

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE M'SILA  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME  
DE MASTER EN GENIE ELECTRIQUE

SPECIALITE :  
Ingénierie des Systèmes Electromécaniques

## **THEME**

---

# **CONTRIBUTION A LA MODELISATION DES MATERIAUX SUPRACONDUCTEURS A HAUT TEMPERATEUR CRITIQUE (HTC)**

---

**Proposé et dirigé par :**

Mr BELKHIRI Salah

**Présenté par :**

- BOUZIDI Ahmed

Année Universitaire : 2011 / 2012

N<sup>o</sup> d'ordre : 031

## *Remerciements*

*On remercie tout d'abord le dieu, le tout puissant qui nous facilite le chemin pour l'accomplissement de ce mémoire.*

*A tous nos enseignants et le chef de département de génie électrique Mr. B.BENDJAIMA qui nous ont aidés de proche ou de loin pour être les master en électromécanique.*

*Nos grands remerciements vont également à Mr BELKHIRI Salah de nous avoir et pour leurs disponibilité et leurs précieux conseils.*

*Nos grands remerciements à Dr BENSALD Samir et Mr ZORAID Aïssam*

*Nos remerciements à tous les membres du jury qui ont accepté de juger notre travail.*

*En fin, nous tenons à exprimer notre reconnaissance à tous les amis et collègues pour le soutien moral.*

## ***Dédicace***

*Après de longues années d'études et de travail, sachant l'importance*

*de l'aide des*

*Êtres qui m'aiment, je voudrai humblement leurs, dédier ce modeste*

*travail tout en avant*

*Qu'ils méritent le meilleur qui soit.*

*Je dédie ce travail :*

*à ma très chère **mère** la personne la plus proche de moi*

*À mon cher **père***

*Qui m'encourageait et suait et a son travail pour pouvoir m'instruire.*

*À mes **frères** et spécialement à **Floria***

*Qui a fait tant de sacrifice pour m'élever et m'instruire et qui ma*

*encourage tout le*

*Long de mon parcours scolaire et académique.*

*À mes cher enseignants qui mont dirigé et aider et surtout soutenu.*

*À tous mes amis et spécialement à **MOHAMED BEY***

*Aux étudiants de génie électrique et toute la promotion 2012.*

## SOMMAIRE

### SOMMAIRE

#### INTRODUCTION GENERALE

#### CHPITRE I

<b>I.1. Histoire.....</b>	<b>1</b>
<b>I.2. Caractéristique d'un supraconducteur.....</b>	<b>2</b>
<b>I.2.1. Résistance .....</b>	<b>2</b>
<b>I.2.2. Effet Meissner .....</b>	<b>4</b>
<b>I.3.Types de supraconducteurs .....</b>	<b>5</b>
I.3.1. Supraconducteur de type I dits "conventionnels" .....	5
I.3.2.Supraconducteurs de type II dits "non-conventionnels" .....	6
I.3.3. Les supraconducteurs HTC.....	6
<b>I.4. Grandeurs critiques .....</b>	<b>7</b>
<b>I.4.1. Température critique <math>T_c</math> .....</b>	<b>7</b>
<b>I.4.2.Champs critique.....</b>	<b>8</b>
<b>I.4.3.Densité de courant critique <math>J_c</math> (H, T).....</b>	<b>10</b>
<b>I.4.4. La surface critique .....</b>	<b>12</b>
<b>I.5. Lévitiation et paliers magnétiques.....</b>	<b>13</b>
<b>I.5.1. Les paliers magnétiques .....</b>	<b>13</b>
<b>I.5.1.1. Les paliers actifs .....</b>	<b>13</b>
I.5.1.2. Les paliers passifs.....	14
<b>Conclusion .....</b>	<b>15</b>

## CHPITRE II

<b>Introduction.....</b>	<b>17</b>
<b>II.1. Etat de l'art.....</b>	<b>17</b>
II.1.1 Le modèle de l'état critique .....	17
II.1.2. Le modèle de la loi de puissance .....	18
II.1.3. Le modèle de KIM .....	19
II.1.4. Le modèle exponentiel .....	19
II.1.5.Le modèle Flux-flow-crêpe (FFC).....	20
<b>II.2. Approximation du modèle de Bean.....</b>	<b>20</b>
<b>II.3. Formulation mathématique de modèle.....</b>	<b>23</b>
II.3.1. Domaine d'étude.....	23
II.3.2. Les équations de Maxwell.....	23
II.3.3. Relations constitutives .....	24
II.3.4. Conditions de passage .....	25
II.3.5. Écritures simplifiées des équations .....	26
<b>II.4. Formulation du problème .....</b>	<b>26</b>
II.4.1. Formulation dans les régions conductrices .....	26
II.4.1.1. Formulation en A-V .....	27
II.4.1.2. Formulation en H .....	28
II.4.1.3. Formulation en T- $\Phi$ .....	28
II.4.1.4. Formulation en E .....	29
II.4.2. Formulation dans les régions non conductrices.....	29
II.4.2.1 Formulation en A .....	29
II.4.2.2. Formulation en potentiel scalaire magnétique (H- $\Phi$ et H- $\Phi_r$ ) .....	29

# SOMMAIRE

---

<b>II.5. Choix de la formulation .....</b>	<b>32</b>
<b>Conclusion.....</b>	<b>32</b>

## CHPITRE III

<b>Introduction.....</b>	<b>34</b>
<b>III.2. Discrétisation numérique par la méthode des éléments finis.....</b>	<b>35</b>
III.2.1. Élément rectangulaire.....	36
III.2.2. Élément triangulaire.....	37
<b>III.3 Présentation de logiciel Flux2D.....</b>	<b>38</b>
III.3.1. Implémentation du modèle EF à l'aide de Flux2D.....	38
III.3.2. Description géométrique.....	39
III.3.2.1. Définition des paramètres géométriques.....	40
III.3.2.2. Choix des coordonnées et unités de surface .....	41
III.3.2.3. Descriptions des surfaces .....	43
III.3.3. Maillage de domaine .....	44
III.3.4. Description physique et choix des matériaux .....	45
III.3.5. Résolution.....	46
III.3.6. Résultats de simulation .....	46
III.3.7. Interprétation des résultats .....	50
<b>Conclusion.....</b>	<b>50</b>
<b>Conclusion général.....</b>	<b>51</b>
<b>Référence bibliographique .....</b>	<b>.....</b>

# Introduction générale

---

## Introduction générale

La découverte des supraconducteurs à haute température critique en 1986 a suscité un intérêt nouveau pour les matériaux. L'utilisation de ces derniers en électrotechnique peut être envisagée dans plusieurs domaines, le transport, la production, le stockage d'énergie, aussi dans la fabrication des câbles des machines ou de limiteur de courant.

La propriété remarquable des supraconducteurs de faire léviter de manière stable un aimant permanent permet aussi, d'envisager leur utilisation pour des dispositifs en suspension magnétique.

L'étude de ces différentes applications indique qu'il est important de déterminer les grandeurs électromagnétiques avec une bonne précision. Pour cela il est donc impératif de développer des modèles macroscopiques. La modélisation macroscopique de supraconducteur de type II est très peu présente dans les travaux de recherche et encore moins la modélisation du phénomène magnétique. C'est à cette dernière que l'on s'intéresse tout particulièrement.

L'étude de paliers nécessite également l'évaluation de leur comportement mécanique afin d'étudier leurs performances dans des conditions réelles. Notre travail s'est appuyé sur une approche numérique qui permet de calculer des grandeurs comme les forces mises en jeu ou stabilité du dispositif. L'outil de simulation permet aussi une plus grande liberté pour tester différentes configurations.

Ce mémoire est structuré comme suite :

Le chapitre I présente une vue globale sur les supraconducteurs, on commence par un bref historique suivi d'une présentation des caractéristiques des supraconducteurs qui permettent de définir les différents types de supraconducteurs. On s'intéresse également dans ce premier chapitre aux comportements magnétiques et électriques des supraconducteurs. Ainsi, leurs domaines d'applications.

Après une présentation rapide de l'état de l'art de la modélisation des supraconducteurs, le deuxième chapitre est consacré à l'étude de différentes formulations des supraconducteurs afin de le retranscrire dans un langage mathématique point de départ de la modélisation. Ce chapitre définit la loi de comportement choisie pour décrire le phénomène de supraconduction.

Le chapitre III expose la méthode numérique adoptée pour la résolution des équations du chapitre II dans le cas d'un problème bidimensionnel axisymétrique à l'aide d'un logiciel FLUX2D.

# Introduction générale

---

Le modèle tient compte d'une plaque supraconductrice plongée dans un champ magnétique extérieur.

Ce mémoire se finit par la conclusion générale qui résume les résultats obtenus par la simulation et quelques perspectives.



## I.1. Histoire.

En 1911, Le phénomène fut découvert par un étudiant en physique. Gilles Holst étudiant sous la direction du physicien néerlandais Kamerlinght Onnes (ce dernier s'étant par la suite approprié cette découverte). Kamerlinght Onnes aurait demandé à son étudiant de surveiller une expérience qu'ils étaient en train de mener sur les propriétés du mercure à très basse température (le domaine d'étude de prédilection de Kamerlinght Onnes). Or, L'étudiant laissa le protocole expérimental s'emballer, et atteindre par hasard des températures que le système ne devait pas atteindre. Cette erreur fut néanmoins fructueuse, puisque Gilles Holst et Kamerlinght Onnes montrèrent que la résistivité électrique du mercure devient non mesurable en dessous d'une certaine température appelée température critique  $T_c$ . Le terme non mesurable signifie ici que la résistance électrique du mercure chute de façon brutale au-dessous de  $T_c$ , de sorte que l'on ne peut plus la définir de façon conventionnelle. Pour cette découverte, Kamerlinght Onnes a reçu le prix Nobel de physique en 1913. Des expériences avec de nombreux autres montrèrent que certains possédaient des facultés de supraconductivité, mais d'autres non : citons en 1922, le plomb à 7 K et en 1941, le nitrure de niobium à 16 K.

En 1933, Meissner et Ochsenfeld découvrent que les supraconducteurs repoussent le champ magnétique, un phénomène connu sous l'appellation d'effet Meissner. En 1935, les frères Fritz et Heinz London ont montré que l'effet Meissner est une conséquence de la minimisation de l'énergie libre transportée par le courant supraconducteur.

C'est en 1950 que l'on constate que la température critique dépend de la masse isotopique.

En 1950, une théorie phénoménologique dite de Ginzburg-Landou fut élaborée par Landou et Ginzburg, cette théorie a été un succès pour expliquer les propriétés macroscopiques des supraconducteurs en utilisant l'équation de Schrodinger. En particulier, Abrikosov montra qu'avec cette théorie on peut prévoir qu'il existe deux catégories de supraconducteurs. Abrikosov et Ginzburg ont reçu le prix Nobel 2003 pour ce travail.

Une théorie complète de la supraconductivité fut proposée en 1957 par Bardeen, Cooper et Schrieffer. Connue sous l'appellation de leur initiale théorie BCS. Elle explique la supraconductivité par la formation de paires d'électrons (paires de Cooper) interagissant avec des photons. Pour leur travail, les auteurs eurent le prix Nobel de physique en 1972.

En 1962, les premiers fils supraconducteurs (un alliage de Niobium-Titan) sont commercialisés par Westinghouse. La même année, Josephson prévoit théoriquement qu'un courant peut circuler à

travers un isolant mince séparant deux supraconducteurs ce phénomène qui porte son nom, l'effet Josephson, est utilisé dans les SQUIDS. Ces dispositifs servent à faire des mesures très précises d' $h/e$ , et combiné avec l'effet Hall quantique, à la mesure de la constante de Planck  $h$ . Josephson a reçu le prix Nobel en 1973.

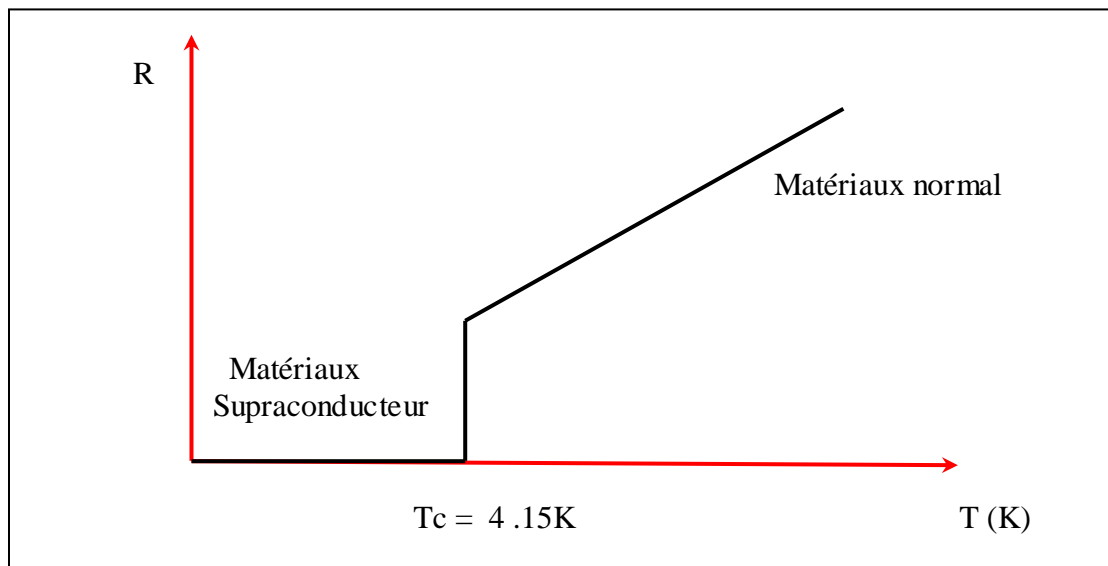
En 1986, Bednorz et Muller ont découvert une supraconductivité à une température de 35 K dans des matériaux de structure perovskite de cuivre à base de lanthane (prix Nobel de physique, 1987). Très rapidement en remplaçant le lanthane par l'yttrium, en produisant de l' $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , la température critique est montée à 92 K, dépassant de l'azote liquide qui est de 77K. Cela est très importants car l'azote liquide est produit industriellement à base prix est peut même être produit localement. Beaucoup de coprates supraconducteurs ont été produit par la suit et les mécanismes de cette supraconductivité sont encore à découvrir. Malheureusement, ces matériaux sont des céramiques et ne peuvent être travaillés aisément. De plus, ils perdent facilement leur supraconductivité à fort champ donc les applications se font attendre.

Les recherches se poursuivent pour diminuer la sensibilité au champ et pour augmenter la température critique. Après la température de l'azote liquide, atteint, le seuil psychologique et économique est la glace carbonique ( $-78,5^0\text{ C}$ ), [1].

## **I.2. Caractéristique d'un supraconducteur**

### **I.2.1. Résistance :**

Le phénomène de supraconductivité le plus connu et le plus spectaculaire est l'absence de résistance des matériaux en dessous d'une température finie appelée 'température critique', où la résistance disparaît. S'il est impossible d'affirmer que la résistance nulle, elle est néanmoins extrêmement faible. [2].

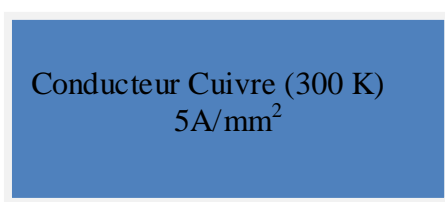


**Figure I. Caractéristique R(T) [5].**

Cette absence de résistance permet ainsi de transporter des courants continus sans dissipation de chaleur, donc sans consommation d'énergie active. Le dimensionnement des matériels électrotechniques (transformateurs, alternateur, câbles) ou plus précisément, la quantité de matière requise par unité de puissance électrique dépend très largement de la densité de courant que peuvent accepter les conducteurs. Dans les matériaux classiques comme le cuivre ou l'aluminium, cette densité est limitée par la température maximale admissible par le conducteur qui augmente du fait de la dissipation par effet Joule.

En pratique, cette densité varie de 1 à 15 A/mm<sup>2</sup> alors que dans les supraconducteurs, grâce à l'absence d'effet Joule, ces valeurs peuvent atteindre 100 à 600 A/mm<sup>2</sup>.

L'absence de résistance permet, par à un courant continu de circuler dans un bobinage supraconducteur sans générateur de tension et d'y demeurer de façon perpétuelle ; il ne provoque aucune pertes. Cette absence de pertes permet de réduire le volume du circuit magnétique d'un système électrotechnique destiné à réduire les ampères-tours entraînant un gain en volume et en poids.



