

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE

SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

MEMOIRE

DE FIN D'ETUDE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER

DE MASTER EN GENIE ELECTRIQUE

SPECIALITE : Ingénierie des Systèmes Electromécaniques

THEME

Etude de l'évolution des frontières libres de conceptions dans les matériaux Supraconducteurs de type II

Présenté par :

BAKOUR Sallah Eddine

Proposé et dirigé par :

Mr: BELKHIRI Salah

Année universitaire : 2012/2013

N° d'ordre : 048

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

*Au nom d'ALLAH, le tout miséricordieux, le très miséricordieux,
par de divinité à part lui, le vivant, celui qui subsiste par lui
même.*

*Je remercie avant tous ALLAH pour son aide, ses
innombrables dons, ALLAH qui m'a donné la force, la volonté et
le moral pour accomplir mes études en master en électrotechnique.*

je remercie mon encadreur Mr : BELKHIRI Salah.

*Je remercie vont aussi au président du jury et aux membres du
jury examinateurs qui nous fait l'honneur de participer au jury de ce
travail.*

Dédicace

*Avant tous, je remercie dieu le tout puissant de
m' avoir donné le courage et la patience pour réaliser ce
Travail malgré toutes les difficultés rencontrées.*

Je dédie ce modeste travail :

A ma mère et mon père

A mes très chers frères et mes sœurs.

A toute ma famille

A mes chers amis

A tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

*A tous ceux qui connaissent **SALLAH**.*

*A épousee futurisme **Nabila**.*

*A tous les amis d'études surtout ceux D'électrotechnique Promotion
2012/2013*

Sommaire

Notations et symboles

INTRODUCTION GENERALE..... 1

Chapitre I: généralités sur les matériaux supraconducteurs

I.1. Introduction.....	3
I.2. Histoire.....	3
I.3. Propriétés élémentaires des matériaux supraconducteurs	4
I.3.1. Résistivité électrique	4
I.3.2. Effet Meissner	4
I.3.3. Surface critique.....	6
I.4. Les types de supraconducteurs.....	6
I.4.1. Diagramme de phase	6
I.4.1.1. Supraconducteurs de type I.....	6
I.4.1.2. Supraconducteurs de type II	7
I.4.2. Comportement magnétique	8
I.4.2.1. Supraconducteur de type I	8
I.4.2.2. Supraconducteur de type II.....	8
I.5. Principales caractéristiques des supraconducteurs.....	9
I.5.1. Température critique	9
I.5.2. Champ magnétique critique.....	10
I.5.3. Densité de courant critique.....	12
I.6. Réseau des vortex	13
I.6.1. Structure d'un vortex.....	13
I.6.2. Les effets du piégeage	14
I.7. Effet Josephson	16
I.8. Conclusion	16

Chapitre II: Modèles et applications des supraconducteurs

II.1. Introduction	17
II.2. Équations électromagnétiques décrivant le comportement d'un supraconducteur.....	17
II.2.1. Relation $B(H)$	17
II.2.2. Relation $E(J)$	18
II.2.3. Modèle de l'état critique, modèle de <i>Bean</i>	19
II.2.3.1. Modèle de l'état critique.....	19
II.2.3.2. Modèle de <i>Bean</i>	20
II.2.3.3. Le modèle de la loi de puissance.....	21
II.2.3.4. Le modèle de KIM	21
II.2.3.5. Le modèle exponentiel	22
II.2.4. Résumé des équations	22
II.3. Matériaux supraconducteurs HTC.....	22
II.4. Les Applications des supraconducteurs.....	23
II.5. Conclusion	24

Chapitre III: l'évolution des frontières libres de conduction dans les matériaux supraconducteurs

III.1. Introduction	25
III.2. Géométrie et hypothèses adoptées	25
III.3. Mise en équation	26
III.4. Frontières libres de conduction	27
III.5. Première conduction.....	29
III.6. Régime permanent.....	30
III.7. Calcul des pertes dans le fil supraconducteur	31
III.8. Tension aux bornes d'une longueur L du fil	33
III.9. Conclusion.....	36

Chapitre IV: Présentation des méthodes de résolution et simulations

IV.1. Introduction.....	37
IV.2. Conditions de passage entre deux milieux différents.....	37

