $\rho(x) < 1$ sont équivalents, comme $\|x\|_\rho = 1$ et $\rho(x) = 1$.*
3. *Soient ρ un semimodulaire sur X et $x_k \in X_\rho$, alors $x_k \longrightarrow 0$ pour $k \longrightarrow \infty$ si et seulement si $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \rho(\lambda x_k) = 0$ pour tout $\lambda > 0$.*

preuve Pour la preuve voir [11]

Corollaire 1.1 *[11] Soit ρ un semimodulaire sur X et $x \in X_\rho$, alors*

- *Si $\|x\|_\rho \leq 1$, alors $\rho(x) \leq \|x\|_\rho$.*
- *Si $\|x\|_\rho > 1$, alors $\|x\|_\rho < \rho(x)$.*
- *$\|x\|_\rho \leq \rho(x) + 1$.*

preuve Pour la preuve voir [11]

1.2.3 Convergence dans les espaces modulaires

En plus, de la convergence au sens de la norme, on a la convergence modulaire définie comme suit.

Définition 1.5 *[2] Une suite $(x_n) \in X_p$ sera dite ρ-convergente ou modulaire convergente vers x (on ecrit $x_n \longrightarrow x$) s'il existe un $\lambda > 0$ tel que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \rho(\lambda(x_n - x)) = 0,$$

Le résultat suivant caractérise la convergence en norme d'une suite de fonctions en terme de convergence modulaire. On se réstreint au cas de la convergence vers zéro.

Lemme 1.2 *[11] Soit ρ une semi-modulaire sur X et $x_n \subset X_\rho$ alors,*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n\|_\rho = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \rho(\lambda x_n) = 0 \ \textit{pour tout} \ \lambda > 0.$$

preuve Pour la preuve voir [11].

Proposition 1.2 (de la convergence modulaire) *[2]*

1. *Si $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$ dans X_ρ alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(ou\mathbb{C})$ $\alpha x_n + \beta y_n \longrightarrow \alpha x + \beta y$.*
2. *La convergence en norme entraîne toujours la convergence modulaire. La réciproque n'est pas toujours vrai .*

preuve Pour la preuve voir [2].

1.3 Espaces de Lebesgue à exposant variables

Nous rappelons dans cette partie quelques définitions et propriétés des espaces de Lebesgue à exposant variables (voir par exemple [3], [9], [11], [14], [16], [17] pour les démonstrations et plus de détails et [20, 21] pour la théorie générale des espaces d'Orlicz).

1.4 Définitions et propriétés

Soient

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ un domaine ouvert borné,} \\ \partial\Omega \quad \text{lipschitzienne continue bornée,} \end{cases} \tag{1.1}$$

et

$$p : \Omega \longmapsto (1, \infty) \quad \text{ une fonction mesurable.} \tag{1.2}$$

Sur l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, on définit le fonctionnel

$$\rho_{p(.)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty,$$

et

$$L^{p(.)}(\Omega) = \left\{ f \quad \text{mesurable sur} \quad \Omega : \rho_{p(.)}(f) < \infty \right\},$$

qui est un espace linéaire (espace vectoriel). Il est facile de vérifier que

1. $\rho_{p(.)}(f) \geq 0$ pour chaque f,
2. $\rho_{p(.)}(f) = 0$ si seulement si $f = 0$,
3. $\rho_{p(.)}(f) = \rho_{p(.)}(-f)$ pour chaque f,
4. $\rho_{p(.)}(f)$ est convexe,
5. Si $|f(x)| \geq |g(x)|$ p.p. $x \in \Omega$ et si $\rho_{p(.)}(f) < \infty$,alors $\rho_{p(.)}(f) \geq \rho_{p(.)}(g)$ l'inégalité est stricte si $|f| \not\equiv |g|$,
6. Si $0 < \rho_{p(.)}(f) < \infty$, alors la fonction $\lambda \longmapsto \rho_{p(.)}(f/\lambda)$ est continue et décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty)$.

Remarque 1.3 *[3] Chaque fonction satisfait les propriétés (1) - (4) est appelée modulaire convexe.*

La propriété (5) est évidente.

Pour prouver la propriété (6), on remarque que p.p. $x \in \Omega$, $|f(x)/\lambda|^{p(x)}$ est une fonction monotone décroissante par rapport à $\lambda > 0$, et $\rho_{p(.)}(f/\lambda)$ est monotone grâce à (5).

Soit $0 < \rho_{p(.)}(f/\lambda) < \infty$ et $\lambda_k \searrow \lambda$. Alors $|f(x)/\lambda_k| \nearrow |f(x)/\lambda|$, le théoreme de convergence monotone donne la continuité de $\rho_{p(.)}(f/\lambda)$.

Maintenant, nous présentons le fonctionnel

$$\|f\|_{p(.),\Omega} \equiv \|f\|_{L^{p(.)}(\Omega)} = inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(.)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}. \tag{1.3}$$

Proposition 1.3 *[3]*

Si $0 < \|f\|_{p(.),\Omega} < \infty$*, Alors* $\rho_{p(.)}(f/ \|f\|_{p(.),\Omega}) \leq 1$.

Preuve —

On prend $\{\gamma_k\}$ telle que $\gamma_k \searrow \|f\|_{p(.),\Omega}$.

En utilisant la définition de $\|f\|_{p(.),\Omega}$, propriété (6) et la lemme de Fatou, on deduit

$$\rho_{p(.)}(f/ \|f\|_{p(.),\Omega}) \leq \lim_{k \longrightarrow \infty} inf \rho_{p(.)}(f/\gamma_k) \leq 1.$$

■

Corollaire 1.2 *[3]*

Si $0 < \|f\|_{p(.),\Omega} \leq 1$*, alors* $\rho_{p(.)}(f) \leq 1$.

Preuve —

$$\rho_{p(.)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}\, dx \leq \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\|f\|^{p(x)}_{p(.),\Omega}} dx = \rho_{p(.)}(f/ \|f\|_{p(.),\Omega}) \leq 1.$$

■

Proposition 1.4 *[3] (La norme de Luxembourg de $L^{p(.)}(\Omega)$)*

Le fonctionnel

$$\|.\|_{p(.),\Omega} : L^{p(.)}(\Omega) \longmapsto [0, \infty),$$

définit une norme sur l'espace $L^{p(.)}(\Omega)$.

Preuve — On veut vèrifier que

1. $\|f\|_{p(.),\Omega} \geq 0$ pour chaque $f \in L^{p(x)}(\Omega)$,
2. $\|f\|_{p(.),\Omega} = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p. $x \in \Omega$,
3. $\forall \mu \in \mathbb{R}, f \in L^{p(x)}(\Omega)\ \|\mu f\|_{p(.),\Omega} = |\mu|\ \|f\|_{p(.),\Omega}$,
4. $\forall f, g \in L^{p(x)}(\Omega) : \|f + g\|_{p(.),\Omega} \leq \|f\|_{p(.),\Omega} + \|g\|_{p(.),\Omega}$.

1. La première propriètè est èvidente.
2. Notons

$$\digamma(f) = \Big\{\lambda > 0 : \rho_{p(.)}(f/\lambda) \leq 1\Big\}.$$

Il est clair que pour $f = 0$, on a $\digamma(0) = (0, \infty)$.

Si $\|f\|_{p(.),\Omega} \neq 0$, d'après la propriètè (6) et Proposition 1.3, on deduit

$$\digamma(f) = [\lambda, \infty), \text{ avec } \lambda = \|f\|_{p(.),\Omega}$$

De (1.3), on a

$$\|f\|_{p(.),\Omega} = inf \digamma(f),$$

c'est pour ça $f = 0$, on $\|f\|_{p(.),\Omega} = inf \digamma(0) = 0$.

Supposons, par contradiction, qu'il existe $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ telle que $\|f\|_{p(.),\Omega} = 0$, mais $f \neq 0$ sur un ensemble de mesure non nulle dans Ω. Cela signifie que

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\, dx \geq \epsilon > 0.$$

pour certains $\epsilon > 0$.

Puisque $inf F(f) = 0$, il existe une suite $\{\lambda_k\} \subset F(f) \cap (0,1)$ tels que $\lambda_k \longrightarrow 0$ et $\rho_{p(.)}(f/\lambda_k) \leq 1$ ce qui est impossible, car

$$1 \geq \rho_{p(.)}(f/\lambda_k) = \int_\Omega |f/\lambda_k|^{p(x)}\, dx \geq \frac{1}{\lambda_k}\int_\Omega |f|^{p(x)}\, dx \geq \frac{\epsilon}{\lambda_k} \longrightarrow \infty,$$

comme $k \longrightarrow \infty$.

3. Pour chaque constante $\mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\|\mu f\|_{p(.),\Omega} &= inf\,\{\lambda > 0 : \rho_p(\mu f/\lambda)\} \\
&= inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega |\mu|^{p(x)} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\} \\
&= inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\lambda/|\mu|}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\} \\
&= inf\left\{|\mu|\,\delta > 0 : \int_\Omega \left|\frac{f(x)}{\delta}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\} \\
&= |\mu|\, inf\,\{\delta > 0 : \rho_p(\mu f/\delta) \leq 1\} \\
&= |\mu|\, \|f\|_{p(.),\Omega.}\,.
\end{aligned}$$

4. Soit l'ensemble suivant

$$\mathcal{M} = \left\{f \in L^{p(x)}(\Omega) : \rho_{p(\cdot)}(f) \leq 1\right\},$$

On remarque que $F(f) = \{\lambda > 0 : f/\lambda \in \mathcal{M}\}$. Puisque $\rho_{p(\cdot)}(.)$ est convexe, l'ensemble $\mathcal{M}$ est aussi convexe.