**Conducteur supraconducteur**

**500A/mm<sup>2</sup>**



**Figure. I.2 – Gain en termes de capacité et de poids. [2]**

Cette absence de pertes n'est réelle que lorsque le supraconducteur est parcouru par un courant continu. Nous verrons, par la suite, qu'il apparaît des pertes en régime variable. Aussi, les premières applications industrielles utilisant ces matériaux sont relatives à un environnement électromagnétique constant : stockage d'énergie, imagerie par résonance magnétique, aimants pour la physique des hautes énergies et pour la fusion.

Cette propriété remarquable est accompagnée d'une autre propriété : le caractère diamagnétique. [2]

### I.2.2. Effet Meissner :

En 1933, H. Meissner et R. Ochsenfeld découvrent le diamagnétisme des supraconducteurs. Ils montrèrent qu'un supraconducteur plongé dans un champ magnétique expulse le flux magnétique sauf dans une fine couche superficielle. Cela se traduit par une variation de l'aimantation en fonction du champ magnétique semblable à celle représentée par la figure (I.4)

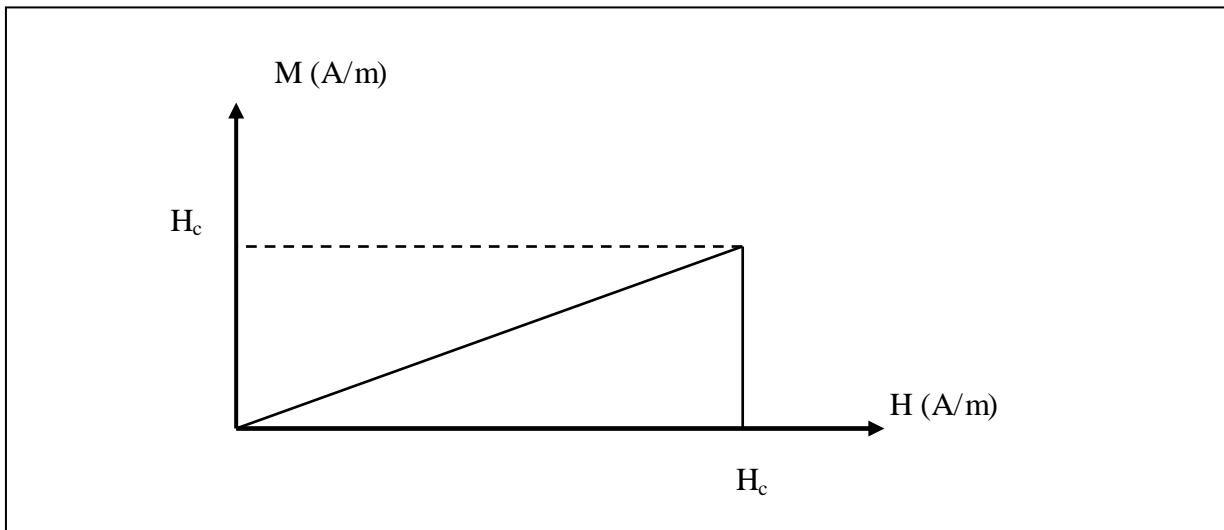


Figure. I.3 : Aimantation  $M$  d'un supraconducteur en fonction du champ magnétique. [2]

Cette figure montre le diamagnétisme (aimantation négative) jusqu'à une valeur de champ magnétique égale au champ magnétique critique  $H_c$ .

L'absence de résistance et l'effet Meissner propres au supraconducteur sont à nuance. On distingue deux types de supraconducteurs : les supraconducteurs de type I et les supraconducteurs de type II. Nous verrons que, suivant le type de supraconducteur utilisée, ces deux propriétés seront vérifiées totalement ou partiellement. [2]

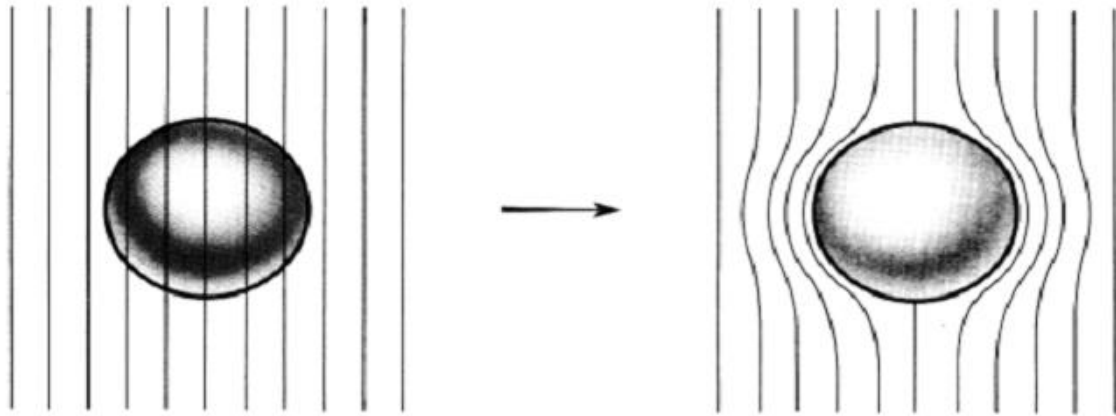


Figure I.4 : Expulsion des lignes de champ par effet Meissner. [4]

### I.3.Types de supraconducteurs :

#### I.3.1. Supraconducteur de type I dits "conventionnels" :

Ce sont les supraconducteurs découverts avant 1986, les supraconducteurs "purs". Ils possèdent les propriétés précédentes en-dessous d'une température  $T_c$  précise et d'une force de champ magnétique  $H_c$  précise. Ils obtiennent leurs propriétés brutalement dès que leur température est inférieure à la  $T_c$ . Pour les supraconducteurs de type 1:  $0,0003K \leq T_c \leq 15K$ . [6]

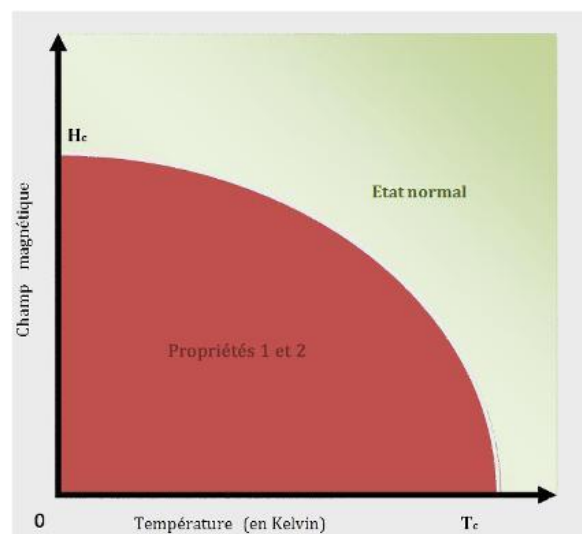


Figure I.5 : Domaines de la supraconductivité [6]

### I.3.2. Supraconducteurs de type II dits "non-conventionnels" :

Ces supraconducteurs ont été découverts en 1986. Sous leur température critique  $T_c$ , ils ont un comportement analogue à celui des supraconducteurs de type I en-dessous d'une valeur du champ magnétique extérieur  $H_{c1}$ , avec un état supraconducteur et un diamagnétisme parfait (effet Meissner). Mais ils présentent en plus une zone mixte à partir d'une  $T_c$  précise et entre deux intensités du champ magnétique  $H_{c1}$  et  $H_{c2}$ . A l'heure actuelle, les chercheurs n'ont pas encore déterminé toutes les propriétés, ni proposé de théorie valable. On en a défini tout de même certaines: ils conservent un état supraconducteur avec une résistance nulle, mais perdent leur diamagnétisme parfait: le champ magnétique externe peut pénétrer le matériau supraconducteur par des "vortex". Il n'y a donc plus d'effet Meissner. [6]

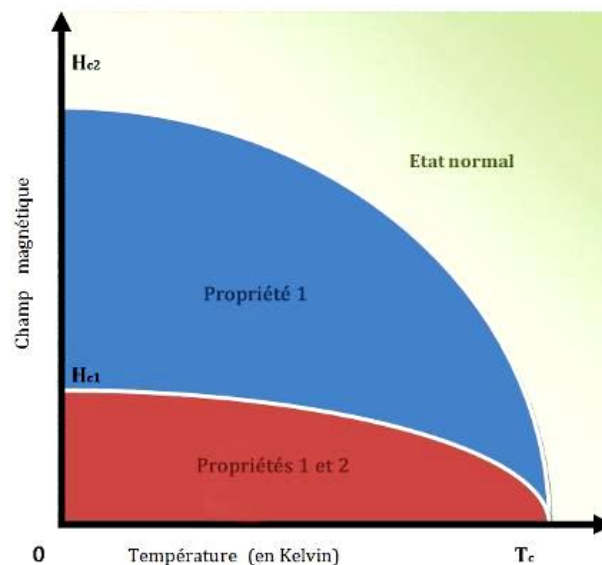


Figure I.6. Etats d'un matériau supraconducteur de type II. [6]

### I.3.3. Les supraconducteurs HTC

En 1986, J. Bednorz et K. Müller, des laboratoires de recherche d'IBM à Zurich, ont découvert le premier composé supraconducteur à haute température critique. Il s'agit du composé  $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ . La température critique de ce composé variait fortement avec le taux de substitution de Sr, le maximum,  $T_c = 36K$ . Plus tard, de nombreux nouveaux composés ont été découverts, les plus notoires

étant le  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , avec un  $T_c$  maximal 93K, le  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  ( $T_c = 93\text{K}$  en 1988), le  $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$  ( $T_c = 125\text{K}$ , 1989) et le  $\text{HgBa}_2\text{Ca}_3\text{Cu}_4\text{O}_8$  ( $T_c = 135\text{K}$ , 1993).

Les supraconducteurs à haute température critique se distinguent des supraconducteurs "classiques" par le fait que ce sont des oxydes, au lieu d'être des composés intermétalliques. Tous les supraconducteurs à haute température critique ont une structure de maille élémentaire dérivée de la pérovskite, c'est-à-dire des couches de tétraèdres  $\text{CuO}_4$  entre lesquelles se trouvent les ions Ba ou Sr, séparés par des couches contenant Y, Bi, Tl, Hg, etc. Cette structure en couches donne une très forte anisotropie aux propriétés mécaniques et électriques de ces composés. Par exemple, les plans contenant les ions de cuivre ont une conductivité dans l'état normal qui est beaucoup plus haute que celle des plans intermédiaires. Par conséquent, la résistivité le long de l'axe cristallin c (perpendiculaire aux plans  $\text{CuO}_2$ ) peut être plus que 1000 fois plus grand que la résistivité le long des axes a et b (dans les plans  $\text{CuO}_2$ ). Dans l'état supraconducteur aussi, on peut distinguer les plans  $\text{CuO}_2$  à supraconductivité forte (haute densité de paires de Cooper) vis-à-vis des plans intermédiaires à supraconductivité faible (basse densité de paires de Cooper). [3]

## I.4. Grandeurs critiques :

La supraconductivité existe seulement dans un domaine limité par trois grandeurs critiques : la température, le champ et la densité de courant. Si l'une des grandeurs dépasse sa valeur critique, le matériau n'est plus supraconducteur mais résistif et amagnétique.

### I.4.1. Température critique $T_c$ :

On distingue deux catégories de supraconducteurs suivant leur température critique, d'une part les supraconducteurs BTC qui sont les éléments simples et alliages métalliques dont la température critique ne dépasse pas 23.3 K. De si basses températures constituent une difficulté pour leur utilisation. Cependant ce sont les premiers supraconducteurs découverts, ce sont donc ceux que l'on connaît le mieux. De ce fait, ils sont utilisés majoritairement dans les applications (aimant-supraconducteur, IRM...). D'autre part, les supraconducteurs HTC découverts plus tardivement ; et qui, de ce fait, sont très peu présents dans les applications. Leur températures critique s'étend jusqu'à 100K. En 1994, la température critique maximale obtenue est de 133.5K pour des composés au

mercure sous pression atmosphérique. Sous des pressions extrêmement élevées (30 GPa soit 30 000 bars environ), elle peut atteindre 164 K. [2]

### I.4.2. Champs critique

L'état de supraconducteur disparaît lorsque le champ magnétique appliqué est supérieur au champ magnétique critique, cela pour une température inférieure à la température critique. La courbe  $B(H)$  indique leur différence de comportement (Figure I.8).

Pour les supraconducteurs de type I, ils présentent un diamagnétisme presque parfait jusqu'à certaine valeur de champ magnétique critique  $H_c$ , au-delà, le matériau retrouve un état résistif. [2]

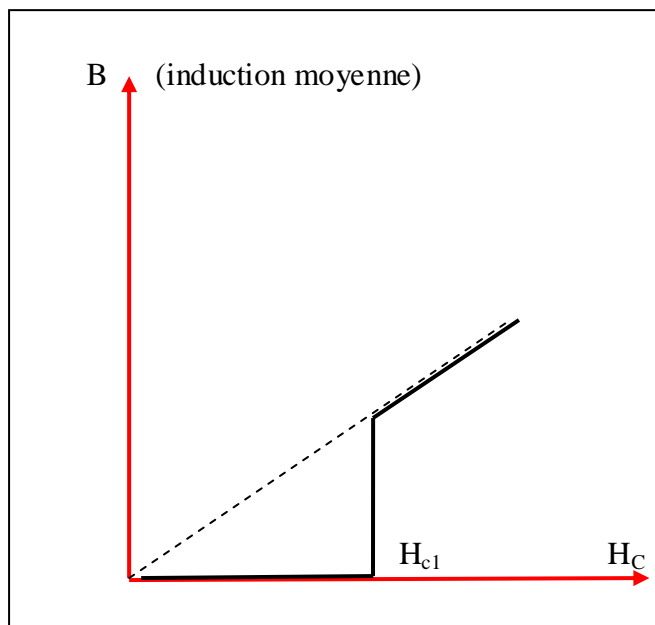


Figure. I.7. Induction magnétique dans les supraconducteurs de type I.[7]

En réalité, au niveau microscopique l'induction microscopique  $B$  pénètre sur une très faible épaisseur  $\lambda_L$  appelée longueur de London, sur laquelle se développent des courants dits : supra-courants d'écrantage. Cette longueur varie de 10 à 30 nm.