IV.3. Méthodes de résolution des équations différentielles aux dérivées Partielles	37
IV.3.1. Méthodes Analytiques	38
IV.3.1.1. Exemple de la méthode de séparation des variables	38
IV.3.2. Méthodes des intégrales (semi analytique).....	38
IV.3.2.1. Méthodes des intégrales des frontières (MIF).	38
IV.3.2.2. Méthode des circuits couplés (MCC)	38
IV.3.3. Méthodes numériques.....	38
IV.3.3.1. Méthode des différences finies	39
IV.3.3.2. Méthode des volumes finis (MVF)	39
IV.3.3.3. Méthodes des éléments finis	39
IV.3.3.3.1. Généralités	39
IV.3.3.3.2. Démarche éléments finis.....	40
IV.3.3.3.2.1. Discrétisation géométrique	41
IV.3.3.3.2.2. Approximation nodale	41
IV.3.3.3.2.3. Quantités élémentaires	46
IV.3.3.3.2.4. Assemblage et conditions aux limites.....	46
IV.3.3.3.3. Utilisation d'un logiciel éléments finis	47
IV.3.3.3.3.1. Déroulement d'une étude	48
IV.3.3.3.3.2. Techniques de calculs au niveau élémentaire	51
IV.3.3.3.4. Organigramme d'un logiciel éléments finis	56
IV.4.simulation.....	58
IV.6.Conclusion	63
Conclusion générale	64
Annexe	
Bibliographie	
Résumé	

Notations et symboles

Principaux symboles utilisés

Tout ou long du texte, la notation vectorielle d'une grandeur physique est donnée par un caractère en style gras, alors que sa norme est donnée d'un style normale.

\mathbf{A}, \mathbf{A}	[A . H/m]	Vecteur potentiel magnétique
\mathbf{B}, \mathbf{B}	[T], [mT]	Induction magnétique
B_0	[T], [mT]	Constante utilisée dans les modèles $J_c(B)$ et $n(B)$
B_a	[T], [mT]	Induction magnétique est appliquée
B_p	[T], [mT]	Induction de pénétration complète
B_p^*	[T], [mT]	Induction de pénétration complète avec la loi de $J_c(B)$
B_m	[T], [mT]	Amplitude maximale de l'induction magnétique appliquée
C_p	[J / (Kg. K)]	Chaleur spécifique
D	[–]	Facteur démagnétisant
\mathbf{E}, \mathbf{E}	[V /m]	Champs électrique
E_c	[V /m]	Champs électrique pour lequel le courant critique est défini
f	Hz	Fréquence de courant de transport sinusoïdale
F_L	[N]	Force de Laplace
F_p	[N]	Force d'ancrage
F_v	[N]	Force de frottement visqueux
h	$\left[\frac{W}{m^2.K} \right]$	Coefficient d'échange avec le fluide cryogénique
H_a	[A/m]	Champ magnétique appliqué
H_m	[A/m]	Amplitude maximale du champ magnétique appliqué
$i(t)$	[A]	Courant de transport sinusoïdal
I	[A]	Courant de transport continu
I_c	[A]	Courant critique
J_c	[A/m ²]	Densité de courant critique
M	[A/m]	Aimantation
n	[–]	Valeur de puissance de la loi $E - J$
P_v	[W/m ³]	Pertes volumiques
P	[W]	Pertes instantanées
\bar{P}	[W]	Pertes Moyennes
r	[m], [mm]	Coordonnée suivant r (en indice, signifie composante suivant r)
R	[Ω]	Résistance électrique

Notations et symboles

t	[s]	Temps
t_q	[s]	Temps avant la transition du SHT
T	[K]	Température
T_c	[K]	Température critique
V	[V]	Tension continue
\emptyset	[Wb]	Flux magnétique
\emptyset_0	[Wb]	Quantum de Flux (2.667810×10^{-15} Wb)
γ	[g/cm ³]	Masse volumique
η	[N.s/m]	Coefficient de frottement visqueux
λ	[W/(m.K)]	Conductivité thermique
μ_0	[H/m]	Perméabilité magnétique du vide ($4\pi \times 10^{-7}$ H/m)
θ	[rad]	Coordonnée suivant θ (en indice, signifie composante suivant θ)
ρ	[$\Omega.m$]	Résistivité électrique
ρ_{FF}	[$\Omega.m$]	Résistivité électrique de Flux Flow
ρ_n	[$\Omega.m$]	Résistivité électrique à l'état normale
ρ_{TAF}	[$\Omega.m$]	Résistivité électrique dans le régime TAF
σ	[S/m]	Conductivité électrique
τ	[s]	Constante de temps de la décharge RLC
τ_{th}	[s]	Constante de temps thermique
ω	[rad/s]	Pulsation du courant de transport
Δt	[s]	Pas de temps

Acronymes utilisés

Pour plus de clarté et de brièveté, les acronymes suivants ont été utilisés :