Pour chaque $f, g \in L^{p(x)}(\Omega)$ et un arbitraire $\epsilon > 0$

$$\frac{f}{\epsilon + \|f\|_{p(.),\Omega}}, \frac{g}{\epsilon + \|g\|_{p(.),\Omega}} \in \mathcal{M},$$

d'où

$$\frac{\theta f}{\epsilon + \|f\|_{p(.),\Omega}}, \frac{(1-\theta) g}{\epsilon + \|g\|_{p(.),\Omega}} \in \mathcal{M}, \quad \forall \theta \in (0,1),$$

grâce à la convexite de $\mathcal{M}$.

Choisissons θ de manière spéciale :

$$\frac{\theta}{\epsilon + \|f\|_{p(.),\Omega}} = \frac{1-\theta}{\epsilon + \|g\|_{p(.),\Omega}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta f}{\epsilon + \|f\|_{p(.),\Omega}} + \frac{(1-\theta)g}{\epsilon + \|g\|_{p(.),\Omega}} = \frac{f+g}{\|f\|_{p(.),\Omega} + \|g\|_{p(.),\Omega} + 2\epsilon} \in \mathcal{M}.$$

qui donne , pour chaque $\epsilon > 0$

$$\|f\|_{p(.),\Omega} + \|g\|_{p(.),\Omega} + 2\epsilon \in F(f+g).$$

d'où

$$\|f+g\|_{p(.),\Omega} \leq \|f\|_{p(.),\Omega} + \|g\|_{p(.),\Omega} + 2\epsilon.$$

Puisque ϵ est arbitraire, l'inégalité (4) est vraie.

■

Remarque 1.4 *[3]*

1. *Il découle de la Proposition* (1.4) *que* $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|.\|_{p(.),\Omega}\right)$ *est un espace vectoriel normé.*
2. *Si* $p(\cdot) = p$, *alors* $\left(L^{p}(\Omega), \|.\|_{p}\right)$ *c'est l'espace de Lebesgue classique (Banach), avec* $\|.\|_{p} = \rho_{p}^{\frac{1}{p}}(f)$,
3. *L'espace* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *est un cas particulier des espaces d'Orlicz-Musielak* $L^{\varphi}(\Omega)$ *qui est constitué de toutes les fonctions* f *sur* Ω *tel que*

$$\int_{\Omega} \varphi(x, \lambda f(x))dx < \infty \text{ pour certains } \lambda > 0,$$

où $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto [0, \infty)$ *est une fonction mesurable positive semi-continue inférieurement et convexe, même pour p.p* $x \in \Omega$, *de plus satisfait la condition* $\lim_{f \longrightarrow 0} \varphi(x, f) = \varphi(x, 0) = 0$
Pour les espaces Lebesgue-Orlicz $L^{p(\cdot)}(\Omega) = L^{\varphi}(\Omega)$ *avec* $\varphi(x, f) = |f|^{p(x)}$.
(pour plus de détails, voir le chapitre 3 sous dessous)

Dans ce qui suit nous utilisons la notation suivante

$$p^{-} = ess \inf_{x \in \Omega} p(x), \quad p^{+} = ess \sup_{x \in \Omega} p(x).$$

Proposition 1.5 *[3]*

Si $p^+ < \infty$, alors pour chaque f avec $0 < \|f\|_{p(.),\Omega} < \infty$, on a

$$\rho_{p(.)}(f/\|f\|_{p(.),\Omega}) = 1.$$

Preuve — En vertu de la Proposition 1.3, il suffit de vérifier que l'inégalité $\rho_{p(.)}(f/\|f\|_{p(.),\Omega}) < 1$ est impossible. Pour chaque $0 < \lambda \leq \|f\|_{p(.),\Omega}$

$$\begin{aligned}
\rho_{p(.)}(f/\lambda) &= \int_\Omega \frac{|f|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}} dx \\
&= \int_\Omega \left(\frac{|f|}{\|f\|_{p(.),\Omega}} \right)^{p(x)} \left(\frac{\|f\|_{p(.),\Omega}}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \\
&\leq \left(\frac{\|f\|_{p(.),\Omega}}{\lambda} \right)^{p^+} \rho_{p(.)}(f/\|f\|_{p(.),\Omega}).
\end{aligned}$$

Si $\rho_{p(.)}(f/\|f\|_{p(.),\Omega}) < 1$, on peut choisir $\lambda < \|f\|_{p(.),\Omega}$ tel que $\rho_{p(.)}(f/\lambda) \leq 1$, ce qui contredit avec la définition de la norme $\|f\|_{p(.),\Omega}$. ■

Corollaire 1.3 *[3]*

Pour $p^+ < \infty$, les propriétés (2) et (4) de $\rho_{p(.)}(f)$ et la proposition 1.5 donnent

$$Si \quad \|f\|_{p(.),\Omega} \leq 1, \quad alors \quad \rho_{p(.)}(f) \leq \|f\|_{p(.)}.$$

Supposons maintenant que

$$\forall p.p. x \in \Omega \quad p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty). \tag{1.4}$$

La relation entre la norme de $L^{p(.)}(\Omega)$ et le modulaire $\rho_{p(.)}(.)$ est donnée par le lemme suivant.

Lemme 1.3 *[3]*

Si $p(\cdot)$ vérifie les conditions (1.2) et (1.4) .Alors pour chaque $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, on a

$$min\left\{\|f\|^{p^-}_{p(.),\Omega}, \|f\|^{p^+}_{p(.),\Omega}\right\} \leq \rho_{p(.)}(f) \leq max\left\{\|f\|^{p^-}_{p(.),\Omega}, \|f\|^{p^+}_{p(.),\Omega}\right\}. \tag{1.5}$$

Preuve — Tout d'abord, on suppose que $\mu = \|f\|_{p(.),\Omega} \neq 0$ et considérons la fonction la fonction $h(x) = f(x)/\mu$. D'après la proposition 1.5, on a $h \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ avec $\|h\|_{p(.),\Omega} = 1$. D'autre part,

$$1 = \|h\|_{p(.),\Omega} \leq \rho_{p(.)}(h) \leq \begin{cases} \mu^{-p^+}\rho_{p(.)}(f) & Si \quad \mu \leq 1, \\ \mu^{-p^-}\rho_{p(.)}(f) & Si \quad \mu > 1, \end{cases}$$

d'où $\rho_{p(.)}(f) \geq min\left\{\mu^{p^+}, \mu^{p^-}\right\}$.

De plus,

$$\rho_{p(.)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\,dx = \int_\Omega \mu^{p(x)}\,|h(x)|^{p(x)}\,dx \leq \begin{cases} \mu^{p^-} & Si \quad \mu \leq 1, \\ \mu^{p^+} & Si \quad \mu > 1, \end{cases}$$

qui donne $\rho_{p(.)}(f) \leq max\left\{\mu^{p^-}, \mu^{p^+}\right\}$. Si $\|f\|_{p(.),\Omega} = 0$, alors $f = 0$ p.p. $\in \Omega$ et $\rho_{p(.)}(f) = 0$ par la propriété (2) du modulaire. ■

On peut représenté le lemme1.3 sous comme suit :

Corollaire 1.4 *[3]*

Si $p(\cdot)$ *vérifie les conditions* (1.2) *et* (1.4) *.Alors pour chaque* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, *on a*

$$min\left\{\rho_{p(.)}^{\frac{1}{p^-}}(f), \rho_{p(.)}^{\frac{1}{p^+}}(f)\right\} \leq \|f\|_{p(.),\Omega} \leq max\left\{\rho_{p(.)}^{\frac{1}{p^-}}(f), \rho_{p(.)}^{\frac{1}{p^+}}(f)\right\}. \tag{1.6}$$

Remarque 1.5

Si l'exposant p *est constant, alors* $p^+ = p^-$ *et* (1.5), (1.6) *implique que* $\rho_p(f) = \|f\|_{p,\Omega}^p$.

Corollaire 1.5 *[3]*

Il résulte de (1.5) *et* (1.6) *que, si* $p(\cdot)$ *vérifie les conditions* (1.2) *et* (1.4). *Alors pour chaque* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, *on a*

1. $\|f\|_{p(.),\Omega} = 1 \Leftrightarrow \rho_{p(.)}(f) = 1$,

2. $\|f\|_{p(.),\Omega} < 1 \Leftrightarrow \rho_{p(.)}(f) < 1$,

1. $\|f\|_{p(.),\Omega} > 1 \Leftrightarrow \rho_{p(.)}(f) > 1$.

Lemme 1.4 *[3]*

Soit $\{f_n\}$ *est une suite des fonctions* $f_n \in L^{p(.)}(\Omega)$ *et* $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ *avec* $p(x)$ *vérifie les conditions* (1.2) *et* (1.4). *Alors*

$$\|f_n - f\|_{p(.),\Omega} \longrightarrow 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \rho_{p(.)}(f_n - f) \longrightarrow 0, \ \text{comme } n \longrightarrow \infty.$$

Preuve — La preuve est facile grâce au lemme 1.3. ■

Lemme 1.5 *[3]*

Soit les fonctions $p(x)$ *et* $q(x)$ *vérifient les conditions* (1.2) *et* (1.4). *Si* $p(x) \geq q(x)$ *p.p. dans* Ω, *alors* $L^{p(.)}(\Omega) \subset L^{q(.)}(\Omega)$.

Preuve — En vertu du Lemme 1.3, il suffit de vérifier que la condition $\rho_{p(.)}(u) < \infty$ donne $\rho_{q(.)}(u) < \infty$. En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \rho_{q(x)}(u) &\leq \int_\Omega \left(\frac{q(x)}{p(x)} |u|^{p(x)} + \frac{p(x) - q(x)}{p(x)} \right) dx \\ &\leq \int_\Omega \left(1 + |u|^{p(x)} \right) dx = |\Omega| + \rho_{p(.)}(u). \end{aligned} \tag{1.7}$$

■

Lemme 1.6 (Inégalié de Hölder) *[3]*

Soit $p(\cdot)$ *vérifie les conditions* (1.2) *et* (1.4).