Dans les supraconducteurs de type II, ils sont caractérisés par deux champs critiques  $H_{c1}$  et  $H_{c2}$ . [2]



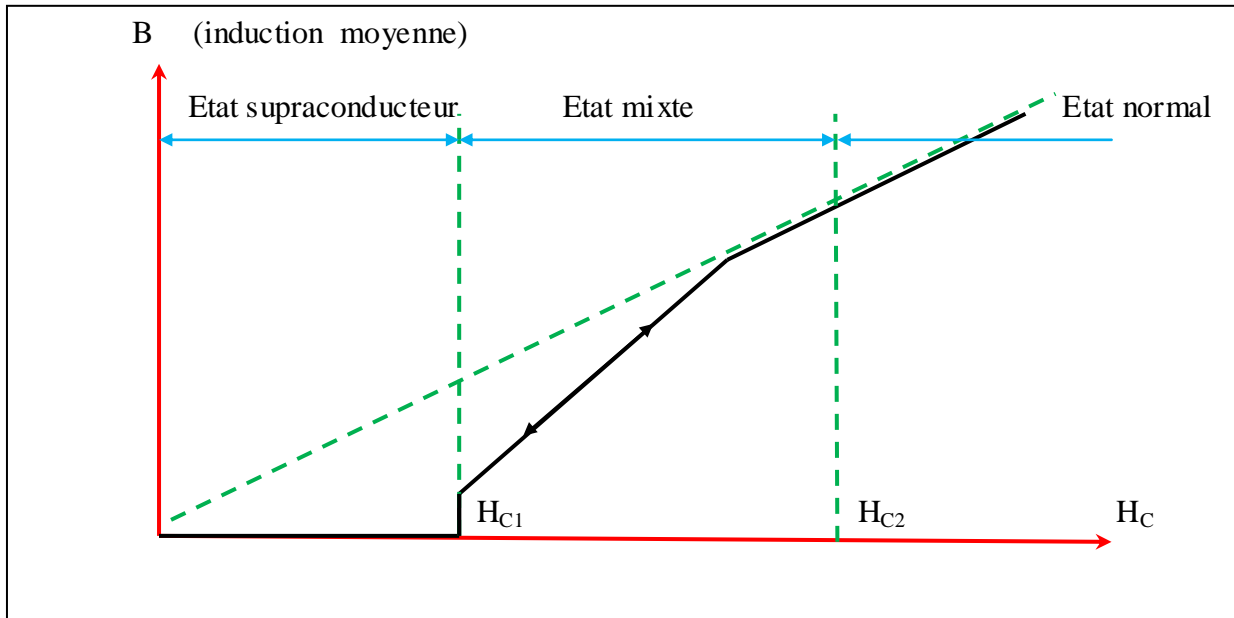
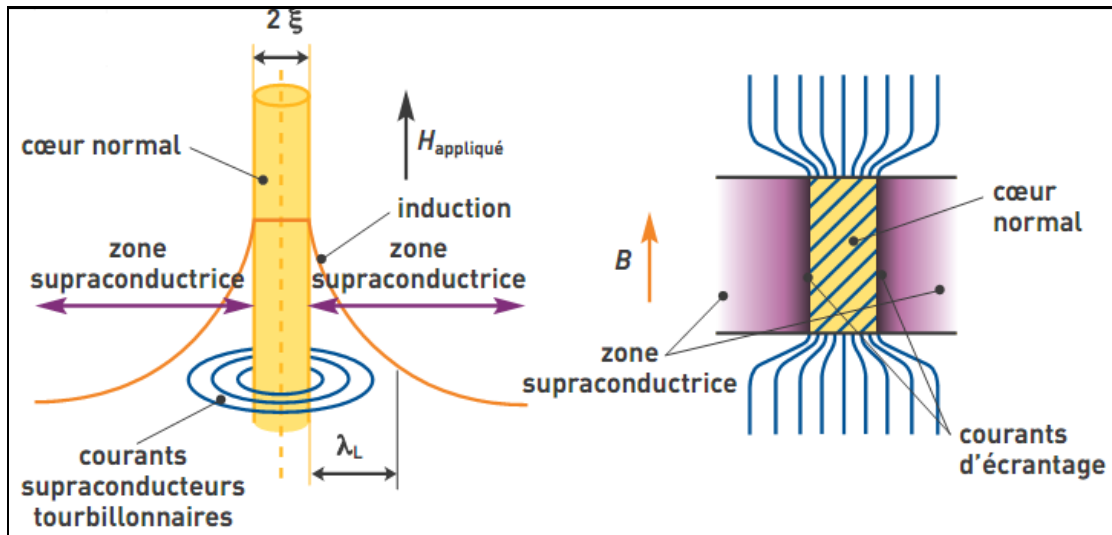


Figure. I.8. Induction magnétique dans les supraconducteurs de type II. [7].

On distingue trois cas en fonction du champ appliqué :

- ❖  $H < H_{c1}$  : le supraconducteur a la même caractéristique de type I.
- ❖  $H_{c1} < H < H_{c2}$  : le champ magnétique pénètre partiellement dans le matériau mais ce dernier reste électriquement. Le diamagnétisme n'est pas parfait, l'écrantage est partiel et le supraconducteur est alors dans l'état mixte. La pénétration du flux magnétique se fait sous forme quantifiée par un ensemble de tubes appelés **vortex**. Chaque vortex transporte le même flux magnétique (quantum flux ou fluxoïde) d'environ  $2 \cdot 10^{-15}$  Wb. On définit une deuxième longueur caractéristique, la longueur de cohérence  $\xi$  correspondant pratiquement au rayon du cœur normal des vortex. [2]



**Figure. I.9. Schéma d'un vortex mettant en évidence la longueur de cohérence et la profondeur de pénétration.**

Le rapport  $K = \lambda_L / \xi$  appelé paramètre de Ginzburg-Landau permet de distinguer les deux types de supraconducteurs :

-si  $K < 1/\sqrt{2}$  alors le supraconducteur est de type I

-si  $K > 1/\sqrt{2}$  alors le supraconducteur est de type II

- ❖  $H_{c2} < H < H_{c3}$  : il existe, à nouveau, une supraconductivité de surface. Le champ pénètre faiblement à la surface du supraconducteur.
- ❖  $H > H_{c3}$  : le flux magnétique pénètre complètement et toute la supraconductivité disparaît. La résistivité à l'état normal est élevée devant celle du conducteur classique. [2]

### I.4.3. Densité de courant critique $J_c(H, T)$

La densité de courant critique correspond à la valeur maximale au delà de laquelle un champ électrique apparaît. Pour les supraconducteurs de type I, la répartition du courant n'est pas homogène. Le courant de transport circule uniquement à la surface, dans l'épaisseur de pénétration de London. Pour les supraconducteurs de type II la densité de courant critique est fortement dépendante de l'induction  $B$  donc de la présence de vortex dans la structure du matériau. Pour une induction transverse, dans l'état mixte, un supraconducteur idéal présente une densité de courant nulle. Le courant de transport réagit avec les vortex et ceux-ci se déplacent lorsque la force créée de Lorentz est

supérieure aux forces d'ancrage, entraînant une dissipation dans le matériau. Lorsque la densité de courant dépasse une valeur critique  $J_c$  les vortex sont arrachés.

C'est le régime de flux-flow. Libérés, les vortex se déplacent. Un champ électrique est créé, proportionnel à  $J-J_c$ . Dans le régime de flux flow une résistivité dépendante de l'induction magnétique apparaît et elle est noté  $\rho_f$ .

$$\rho_f = \rho_n \frac{B}{\mu_0 H_{c2}} \quad \text{Ou} \quad \mu_0 H_{c1} \leq B \leq \mu_0 H_{c2} \quad (I.1)$$

Pour obtenir des grandes densités de courant critique les vortex doivent être solidement ancrés dans le matériau ou au moins quelques uns d'entre eux.

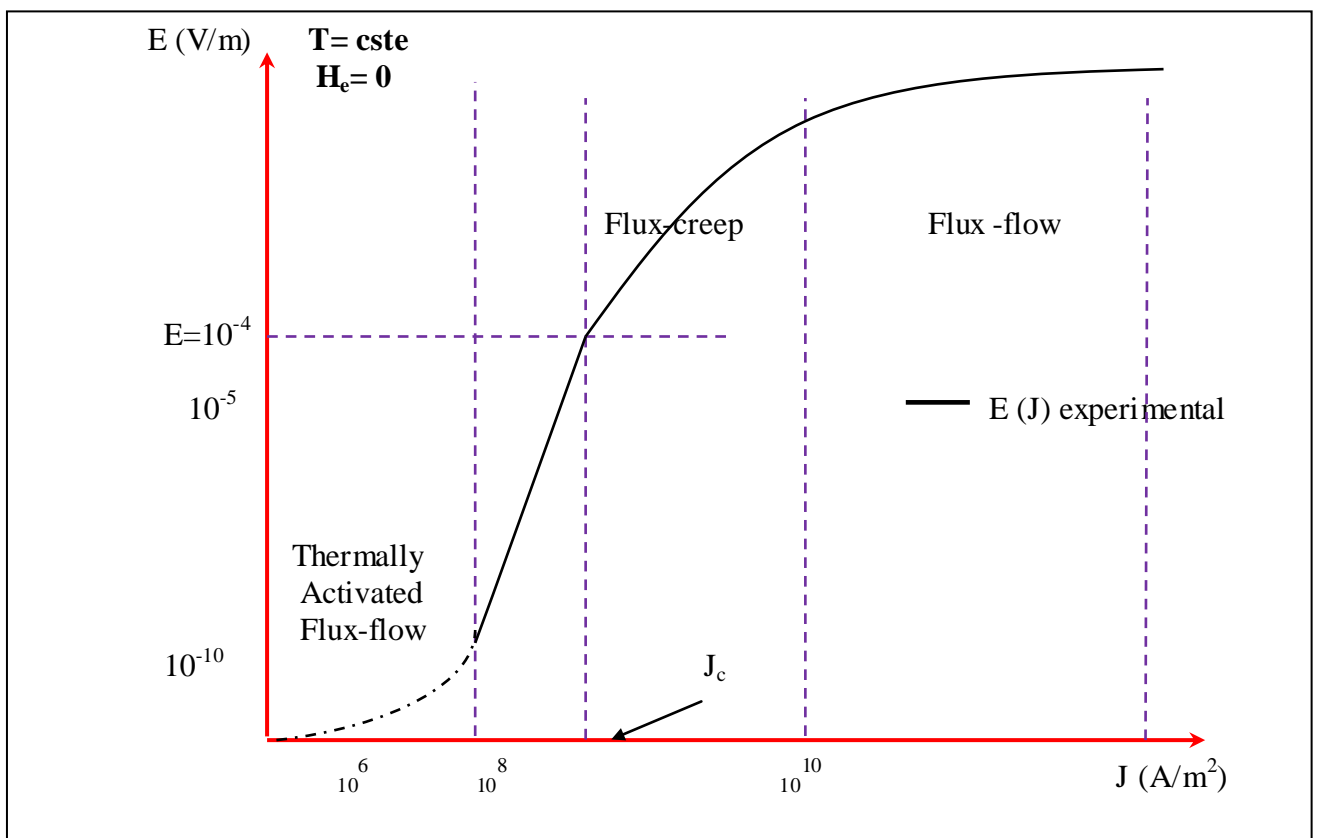


Figure. I.10. Dépendance du champ magnétique en fonction de la température

La courbe expérimentale  $E(J)$  représentée donne une image classique d'un comportement de supraconducteur HTC. Sur cette courbe, on peut distinguer trois régimes de dépendance de la valeur de  $J_c$  : le thermally activated flux-flow (TAF), le flux crêpe et le flux flow. Ces régimes se différencient par un comportement magnétique du supraconducteur différent qui est fonction de la force de Lorentz et donc du courant appliqué :

Un premier régime appelé flux-flow pour des courants supérieurs au courant critique où la force de Lorentz est très supérieure aux forces d'ancrages des vortex, laissant ainsi les vortex se déplacer librement dans la même direction dans un mouvement collectif.

Un second régime situé autour du courant critique, appelé flux-crêpe. La densité de vortex est assez forte. Des vortex interagissent entre eux. Si l'un d'eux se décroche (Force de Lorentz plus la probabilité de saut), par interaction d'autres vortex vont se déplacer. On va donc observer des déplacements de vortex par "paquets".

Un dernier régime, très controversé (en pointillé sur la Figure. I.11), pour de faibles courants appelé TAFF (thermally activated flux-flow) où les vortex sauteraient en moyenne tous dans la même direction d'un point d'ancrage à un autre de manière désordonnée. Ce régime n'est pas encore bien défini et dépend de la température (à basse température, le réseau de vortex serait "gelé" et il n'y aurait donc plus aucune dissipation. On passe donc directement en régime de flux-crêpe).

Les pertes en régime TAFF sont totalement négligeables devant les pertes en régime de flux-crêpe. Le régime de flux-flow est le plus dissipatif. [3]

#### I.4.4. La surface critique

La supraconductivité se manifeste dans la région où  $T$ ,  $H$  et  $J$  sont inférieurs à la valeur critique respective :  $T_c(H, T)$ ,  $H_c(T, J)$ , et  $J_c(T, H)$  [2]

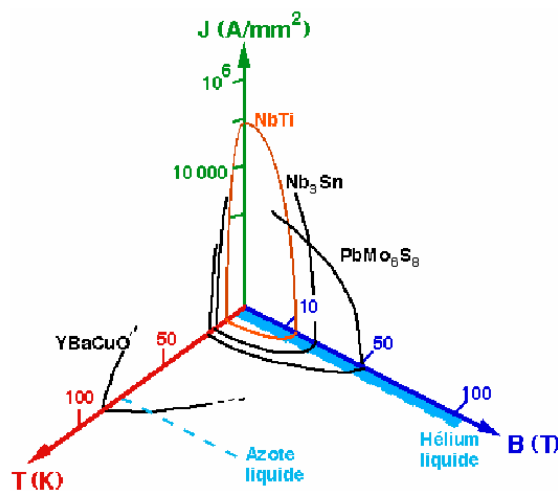


Figure. I.11. Surface critique des différents matériaux supraconducteurs [3]

## **I.5. Lévitacion et paliers magnétiques**

Les supraconducteur HTC permettent d'obtenir des valeurs en température critique plus importante mais, aussi, en champ et en densité. On envisage, alors leur utilisation dans des applications telles que la création de champs magnétique puissant, le stockage d'énergie sous forme magnétique, le limiteur de courant, etc.

Des la découvert des supraconducteurs, on s'aperçut que l'effet Meissner pouvait donner lieu à un phénomène de lévitation magnétique. Ce phénomène fait intervenir des aimants et des supraconducteurs dont l'interaction crée une force magnétique. Si cette dernière compense la gravité alors on arrive à une situation ou le corps se trouve en équilibre. La lévitation magnétique peut être mise en œuvre dans des dispositifs afin de réaliser des paliers et des suspensions magnétiques. [2].

### **I.5.1. Les paliers magnétiques**

Les paliers magnétiques sont utilisés lorsque les autres paliers ont atteint leur limite. Ils permettent à un rotor de tourner sans frottement ni contact. Leur domaine de prédilection concerne les applications à très haute vitesse de rotation, celles pour lesquelles il faut minimiser les pertes, éviter l'usure, ne pas polluer un environnement sensible par des poussières ou un lubrifiant, supprimer les vibrations, fonctionner à très basse ou très haute température ou limiter la maintenance. Il existe deux types des paliers magnétiques : les paliers actifs et paliers passifs.

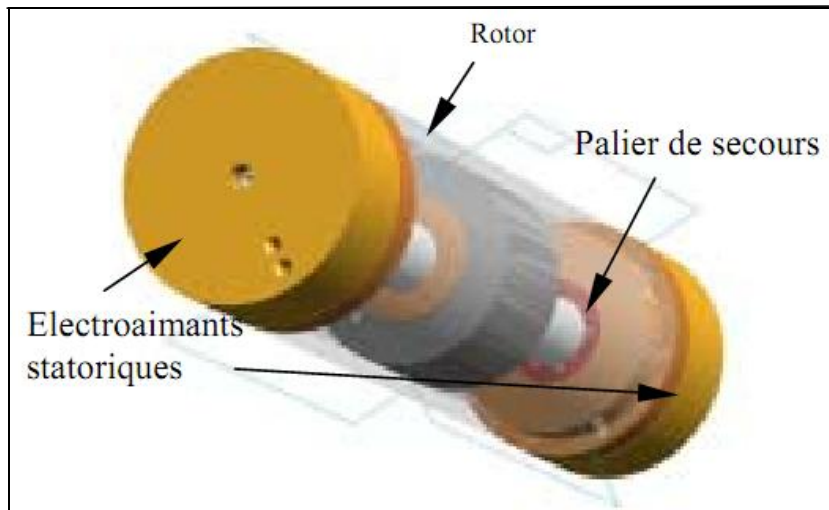
#### **I.5.1.1. Les paliers actifs**

Les paliers actifs sont des électroaimants dont le courant est asservi pour maintenir la partie mobile du circuit magnétique dans une position fixée. Ils ont besoin d'un apport d'énergie pour fonctionner.

Pour alimenter chacun des actionneurs constituant un palier actif, il faut une alimentation de puissance, une commande et un capteur de position.