<i>HTC</i>	Haute température critique
<i>BCS</i>	Théorie de Bardeen, Cooper et Schrieffer
<i>EDP</i>	Equations dérivées partielles
<i>MDF</i>	Méthode des différences finies
<i>PFM</i>	Pulsed Field Magnetization
<i>SBT</i>	Supraconducteur à basse température

Notations et symboles

<i>SHT</i>	Supraconducteur à Haut température
<i>TAFF</i>	Thermally Activated Flux Flow
<i>T AFC</i>	Thermally Activated Flux Creep
<i>YBCO</i>	Supraconducteur à base d'yttrium, de baryum et d'oxydes de cuivre

INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux conventionnels utilisés dans les différents domaines de l'électrotechnique ont atteint leurs limites d'utilisation à cause des limitations de leurs performances, limitations dues aux échauffements dans les matériaux résistifs, et aux champs de saturation dans les matériaux magnétiques. A tous ses inconvénients les matériaux supraconducteurs paraissent à première vue pouvoir remédier, grâce à leurs remarquables propriétés (résistivité nulle, densité de courants élevée,...) [01].

Mais les choses ne sont pas aussi simples, car les supraconducteurs ont aussi leurs inconvénients notamment la température critique très basse (aux environs de 4K°). C'est cet inconvénient majeur qui a limité l'utilisation des supraconducteurs à des domaines particuliers notamment les recherches nécessitant des champs magnétiques très élevés que seules les bobines supraconductrices peuvent produire ainsi que quelques domaines d'applications qui peuvent se permettre le coup élevé des dispositifs supraconducteurs [01].

L'apparition des supraconducteurs à haute température critique a relancé l'intérêt pour les supraconducteurs, et a encouragé les recherches sur les applications de ce type de matériaux, notamment pour le transport de l'énergie électrique et la production de champs intenses. Un autre domaine d'application est la lévitation magnétique et les exploits qu'elle permet [01].

Malgré tous ce qui vient d'être cité, les supraconducteurs de demeure des matériaux très peu connus et auxquels on s'intéresse peu.

Dans ce travail nous allons présenter une Etude de l'évolution des frontières libres de conduction dans les matériaux supraconducteurs de type II.

Le présent mémoire est structuré en quatre chapitres:

Le premier chapitre est consacré aux aspects phénoménologiques de la supraconductivité, nous présentons les principales définitions concernant le phénomène aussi nous donnons un bref historique de la supraconductivité, les caractéristiques d'un supraconducteur, présentation des principales grandeurs qui permettent de définir l'état supraconducteur, et les Réseaux des vortex.

Le deuxième chapitre est consacré aux équations électromagnétiques décrivant le comportement d'un supraconducteur et le modèle supraconducteurs HTC aussi les théories qui expliquent ce phénomène et ces domaines d'application.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude théorique des frontières libres de conduction dans ces matériaux, Dans ce chapitre on définit la loi de comportement choisie pour définir le phénomène de supraconduction, qui ne peut être représenté par la loi d'Ohm.

Le quatrième chapitre concerne la description des méthodes numériques d'approximation, dans ce chapitre nous regroupons l'ensemble des résultats de simulation des caractéristiques frontières libres de conduction par la méthode d'éléments finis.

Une conclusion générale clôture le présent manuscrit commentant les différents chapitres et relatant les perspectives de continuation de ce travail.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux supraconducteurs

I.1. Introduction

I.2. Histoire

I.3. Propriétés élémentaires des matériaux supraconducteurs

I.4. Les types de supraconducteurs

I.5. Principales caractéristiques des supraconducteurs

I.6. Réseau des vortex

I.7. Effet Josephson

I.8. Conclusion

I.1. Introduction

Les matériaux supraconducteurs ont des propriétés électriques et magnétiques assez remarquables. La propriété la plus connue, et qui a donné le nom au phénomène, étant la disparition totale de toute résistivité en dessous d'une certaine température appelée température critique T_c . Une autre propriété est le diamagnétisme parfait de ces matériaux ils expulsent totalement le champ magnétique en dehors de leur volume dans certaines conditions précises de champ.

I.2. Histoire

En 1911, alors que le physicien Néerlandais *Heike Kammerlingh Onnes* venait de réussir la liquéfaction de l'hélium (4,5°K), il proposa à Gilles Holst, un élève, de mesurer la résistivité d'un barreau de mercure. Ils découvrirent qu'elle s'annulait en dessous de 4,15°K, mais tous les éléments ne présentaient pas cette même caractéristique [01].