Pour chaque $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ *avec* $p'(x) = \dfrac{p(x)}{p(x) - 1}$, *l'inégalité suivante est vraie :*

$$\int_\Omega |fg| \, dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-} \right) \|f\|_{p(.),\Omega} \|g\|_{p'(.),\Omega} \leq 2 \|f\|_{p(.),\Omega} \|g\|_{p'(.),\Omega} . \tag{1.8}$$

Preuve — Soit $\|f\|_{p(.),\Omega} = \lambda$ et $\|g\|_{p'(.),\Omega} = \mu$ et supposons que $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$. d'apres Inégalité de Young,pour p.p. $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)| &= \lambda\mu \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right| \left| \frac{g(x)}{\mu} \right| \\ &\leq \lambda\mu \left(\frac{1}{p(x)} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} \left| \frac{g(x)}{\mu} \right|^{p'(x)} \right) \\ &\leq \lambda\mu \left(\frac{1}{p^-} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} + \frac{1}{(p')^-} \left| \frac{g(x)}{\mu} \right|^{p'(x)} \right). \end{aligned} \tag{1.9}$$

d'apres Proposition 1.5

$$\rho_{p(.)}(f/\lambda) = 1, \rho_{p(.)}(g/\mu) = 1. \tag{1.10}$$

En intégrant (1.9) sur Ω et appliquer 1.10 on obtient,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)g(x)| &\leq \lambda\mu\left(\frac{1}{p^-}\rho_{p(.)}(f/\lambda) + \frac{1}{(p')^-}\rho_{p(.)}(g/\mu)\right) \\ &= \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')^-}\right)\|f\|_{p(.),\Omega}\|g\|_{p'(.),\Omega}.\end{aligned}$$

Soit $\lambda\mu = 0$.supposons que $\lambda = 0$. Alors $f = 0$ p.p. dans Ω,

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx = 0.$$

■

1.4.1 Normes équivalentes sur $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, on définit

$$|f|_{p(.),\Omega} = \sup_{\rho_{p'(.)}(g)\leq 1}\int_\Omega f(x)g(x)dx, p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}. \tag{1.11}$$

Proposition 1.6 *[3][La norme d'Orlicz de*$L^{p(\cdot)}(\Omega)$*]*

$$|.|_{p(.),\Omega} : L^{p(\cdot)}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R},$$

définit une norme sur $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Preuve — Pour la preuve voir [3]. ■

Proposition 1.7 *Si* $|f|_{p(.),\Omega} < \infty$ *et* $\rho_{p'(.)}(g) < \infty$*, Alors*

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \leq \begin{cases} |f|_{p(.),\Omega} & Si \quad \rho_{p'(.)}(g) \leq 1, \\ |f|_{p(.),\Omega}\,\rho_{p'(.)}(g) & sinon.\end{cases}$$

Proposition 1.8 *[3] Soit* $p(x)$ *vérifie* (1.2) *et* (1.4)*. Si* $\rho_{p(.)}(f)\infty$ *et* $|f|_{p(.),\Omega} \leq 1$*, alors* $\rho_{p(.)}(f) \leq 1$.

Preuve — Pour la preuve voir [3]. ■

Proposition 1.9 *[3] Soit* $p(x)$ *vérifie* (1.2) *et* (1.4)*.Si* $|f|_{p(.),\Omega} \leq 1$, *alors* $\rho_{p(.),\Omega}(f) \leq |f|_{p(.),\Omega}$.

Preuve — *Supposons d'abord que* $\rho_p(f) < \infty$. *Soit*

$$g(x) = |f(x)|^{p(x)-1}\, signef(x), x \in \Omega.$$

Alors

$$\rho_{p(.)}(f) = \int_\Omega |f|^{p(x)}\, dx = \int_\Omega f(x)g(x)dx \leq |f|_{p(.),\Omega}\,.$$

Pour vérifie que èse $\rho_{p(.)}(f) < \infty$, *on considére la suite de troncatures*

$$f_k(x) = min\left\{k, |f(x)|\right\}\chi_{G_k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

alors que $\left\{G_{\{k\}}\right\}$ *est une suite d'ensembles* $G_k \subset G_{k+1} \subset \Omega$ *tel que* $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ *et* χ_{G_k} *est la fonction caractéristique de* G_k, *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ $\rho_p(f_k) < \infty$ *et*

$$|f_k|_{p(.),\Omega} \leq |f|_{p(.),\Omega} \leq 1.$$

Grâce au théorème de convergence monotone de Lebesgue. ■

Théorème 1.7 *[3][Les équivalence enter les normes de Luxembourg et d'Orlicz] . Soit* $p(.)$ *vérifie* (1.2) *et* (1.4)*.Alors*

$$L^{p(.)}(\Omega) = \left\{f : |f|_{p(.),\Omega} < \infty\right\},$$

et il existe des constantes C_1, C_2 *telles que*

$$C_1 \|f\|_{p(.),\Omega} \leq |f|_{p(.),\Omega} \leq C_2 \|f\|_{p(.),\Omega} \quad \forall f \in L^{p(.)}(\Omega).$$

Preuve — *Soit* $f \in L^{p(.)}(\Omega)$. *De le corollaire 1.5, l'inégalité* $\rho_{p'(.)}(g) \leq 1$ *implique* $\|g\|_{p'(.),\Omega} \leq 1$, *on utilise l'inégalité de Hölder*

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')'}\right)\|f\|_{p(.),\Omega}\|g\|_{p'(.),\Omega} \leq 2\|f\|_{p(.),\Omega}\,.$$

■

Supposons maintenant que $0 < |f|_{p(.),\Omega} < \infty$. *Comme*

$$\left|\frac{f}{|f|_{p(.),\Omega}}\right|_{p(.),\Omega} = \sup_{\rho_{p'(.)}(g)\leq 1}\int_\Omega \frac{f(x)g(x)}{|f|_{p(.),\Omega}}dx = \frac{|f|_{p(.),\Omega}}{|f|_{p(.),\Omega}} = 1,$$

Grâce à la proposition 1.9 on a $\rho_p(f/\,|f|_{p(.),\Omega}) \leq 1$. *Par corollaire 1.5*

$$\left\|f/\,|f|_{p(.),\Omega}\right\|_{p(.),\Omega} \leq 1,$$

d'où $\|f\|_{p(.),\Omega} \leq |f|_{p(.),\Omega}$ *Grâce à la définition de la norme de Luxembourg.*

Lemme 1.7 *[3] Si* $p(x)$ *vérifie 1.2 et 1.4 , l'espace* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *est complet.*

Preuve — *Soit* $\{f_k\}$ *est une suite de Cauchy et la fonction* $f_k \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, *pour chaque* $\epsilon > 0$ *il existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *telle que*

$$\int_\Omega |f_m(x) - f_n(x)|\,|g(x)|\,dx < \epsilon \quad \forall m, n \geq k_0 \tag{1.12}$$

et chaque g *avec* $\rho_{p'(.)}(g) \leq 1$. *Nous décomposons* Ω *en sous-ensembles disjoints par paires* G_k *avec* $|G_k| < \infty$ *et définir les fonctions*

$$g_k = \frac{\chi G_k}{1 + |G_k|}, \quad k \in \mathbb{N},$$

Pour qui

$$\rho_{p'(.)(g_k)} = \int_\Omega \frac{\chi G_k}{(1 + |G_k|)^{p(x)}}dx \leq \frac{|G_k|}{1 + |G_k|} \leq 1. \tag{1.13}$$

En remplaçant $g = g_k$ *dans* (1.12) *on obtient l'inégalité*

$$\int_{G_k} \frac{|f_m - f_n|}{1 + |G_k|}dx \leq \int_\Omega |f_m(x) - f_n(x)|\,|g_k(x)|\,dx < \epsilon,$$

d'oú

$$\int_{G_k} |f_m(x) - f_n(x)|\,dx < \epsilon\,(1 + |G_k|)\,.$$

Il s'ensuit que $\{f_k\}$ *est une suite de Cauchy dans* $L^1(G_k)$ *pour chaque* k. *Extrayons* $\{f_k\}$ *sous-suit* $\left\{f_k^{(j)}\right\}$ *et trouver des fonctions* $f^{(j)} \in L^1(G_k)$ *tel que*

$$\begin{aligned}
\left\{f_k^{(1)}\right\} \subset \{f_k\} \quad &: \quad f_k^{(1)} \longrightarrow f^{(1)} \ p.p \ dans \ G_1, \quad f^{(1)} \in L^1(G_1),\\
\left\{f_k^{(2)}\right\} \subset \left\{f_k^{(1)}\right\} \quad &: \quad f_k^{(2)} \longrightarrow f^{(2)} \ p.p \ dans \ G_2, \quad f^{(2)} \in L^1(G_2),\\
\left\{f_k^{(m)}\right\} \subset \left\{f_k^{(m-1)}\right\} \quad &: \quad f_k^{(m)} \longrightarrow f^{(m)} \ p.p \ dans \ G_m, \quad f^{(m)} \in L^1(G_m),
\end{aligned}$$

Considérons la suite diagonale $\left\{f_m^{(m)}\right\}$. *Comme il s'agit d'une* $\left\{f_m^{(j)}\right\}$, *alors*

$$f_m^{(m)} \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x)\chi_{G_k} := f(x) \ p.p.x \in \Omega.$$

d'apres (1.12) *on a*

$$\int_\Omega \left|f_m^{(m)} - f_n\right| |g(x)|\, dx \leq \epsilon$$

pour chaque $m, n \geq n_0$ *et* g *tel que* $\rho_{p'(.)}(g) \leq 1$. *En appliquant le lemme de Fatou, nous passons à la limite et concluons que*

$$\int_\Omega |f_n(x) - f(x)| |g(x)|\, dx \leq \sup_{m\in\mathbb{N}, m\geq n_0} \int_\Omega \left|f_m^{(m)}(x) - f_n(x)\right| |g(x)|\, dx \leq \epsilon$$

pour chaque $n \geq n_0$ *et chaque* g *telle que* $\rho_{p'(.)} \leq 1$. *Donc,* $|f - f_n|_p \leq \epsilon$. ■