Les paliers actifs sont à priori applicables à tout type de système mécanique à condition d'être correctement dimensionnés. Par contre, si leur structure est simple dans le principe (pas d'instabilité puisque correctement asservis), leur mise en œuvre est assez lourde. Une suspension complète nécessite le contrôle de cinq axes de liberté, donc de dix directions. Cela peut entraîner la mise en

œuvre de dix actionneurs, dix capteurs, dix amplificateurs de puissance et cinq commandes reliées entre elles pour tenir compte des couplages mécaniques. [8]



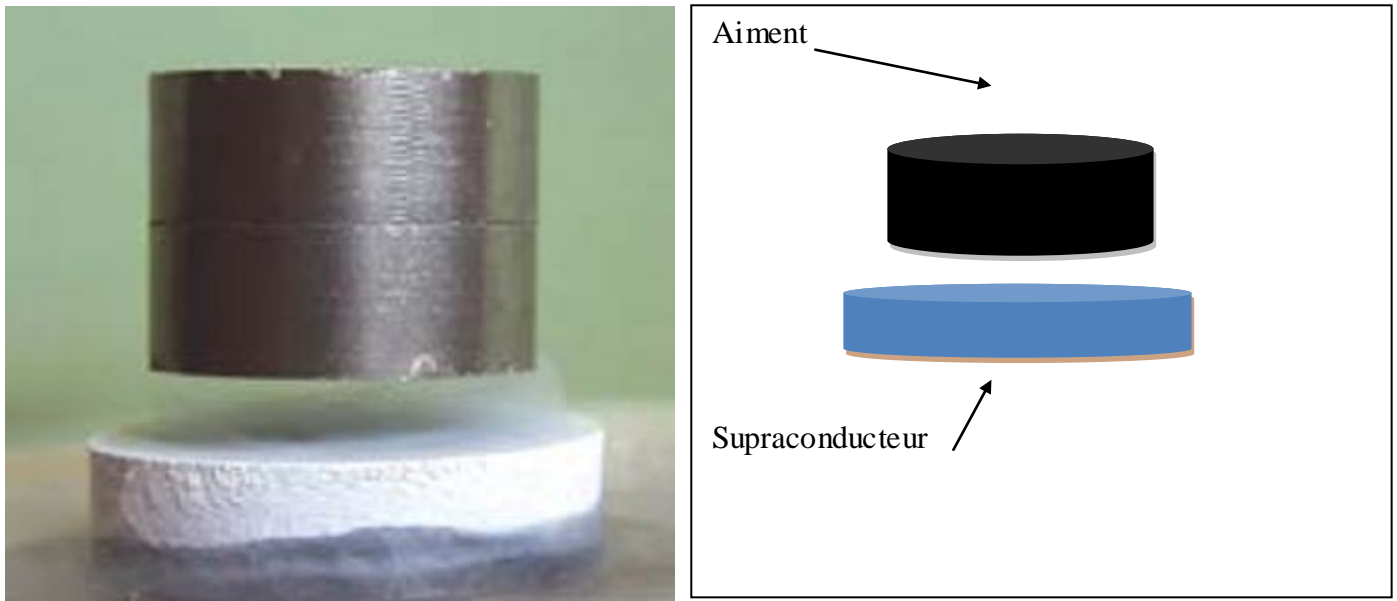
**Figure I.12. : Palier actif (Suspension complète) [8]**

### I.5.1.2. Les paliers passifs

Dans le cas des paliers passifs à aimants permanents, les forces sont créées par des interactions entre aimants permanents ce qui ne demande pas de source d'énergie contrairement à leurs homologues actifs. C'est le principe de la répulsion et de l'attraction des aimants qui est utilisé dans ce type de paliers. Les aimants permanents sont des matériaux assez résistifs électriquement, et sans autre dispositif, ils présentent des performances médiocres pour l'amortissement. Le théorème d'Earnshaw démontre l'impossibilité pour une suspension entièrement passive d'être complètement stable statistiquement sans utilisation de matériaux diamagnétiques. Parmi les matériaux diamagnétiques, les supraconducteurs permettent de concevoir des suspensions magnétique passives, entièrement stable.

La lévitation d'un corps seulement diamagnétique, par exemple un supraconducteur de type I, n'est pas très performante. Elle est instable latéralement et seule géométrie adaptée permet de la stabiliser. Les supraconducteurs de type II permettent une lévitation nettement meilleur grâce aux vortex ancrés qui agissent comme des ressorts de rappel. En effet, toute variation du champ magnétique applique entraîne un mouvement dissipatif des vortex et les pertes hystériques associées donnent des forces de rappel verticales ou latérales assurant la stabilité.

Les suspensions magnétiques avec supraconducteur peuvent être de deux types : simple ou hybride. Dans le cas de la suspension simple représentée par la figure I.14, toutes forces (verticales et transversales) sont générées par une interaction aimant permanent-supraconducteur mais les performances en lévitation sont limitées.



**Figure I.13. Structure simple [9]**

La configuration hybride est constituée par une judicieuse association de paliers à aimant permanent et paliers supraconducteurs dont le rôle est en outre de stabiliser les premiers. Les performances en lévitation peuvent être meilleures. [2]

### **Conclusion :**

Les matériaux supraconducteurs HTC ont des propriétés remarquables qui rendent leur utilisation envisageable dans divers domaines d'applications. Ils sont des candidats sérieux pour des applications liées à l'électromagnétisme, au génie électrique et à l'électronique. L'optimisation de ces dispositifs nécessite de connaître leur comportement électromagnétique. Il est donc impératif de développer des modèles macroscopiques pour les matériaux supraconducteurs.

**CHAPITRE II**

**Modélisation des matériaux**

**Supraconducteurs de type II**



## Introduction

Les supraconducteurs HTC ont des propriétés fondamentales très intéressantes. On envisage leur utilisation dans divers domaines d'applications tels que le stockage d'énergie, les transformateurs, les câbles, les machines, les limiteurs de courants et aussi les paliers magnétiques.

L'optimisation de ces dispositifs nécessite de connaître leur comportement électromagnétique. On s'intéresse alors au développement d'un modèle macroscopique qui permet d'obtenir des grandeurs globales électromagnétiques.

### II.1. Etat de l'art

On a présenté une vue d'ensemble du comportement des supraconducteurs HTC où il y a une forte dépendance entre les grandeurs caractéristiques. Il y a plusieurs régimes de fonctionnement pour les SHTC et il est difficile d'avoir un modèle analytique qui peut caractériser tous ces régimes. Cependant, quelques uns ont été mis au point pour modéliser l'état supraconducteur dans certaines conditions et hypothèses. Le modèle macroscopique le plus utilisé est le modèle de l'état critique avec sa version simplifiée, le modèle de Bean. Ces modèles représentent assez bien la réalité et permettent de mener complètement les calculs analytiques dans le cas de géométries simples. Ces cas constituent des cas tests pour valider les modèles numériques. Pour la dépendance de  $J_c$  en fonction de l'induction magnétique, les modèles de Kim ou exponentiel pourront être utilisés. Un supraconducteur fonctionne autour de sa densité de courant critique (régime de flux crêpe).

#### II.1.1 Le modèle de l'état critique

C'est le modèle le plus classique qui stipule qu'à une température donnée la densité de courant dans un supraconducteur est soit nulle, soit égale à la densité de courant critique  $J_c$ . Le supraconducteur est considéré comme non magnétique.

$$\mathbf{J} = J_c \left( \frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|} \right) \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|} \quad (\text{II-1})$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}} \quad (\text{II-2})$$

D'un point de vue plus mathématique, on traduit ces expressions avec les équations de Maxwell :

$$\mathbf{rot}\vec{\mathbf{B}} = \pm\mu_0\vec{\mathbf{J}}_c \qquad \text{Ou :} \qquad \mathbf{rot}\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{0}} \qquad \text{(II-3)}$$

Le modèle de Bean (1962) suppose, en plus, que la densité de courant critique est indépendante de la valeur de l'induction magnétique B.

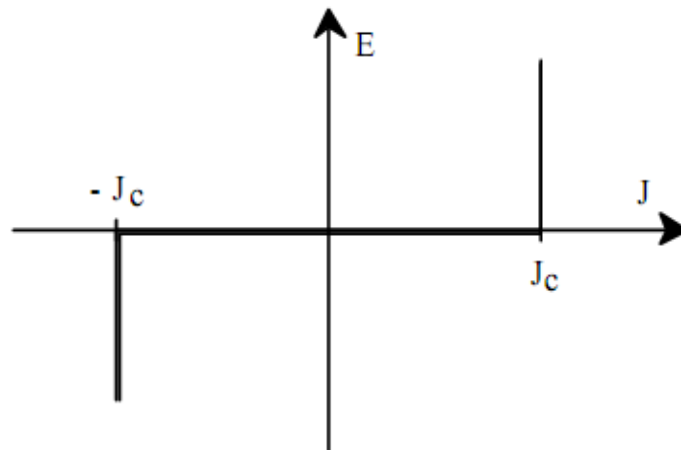


Figure II.1. Caractéristique E(J) basée sur le Modèle de Bean

Ce modèle a l'avantage d'être assez simple mathématiquement et permet pour des géométries simples, d'avoir des expressions analytiques et d'étudier les grandeurs importantes pour les pertes A.C. par exemple. Cependant, la discontinuité de ce modèle le rend peu utilisable pour des développements numériques; de plus, il ne reflète pas toujours de façon satisfaisante le comportement des supraconducteurs.

### II.1.2. Le modèle de la loi de puissance

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{J}}) = \frac{\mathbf{E}_c}{\mathbf{J}_c} \left( \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J}_c} \right)^{N-1} \vec{\mathbf{J}} \qquad \text{(II-4)}$$

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{H}}) = \mu_0 \vec{\mathbf{H}} \qquad \text{(II-5)}$$

C'est un modèle qui modélise bien le comportement des supraconducteurs HTC autour de  $J_c$ . Les paramètres de variation de cette loi sont la densité de courant critique,  $J_c$  et l'exposant,  $N$ . Avec ce modèle on peut faire varier les courbes  $E(J)$  de sorte qu'on peut modéliser un conducteur normal pour  $N = 1$  (loi de  $c$  comportement linéaire) jusqu'à avoir une courbe raide comme dans le modèle de l'état critique pour un  $N > 100$ .

### II.1.3. Le modèle de KIM

Le modèle de Bean ainsi que la loi en puissance considèrent le matériau supraconducteur isotrope et isotherme. Ils ne tiennent pas compte de l'échauffement éventuel du conducteur sous l'effet des pertes qui entraînerait une diminution du courant critique. Dans le modèle de Bean, la densité de courant critique est supposée constante quel que soit le champ magnétique extérieur. Dans la réalité la densité de courant dépend fortement de son orientation par rapport au champ et de l'induction magnétique,  $B$ . Une expression de  $J_c(B)$  dans le cas isotrope a été donnée par Kim

$$J_c(|\mathbf{B}|) = \frac{J_{c0} B_0}{|\mathbf{B}| + B_0} \quad (\text{II-6})$$

C'est le modèle le plus utilisé pour la modélisation de la dépendance de la densité de courant critique avec l'induction magnétique.

### II.1.4. Le modèle exponentiel [2]

Un autre modèle utilisé en développements numériques est le modèle de dépendance  $J_c(B)$  suivant: [3]

$$J_c(|\mathbf{B}|) = J_{c0} \exp\left(-\frac{|\mathbf{B}|}{B_0}\right) \quad (\text{II-7})$$

### II.1.5. Le modèle Flux-flow-crêpe (FFC)

Les lois de ce modèle prenant en compte le déplacement et l'ancrage des vortex :

- Le régime de flux-crêpe :

$$\mathbf{E} = 2\rho_c \mathbf{J}_c \sinh\left(\frac{U_0 \mathbf{J}}{k\theta \mathbf{J}_c}\right) \cdot \exp\left(-\frac{U_0}{k\theta}\right) \quad \text{Si } 0 \leq J \leq J_c \quad (\text{II-8})$$

- Le régime de flux-flow :

$$\mathbf{E} = \rho_c \mathbf{J}_c + \rho_f \mathbf{J}_c \left(\frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J}_c} - 1\right) \quad \text{Si } J > J_c \quad (\text{II-9})$$

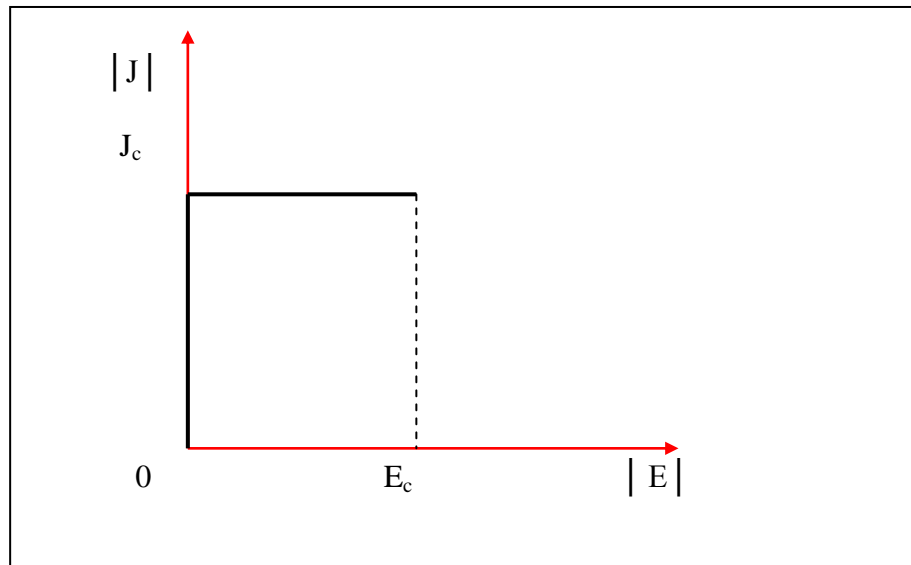
Où  $U_0$  est le potentiel d'ancrage,  $\theta$  la température,  $k$  la constante de Boltzmann et  $\rho_f$  et  $\rho_c$  les résistivités propres au matériau. Ce modèle tien compte de la température.

Dans ce travail, nous choisi d'intéresser au modèle de Bean qui reste le plus utilisé en ingénierie.

## II.2. Approximation du modèle de Bean

Le modèle de Bean à l'avantage d'être simple mathématiquement et de ce fait permet sur des exemples simples de bien comprendre la supraconductivité d'un point de vue macroscopique.

La figure (II.2) montre comment en tout point du supraconducteur, la densité de courant est liée au champ électrique. Le paramètre  $E_c$  est une valeur empirique du champ électrique à partir de laquelle le matériau devient résistif.



**Figure II.2. Modèle de Bean [2]**

Ce modèle a été étudié dans le cas d'un problème monodimensionnel. Il a permis à partir de calculs analytiques d'obtenir des résultats satisfaisants. En revanche, il est difficilement exploitable dans le cas de problème bidimensionnel pour une approche numérique. La relation liant  $J$  et  $E$  par le modèle de Bean n'est pas un graphe fonctionnel, ce qui rend sa modélisation mathématique difficile. Lorsque le champ électrique est nul, la valeur absolue de la densité de courant peut prendre toutes les valeurs entre 0 et  $J_c$ .

Pour pouvoir l'exploiter d'un point de vue numérique, on utilise le modèle de Bean modifié.

L'approximation de ce modèle, on introduit une fonction  $E \longrightarrow J = \beta(E)$  approchant le modèle de Bean par l'intermédiaire de deux variables  $\sigma_f$  et  $E_n$

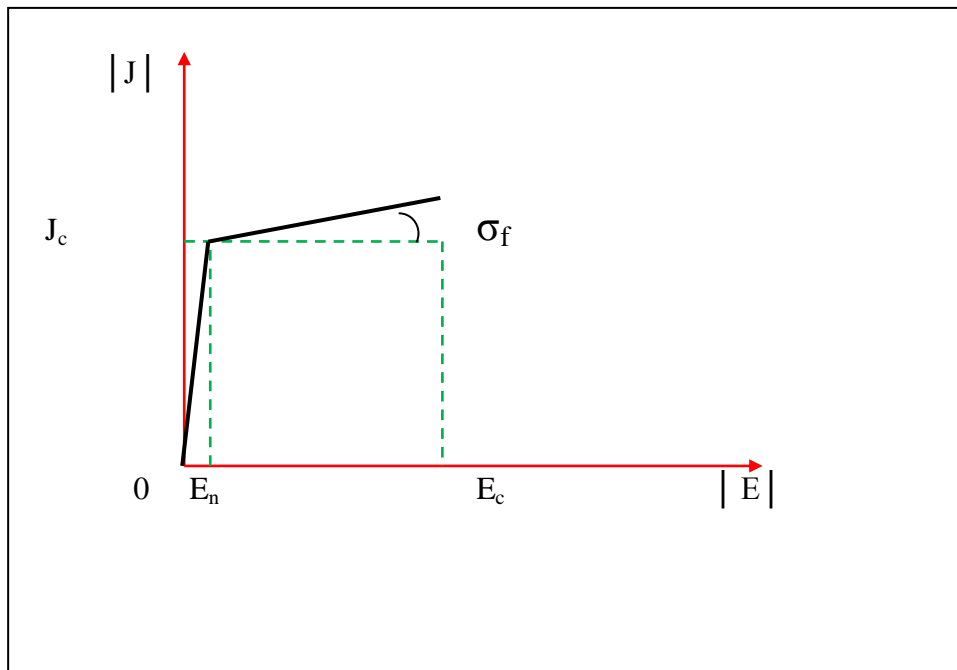


Figure II.3. Le modèle de Bean modifié [2]

Pour des champs électriques de module supérieur à  $E_c$ , le matériau supraconducteur transite. Il passe de l'état supraconducteur à un état résistif et vérifie donc la loi d'ohm :

$$J = \sigma E \tag{II-10}$$

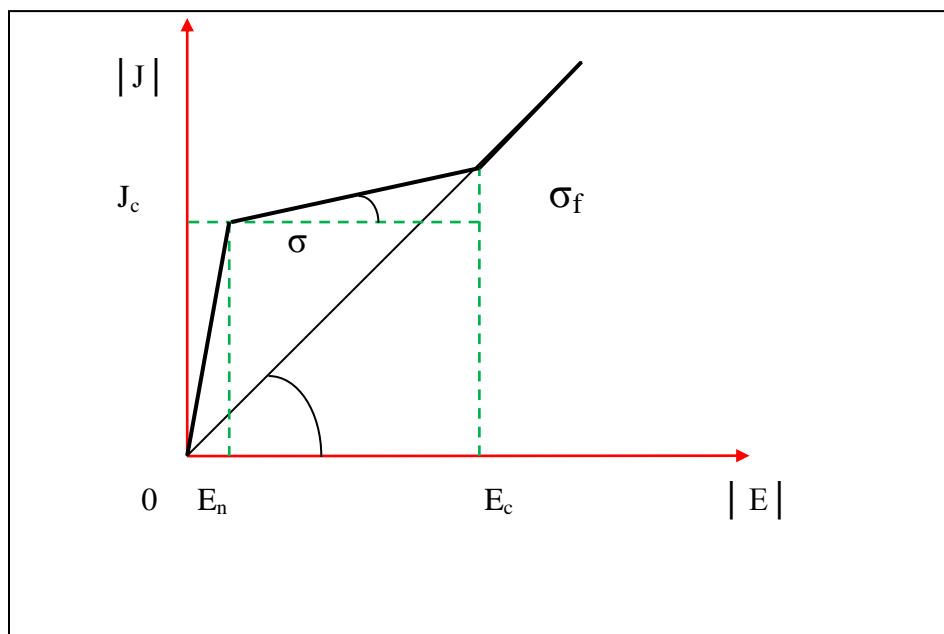


Figure II.4. Prise en compte du passage à un état résistif dans le modèle de Bean modifié. [2]

**II.3. Formulation mathématique de modèle**

Pour décrire le comportement électromagnétique du supraconducteur, on associe alors les équations de Maxwell relatives aux champs macroscopiques.