En 1933, *WALTER MEISSNER* et *R.OCHSENFELD* ont découvert qu'un métal pur supraconducteur (de type I) présente une forme d'imperméabilité aux champs magnétiques, ce diamagnétisme parfait qui caractérise les matériaux supraconducteurs est appelé depuis **l'effet MEISSNER** [01].

Faute de théories convaincantes, les chercheurs se contentaient de tester, presque au hasard, différents alliages à base de titane, de strontium, de germanium, et surtout de niobium qui donnait de meilleurs résultats. Des recherches ont même été entreprises dans le domaine des molécules organiques et en particulier des fullerènes ou foot allènes (à 33°K) [01].

En 1957, les physiciens américains *JOHN BARDEEN, LEON COOPER ET JOHN SCHIFFER* proposèrent la théorie B.C.S, qui décrit le principe fondamental de la supraconductivité : A basse température, les électrons d'un matériau supraconducteur se déplacent par paire de *COOPER* sous l'effet de vibrations appelées phonons. C'est grâce à l'étude de ces phénomènes vibratoires que les chercheurs ont pu progresser dans leur quête de matériaux supraconducteurs à hautes températures critiques.

En 1962 Brian Josephson a prédit les effets quantiques qui portent son nom et qui sont utilisés en détection ultrasensible de champs magnétiques.

Malheureusement, les matériaux testés ne dépassaient pas une température critique supérieure à 23°K et la théorie BCS semblait avoir atteint ses limites. En avril 1986, la découverte d'un supraconducteur à 34°K la remettait en cause.

De nouvelles générations de composés apparurent notamment Ba-La-Cu-O, Y-Ba-Cu-O et Ti-Sr-Ca-Cu-O ces deux derniers permettant de dépasser la température de l'azote liquide,

coûtant dix fois moins cher et refroidissant vingt fois mieux que l'hélium liquéfié, et la communauté scientifique espérait pouvoir atteindre la température ambiante.

Cependant, plus la température critique augmentait, plus le courant pouvant être conduit devenait faible et, en général, plus les performances s'amenuisaient et aujourd'hui, les efforts se concentrent sur la recherche de nouvelles théories capables d'amener la température de réfrigération des supraconducteurs de 164°K (record actuel nécessitant de hautes pressions) à la température ambiante [01].

I.3. Propriétés élémentaires des matériaux supraconducteurs

I.3.1. Résistivité électrique

La supraconductivité est la propriété que possèdent certains matériaux de conduire le courant électrique sans résistance à condition que leur température soit inférieure à une certaine valeur appelée température critique T_c (**Figure. I.1**). Ils s'opposent également à tout champ magnétique externe.

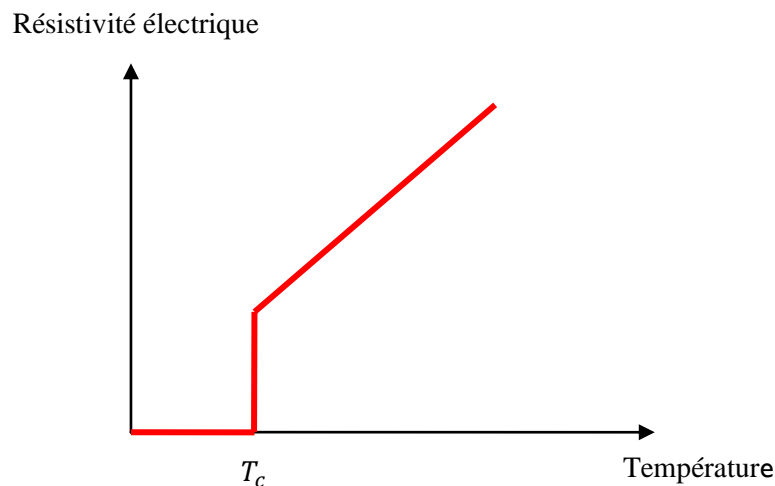


Figure. I.1 Résistivité électrique des supraconducteurs.

I.3.2. Effet Meissner

La conductivité parfaite ($R = 0$) implique qu'un changement de l'induction magnétique dans le matériau n'est pas possible $\frac{dB}{dt} = 0$. Aussi, lorsqu'un conducteur parfait, sous champ nul à température ambiante, est refroidi en dessous de T_c puis soumis à un champ magnétique, alors des courants d'écrantage vont être induits pour conserver $B = 0$ à l'intérieur du matériau, voir (**Figure. I.2(a)**). Si au contraire, le conducteur parfait est soumis à un champ magnétique extérieur est ramené à zéro, dB/dt doit être conservé et des courants de piégeage seront induits pour piéger l'induction magnétique à l'intérieur, voir (**Figure. I.2(b)**). Il en va tout à fait