Corollaire 1.6 *[3] Si les conditions 1.2 et 1.4 sont remplies,* $L^{p(.)}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

Lemme 1.8 *[3] Si* $p(x)$ *vérifie* (1.2) *et* (1.4), *alors* $L^{p(.)}(\Omega)$ *est réflexif et séparable.*

Preuve — *Par le lemme 1.7 l'espace* $L^{p(.)}(\Omega)$ *est complet et sous-espace fermé de* $L^{p^-}(\Omega)$. *Pour* $p^- > 1$ *l'espace* $L^{p^-}(\Omega)$ *est un espace de Banach réflexif et séparable. Il s'ensuit que* $L^{p^-}(\Omega)$ *est aussi réflexif et séparable.*

Soit $p(x)$ *vérifie* (1.2) *et* (1.4). *De le corollaire 1.5 on a,* $\rho_{p(.)}(f) \leq 1$ *si et seulement si* $\|f\|_p \leq 1$.*Il suit du Théorème 1.7 que pour chaque* $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ *l'application* $L^{p(x)}(\Omega)$ *Défini par*

$$G(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \quad f \in L^{p(x)}(\Omega),$$

est une fonction continue linéaire sur $L^{p(x)}(\Omega)$ avec la norme vérifie les inégalités suivantes

$$C_1 \|g\|_{p'} \leq \|G\| \leq C_2 \|g\|_{p'} .$$

■

Lemme 1.9 *[3] Les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *$p \in L^{\infty}(\Omega)$,*
2. *pour chaque fonction linéaire continue G sur $L^{p(x)}(\Omega)$ il existe une fonction unique $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ tel que (1.8) Prises.*

Corollaire 1.7 *Le dual de l'espaced $L^{p(x)}(\Omega)$ est $L^{p'(x)}(\Omega)$ si et seulement si $p \in L^{\infty}(\Omega)$.*

1.4.2 Convergence dans les espaces de Lebesgue à exposants variables

En plus des résultats de convergence obtenus dans le chapitre précédent, nous donnons d'autres résultats de convergence dans le cas oú Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.8 *Soit Ω et $p(.) \in P(\Omega)$, supposer $p^+ < \infty$.alors pour $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et la suite $\{f_k\} \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ les éléments suivants sont équivalents.*

1. *$f_k \longrightarrow f$ en norme,*
2. *$f_k \longrightarrow f$ en modulaire,*
3. *$f_k \longrightarrow f$ en mesure et pour quelque $\gamma > 0, \rho(\gamma f_k) \longrightarrow \rho(\gamma f)$.*

Théorème 1.9 (de convergence monotone) *soient $p \in P(\Omega)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables telle que*
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et la $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = f(x)$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|f_n\|_{p(.)(\Omega)} = \|f\|_{p(.)}$.

Lemme 1.10 (Fatou) *soient $p \in P(\Omega)$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables telle que $(f_n)_n \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n = f \ \mu - p.p$, si $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|f_n\|_{p(.)} < \infty$, alors $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $\|f\|_{p(.)} \leq \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|f_n\|_{p(.)}$.*

Théorème 1.10 *$L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est une espace de Banach pour tout $p \in P(\Omega)$.*

1.5 Théorèmes d'injection

Nous appelons constante de l'injection $L^{p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(.)}(\Omega)$,la plus petite constante k telle que $\|f\|_{q(.)} \leq \|f\|_{p(.)}$.

Lemme 1.11 *[3]*

Soit les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ vérifient les conditions (1.2) et (1.4). Si $p(x) \geq q(x)$ p.p. dans Ω, alors $L^{p(.)}(\Omega) \subset L^{q(.)}(\Omega)$.

Lemme 1.12 *[3] Soit Ω vérifie la condition (1.1), $p(x)$ vérifie la condition (1.2) et (1.4) et $q = const \geq 1$. Si $q \leq p(x)$ p.p. dans Ω, alors*

$$\|f\|_{q,\Omega} \leq C\|f\|_{p(.),\Omega} \quad \textit{avec la constante} \quad C = (1 + |\Omega|)^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve — Pour la preuve voir [3]. ■

Lemme 1.13 *[3] Soit les exposants $p(x), q(x)$ vérifient les conditions 1.2 et 1.4 et $p(x) \geq q(x)$ p.p. dans Ω. Alors l'injection $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ est continue.*

La norme de l'opérateur l'inclusion ne dépend que de $|\Omega|$, $p^{\pm}$ et $q^{\pm}$

$$\|f\|_{q(.),\Omega} \leq C\|f\|_{p(.),\Omega}, \quad C = C(|\Omega|, p^{\pm}, q^{\pm}).$$

Théorème 1.11 *[11] Soient $p, q \in P(\Omega)$, on dèfinit l'exposant $r \in P(\Omega)$ par*

$$\frac{1}{r(y)} = max\left(\frac{1}{q(y)} - \frac{1}{p(y)}, 0\right) \textit{pour tout } y \in \Omega.$$

1. *Si $q \leq p$ μ-p.p et $1 \in L^r(\Omega)$,alors*

$$L^{p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(.)}(\Omega) \textit{ avec la constante de l'injection} \quad k \leq 2\|1\|_{r(.)}.$$

Avec 1 dèsigne une fonction $g(y) = 1 \forall y \in \Omega$.

2. *Si μ est sans atomes et $L^{p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(.)}(\Omega)$ alors*

$$q \leq p \ \mu - p.p.$$

Proposition 1.10 *[11] Soit $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$.Alors $\forall\ t \geq 0$ on a*

$$\varphi_q(t) \leq \varphi_p(t) + \varphi_r(t), \tag{1.14}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_p(\max\{t-1,0\}) \leq \varphi_q(t), \\ \varphi_r(\min\{t,1\}) \leq \varphi_q(t). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Corollaire 1.8 *[11] Soient $p, q \in P(\Omega)$, on suppose que μ sans atomes et $\mu(\Omega) < \infty$ alors,*

$$L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega) \text{ avec la constante de l'injection } k \leq 2(1 + \mu(\Omega)),$$

si et seulement si $p(y) \leq q(y)\mu - p.p$ pour $y \in \Omega$.

Lemme 1.14 *[11] soient $p, q, r \in P(\Omega)$, Avec $p \leq q \leq r\mu - p.p$ dans Ω. alors*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^{r(\cdot)}(\Omega) \subset L^{q(\cdot)}(\Omega),$$

Remarque 1.6 *Pour démontrer la continuté de*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^{r(\cdot)}(\Omega) \longrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$$

voir le théoréme 3.3.11 page 83 du livre [11].

Théorème 1.12 *[11] soient $p, q, r \in P(\Omega)$, avec $p \leq q \leq r\mu - p.p$ dans Ω. Alors*

$$L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega) + L^{r(\cdot)}(\Omega).$$

Preuve — Soit $g \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ avec $\|g\|_{q(.)} \leq 1$, d'prés le Lemme 1.1 $\rho_{q(.)}(g) \leq 1$. On définit,

$$g_0 = sign(g)max\{|g| - 1, 0\} \text{ et } g_1 = sign(g)min\{|g|, 1\}$$

alors on obtient,

$$g = g_0 + g_1$$

Par suite

$$L^{q(\cdot)}(\Omega, \mu) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega, \mu) + L^{r(\cdot)}(\Omega, \mu).$$

D'aprés l'inégalité 1.15 de la Proposition 2.2 on a

$$\varphi_p(g_0) = \varphi_p(sign(g)\max\{|g| - 1, 0\}) \leq \varphi_q(g) \leq 1,$$

et

$$\varphi_p(g_1) = \varphi_p(sign(g)\min\{|g|, 1\}) \leq \varphi_q(g) \leq 1.$$

Grâce au 1.1

$$|g_0\|_{p(.)} \leq 1 \text{ et } |g_1\|_{r(.)} \leq 1.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} |g\|_{p(.)+r(.)} &= \inf \lim_{g=g_0+g_1} \left\{ \|g_0\|_{p(.)} + \|g_1\|_{r(.)} \right\} \\ &\leq 2\|g\|_{q(.)}. \end{aligned}$$

Donc

$$L^{q(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(.)}(\Omega) + L^{r(.)}(\Omega).$$

■

1.6 Théorèmes de densité

Théorème 1.13 *[11] Soit $P(\Omega)$, avec $p^+ < +\infty$ alors l'ensemble des fonctions simples $S(\Omega)$ est dense dans $L^{p(.)}$.*

$$\bar{S}^{\|\cdot\|_{p(.)}}(\Omega) = L^{p(.)}(\Omega).$$

Remarque 1.7 *[11] Comme l'ensemble des fonctions simples $S(\Omega)$est un sous ensemble de $L^\infty(\Omega) \cap L^{p(.)}(\Omega)$ alors il en découle du Théorème 1.8 que*

$$L^\infty(\Omega) \cap L^{p(.)}(\Omega) \text{ est dense dans } L^{p(.)}(\Omega).$$

Théorème 1.14 *[9] Soit $p \in P(\Omega)$, on suppose que $p^+ < +\infty$ alors, l'ensemble des fonctions bornées á supportcompact est dense dans $L^{p(.)}(\Omega)$.*

Corollaire 1.9 *[9] Soit $p \in P(\Omega)$, on suppose que $p^+ < +\infty$, alors les ensembles des fonctions continues à support compact $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^{p(.)}(\Omega)$.*

$$\overline{C_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_{p(.)}} = L^{p(.)}(\Omega).$$

Remarque 1.8 *[9] Soit $p \in P(\Omega)$, si $p^+ < +\infty$ alors*

$$\bigcap_{q>1} L^{q(\cdot)}(\Omega) \text{ est dense dans } L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Car cette intersection contient $C_c(\Omega)$.