L'état statique donné par ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  et  $\text{div } \mathbf{J} = 0$ ) ne définit pas avec l'utilisation du modèle de Bean, de façon unique l'état électromagnétique. Ainsi la distribution de courant n'est déterminée que si on connaît l'histoire du supraconducteur. Pour cela, on associe au modèle de Bean modifié les équations de Maxwell liant le champ électrique  $\mathbf{E}$ , le champ magnétique  $\mathbf{H}$ , l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et la densité de courant  $\mathbf{J}$ . [2]

**II.3.1. Domaine d'étude**

Le domaine global ( $\Omega$ ) représente le domaine de résolution du problème électromagnétique. Il est composé de régions conductrices, non conductrices magnétiques ou amagnétiques et de sources de courant. Des conditions aux limites seront imposées sur la frontière  $\Gamma$ .

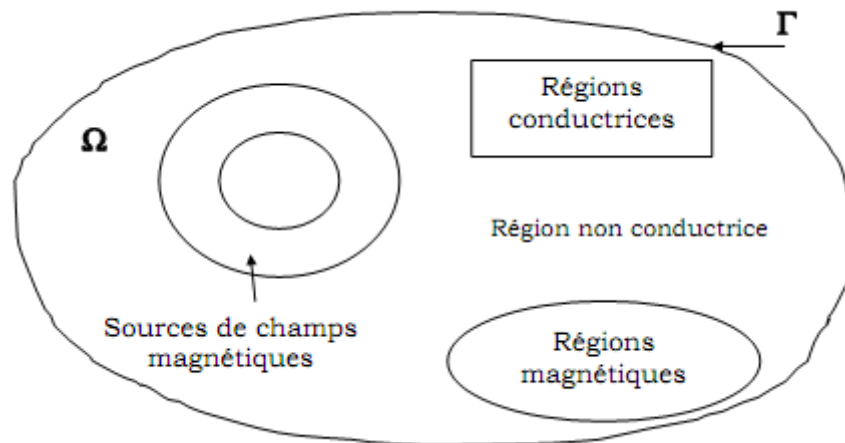


Figure II.5. Domaine d'étude [9]

**II.3.2. Les équations de Maxwell :**

Les phénomènes électromagnétiques variables dans le temps et dans l'espace sont régis par les quatre équations générales locales de Maxwell :

$$\overline{\text{rot}}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II-11})$$

$$\overline{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II-12})$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho \quad (\text{II-13})$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (\text{II-14})$$

Avec:

**H** : Champ magnétique [A/m]

**E** : Champ électrique [V/m]

**B** : Induction magnétique [T]

**D** : Induction électrique [C/m<sup>2</sup>]

**J** : Densité du courant [A/m<sup>2</sup>]

**ρ** : Densité volumique des charges électriques [C/m<sup>3</sup>]

Les lois Maxwell-Ampère (II-11) et Maxwell-Faraday (II-12) expriment le couplage entre les grandeurs électriques et magnétiques.

### II.3.3. Relations constitutives :

Les équations précédentes sont associées aux relations constitutives (lois de comportements) des matériaux. Le comportement magnétique est exprimé par la relation suivante:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (\text{II-15})$$

Avec :

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (\text{II-16})$$



Où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide et  $\mu_r$  est la perméabilité relative du milieu qui peut dépendre ou non de  $\mathbf{H}$ .

La forme locale de la loi d'Ohm dans l'absence de déplacement des charges s'écrit comme suit :

$$\mathbf{J} = [\sigma] \cdot \mathbf{E} + [\varepsilon] \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{II-17}$$

Où  $[\sigma]$  et  $[\varepsilon]$  sont respectivement les tenseurs de conductivité et de permittivité électriques qui dans le cas des matériaux anisotropes s'écrivent :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad [\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{II-18}$$

De l'équation (II-11) et (II-13) on peut déduire que la densité de courant est à flux conservatif :

$$\text{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{II-19}$$

### II.3.4. Conditions de passage :

Lors du passage d'un milieu 1 à un milieu 2, les grandeurs de champs subissent des discontinuités et, ne sont pas différentiables. Les relations entre les grandeurs électromagnétiques à l'interface, dites relations de transmission, s'écrivent alors :

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \rho_s \tag{II-20}$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{II-21}$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s \tag{II-22}$$

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} = 0 \tag{II-23}$$

Avec :  $\rho_s$  la densité surfacique de charge,  $\mathbf{J}_s$  la densité surfacique de courant et  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur du milieu 1.

### II.3.5.Écritures simplifiées des équations :

Dans le cadre de notre travail, quelques simplifications sont possibles sur les lois de comportement. Les charges volumiques sont négligées ( $\rho=0$ ). (II-19) devient alors :

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (\text{II-24})$$

De plus, si les composantes de champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  et de courants  $\mathbf{J}$  ont une dépendance sinusoïdale du temps, tel que :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{r})e^{i\omega t} \quad (\text{II- 25})$$

La dérivée par rapport au temps sera remplacée par :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{X} \quad (\text{II- 26})$$

L'équation (II-7) devient alors :

$$\mathbf{J} = ([\sigma] + j\omega [\varepsilon]). \mathbf{E} \quad (\text{II- 27})$$

Pour simplifier l'écriture nous intégrons le terme  $j\omega[\varepsilon]$  dans le terme  $[\sigma]$ .

### II.4.Formulation du problème :

La combinaison entre les équations de maxwell, les relations constitutives et les relations de passage permet de formuler le problème électromagnétique suivant différentes variables d'états.

#### II.4.1.Formulation dans les régions conductrices

Les phénomènes électromagnétiques dans les régions conductrices du domaine d'étude sont régis par les équations de la magnétodynamique. Les formulations généralement utilisées pour exprimer l'équation finale à résoudre s'appuient sur des formulations en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  ou champ électrique  $\mathbf{E}$  et les formulations en champ magnétique  $\mathbf{H}$  ou potentiel vecteur électrique  $\mathbf{T}$ .

### II.4.1.1. Formulation en A-V

Dans ce type de formulation, le champ électrique  $\mathbf{E}$  est exprimé en fonction de potentiels. Le potentiel vecteur magnétique est issu de l'hypothèse que l'induction est à flux conservatif on a alors :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (\text{II- 28})$$

L'équation de Maxwell-Faraday (II-2) implique l'existence d'un potentiel scalaire électrique  $V$  tel que :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } V \quad (\text{II- 29})$$

La densité de courant (II-17) s'écrit alors:

$$\mathbf{J} = -[\sigma] \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } V \right) \quad (\text{II- 30})$$

La continuité des potentiels  $\mathbf{A}$  et  $V$  implique la continuité de la composante normale de l'induction magnétique et de la composante tangentielle du champ électrique. Par contre il faut assurer la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à l'interface de milieux de perméabilités différentes, et la continuité de la composante normale de la densité de courant à l'interface de milieux de conductivités différentes. Ces deux conditions sont naturellement imposées par la formulation éléments finis.

En remplaçant le champ magnétique  $\mathbf{H}$  et la densité de courant  $\mathbf{J}$  par leurs expressions en fonction de  $\mathbf{A}$  et  $V$ , la forme locale du théorème d'Ampère (II-27) s'écrit :

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) + [\sigma] \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } V \right) = 0 \quad (\text{II- 31})$$

Pour assurer l'unicité de  $\mathbf{A}$ , il faut imposer une condition de jauge supplémentaire appelée condition de passage.

Dans le cadre des éléments nodaux, il est souvent fait appel à la jauge de Coulomb ( $\text{div } \mathbf{A} = 0$ ) ou la jauge de Lorenz ( $\text{div } \mathbf{A} = -\mu\sigma V$ ).

### II.4.1.2 Formulation en $\mathbf{H}$

L'équation à résoudre est directement donnée par les équations (II-11), (II-12), (II-15) et (II-17) comme suit :

$$\mathbf{rot}\left([\sigma]^{-1}(\mathbf{rot}\mathbf{H})\right) + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (\text{II- 32})$$

La formulation en  $\mathbf{H}$  a pour avantage d'avoir une solution unique si les conditions aux limites imposées sont adéquates, et donc ne nécessite aucune condition de jauge. La continuité de la composante tangentielle du champ  $\mathbf{H}$  est assurée dans le cadre d'une formulation en éléments d'arêtes.

### II.4.1.3 Formulation en $\mathbf{T}$ - $\Phi$

Comme la densité de courant induite est à divergence nulle, un potentiel vecteur électrique, noté  $\mathbf{T}$ , peut être introduit tel que :

$$\mathbf{J} = \mathbf{rot} \mathbf{T} \quad (\text{II- 33})$$

L'équation (II-14) implique aussitôt :

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \mathbf{grad} \Phi \quad (\text{II- 34})$$

Où  $\Phi$  est le potentiel scalaire magnétique.

L'équation à résoudre se déduit en remplaçant  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{J}$  par  $\mathbf{T}$  et  $\Phi$  dans (II-12) :

$$\mathbf{rot}\left([\sigma]^{-1} \mathbf{rot}\mathbf{T}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{T} - \mathbf{grad}\Phi) = 0 \quad (\text{II-35})$$

La continuité de  $\mathbf{T}$  et  $\Phi$  implique la continuité de la composante normale de  $\mathbf{J}$  et la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$ . Par contre il faut assurer la continuité de la composante normale de  $\mathbf{B}$  à l'interface de milieux de perméabilités différentes, et la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  à l'interface de milieux de conductivités différentes.

A cette formulation est associée aussi une condition de jauge, de même type que celle imposée dans la formulation en  $\mathbf{A}$ - $\mathbf{V}$ , qui permet d'assurer l'unicité de la solution  $\mathbf{T}$ .

#### II.4.1.4. Formulation en E

La formulation en champ électrique s'obtient en faisant la dérivée de l'équation Maxwell-Ampère (II-11) par rapport au temps :

$$\mathbf{rot} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) + [\sigma] \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (\text{II-36})$$

#### II.4.2. Formulation dans les régions non conductrices

Dans les régions non conductrices du domaine d'étude ( $\Omega$ ), il ne se développe pas de courants induits. Les phénomènes électromagnétiques dans ces régions sont régis par les équations de la magnétostatique. Les formulations utilisant le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire magnétique, sont adoptées dans ce cas.

##### II.4.2.1 Formulation en A

Dans ce cas le champ électrique n'intervient pas, l'équation à résoudre est alors :

$$\mathbf{rot} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_s \quad (\text{II- 37})$$

Où,  $\mathbf{J}_s$  est la densité de la courante source.

##### II.4.2.2. Formulation en potentiel scalaire magnétique (H- $\Phi$ et H- $\Phi_r$ )

Dans les régions où il n'y a pas de courantes sources, l'équation (II-1) peut s'écrire :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = 0 \quad (\text{II- 38})$$

H dérive alors d'un potentiel scalaire ( $\Phi$ ), tel que :

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \Phi \quad (\text{II- 39})$$

La formulation H- $\Phi$  en potentiel scalaire magnétique s'obtient en remplaçant, H par son expression (II, 39) dans (II-15) et en remplaçant l'expression de B obtenue dans (II-14) :

$$\mathbf{div}[\mu - \mathbf{grad}\Phi] = 0 \quad (\text{II-40})$$

La continuité du potentiel scalaire magnétique ( $\Phi$ ) implique la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique. Par contre il faut vérifier la continuité de la composante normale de vecteur induction magnétique à l'interface entre deux régions de perméabilité différentes, par la relation :

$$\mu_1(-\mathbf{grad}\Phi_1) \cdot \mathbf{n} = \mu_2(-\mathbf{grad}\Phi_2) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{II-41})$$

Où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à l'interface

L'inconnue étant un scalaire, cette formulation est plus intéressante que la formulation en potentiel vecteur pour les régions non conductrices. Cependant elle ne s'applique pas aux régions où des courants sont présents.

Néanmoins, une variante de cette formulation permet de prendre en compte ces courants. Celle-ci est usuellement appelée la formulation en potentiel magnétique réduit. Son principe se base sur la décomposition du champ magnétique H en deux parties, tel que :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_j + \mathbf{H}_r \quad (\text{II-42})$$

Avec :

$\mathbf{H}_j$  : champ source, champ créé par l'inducteur s'il était seul (à vide).

$\mathbf{H}_r$  : champ créée par la réaction des parties magnétiques et conductrices lorsqu'elles sont soumises au champ source  $\mathbf{H}_j$ .

$\mathbf{H}_j$  est donné en tout point L, par la formule de Biot et Savart :

$$\mathbf{H}_j(\mathbf{L}) = \iiint_{\Omega} \frac{1}{4\pi} \mathbf{J}_s \times \frac{\mathbf{LL}'}{|\mathbf{LL}'|^3} \cdot d\Omega \quad (\text{II-43})$$

Où L' est un point situé dans la région de l'inducteur.

La forme locale du théorème d'Ampère (II-11) s'écrit alors :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{H}_j + \mathbf{H}_r) = \mathbf{J}_s \quad (\text{II- 44})$$

Le champ source  $\mathbf{H}_j$  vérifie le théorème d'Ampère, alors que le champ de réaction  $\mathbf{H}_r$  est à rotationnel nul :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{H}_j) = \mathbf{J}_s \quad (\text{II- 45})$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{H}_r) = 0 \quad (\text{II-46})$$

La relation (II-36) implique que  $\mathbf{H}_r$  dérive d'un potentiel scalaire magnétique  $\Phi_r$  :

$$\mathbf{H}_r = -\mathbf{grad}\Phi_r \quad (\text{II- 47})$$

L'expression (II-32) du champ magnétique  $\mathbf{H}$  s'écrit alors:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_j - \mathbf{grad}\Phi_r \quad (\text{II-48})$$

L'équation à résoudre dans ce cas est :

$$\mathbf{div}[\mu(\mathbf{H}_j - \mathbf{grad}\Phi_r)] = 0 \quad (\text{II-49})$$

La continuité de  $\Phi_r$  implique la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$ . En revanche, il faut assurer la continuité de la composante normale de l'induction  $\mathbf{B}$  par la relation suivante :

$$\mu_1(\mathbf{H}_j - \mathbf{grad}\Phi_{r1}) \cdot \mathbf{n} = \mu_2(\mathbf{H}_j - \mathbf{grad}\Phi_{r2}) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{II- 50})$$

Où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à l'interface.