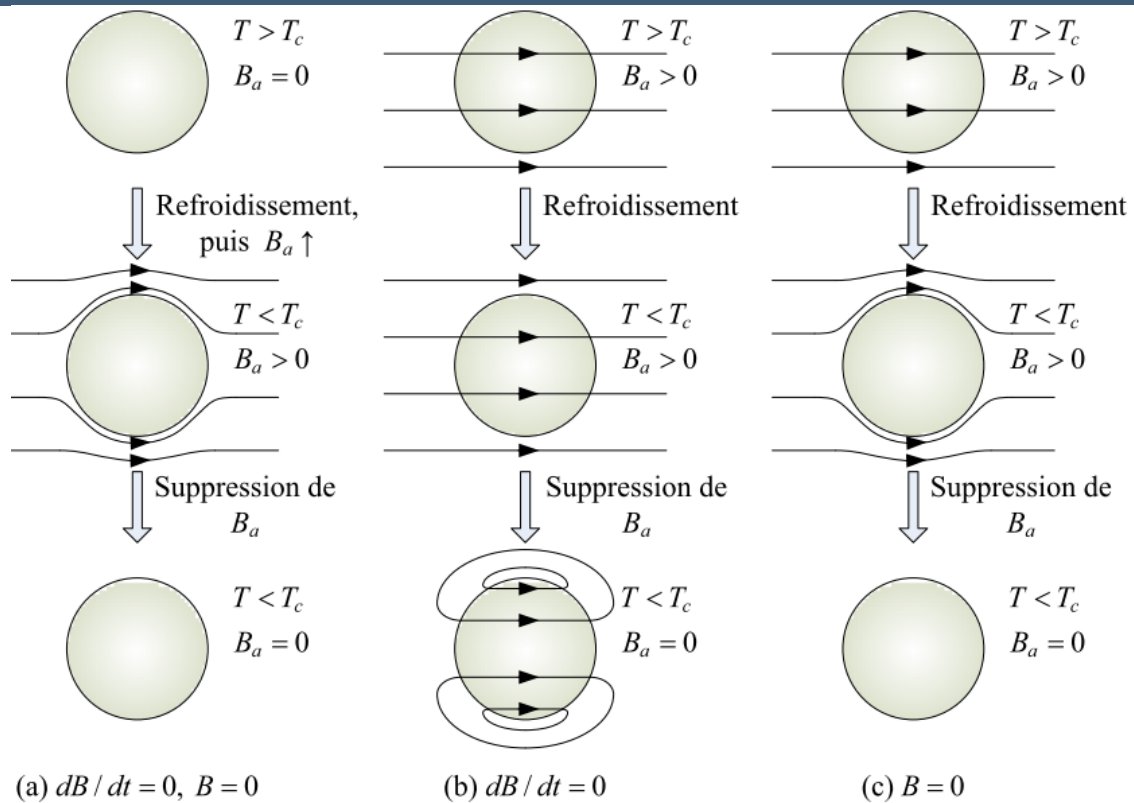


Figure. I.2. Différence entre un conducteur parfait et un supraconducteur.

(a) S’il n’existe aucun champ magnétique extérieur $B_a = 0$ avant que le matériau soit refroidi, chaque matériau possède un flux magnétique interne nul en dessous de T_c . (b) un conducteur parfait piège le flux magnétique appliquée avant refroidissement $\dot{B} = \frac{dB}{dt} = 0$. (c) le flux magnétique est toujours exclu par un supraconducteur en dessous de T_c , qu’un champ magnétique soit appliqué avant refroidissement ou non $B = 0$.

Différemment dans le cas d’un supraconducteur :

- Dans le premier cas, quand le champ magnétique est appliqué après refroidissement, le conducteur parfait et le supraconducteur se comportent de manière identique car l’induction magnétique est toujours nulle dans le matériau, voir (Figure. I.2(a)).
- Dans le second cas, l’induction magnétique est expulsée de l’intérieur du supraconducteur ($B = 0$) dès qu’il est refroidi en dessous de sa température critique, voir (Figure. I.2(c)).

Ce comportement est connu sous le nom d’effet Meissner : il s’agit de l’expulsion de toute induction magnétique de l’intérieur du supraconducteur, qu’elle soit avant que le spécimen soit devenu supraconducteur ou pas. Le diamagnétisme parfait est une propriété intrinsèque d’un

supraconducteur, qui n'est cependant valable que si la température et le champ magnétique sont en tout point inférieure à leur valeur critique $T < T_c$, $H < H_c$.