Théorème 1.15 *[11] Si $p \in P(\Omega)$, avec $p^+ < \infty$, alors, l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables á support compact $C_c^\infty(\Omega) = D(\Omega)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Lemme 1.15 *[3] Si $p(x)$ satisfait 1.2 et 1.4, l'ensemble mesurable et borné dans Ω fonctions est dense $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Preuve — *Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, considérons la suite des fonctions $f_k \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ définie par*

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & Si\,|f(x)| \leq k, \\ ksingf(x) & Si\,|f(x)| > k, \end{cases}$$

Puisque $|f_k| \leq |f|$ et $f_k \longrightarrow f$ p.p. dans Ω, en utilisent théorème de la convergence dominée de Lebesgue on a, $\rho_{p(.)}(f_k - f) \longrightarrow 0$ si $k \longrightarrow \infty$. ■

Théorème 1.16 *[3] Soit $p(x)$ satisfait 1.2 et 1.4. Alors l'ensemble $C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Corollaire 1.10 *[3] Dans les conditions de la lemme 1.15 l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans l'ensemble des fonctions simples, les fonctions simples sont denses dans $C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,et $C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Corollaire 1.11 *[3] Dans les conditions de la lemme 1.15 l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est séparable, l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable et dense dans $C_0^\infty(\Omega)$.*

Chapitre 2

Espaces de Sobolev à exposant variables

Les espaces de Sobolev sont omniprésents dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques. Il s'avère donc judicieux d'en faire une brève présentation avant d'aborder ces équations. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de D. V. Cruz-Uribe et A. Fiorenza [9], L. Diening et ..[11] et X.L. Fan and D. Zhao [14] pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev à exposant variables, on pourra aussi voir S. Antontsev et S. Shmarev [3], O. Kováčik et J. Rákosník [17] et V. Radulescu et D. Repovs [22].

2.1 Les espaces $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$

Soit Ω comme (1.1) et $p(x)$ vérifie les conditions (1.2) et (1.4). L'espace de Banach $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ est défini par (voi [3])

$$\begin{cases} W_0^{1,p(.)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(.)}(\Omega) : |Du|^{p(x)} \in L^1(\Omega), u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \right\}, \\ \|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} = \|u\|_{p(.),\Omega} + \|Du\|_{p(.),\Omega} . \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2 Les Inégalités de Poincaré

Dans cette section, nous donnons des conditions de régularité suffisantes sur l'exposant $p(.)$ pour les inégalités Poincaré dans les espaces de Sobolev à exposant variables.

Lemme 2.1 *[3]*

Soit Ω *comme* (1.1) *et* $p(x)$ *vérifie les conditions* (1.2) *et* (1.5). *Si* $p(x) \in C^0(\bar{\Omega})$*,alors il existe une constante finie* $C > 0$ *tel que pour tout* $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$

$$\|u\|_{p(.),\Omega} \leq C \|Du\|_{p(.),\Omega} . \tag{2.2}$$

Preuve — *[3] Il suffit de prouver* (2.2) *pour un ensemble* $B \cap \Omega$*,où* B *est une boule de rayon si petite que*

$$\max_{B\cap\Omega} p(x) \leq \frac{n+1}{n} \min_{B\cap\Omega} p(x). \tag{2.3}$$

Le choix de B *dépend du module de continuité de* $p(x)$ *dans* Ω. *on pose*

$$p^+ = \max_{B\cap\Omega} p(x), \quad p^- = \min_{B\cap\Omega} p(x).$$

D'après le théorème d'injection de Sobolev, on a les injections suivantes :

$$W_0^{1,p(.)}(\Omega) \subset W_0^{1,p(.)}(B\cap\Omega) \subset W^{1,p^-}(B\cap\Omega) \subset L^{p^+}(B\cap\Omega) \subset L^{p(.)}(B\cap\Omega).$$

Puisque $p(x)$ *est uniformément continue sur* Ω, *on peut recouvent* Ω *par un nombre fini de boules vérifient* (2.3), *d'où* (2.2). ■

Remarque 2.1 *[3] De l'inégalité* (2.2), *on peut définir la norme équivalente de l'espace* $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ *par la relation*

$$\|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{p(.),\Omega} . \tag{2.4}$$

Notation 2.1 *(Condition de continuité Höldérienne)[3]*

Notons par $C_{log}(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions* $p(x)$ *qui satisfait les conditions* (1.2) *et* (1.4) *comme suit*

$$C_{log}(\Omega) = \left\{ p \in C^0(\bar{\Omega}) \middle| \begin{cases} \forall x, y \in \Omega, |x-y| < 1/2, \\ |p(x) - p(y)| \leq \omega(|x-y|) \end{cases} \right\}, \tag{2.5}$$

où ω *est une fonction continue telle que*

$$\overline{\lim_{\tau \longrightarrow 0^+}} \omega(\tau) ln \frac{1}{\tau} = C < +\infty, \quad C = canst.$$

Soit $\xi(x)$ être le noyau apaisant de Friedrichs

$$\xi(x) = k \begin{cases} exp\left(\dfrac{-1}{1-|x|^2}\right) & si\, |x| < 1, \\ 0 & si\, |x| > 1, \end{cases} \qquad k = constantetelleque \int_{\mathbb{R}^n} \xi(x)dx = 1.$$

on pose

$$\xi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\xi\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad \epsilon > 0.$$

Soit $f \in W_0^{1,p(.)}$, nous continuons par zéro $\grave{a}$ l'ensemble de $\mathbb{R}^n$ et utiliser le même notation pour la fonction continue. Considérons la séquence de fonctions

$$f_\epsilon(x) = f * \xi_\epsilon \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\xi_\epsilon(y-x)dy, \quad \epsilon > 0, \tag{2.6}$$

Il est clair que Ω est borné, il y a une balle $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ tel que $\Omega \subset B_R(0)$, et cela $suppf_\epsilon \subset B_{R+1}(0) \equiv B$ pour tout $\epsilon \in]0,1[$.

Lemme 2.2 *[3] Soit $\Omega' \subset\subset \Omega$ (i.e,dist($\partial\Omega, \partial\Omega'$)$> 0$). Si $p(x)$ satisfait* (2.5)*, alors pour chaque $f \in L^{p(.)}(\Omega)$*

$$\|f_\epsilon\|_{p(.),\Omega'} \leq C(\|f\|_{p(.),\Omega} + \|f\|_{1,\Omega}), \tag{2.7}$$

$$\|f_\epsilon - f\|_{p(.),\Omega'} \longrightarrow 0 \quad comme \quad \epsilon \longrightarrow 0 \tag{2.8}$$

avec un indépendant de f constant C.

Preuve — *Il suffit d'étudier le cas $\|f\|_{p(.),\Omega} + \|f\|_{1,\Omega} = 1$, sinon on peut considérer la fonction escaladé $\tilde{f} = f/(\|f\|_{p(.),\Omega} + \|f\|_{1,\Omega})$. Par la définition*

$$|f_\epsilon(x)| \leq \epsilon^{-n} \sup_{x \in \mathbb{R}^\ltimes} \xi(x)\, \|f\|_{1,\Omega} \leq \epsilon^{-n}. \tag{2.9}$$

soit

$$p_\epsilon(x) = min\,\{p(y) : |x-y| < \epsilon\} \leq p(y).$$

d'après (2.5)

$$0 \leq p(x) - p_\epsilon(x) \leq \omega(\epsilon) \leq \frac{2C}{ln\frac{1}{\epsilon}}.$$

. De plus, pour tous petit $\epsilon > 0$ *l'inégalité* $\epsilon^{-n\omega(\epsilon)} \leq e^{2nC}$ *est vraie avec la constante* C *de 2.5. Pour tout* $0 < \mu < \epsilon^{-n}$

$$\mu^{p(x)} = \mu^{p(x)-p_\epsilon(x)}\mu^{p_\epsilon(x)} \leq \mu^{\omega(x)}\mu^{p_\epsilon(x)} \leq e^{2nC}\mu^{p_\epsilon(x)}$$

. On utilise cette inégalité , (2.9) *et l'inégalité de Hölder, on trouve que*

$$|f_\epsilon(x)|^{p(x)} \leq e^{2nC}\,|f(x)|^{p_\epsilon(x)} \leq C_1 e^{2nC}\left(1 + |f(x)|^{p(x)}\right).$$

Il donne

$$\rho_{p(.),\Omega'}(f_\epsilon) \leq C_1\left(|\Omega| + \rho_{p(.),\Omega}(f)\right) \leq C_1(1 + |\Omega|),$$

d'où (2.7).