La formulation en potentiel scalaire magnétique (total ou réduit) paraît très attractive, surtout quand les systèmes à modéliser ne comportent pas de régions conductrices multiplement connexes. Le nombre d'inconnues est réduit de manière considérable, ce qui permet de réduire le temps de résolution ainsi que le coût de simulation. La formulation en potentiel scalaire réduit est moins précise dans les régions ferromagnétiques où la perméabilité est élevée ( $\mu_r > 100$ ) et dans les régions où le champ magnétique est très atténué (écran électromagnétique). La solution est d'utiliser le potentiel scalaire total dans ces régions [9].

## II.5. Choix de la formulation

En fonction de la dimension et de la complexité du problème à traiter, le choix d'une formulation dépend des capacités numériques de résolution, de mise en œuvre et de précision. Le tableau suivant présente les avantages et inconvénients des différentes formulations (Tableau II. 1)

Formulations	Avantages	Inconvénients
A-V	Traitements des régions multiplement connexes	4 inconnues
T- $\Phi$	Adaptée aux régions conductrices	- Régions multiplement connexes - 4 inconnues
Eléments coques généralisés	- 1 inconnue - traitement analytique des régions minces conductrices	- Régions multiplement connexes

**Tableau II. 1** Comparaison des formulations électromagnétiques

### Conclusion

La modélisation des matériaux supraconducteurs permette d'étudier leur comportement électromagnétique.

Cette modélisation, présente une version approchée du modèle de l'état critique de Bean qui d'une part, a l'avantage d'être plus facilement utilisable que le modèle de Bean non modifié. D'autre part, il pourrait tenir compte du déplacement et de piégeage des vortex.

Pour cela l'étude du comportement des supraconducteurs nécessite la connaissance des grandeurs électromagnétiques  $\vec{J}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  à l'intérieur de ces dispositifs. L'étude de ces dernières sera présentée dans le chapitre suivant.



# **CHAPITRE III**

## **Formulation et résolution numérique**

## Introduction

Nous avons à résoudre un problème physique dont on ne connaît pas à première vue la solution. Pour cela, on discrétise le problème, c'est-à-dire que l'on approche le problème exact par un problème discret formulé dans un espace de dimension finie censé en être représentatif.

On a alors recourt à des techniques d'approximation. Divers méthodes d'approximations ont été successivement utilisées.

Pendant la première moitié du vingtième siècle, la quasi-totalité des méthodes d'approximation consistait à la main basée sur des développements en séries de Fourier.

A partir des années 1950, l'utilisation des calculateurs électroniques s'est développée, ce qui a complètement modifié les méthodes d'approximations.

On distingue parmi elles deux types de méthodes. Par ordre chronologique : la méthode des différences finies puis la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis plutôt que celle des différences finies. En effet, nous sommes ici confrontés à un problème complexe à géométrie complexe et non linéaire avec un maillage non uniforme. Cette méthode assure plus de souplesse dans le choix du maillage et rend des solutions plus exactes.

Dans ce travail concernant la modélisation de supraconducteur basé sur une loi empirique de puissance en ce qui concerne la relation entre le champ électrique et la densité de courant. Le supraconducteur a été considéré non magnétique et plusieurs formulations introduites dans le logiciel de calcul par éléments finis, **Flux2/3D®**, sous la licence de CEDRAT ont été étudiées.

### III.2. Discrétisation numérique par la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est un outil très puissant [10] pour résoudre beaucoup de problèmes en électromagnétisme. Elle a été proposée en 1940. Sa première application en électromagnétisme a été effectuée par Sylvester. Au début, cette méthode utilise une approche scalaire. Cette approche a connu beaucoup de problèmes notamment pour son application aux problèmes vectoriels. Ces problèmes ont été surmontés en introduisant les éléments d'arêtes (approche vectorielle).

D'une manière générale, la résolution d'un problème donné en utilisant la FEM comprend 4 phases:

- La subdivision du domaine global: La première étape est la subdivision du domaine entier en plusieurs sous domaines ou éléments. Pour une structure régulière (ex: rectangulaire), les éléments choisis sont souvent des rectangles. Pour une forme complexe, les éléments sont des triangles. Pour des raisons d'implémentation, il faut donner des informations sur les nœuds et les arêtes de chaque élément tels que les coordonnées des nœuds, les numéros d'arêtes dans toute la structure (numéros globaux), les numéros d'arête dans l'élément (numéros locaux) ...
- Définition des fonctions d'interpolation: la deuxième étape consiste à choisir les fonctions d'interpolation qui permettent d'approximer les paramètres inconnus (dans notre cas les champs électriques) dans chaque élément. Les fonctions d'interpolations sont souvent des polynômes d'ordre 1, 2, ... qui sont définis uniquement dans l'élément en considération.
- Formulation du système d'équations. Cette phase comprend trois étapes:
  - ❖ Formulation des équations élémentaires dans chaque élément en utilisant soit la méthode de Ritz soit celle de Galerkin.
  - ❖ Somme des équations élémentaires dans tous les éléments pour former un système d'équations. Ce processus est connu sous le nom d'assemblage.
  - ❖ Imposer les conditions aux limites pour obtenir le système d'équations final près à la résolution.
- Solution du système d'équations en utilisant des méthodes directes ou itératives. [10]

### III.2.1. Élément rectangulaire

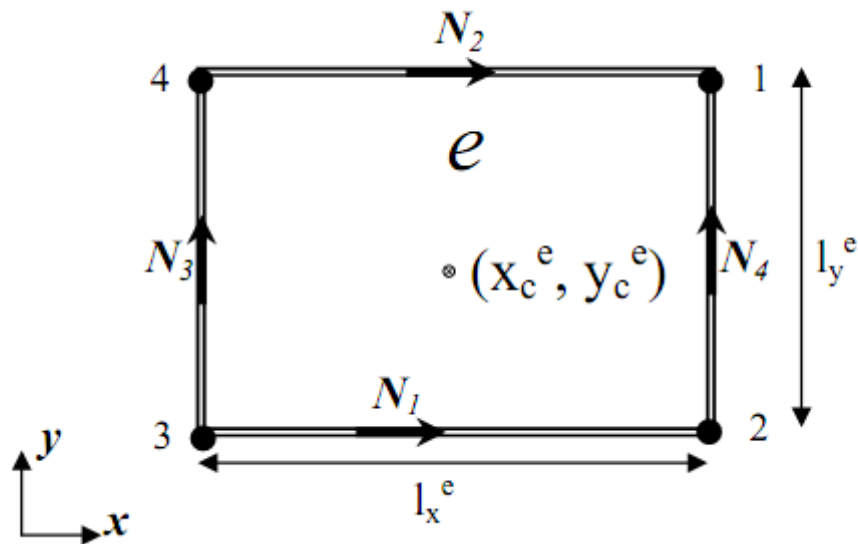


Figure III.1: Élément rectangulaire. [10]

On considère un élément rectangulaire  $e$  (fig.III .1). Le couple  $(X_c^e, Y_c^e)$  étant le centre de l'élément. Dans un élément rectangulaire, le champ électrique peut être écrit de la manière suivante:

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m=1}^4 \mathbf{E}_m^e \mathbf{N}_m^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{III.1})$$

$\mathbf{E}_m^e$  : Champ électrique tangentiel à l'arête  $m$  de l'élément  $e$ .

$\mathbf{N}_m^e(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  : Fonction d'interpolation relative à l'arête  $m$  de l'élément  $e$ .

## III.2.2. Élément triangulaire

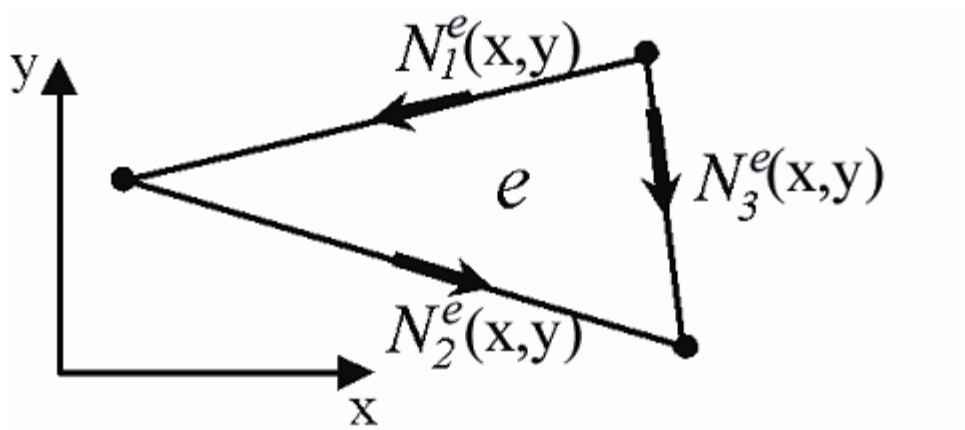


Figure III.2: élément triangulaire.[10]

Dans un élément triangulaire  $e$  (fig.III.2), le champ électrique peut être écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m=1}^3 \mathbf{E}_m^e \mathbf{N}_m^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{III.2})$$

Le champ électrique dans toute la surface discrétisée à la forme suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 \mathbf{E}_m^e \mathbf{N}_m^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{III.3})$$

$N_e$  : nombre d'éléments. [10]

### III.3.Présentation de logiciel Flux 2D

Flux2/3D® est un logiciel de simulation multi-physique des systèmes appuyant sur la méthode des éléments finis. Il permet le calcul des états magnétiques, électriques et thermiques des dispositifs en régimes permanents et transitoires ou harmoniques, avec des fonctionnalités d'analyse multiparamétrique étendues, les couplages circuit et cinématique.

Le Flux/3D est développé (en collaboration avec le G2ELab, fusion du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, du Laboratoire d'Électrostatique et Matériaux Diélectriques et du Laboratoire de Magnétisme du Navire) et distribué en France par la société CEDRAT S.A.C'est un logiciel complet ayant l'avantage de permettre le couplage avec les équations de circuits.

Les principaux modules permettant la simulation de tous systèmes physiques à l'aide de Flux 2D sont présentés :

- **Module préprocesseur** : Permet, à travers plusieurs modules, de définir la géométrie du dispositif à étudier (PREFLU), de choisir et/ou de construire une banque de matériaux (CLSMAT), d'affecter les propriétés physiques aux différentes régions géométriques prédéfinies (PROPHY) et de définir le schéma et/ou les données du circuit électrique (CIRFLU). Il permet également un maillage automatique d'une géométrie 2D prédéfinie (PREFLU).
- **Module processeur** : Constitué principalement d'un module de résolution 2D (SOLVER 2D) des différents modèles usuels de l'électromagnétisme et des problèmes thermiques.
- **Module post-processeur** : c'est un module (PostPro 2D) permet, entre autres, de tracer les équipotentielles ou les lignes de flux, le maillage, la géométrie et les courbes 2D ou 1D selon un chemin prédéfini. Il permet aussi de calculer des grandeurs globales telles que le couple ou la force appliqués à un contour fermé, les inductions, les flux, les inductances, etc.

#### III.3.1.Implémentation du modèle EF à l'aide de Flux2D

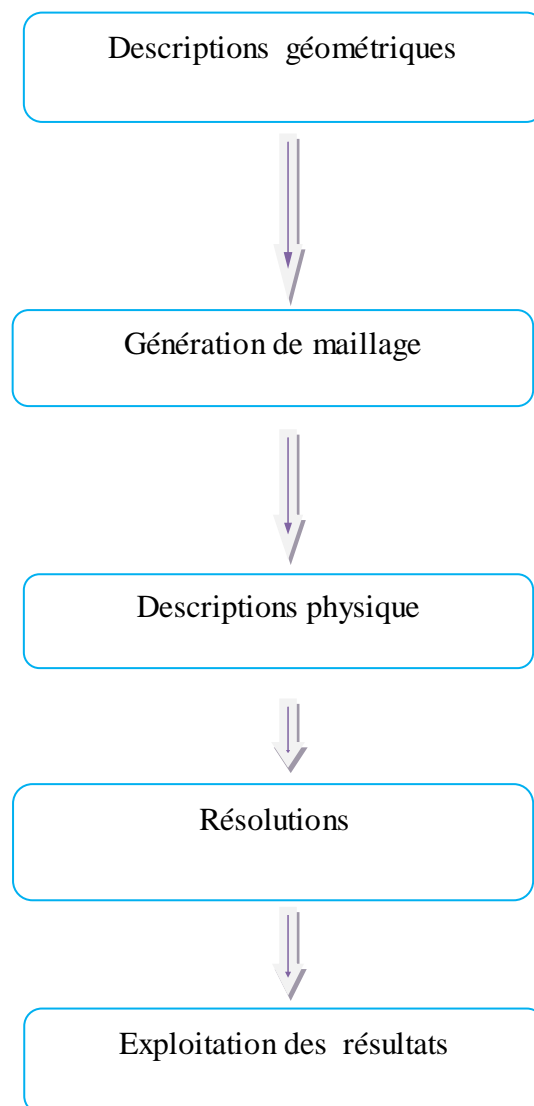
Les développements informatiques de ce travail ont tous été réalisés en utilisant FLUX2D, logiciel de calcul des champs par éléments finis. Ces développements ont consistés à implanter les formulations présentées dans la suite de ce chapitre et à intégrer les lois de comportements présentées chapitre II.

Ceci à été fait en essayant de profiter au maximum de ce qui existait déjà dans FLUX2D et notamment le SOLVEUR et l'interface graphique.

Dans les problèmes avec supraconducteurs, la non linéarité de la loi  $J(E)$  impliquant que les grandeurs ne sont jamais toutes sinusoïdales, on ne peut pas utiliser de méthodes basées sur les nombres complexes et simulant un régime permanent sinusoïdal.

Il faut, dans notre cas, utiliser systématiquement des méthodes dites transitoires ou pas à pas dans le temps ce qui entraîne des temps de calcul important.

La Figure(III.3) présente la démarche générale utilisée pour implémenter le modèle éléments finis de supraconducteur à l'aide de Flux2D. Cette démarche est détaillée dans l'étape suivante.



**Figure III.3. Démarche générale pour l'implémentation du modèle en Flux**

### III.3.2. Description géométrique

La phase de description géométrique est la première phase dans la procédure d'implémentation du modèle physique d'un matériau supraconducteur.

Avant l'implémentation du modèle, et la description de la géométrie on définit l'application choisi et la profondeur

Notre application est magnétique 2D transitoire avec une profondeur de 1000 mm.

#### III.3.2.1. Définition des paramètres géométriques

Dans la première étape de cette phase, on définit les paramètres constants et variables de la géométrie qui permet la construction des points éléments principaux. Pour modifier la géométrie il suffit de modifier la valeur de ces variables.

Ici dans notre cas, on utilise l'exemple ou Un modèle 2D a été introduit dans le logiciel Flux2D® par Isabella KLUTSCH dans le cadre de son doctorat. [3]

L'exemple de validation considère la plaque supraconductrice placée sous un champ magnétique extérieur qui a l'expression suivante :

$$\mathbf{B}_e(t) = \mathbf{B}_{eMax} \sin \omega t \quad \text{où} \quad \mathbf{B}_{eMax} < \mathbf{B}_p \quad (\text{III.1})$$

$\mathbf{B}_p$  est le champ de pénétration de la plaque. Pour modéliser le champ extérieur on considère la plaque placée entre deux plans de courant alimenté avec les densités de courant  $+\mathbf{Jb}$  et  $-\mathbf{Jb}$ , comme dans la Figure III.4 (partie notée Domaine d'étude 2D).[3]

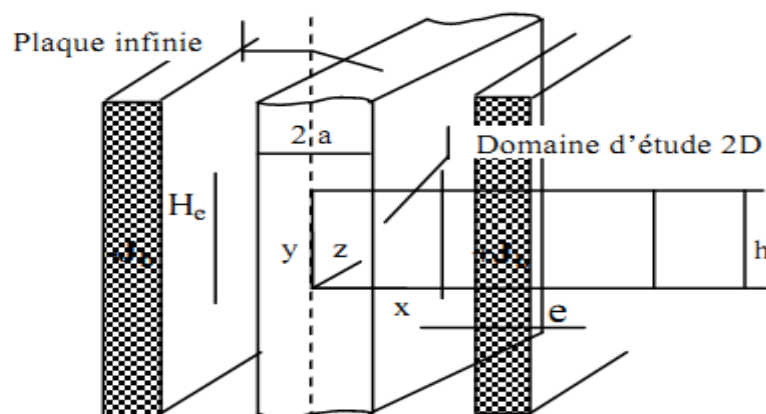


Figure III.4. Plaque infinie en champ extérieur. Domaine d'étude [3]



Le tableau III.1 donne la liste des variables et leurs définitions

Géométrie plaque	Physique du supraconducteur
$x_0 = 0 ; y_0 = 0$	$J_c = 108 \text{ A/m}^2$
$a = 0,5 \text{ mm} ; h = 2 \text{ mm}$	$N = 300$
$e = 0,1 \text{ mm}$	$J_b = 5 \cdot 108 \sin 100\text{pt} \text{ A/m}^2$

**TABLE III.1. Paramètres géométriques de la plaque étudiée**

### III.3.2.2. Choix des coordonnées et unités de surface

Les dimensions de la géométrie (coordonnées de points, cercle..) sont définies. On pose le point  $O(0,0)$  l'origine de référence.