I.3.3. Surface critique

Le supraconducteur peut perdre l'effet Meissner dans son état supraconducteur dans l'une des conditions suivantes:

- La température du matériau dépasse la température critique T_c .
- Le champ magnétique extérieur appliqué dépasse une valeur critique appelée champ critique H_c .
- La densité de courant dans le matériau devient supérieure à la densité de courant critique J_c .

Ces trois paramètres T_c , H_c et J_c permettent de définir le domaine supraconducteur au delà duquel le matériau retrouve l'état normal comme l'illustre la (Figure. I.3) [02].

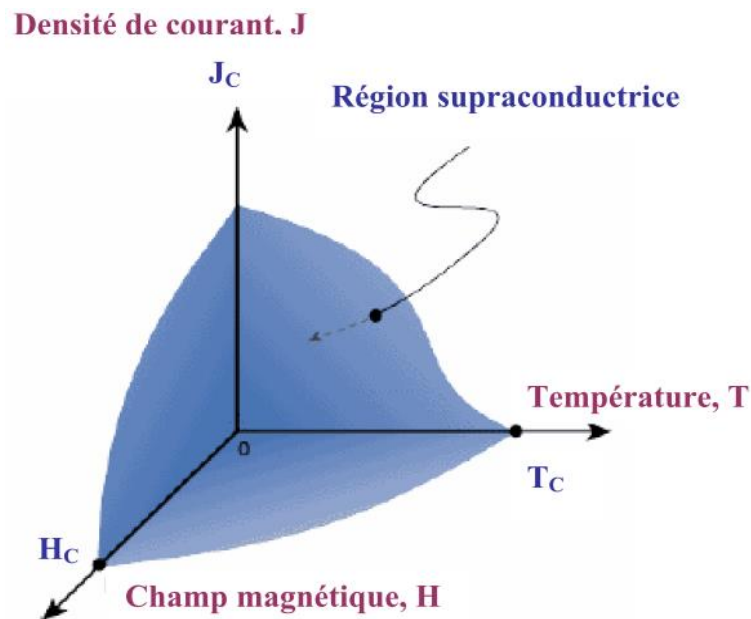


Figure. I.3 Illustration de la dépendance fonctionnelle de l'état supraconducteur en ce qui concerne le champ magnétique, la température et la densité de courant [02].

I.4. Les types de supraconducteurs

I.4.1. Diagramme de phase

I.4.1.1. Supraconducteurs de type I

Jusqu'à dans les années soixante, les scientifiques étaient persuadés que tous les supraconducteurs agissaient de la même façon en présence d'un champ magnétique. Ils savaient que la supraconductivité allait disparaître si le matériau est soumis à un champ magnétique plus intense qu'un champ critique H_c , et que la valeur de ce champ critique dépend de la température.

Ainsi, le matériau pouvait se trouver soit dans l'état normal, soit dans l'état supraconducteur, Selon la valeur de la température et du champ magnétique appliqué. Aujourd'hui, on qualifie les matériaux se comportant de cette façon de supraconducteur de première espèce ou de type I (**Figure. I.4**) [02].

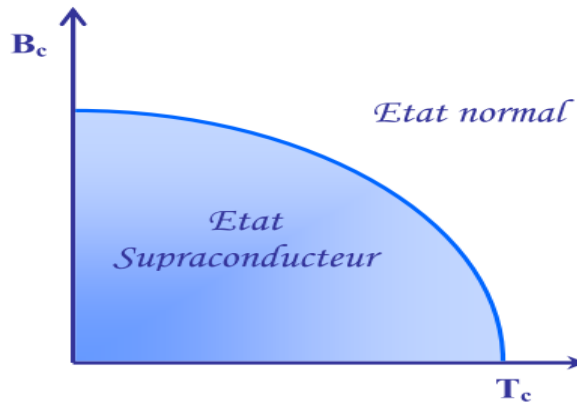


Figure. I.4 Diagramme de phase d'un supraconducteur de type I.

I.4.1.2. Supraconducteurs de type II

Cependant, tel n'est pas le cas pour tous les supraconducteurs. En 1962 un deuxième type de supraconducteurs a été découvert. Ces matériaux de deuxième espèce possèdent deux champs magnétiques critiques ($H_{c1} = B_{c1}$ et $H_{c2} = B_{c2}$) dépendant de la température. Ainsi, ils peuvent se trouver dans trois états : l'état normal, l'état supraconducteur et l'état mixte. Sous H_{c1} , le matériau est complètement à l'état supraconducteur. Lorsqu'il franchit ce champ magnétique critique, il se trouve à l'état mixte, c'est-à-dire que le flux magnétique commence à pénétrer dans le matériau à travers de minces faisceaux appelés vortex. Le centre de chacun des vortex est caractérisé par une conductivité normale, et le flux les traversant est gardé constant par des Boucles de courant persistant se formant sur leur circonférence. La densité des vortex augmente en proportion du champ appliqué. Si ce champ dépasse H_{c2} , le matériau atteint l'état normal, de la même façon que s'il avait outrepassé la température critique sans être soumis à un quelconque champ magnétique extérieur [02].