Pour prouver (2.8), *on considère la suite des opérateurs régulière :*

$$S_\epsilon : L^{p(\cdot)}(\Omega) \longmapsto L^{p(\cdot)}(\Omega')$$

définie par les formules (2.6). *Par* (2.7) *les opérateurs* S_ϵ *sont uniformément bornée dans la norme de l'opérateur et* $S_\epsilon f = f_\epsilon \longrightarrow f$ *uniformément dans* Ω' *pour* $f \in C_0^\infty(\Omega)$. *Comme* $C_0^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *(voir corollaire 1.10), il découle du théorème de Banach-Steinhaus que* $S_\epsilon f = f_\epsilon \longrightarrow f$ *dans la norme de* $L^{p(\cdot)}(\Omega')$ *comme* $\epsilon \longrightarrow 0$ *pour tout* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. ■

Lemme 2.3 *[3]*

Soit Ω *satisfait* (1.1). *Si* $p(x) \in C_{log}(\Omega)$, *alors l'ensemble* $C_0^\infty(\Omega)$ *est dense en* $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

Preuve — *De Lemma 2.2, on a*

$$\begin{aligned} D_{x_i}(f * \xi_\epsilon) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) D_{x_i}\xi_\epsilon(x-y)dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} f(y) D_{x_i}\xi_\epsilon(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} D_{y_i} f(y)\xi_\epsilon(x-y)dy \\ &= (D_{x_i} f) * \xi_\epsilon \longrightarrow D_{x_i} f \quad \text{comme} \quad \epsilon \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^{p(\cdot)}(\Omega). \end{aligned}$$

Remarque 2.2 *[3]*

Le Lemme 2.3 permet de définir l'espace $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ *comme la fermeture de* $C_0^\infty(\Omega)$ *dans la norme* (2.2), *à condition que* $p(x) \in C_{log}(\Omega)$.

Notons par

$$p^\star(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N-p(x)} & si \quad N > p(x), \\ \alpha \in [0, \infty[& si \quad N \le p(x) \end{cases}$$

l'exposant conjugué de Sobolev. ■

Lemme 2.4 *[3]*

Soit Ω *satisfait* (1.1). *Suppose que* $p(x)$ *vérifie les conditions* (1.2) *et* (1.4). *Si* $p(x), q(x) \in C(\overline{\Omega})$ *et* $q(x) < p^\star(x)$ *dans* $\overline{\Omega}$, *alors pour chaque* $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$

$$\|u\|_{q(.),\Omega} \le C \|Du\|_{p(.),\Omega}$$

avec une constante C *dépend de* $p^\pm$,*n, les propriétés de* $\partial\Omega$ *et le module de continuité de* $p(x)$.

L'injection $W_0^{1,p(.)}(\Omega) \subset L^{q(.)}(\Omega)$ *est continu et compact.*

Preuve — *Considérons d'abord le cas* $p^+ < n$. *Pour un arbitraire fixe* $x \in \overline{\Omega}$ *il y a un voisinage* U_x *tel que*

$$\max_{\overline{U}_x} q(x) < \frac{\min\limits_{\overline{U}_x} p(x)}{n - \min\limits_{\overline{U}_x} p(x)}$$

Soit $\{U_x\}_{x\in\Omega}$ *une couverture ouverte du compact* $\overline{\Omega}$. *On choisit un sous-recouvrement fini* $\{U_i : i = 1, 2, ..., k\}$ *et supposons que*

$$p_i^- = \min_{\overline{U}_i} p(x), \quad q_i^+ = \max_{\overline{U}_i} q(x).$$

Par Lemme 1.12 $u \in W^{1,p_i^-}(U_i)$, *et l'injection de Sobolev dans le cas classique, on obtient*

$$W^{1,p_i^-}(U_i) \hookrightarrow L^{q_i^+}(U_i).$$

Par Lemme 1.13 $u \in L^{q_i^+}(U_i) \subset L^{q(x)}(U_i)$*, d'où* $u \in L^{q(x)}(\Omega)$*. Supposons maintenant l'hypothèse* $p^+ < n$*. On remarque que* $W_0^{1,p(.)}(\Omega) \subset W_0^{1,r(.)}(\Omega)$ *avec* $r(x) = min\{p(x), r\}$*, où* r *est une constante satisfait les inégalités*

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{r} < \frac{1}{n} + \frac{1}{q^+}.$$

Comme l'injection $L^{q(.)}(\Omega) \subset W_0^{1,r(.)}(\Omega)$ *est continue et compacte, d'ou le résultat.*

■

Remarque 2.3 *[3]*

On sait que l'injection $L^{q(.)}(\Omega) \subset W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ *est vraie même dans le cas critique* $q(\cdot) \leq p^\star(\cdot)$*. voir [11] pour plus de détails.*

Exemple 2.1 *[9]*

Soit $p(x) = |x| + 1$*, alors* $p(.)$ *vérifie la condition* (1.2) *sur* $\mathbb{R}$*, et par une proposition 2.43 de [9], la fonction* $f(x) = 1$ *dans* $L^{p(.)}(\mathbb{R})$ *; comme* $Df = 0, f \in W^{1.p(.)}(\mathbb{R})$*. D'autre part ,par un Théorème 2.77 de [9] les fonctions bornées à support compact ne sont pas denses dans* $L^{p(.)}(\mathbb{R})$*, alors* $C_c^\infty(\mathbb{R})$ *ne peut pas être dense dans* $W^{1.p(.)}(\mathbb{R})$*.*

2.3 Les espaces $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$

Définition 2.1 *[9]*

Pour tous $p(\cdot)$ *vérifie la conndition* (1.2) *et* $m \in \mathbb{N}^*$ *, on dèfinit l'espace de Sobolev gènèralisè (où encore espace de Sobolev d'exposant variable) par :*

$$W^{m,p(.)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(.)}(\Omega) : D^\alpha u \in L^{p(.)}(\Omega) \;\; pour\ tous \quad |\alpha| \leq m\right\},$$

que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{m,p(.),(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^{p(.)}(\Omega)}$$

L'espace $W^{m,p(.)}(\Omega)$ *muni de la norme* $\|u\|_{m,p(.),(\Omega)}$ *est un espace normé.*

Proposition 2.1 *[9]*

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné,* $m \in \mathbb{N}^*$ *et les fonctions* $p(x)$ *et* $q(x)$ *vérifient les conditions* (1.2) *et* (1.4),

Si $p(x) \leq q(x)$ *p.p dans* Ω*, alors*

$$W^{m,q(.)}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p(.)}(\Omega)$$

est continue.

preuve Pour la preuve voir [9]

Théorème 2.2 *[9]*

Soient Ω, $p(\cdot)$ *vérifie la conndition* (1.2) *et* $m \geq 1$*, on a* $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ *est un espace de Banach munit de la norme* $\|.\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)}$.

preuve C'est immédiat que $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ est un espace vectoriel, puisque $\|.\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ est une norme (voir Proposition 1.4), $\|.\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)}$ est aussi une norme.

On veut montrer que $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ est complet.

Soit $\{f_j\} \subset W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ une suite de Cauchy. Alors pour chacun $0 \leq |\alpha| \leq m$, comme $\|D^\alpha f_j - D^\alpha f_i\|_{p(\cdot)} \leq \|f_j - f_i\|_{m,p(\cdot)}$, la suite $D^\alpha f_j$ est une suite de Cauchy dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, puisque $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est complet (voir chapiter 1) il exist $g_\alpha \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tel que $D^\alpha f_j \longrightarrow g_\alpha$ en norme. Soit $g = g_0 \in W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$, on utilise une définition dans [9] et l'inégalité de Hölder généralisée, on trouve $D^\alpha g = g_\alpha$ avec $0 \leq |\alpha| \leq m$ et $f_j \longrightarrow g$ dans $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ en norme.

Théorème 2.3 *[11]*

Soit $p(\cdot)$ *vérifie la conndition* (1.2)*, L'espace* $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ *est un espace séparable si* $p(\cdot)$ *est bornée, et réflexif si* $1 < p^- \leq p^+ < \infty$.

preuve Pour la preuve voir [11]

Proposition 2.2 *[11]*

Soit $p(\cdot)$ *vérifie la conndition* (1.2)*. alors* $W^{m,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p^-}_{loc}(\Omega)$.

Si $|\Omega| < \infty$*,alors* $W^{m,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p^-}(\Omega)$.

preuve Pour la preuve voir [11]

Notation 2.4 *[11]*

La fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ *dans l'espace* $W^{m,p(.)}(\Omega)$ *est bornée par* $H_0^{m,p(.)}(\Omega)$.

Chapitre 3

Espaces d'Orlicz-Musielak

Dans ce chapitre nous présentons les espaces d'Orlicz-Musielak, un exemple d'espaces modulaire oú la modulaire est donnée par l'intégrale d'une fonction á valeurs réelles. On donnera les propriétés basiques de ces espaces et on s'intéressera évidement aux résultats d'approximations et théorèmes d'injection. Pour plus de détails voir [2],[5], [15] et [21].

3.1 Espaces de Orlicz

Définition 3.1 (Modulaire d'Orlicz) *[5], [15]*

La fonctionnelle,

$$\rho_\phi : M(\Omega) \longrightarrow [0,\infty] f \longmapsto \rho_\phi(f) = \int_\Omega \phi(f(x))d\mu,$$

est une modulaire convexe sur $M(\Omega)$ dite modulaire d'Orlicz.

Définition 3.2 (Classe d'Orlicz) *[5] On appelle classe d'Orlicz l'ensemble des fonctions $f \in M(\Omega)$ vérifiant*

$$\int_\Omega \phi(f(x))d\mu < \infty.$$

On note $L^0_\phi(\Omega)$ la classe d'Orlicz. c'est-à-dire

$$L^0_\phi(\Omega) = \left\{ f \in M(\Omega) \text{ telle que } \int_\Omega \phi(f(x))d\mu < \infty \right\}.$$

Remarque 3.1 *$L^0_\phi(\Omega)$ n'est pas un espace vectoriel.*

Définition 3.3 (Espace d'Orlicz) *[5] On définit l'espace d'Orlicz $L_\phi(\Omega)$ par :*

$$\begin{aligned} L_\phi(\Omega) &= \left\{ f \in M(\Omega) \quad \textit{telle que} \quad \exists \lambda > 0 : \lambda f \in L^0_\phi(\Omega) \right\} \\ &= \left\{ f \in M(\Omega) \quad \textit{telle que} \quad \int_\Omega \phi(\lambda f(x)) d\mu < \infty \quad \textit{pour un certain} \quad \lambda > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Remarque 3.2 $L^0_\phi(\Omega) \subset L_\phi(\Omega)$ *et* $\mathcal{L}^\infty(\Omega) \subset L_\phi(\Omega)$

Proposition 3.1 *[5]* $L_\phi(\Omega)$ *est un espace vectoriel réel.*

Preuve —

1. Soient $f_1$et $f_2 \in L_\phi(\Omega)$. Alors il existe λ_1 et $\lambda_2 > 0$ tels que $\rho_\phi(\lambda_1 f_1) < \infty$ et $\rho_\phi(\lambda_2 f_2) < \infty$.