Le tableau suivant donne les coordonnées de supraconducteur qui est dans le centre

Points	x [mm]	y [mm]
1	0.05	1
2	0.05	1
3	-0.05	-1
4	-0.05	-1

**TABLE III.2. Les coordonnées de la plaque supraconductrice étudiée**

Le tableau suivant donne les coordonnées de la matrice de Silvère qui est au tour de la plaque :

Points	x [mm]	y [mm]
5	0.1	1.2
6	0.1	1.2
7	-0.1	-1.2
8	-0.1	-1.2

**TABLE III.3. Les coordonnées de la matrice de Silvère**

Le tableau TABLE III.4. Donne les coordonnées des plaques d'alimentations on métal:

- Première plaque qui porte + J :

Points	x [mm]	y [mm]
9	0.2	1.2
10	0.7	1.2
11	0.2	-1.2
12	0.7	-1.2

**TABLE III.4. Les coordonnées de la plaque métallique +J**

- Deuxième plaque de métal -J :

Points	x [mm]	y [mm]
13	-0.2	1.2
14	-0.7	1.2
15	-0.2	-1.2
16	-0.7	-1.2

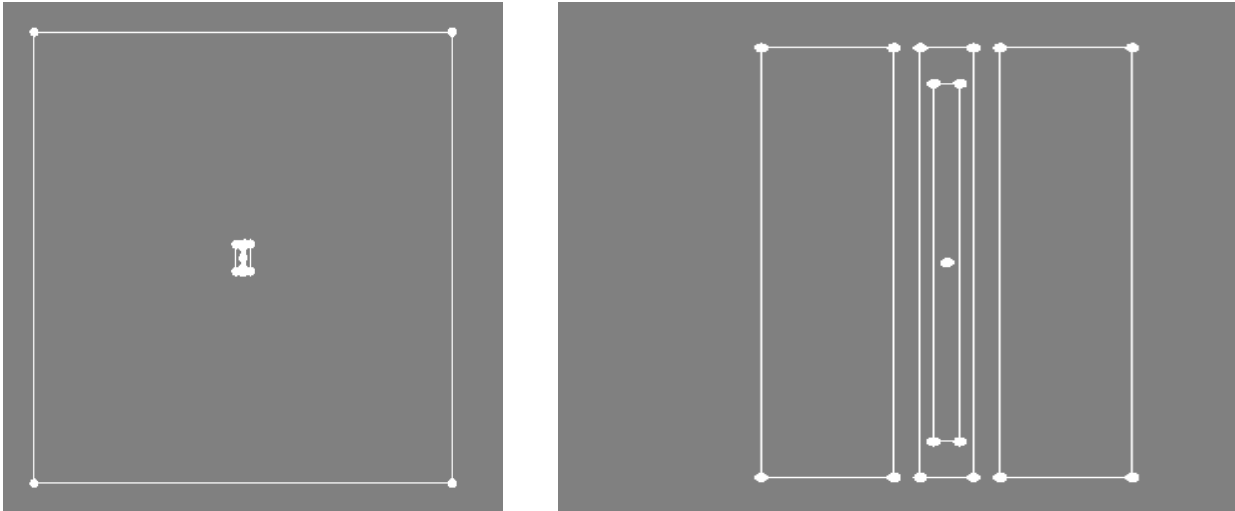
**TABLE III.5. Les coordonnées de la plaque métallique -J**

Les points de limite du domaine d'étude sont présentés dans le tableau III.6 :

Points	x [mm]	y [mm]
17	20	20
18	20	-20
19	-20	20
20	-20	-20

**TABLE III.6. Les coordonnées des points de limite du domaine d'étude**

La figure suivante représente la géométrie designer par cette étape :



a) Domaine d'étude

b) l'ensemble HTC, SILV, MEATAL

**Figure III.5. La géométrie designer**

### III.3.2.3. Descriptions des surfaces :

Les surfaces du domaine sont définies comme suit :

- Le supraconducteur HTC en couleur bleu
- La matrice de SILV en couleur jaune
- Les deux plaques de métal en vert
- La surface d'AIR en couleur turquoise

Les conceptions aux limites aux points d'extrémité du domaine d'étude sont nulles.

La figure suivante donne une vue totale de la géométrie :

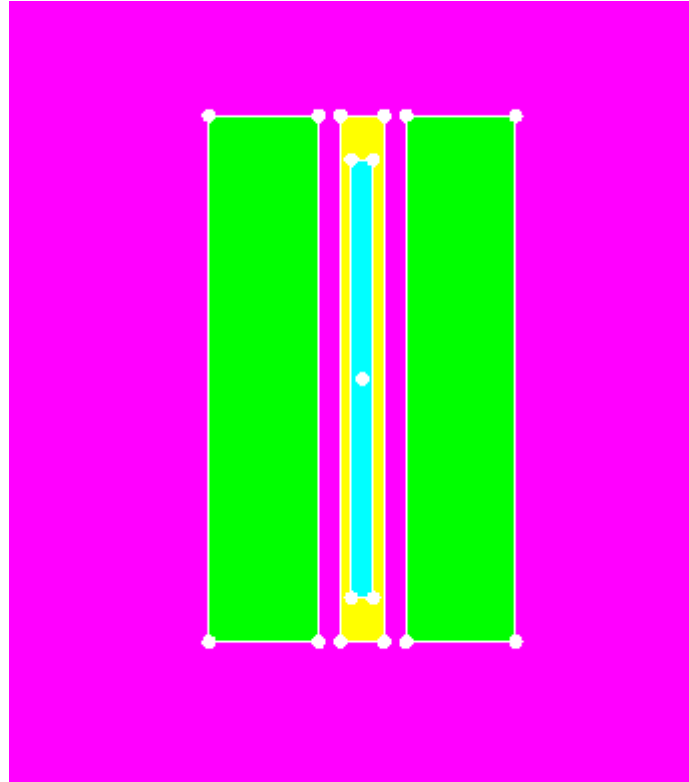


Figure III.6.vue totale des faces du domaine d'étude

### III.3.3.Maillage du domaine :

Le maillage est assisté automatiquement par l'instruction (mesh generator), dans la zone de HTS et la zone de SILV on choisi (**MAPPED**), et dans l'air on choisi (**automatic mesh generator**).

La figure (III.7) présente la vue après maillage des différentes faces

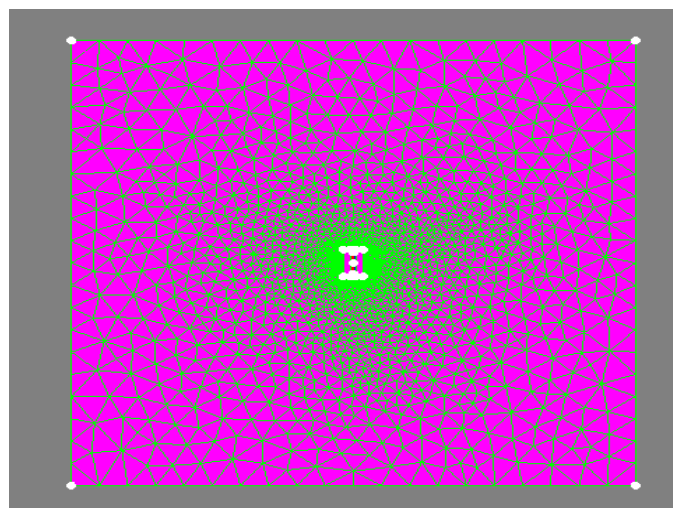


Figure (III.7.a) maillage des différentes faces

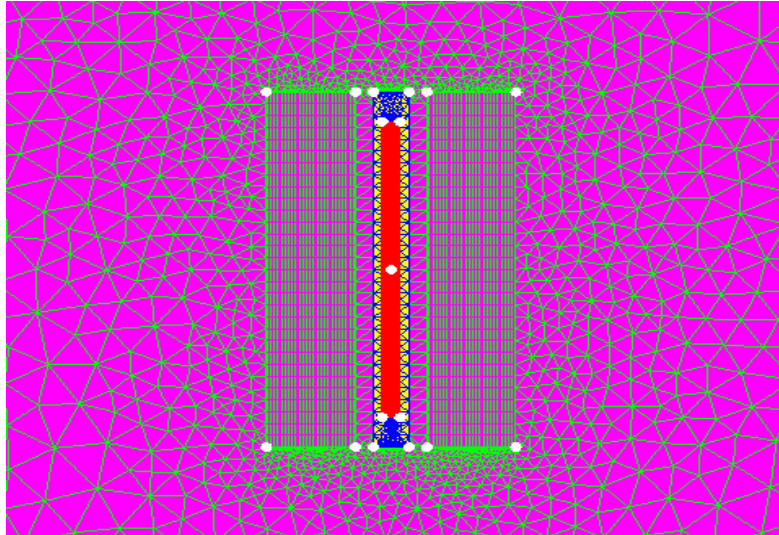


Figure (III.7.b) maillage des différentes faces

### III.3.4. Description physique et choix des matériaux :

Dans cette étape on impose les caractéristiques du matériau supraconducteur et le modèle qui va résoudre notre exemple, les propriétés de HTS sont suivantes :

$$E_c = 10^{-4} \text{ V/m}$$

$$J_{c0} = 4.4 \cdot 10^7 \text{ A/m}^2$$

$$B_0 = 10^{-6} \text{ T} \text{ ou } B_0 = 21 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

$$n_0 = 15,$$

$$B_1 = B_0$$

$$\rho_0 = 10^{-13} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$$

Les propriétés électromagnétiques des matériaux supraconducteurs sont enregistrées dans la base des données de FLUX, (material SUPRA in <iso RHO>), et aussi le modèle d'application de faible puissance. La dépendance de l'induction  $B$  à la densité de courant critique  $J_{c0}$  introduit par le modèle de Kim-Anderson qui a l'expression suivante :

$$\bullet \quad J_c(B) = \frac{J_{c0}}{1 + \frac{B}{B_0}} \quad \text{Avec: } 10 < J_{c0} < 100 \text{ [kA/cm}^2\text{]} \quad ; \quad 1 < n_0 < 50 \quad ; \quad B_0$$

$$> 0 \text{ and } B_1 > 0$$

$$\bullet \quad n(B) = \frac{n_0}{1 + \frac{B}{B_1}} \quad B_0 > 0 \quad \text{et} \quad B_1 > 0$$

**III.3.5.Résolution:**

Après la vérification de la physique ; on passe à une autre étape ‘résolution ‘, l’instruction (**Direct**) affiche les deux fenêtres suivantes, on sélectionne l’algorithme de calcul, le temps et le pas.

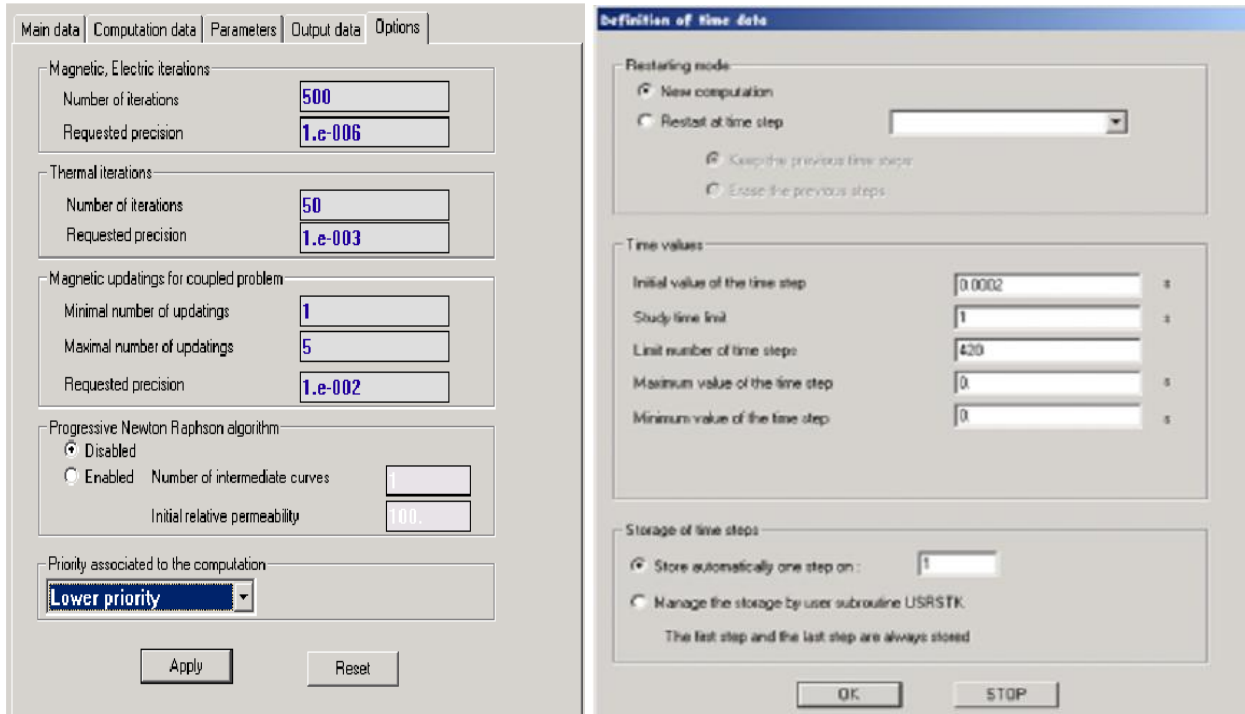


Figure III.8.option de computation et temps de calcul

**III.3.6.Résultats de simulation :**

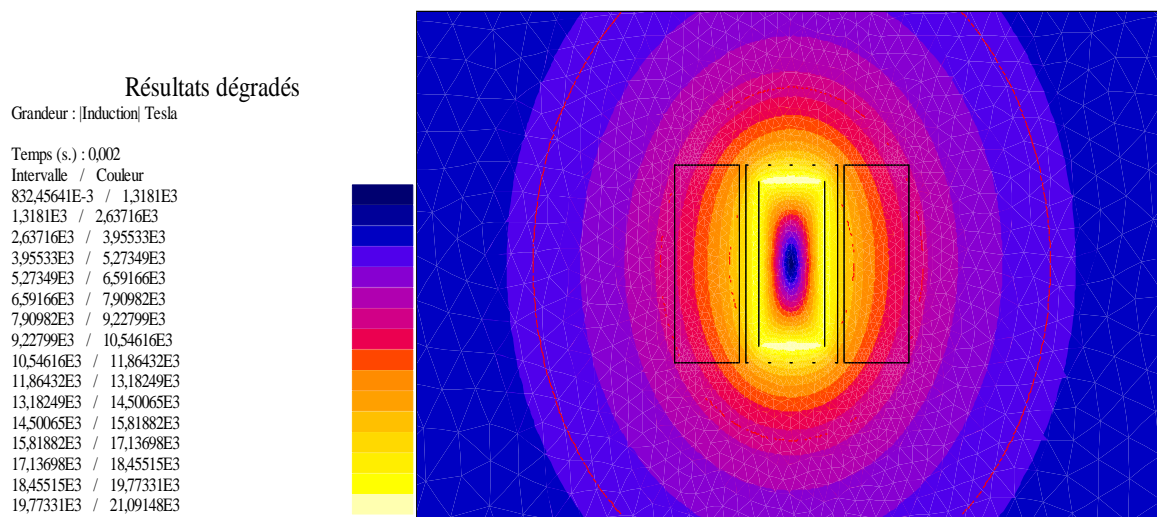
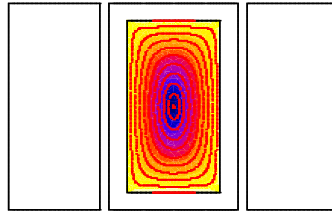


Figure III.9.L'induction magnétique dégradés dans différents régions.



III.10.L'induction magnétique dégradé dans la plaque supraconductrice

L'induction magnétique  $B$  est répartir d'une façon symétrie dans les différentes régions de domaine d'étude. On remarque qu'est il maximal à les frontières de la plaque ( $21,094 \cdot 10^3$  A/m), et commence à diminué ou centre, ça valeur minimal est de ( $832.45 \cdot 10^{-3}$ ).