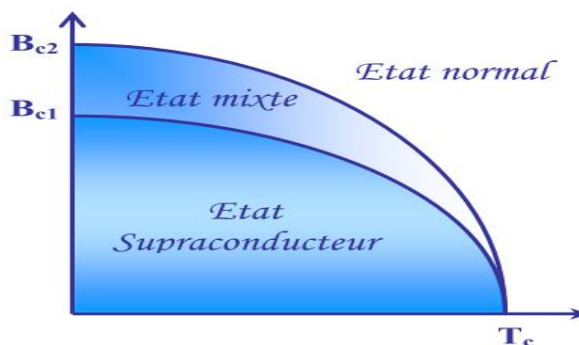


Figure. I.5 Diagramme de phase d'un supraconducteur de type II.

I.4.2. Comportement magnétique

Les deux types de supraconducteurs se distinguent par leur réponse à un champ magnétique extérieur.

I.4.2.1. Supraconducteur de type I

La réponse d'un supraconducteur de type I est représentée sur la (**Figure I.6 (a)**).

- Quand l'excitation magnétique varie de $H=0$ à $H = H_c$, la densité d'aimantation a est égale à $-H$ et la susceptibilité magnétique est $\chi = -1$. Le supraconducteur se comporte en diamagnétique parfait tel que le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur, égal à $B = \mu_0(H+A)$, est nul.
- Au-delà de H_c , le matériau est dans l'état normal et l'aimantation est pratiquement nulle [02].

I.4.2.2. Supraconducteur de type II

La réponse d'un supraconducteur de type II est sensiblement différente. Elle est représentée sur la (**Figure I.6 (b)**).

- De $H=0$ à une excitation critique H_{c1} appelée aussi champ critique inférieur, l'aimantation est égale à $-H$. Comme dans les supraconducteurs de type I, le matériau se comporte en diamagnétique parfait, il y a un effet Meissner total.
- A partir de H_{c1} , l'aimantation décroît progressivement pour atteindre $A=0$ (A : aimantation) à une excitation critique supérieure H_{c2} . Dans l'intervalle compris entre H_{c1} et H_{c2} , l'effet Meissner est seulement partiel.

Au-delà de H_{c2} , la susceptibilité magnétique est nulle et le matériau est dans l'état Normal [02].

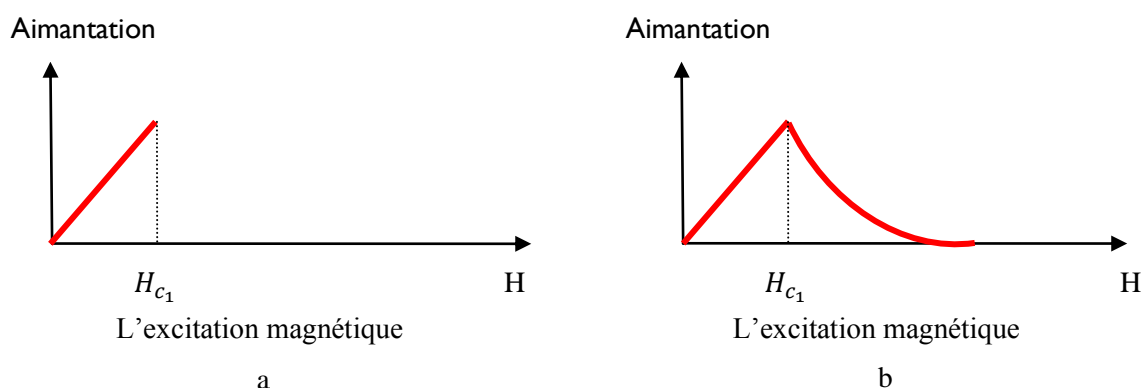


Figure. I.6 Dépendance de l'aimantation avec l'excitation magnétique pour les Supraconducteurs de type I (a) et de type II (b).

I.5. Principales caractéristiques des supraconducteurs

L'état non dissipatif est délimité par trois grandeurs principales : la température critique T_c , le champ critique H_c , et la densité de courant critique J_c [03].