   Soit $\lambda = min(\lambda_1, \lambda_2)$. En utilisant la convexité et la croissance de ϕ on obtient,

   $$\int_\Omega \phi(\frac{\lambda}{2}(f_1 + f_2)) d\mu \leq \int_\Omega \frac{1}{2}(\phi(\lambda f_1) + \phi(\lambda f_2)) \leq \int_\Omega \frac{1}{2}(\phi(\lambda_1 f_1) + \phi(\lambda_2 f_2)) < \infty,$$

   Donc $f_1 + f_2 \in L_\phi(\Omega)$.

2. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $f \in L_\phi(\Omega)$, montrons que $\beta f \in L_\phi(\Omega)$ D'aprés ce qui précède on a $nf \in L_\phi(\Omega), \forall n \geq 1$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien alors $\forall \beta \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\beta \leq n$ et ainsi on obtient $\beta f \in L_\phi(\Omega)$. Par conséquent, $L_\phi(\Omega)$ est un espace vectoriel réel.

■

Définition 3.4 *[5] On définit l'espace d'Orlicz $E_\phi(\Omega)$ comme suit*

$$E_\phi(\Omega) = \{ f \in M(\Omega) : \rho_\phi(\lambda f) < \infty \ \textit{pour chaque} \ \lambda > 0 \}.$$

1. *Comme pour les espaces $L^p(\Omega)$ les espaces $L_\phi(\Omega)$ et $E_\phi(\Omega)$ correspondent aux espaces $L_\phi(\Omega)$ et $\mathcal{E}_\phi(\Omega)$ quand les fonctions égales $\mu - p.p$ sont identifiées.*
2. *Dans la définition des espaces d'Orlicz on a considéré une N-fonction, en fait on peut prendre une fonction d'Orlicz. On s'est restreint aux N-fonctions pour l'étude des propriétés de ces espaces.*

3. *L'espace $E_\phi(\Omega)$ est un sous espace de $L_\phi(\Omega)$ il est parfois appelé "petit espace d'Orlicz" et $L_\phi(\Omega)$.le "grand espace d'Orlicz.*

Proposition 3.2 *[5] On a $E_\phi(\Omega) = L_\phi(\Omega)$ si et seulement si $\phi \in \triangle_2(\infty)$.*

Preuve — Si $\phi \notin \triangle_2$,alors il existe une suite $(a_k)_k$ croissante vers l'infini telle que $\phi(a_1) \geq \dfrac{\varepsilon}{\mu(F)}$ et

$$\phi\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)a_k\right) > 2^k\phi(a_k), \forall k \in \mathbb{N},$$

avec $\varepsilon > 0$, $F \in \sum$ et $\mu(F) > 0$.

Soit $(F_k)_k$ une suite de sous-ensembles disjoints de Ftel que $\phi(a_k)\mu(F_k) = \dfrac{\varepsilon}{2^k}$

Soit $f_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \chi F_k$, alors

$$\begin{aligned} \rho_\phi(f_n) &= \int_\Omega \phi\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\chi F_k\right) d\mu \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \phi(a_k)\mu(F_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{2^n} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

Donc $f_n \in L_\phi(\Omega)$.

D'autre part, $\forall l > 1$, pour $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $l > 1 + \dfrac{1}{n_0}$ on a pour tout $n > n_0$,

$$\rho_\phi(lf_n) > \sum_{k=n+1}^{\infty} \phi\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)a_k\right)\mu(F_k) > \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^k\phi(a_k)\mu(F_k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon = \infty$$

D'où $f_n \in E_\phi(\Omega), \forall n \in \mathbb{N}$. ■

3.2 Normes sur les espaces d'Orlicz

[2] Dans la théorie des espaces d'Orlicz, trois normes sont apparues. Dans les années trente Orlicz a introduit la norme,

$$\|f\|_\phi^0 = sup\left\{\int_\Omega |f(t)g(t)|\, d\mu : g \in L_{\phi^*}(\Omega), \rho_{\phi^*}(g) \leq 1\right\},$$

dite **norme d'Orlicz**, puis Nakano (1950). Morse-Transue (1950) et Luxemburg (1955) ont considéré une autre norme, qui est parfois appelée la **norme de Luxemburg-Nakano** mais généralement dans la littérature, elle est appelée **la norme de Luxemburg**. Cette norme est la fonction de Minkowski (la jauge) de la boule unité pour la modulaire d'Orlicz ρ_ϕ. C'est-á-dire,

$$\|f\|_\phi = inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_\phi \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}.$$

Approximativement á la même époque, I. Amemiya a considéré la norme,

$$\|f\|_\phi^0 = inf_{k>0} \frac{1}{k} \left[1 + \rho_\phi(kf) \right],$$

dite **norme d'Amemiya**.

Définition 3.5 (Norme d'Orlicz) *Soit $f \in L_\phi(\Omega)$ alors,*

$$\|f\|_\phi^0 = sup \left\{ \int_\Omega |f(t)g(t)| \, d\mu : g \in L_{\phi^*}(\Omega), \rho_{\phi^*}(g) \leq 1 \right\},$$

est une norme sur l'espace $L_\phi(\Omega)$ dite norme d'Orlicz.

Démonstration. voir l'exercice 4.2 page 69 [5].

Définition 3.6 (Norme de Luxemburg) *Soit $f \in L_\phi(\Omega)$ alors,*

$$\|f\|_\phi = inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_\phi \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\},$$

est une norme sur l'espace $L_\phi(\Omega)$ dite ***norme de Luxemburg.*** *Démonstration. voir l'exercice 4.3 page 71 [5].*

Définition 3.7 (Norme d'Amemiya) *Soit $f \in L_\phi(\Omega)$ alors,*

$$\|f\|_\phi^A = inf_{k>0} \frac{1}{k} \left[1 + \rho_\phi(kf) \right],$$

est une norme sur l'espace $L_\phi(\Omega)$ dite ***norme d'Amemiya.***

3.3 Fonctions d'Orlicz et fonctions d'Orlicz généralisées

Définition 3.8 (Fonction d'Orlicz) *[5] (ϕ-fonction) Soit $\varphi : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty]$ telle que,*

1. *φ est convexe et continue á gauche, $\forall t \in]0,+\infty[$.*
2. *$\varphi(0) = 0$.*
3. *$\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} \varphi(t) = 0$; $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$.*

*Une telle fonction φ est appelée **ϕ-fonction ou fonction d'Olicz**, elle est dite positive si $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$.*

Remarque 3.3

1. *φ peut prendre des valeurs infinies et peut s'annuler en dehors de zéro.*
2. *Toute ϕ-fonction est semi continue inferieurement.*
3. *Toute ϕ-fonction est croissante sur $[0,+\infty[$.*

En effet, si on prend $0 \leq t_1 \leq t_2$ alors

$$\begin{aligned}\varphi(t_1) &= \varphi\left(\frac{t_2 - t_1}{t_2} \times 0 + \frac{t_1}{t_2} t_2\right)\\ &\leq \frac{t_2 - t_1}{t_2}\varphi(0) + \frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2)\\ &\leq \varphi(t_2)\end{aligned}$$

3.4 Fonctions d'Orlicz généralisées

Définition 3.9 (ϕ-fonction généralisée) *[15]*

*Soit $(\Omega, \sum, \mu)$ un espace mesuré, avec μ une mesure σ-finie compléte. La fonction $\varphi : \Omega \times [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty]$ est dite **fonction d'Orlicz généralisée** ou fonction de **Musielak-Orlicz**, et on ecrit $\varphi \in \phi(\Omega,\mu)$.*

Notation 3.1 *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, on écrit simplement $\varphi \in \phi(\Omega)$.*

3.5 Espaces d'Orlicz-Musielak

Soit $(\Omega, \sum, \mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure $\sigma-$finie complÃÍte. On note par $M(\Omega, \mu)$ l'ensemble des fonctions $\mu-$ mesurables sur Ω valeurs dans $\mathbb{R}$ modulo la relation d'équivalence $\ll= \mu p.p \gg$.

3.5.1 Modulaire d'Orlicz-Musielak

Le lemme suivant montre que toute $\phi-$fonction généralisée, génére une semi modulaire sur l'ensemble des fonctions mesurables $M(\Omega, \mu)$.

Lemme 3.1 *[2] Soient $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ et $f \in M(\Omega, \mu) alors$*

1. *La fonction :*
$$\Omega \longrightarrow [0, \infty]$$
$$y \longmapsto \varphi(y, |f(y)|),$$
est mesurable.

2. *La fonction ρ_φ définie ainsi*
$$\rho_\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$$
$$f \longmapsto \rho_\varphi(f) = \int_\Omega \varphi(y, |f(y)|) d\mu,$$
est une semi modulaire sur $M(\Omega, \mu)$, dite semi modulaire induite par φ. De plus, si φ est positive, alors ρ_φ est une modulaire dite modulaire de Musielak-Orlicz.