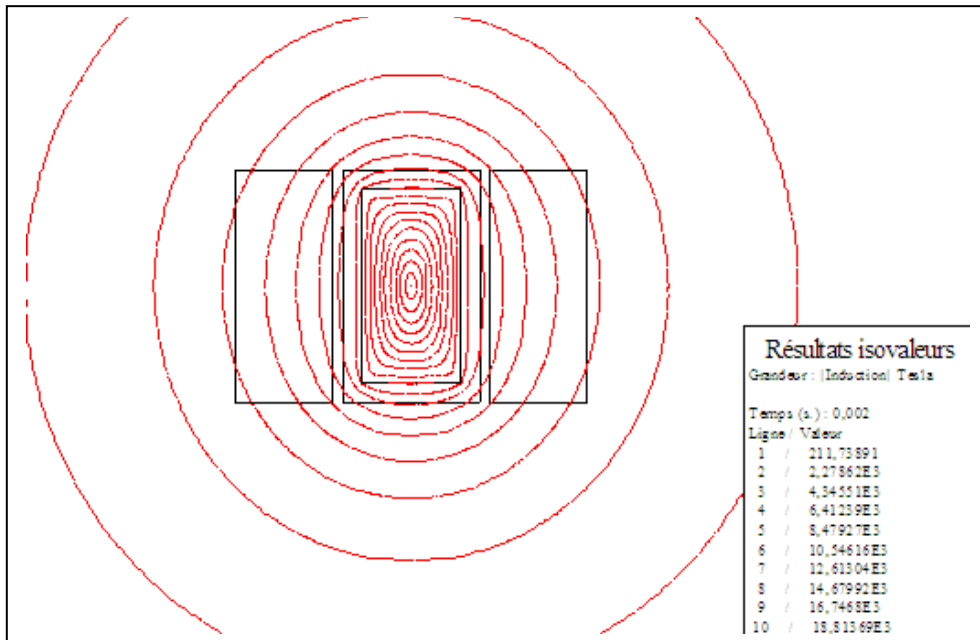


Figure III.11.L'induction magnétique dans différents régions.

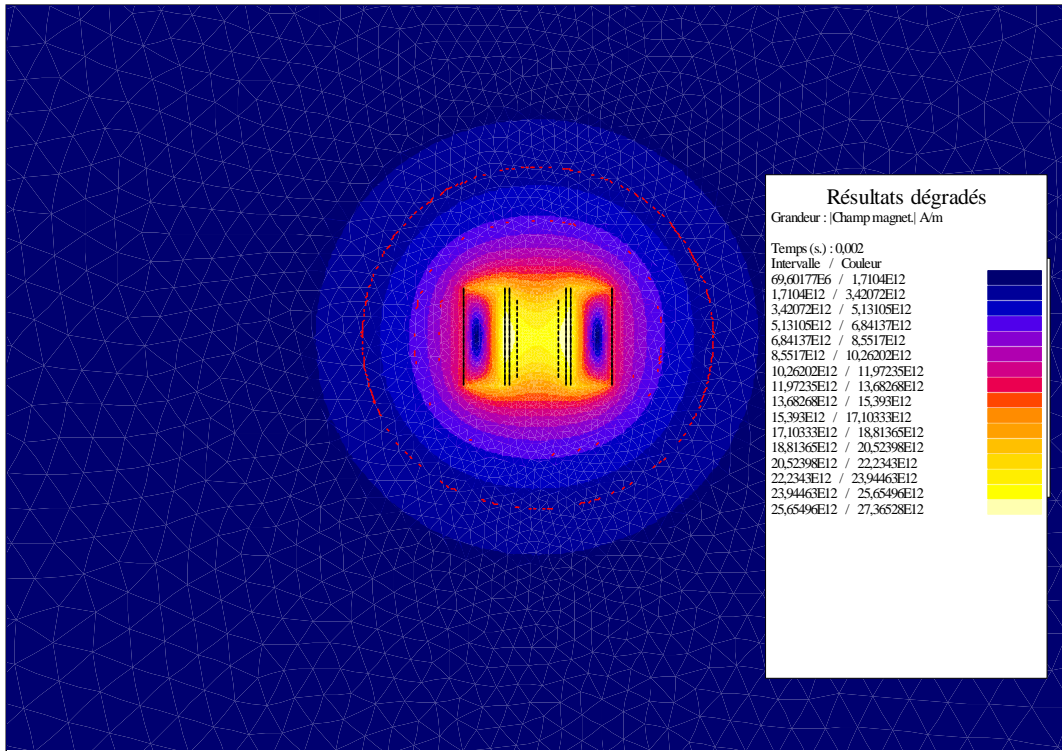


Figure III.12. répartition spatiale du champ magnétique dégradés dans différents régions.

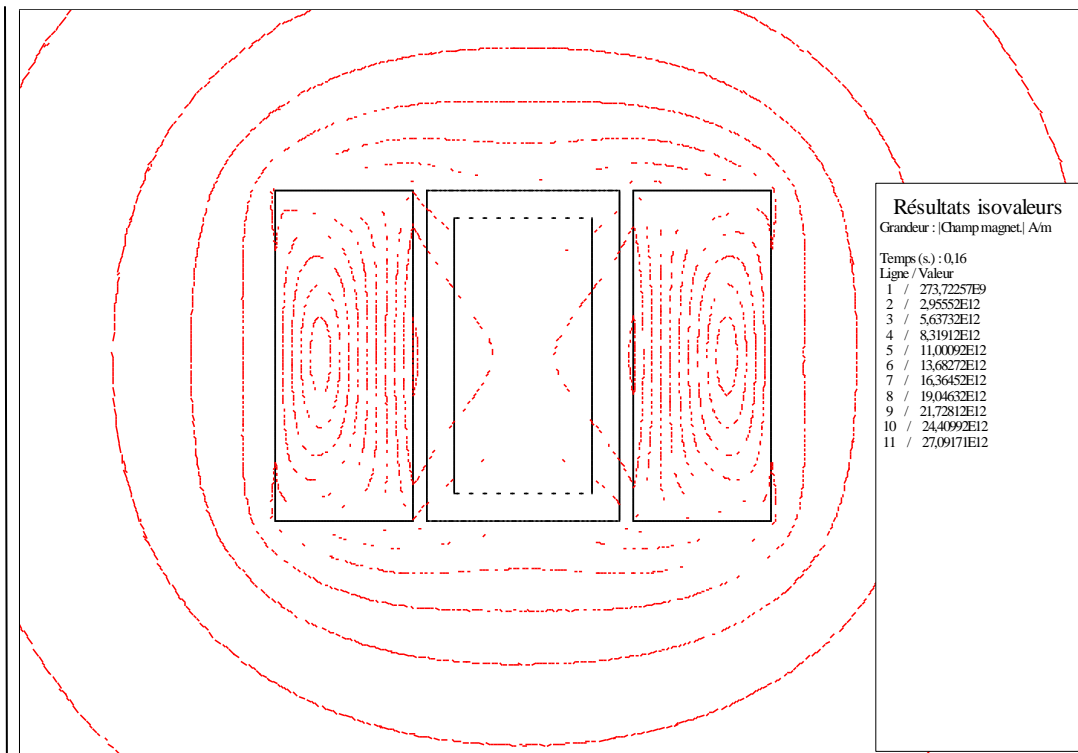


Figure III.12. répartition de lignes du champ magnétique isovaleur dans différents régions.



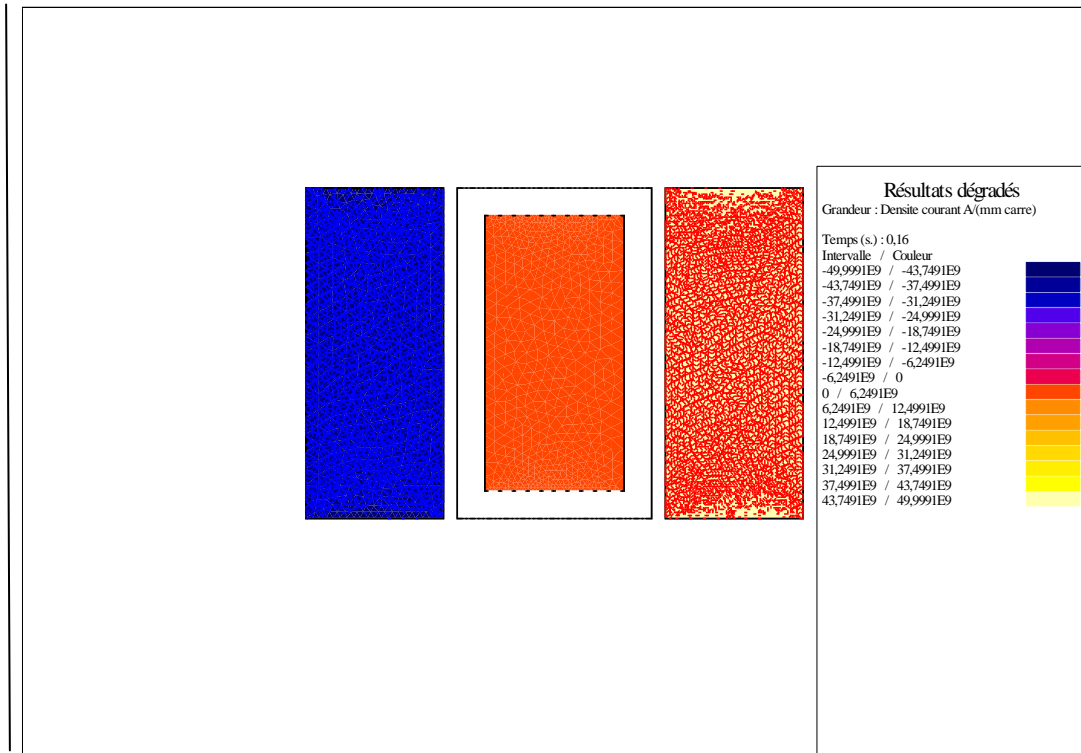


Figure III.13.répartition dégradé de la densité du courant.

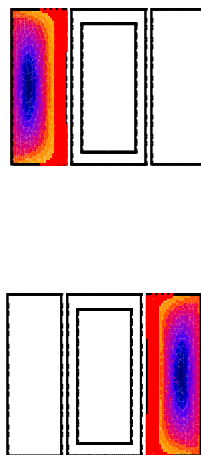


Figure III.13.répartition dégradé de la densité du courant dans les plaques métalliques.

**III.3.7. Interprétation des résultats :**

Le champ magnétique appliqué est maximal, la plaque supraconductrice expulse ce champ et développe un courant de densité plus ou moins égale à  $+J$  localisé au bord de la plaque.

Le champ magnétique diminue jusqu'au où il s'annule. Ainsi, on voit apparaître un second front de densité d'amplitude d'environ  $-J$  due à la diminution du champ.

Le champ magnétique continue de diminuer jusqu'au où il est minimal. Ici la plaque supraconductrice développe un front de pénétration de courant d'amplitude d'environ  $+J$ .

Il se propage en partant du bord du matériau.

La pénétration est maximale puisque le champ appliqué est minimum, l'intensité totale du courant circulant dans la plaque est nulle mais, on remarque l'apparition d'un champ magnétique à l'intérieur de la plaque supraconductrice dont l'amplitude est supérieure à celle du champ sur la bordure et à l'extérieur du matériau, on parle alors de champ piégé.

**Conclusion :**

Ce chapitre a pour objet l'étude d'une plaque supraconductrice placée dans un champ magnétique.

Nous avons cependant attaché beaucoup d'importance aux résultats numériques trouvés par le logiciel FLUX2D basé sur la méthode des éléments finis, cette méthode permet de connaître le mieux possible les domaines d'applications et de validité de ces derniers.

**Conclusion général**

Ce travail était relatif à la modélisation en 2D de matériaux supraconducteurs à l'aide d'un logiciel FLUX2D. Il a consisté en l'étude des distributions de la densité de courant et de l'induction magnétique dans une plaque supraconductrice qui a été modélisée comme un matériau isotrope avec une loi de puissance pour la relation entre la densité de courant et le champ électrique.

Il devient donc important de savoir déterminer avec une bonne précision les différentes grandeurs électromagnétiques.

Nous avons d'abord exposé le comportement électromagnétique selon les lois de différents modèles (Bean, Kim.....) Puis nous avons étudié le comportement d'une plaque supraconductrice plongée dans un champ magnétique uniforme. Dans ce mémoire, nous nous sommes préoccupés plus particulièrement de la validation du modèle exposé par Isabella KLUTSCH dans le cadre de son doctorat [3].

Pour ce la, nous avons choisi une approche numérique (éléments finis) car, dans beaucoup de cas, seule cette méthode permet de calculer les grandeurs nécessaires à la détermination des distributions de la densité de courant et de l'induction magnétique et l'influence d'un certain nombre de paramètres sur le comportement de la plaque supraconductrice.

Ce travail était le premier réalisé en université de M'sila sur la modélisation de supraconducteur par le logiciel FLUX2D, ce sujet est assez vaste et il reste beaucoup de chose à faire d'un point de vue numérique.

Une poursuite possible de ce travail consisterait à faire bien maitriser ce logiciel et à développer une extension du code de calcul en 2D et en 3D, afin de modéliser des systèmes réels utilisant les matériaux supraconducteurs.

Une autre perspective est d'effectuer un couplage thermique permettant de rendre compte de la transition possible du supraconducteur à l'état normal.

# Références Bibliographiques

---

## Références Bibliographiques

- [1] **WIEST-MILLION Nicolas, LEMOINE Julien, SOLT Edouard** « Les matériaux supraconducteurs » Rapport d'Epistémologies, Lundi 22 Juillet 2002.
- [2] **HOTAMFOU Sandra**, « Modélisation des dispositifs supraconducteurs », thèse de doctorat PARIS XI ,6/2000.
- [3] **Isabella KLUTSCH** « Modélisation des supraconducteurs et mesures », thèse de doctorat Institut national polytechnique de Grenoble, le 26 Septembre 2003.
- [4] **ABDERREZAK Amira** « Etude des propriétés structurales, électriques et magnétiques de céramiques supraconductrices YBaCuO et BiSrCaCuO », thèse de doctorat, Université Mentouri-Constantine, 28/09/2005.
- [5] **Siham BADI**, « Interfaces optoélectroniques ultra-rapides pour l'électronique supraconductrice à quantum de flux magnétique », thèse de doctorat, Université de Savoie, 16 Octobre 2008.
- [6] [http/ :Supraconductor.org.resours](http://Supraconductor.org.resours).
- [7] **P. Hiebel, P. Tixador et X. Chaud** « Lévitacion magnétique par association d'aimants permanents et de supraconducteurs h haute température critique », J. Phys. III France 5 (1995) 647-659.
- [8] **Jérôme DELAMARE, Fabien FAURE** « Les paliers magnétiques », Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, B.P. 46, 38402 Saint Martin d'Hères CEDEX
- [9] **Samir BENSAID** « Contribution a la caractérisation et a la modélisation électromagnétique et thermique des matériaux composites anisotropes », thèse de doctorat, Université de Nantes, Année 2006.
- [10] **Mohamed YAHIA**, « Modélisation Electromagnétique des Structures Complexes par Couplage des Méthodes », thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse), 9 novembre 2010.

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME  
DE MASTER EN GENIE ELECTRIQUE

SPECIALITE :  
Ingénierie des Systèmes Electromécaniques

**Proposé et dirigé par :** Mr BELKHIRI Salah

**Présenté par :** - BOUZIDI Ahmed

**Thème :**  
**CONTRIBUTION A LA MODELISATION DES MATERIAUX  
SUPRACONDUCTEURS A HAUT TEMPERATURE CRITIQUE  
(HTC)**

**Résumé :**

La découverte des supraconducteurs de type II à haute température critique en 1986 a suscité un intérêt nouveau pour ces matériaux. Leur utilisation en électrotechnique peut être sérieusement envisagée dans des domaines tels que la production, le transport, le stockage d'énergie, etc. la modélisation macroscopique de matériaux supraconducteurs de type II est très peu présente dans les travaux de recherche. L'étude de ces différentes applications indique qu'il est important de déterminer avec une bonne précision les grandeurs électromagnétique liées aux supraconducteurs. Le but de ce travail est de mettre en évidence les propriétés électromagnétiques de ces matériaux et de présenter une modélisation de ces phénomènes à l'aide d'un logiciel FLUX2D.

**Mots clés :**

**Supraconducteur, modélisation, haute température critique, FLUX2D.**

N<sup>o</sup> d'ordre : 31