3.5.2 Espaces d'Orlicz-Musielak

Définition 3.10 (Classe de Musielak-Orlicz) *[2]*
Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$, on définit la classe de Musielak-Orlicz comme suit
$$L^\varphi_{oc}(\Omega, \mu) = \{f \in L^\varphi(\Omega, \mu), \rho_\varphi(f) < +\infty\}.$$

Remarque 3.4 *La classe de Musielak Orlicz n'est pas un espace vectoriel.*

Définition 3.11 *[2] Soient $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ et*

$$\rho_\varphi(f) = \int_\Omega \varphi(y, |f(y)|) d\mu \forall f \in M(\Omega, \mu),$$

alors l'espace semi modulaire

$$\begin{aligned} L^\varphi(\Omega, \mu) &= \{f \in M(\Omega, \mu), \rho_\varphi(\lambda f) < +\infty \text{pour un certain} \lambda > 0\} \\ &= \left\{ f \in M(\Omega, \mu), \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \rho_\varphi(\lambda f) < +\infty \text{pour un certain} \lambda > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Est appelé espace d'Orlicz-Musielak, dit aussi espace d'Orlicz généralisé. On va maintenant définir un sous espace de $L^\varphi(\Omega, \mu)$, appelé aussi espace de Musielak -Orlicz, et est noté $E^\varphi(\Omega, \mu)$.

Définition 3.12 *[2] Soit $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$, on definit l'espace de Musielak-Orlicz $E^\varphi(\Omega, \mu)$ comme suit*

$$E^\varphi(\Omega, \mu) = \{f \in L^\varphi(\Omega, \mu), \rho_\varphi(\lambda f) < \infty \forall \lambda > 0\}.$$

Remarque 3.5 *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n L^\varphi(\Omega, \mu), L^\varphi_{oc}(\Omega, \mu)$ et $E^\varphi(\Omega, \mu)$ sont notés respectivement $L^\varphi(\Omega), L^\varphi_{oc}(\Omega)$ et $E^\varphi(\Omega)$.*

Remarque 3.6 *De la définition de $L^\varphi(\Omega, \mu), L^\varphi_{oc}(\Omega, \mu) et E^\varphi(\Omega, \mu)$ on a*

1. $E^\varphi(\Omega, \mu) \subset L^\varphi_{oc}(\Omega, \mu) \subset L^\varphi(\Omega, \mu)$.
2. $L^\varphi_{oc}(\Omega, \mu)$ *est convexe.*
3. $E^\varphi(\Omega, \mu)$ *est le plus grand sous espace fermé de* $L^\varphi_{oc}(\Omega, \mu)$.
4. $L^\varphi(\Omega, \mu)$ *est le plus petit espace vectoriel de* $M(\Omega, \mu)$ *qui contient* $L^\varphi_{oc}(\Omega, \mu)$.
5. $E^\varphi(\Omega, \mu) = L^\varphi_{oc}(\Omega, \mu) = L^\varphi(\Omega, \mu)$ *si et seulement si* $\phi \in \triangle_2$.

3.5.3 Normes sur les espaces d'Orlicz-Musielak

Dans les espaces de Musielak-Orlicz $L^\varphi(\Omega, \mu)$ on définit trois normes, qui sont ap- pelées norme d'Orlicz, norme de Luxemburg et norme d'Amemiya. Ces normes sont définies comme suit :

Définition 3.13 *[2]*

Soit $f \in L^{\varphi}(\Omega, \mu)$ *alors,*

1.
$$\|f\|_{\varphi}^{\circ} = sup\left\{\int_{\Omega} |f(t)g(t)|\, d\mu : g \in L^{\varphi^*}(\Omega, \mu), \rho_{\varphi^*}(g) \leq 1\right\}$$

est une norme sur l'espace $L^{\varphi}(\Omega, \mu)$ *dite norme d'Orlicz.*

2.
$$\|f\|_{\varphi} = inf\left\{\lambda > 0 \rho_{\varphi}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\},$$

est une norme sur l'espace $L^{\varphi}(\Omega, \mu)$ *dite norme de Luxemburg.*

3.
$$\|f\|_{\varphi}^{A} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left[1 + \rho_{\varphi}(kf)\right]$$

est une norme sur l'espace $L^{\varphi}(\Omega, \mu)$ *dite norme d'Amemiya.*

Remarque 3.7 *1. La norme d'Orlicz et celle de Luxemburg sont équivalentes, comme le montrent les inégalités suivantes :*

$$\|f\|_{\varphi} \leq \|f\|_{\varphi}^{\circ} \leq 2\,\|f\|_{\varphi}\,.$$

2. La norme d'Amemiya est une autre écriture de la norme d'Orlicz, c'est á dire

$$\|f\|_{\varphi}^{\circ} = \|f\|_{\varphi}^{A}\,.$$

Inégalité de Hölder[2]

Lemme 3.2 *Soit* $\varphi \in \phi(\Omega, \mu)$ *, alors*

$$\int_{\Omega} |f|\,|g|\, d\mu \leq 2\,\|f\|_{\varphi}\,\|g\|_{\varphi^*}$$

pour toute $f \in L^{\varphi}(\Omega, \mu)$ *et* $\in L^{\varphi^*}(\Omega, \mu)$

preuve Pour la preuve voir [2].

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on a présenté une étude sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables et et leur propriétés basiques.

Ce travail soulève un certain nombre de questions qui méritent d'être approfondies par la suite. Par exemple, il serait judicieux de penser en perspective aux suivantes :

-Sous quelles conditions l'ensemble $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R})$?

-Caractériser le dual de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ quand $p^+ = +\infty$?

-Trouver un ensemble dense dans $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ quand $p^+ = +\infty$?

Bibliographie

[1] R. Adams ; Sobolev spaces, *Academic Press,* New York, 1975.

[2] M. Addour and Z. Sanaa ; Théorèmes de densité et d'injection dans les espaces de Musielak-Orlicz et les espaces de Lebesgue à exposants variables, *Master en mathématiques*, Analyse et probabilités, Dép.Math, Fac.Scien.Exac, Univ. Abderrahmane Mira, Béjaia, Algerie, 2014.

[3] S. Antontsev and S. Shmarev ; Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions : Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up, *Atlantis Studies in Differential Equations, Series Editor : Michel Chipot*, vol **4**, Atlantis Press, Paris, France, 2015.

[4] M.B. Benboubker ; On Some Quasilinear Elliptic Nonhomogeneous Problems of Dirichlet or Neumann Type, *Ph.D. Thesis, Applied Sciences, Monographs*, Sidi Mohamed Ben Abdellah University, Faculty of Sciences Dhar El Mahraz, Fès, Morrocco, 2014.

[5] F. Boulahia (épouse Talbi) ; Espaces d'Orlicz, Cours, 2^{eme} année master mathématiques. Option : Analyse et Probabilité *Dép.Math,* Fac.Scien.Exac, Univ. Abderrahmane Mira, Bejaia, Algerie, 2015.

[6] H. Brezis ; Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Collection Mathematiques Appliquées pour la Maitrise, *Masson,* Paris, 1983.

[7] H. Brezis ; Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, *Springer* Science, Business Media, LLC, **233**, New York, USA, 2010.

[8] Y. Chen, S. Levine, M. Rao ; *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration*, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. **66**(4), 1383-1406, 2006.

[9] D. V. Cruz-Uribe and A. Fiorenza ; Variable Lebesgue Spaces : Foundations and Harmonic Analysis, A product of *Birkhauser Basel*, **316 p**, Springer, New York, 2013.

[10] D. V. Cruz-Uribe, SFO and A. Fiorenza ; Convergence in variable Lebesgue spaces, *Publ. Mat,* **54(2)**, 441-459, 2010.

[11] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Ruzicka ; Lebesgue and Sobolev Spaces with variable exponents, *Lecture Notes in Mathematics,* vol.**2017**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011.

[12] J. Droniou ; Quelques Résultats sur les Espaces de Sobolev, *hal.archives-ouvertes*, CMI, Technopole de Chateau Gombert, Univ. Provence, Marseille, France, 2001.

[13] D. Edminds and J. Rákosník ; Sobolev embedding with variable exponent, *Studia mathematical,***143(3)**, 267-293, 2000.

[14] X.L. Fan and D. Zhao ; On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,***263(2) :**, 424-446, 2001.

[15] B. Gagui ; Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz, Doctorat en Science, Analyse fonctionnelle et numérique, *Dép.Math*, Fac.Math.Inf, Univ. Mohamed Boudiaf, M'sila, Algerie, 2015.

[16] P. Q. Hiep Nguyen ; On Variable Lebesgue Spaces, Doctor of philosophy, *Dep.Math*, College of Arts & Sciences, Kansas State University, Manhattan, Kansas, 2011.

[17] O. Kováčik and J. Rákosník ; On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, *Czechoslovak Mathematical Journal,* Vol.**41(116)(4) :** 592-618, 1991.

[18] J.L. Lions ; Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, *Dunod*, Paris 1969.

[19] F. Mokhtari ; Regularity of the Solution to Nonlinear Anisotropic Elliptic Equations with Variable Exponents and Irregular Data, *Mediterr. J. Math*, **14 :141**, 2017.

[20] J. Musielak ; Orlicz spaces and modular spaces ; *Lecture Notes in Mathematics* vol **1034**, Springer, Berlin, 1983.

[21] W. Orlicz ; Uber konjugierte Exponentenfolgen, *Studia Math,* **3 :** 200-211, 1931.

[22] V. Radulescu and D. Repovs ; Partial Differential Equations with Variable Exponents : Variational Methods and Qualitative Analysis, *Chapman & Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics*, 2015.

[23] M. Ruzicka ; Electrorheological fluids modeling and mathematical theory, Departmental Bulletin Paper, *Springer*, Berlin, **1146**, 16-38, 2000.

[24] O. Saifia ; Sur l'existence de solutions non-triviales d'un système d'équations aux dérivées partielles avec l'opérateur p-Laplacien, *Dép.Math,* Fac.Scien, Doctorat en Mathématiques, **EDP**, Univ. Badji Mokhtar, Annaba, Algerie, 2015.