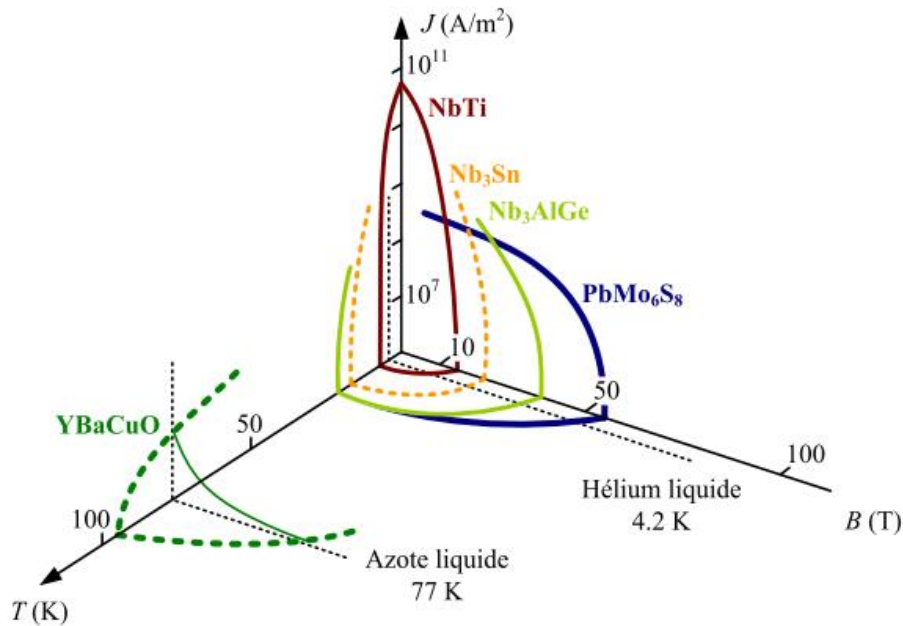


Figure. I.7 Surface critique des différents matériaux supraconducteurs.

I.5.1. Température critique

L'état de supraconductivité caractérise la plu part des métaux à condition que la température soit très proche de 0 K. La température en dessous de laquelle un matériau devient supraconducteur est nommée température critique. T_c Est également la température de transition qui délimite l'état supraconducteur de l'état normal. La supraconductivité est obtenue aux températures T_c plus élevées pour les métaux mauvais conducteurs dans l'état normal, comme le mercure et le plomb. Proche de T_c la variation de la résistivité en fonction de la température est très rapide (voir **Figure. I.8**).

La partie I représente la variation de la résistivité, $\rho(T)$ pour l'état normal, correspondante à la relation $\rho(T) = CT^5 + \rho_r$ ou ρ_r est déterminé par les impuretés et les défauts du réseau cristallin. La partie II de la courbe (**Figure. I.8**) présente une chute très raide sur un intervalle de température de 0,01 ...0,001 K et caractérise l'état supraconducteur [03].

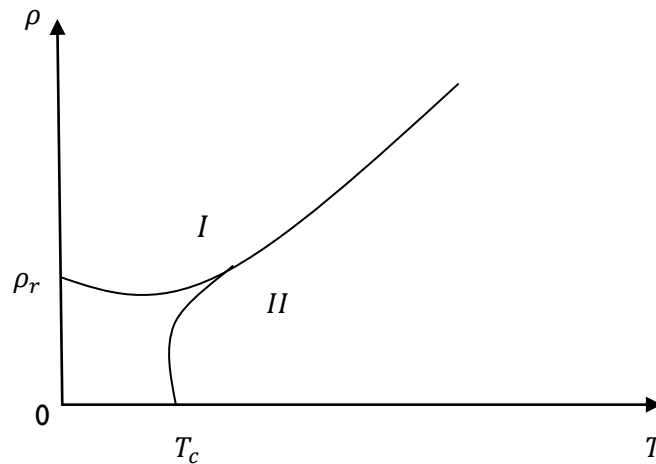


Figure. I.8 Dépendance de la résistivité en fonction de la température Pour l'état normal (I) et l'état supraconducteur (II).

La température a une influence importante sur les autres caractéristiques d'un matériau Supraconducteur comme le champ magnétique, la résistivité ou la profondeur de pénétration. On va montrer quelques unes de ces dépendances [03].

I.5.2. Champ magnétique critique

L'état supraconducteur peut disparaître pour un champ magnétique extérieur d'une certaine intensité H_c dépendant de la température. Dans la (**Figure. I.9 (a)**). La courbe $H_c(T)$ divise le Quadrant $H_c > 0$, $T_c > 0$ en deux régions : supraconducteur et normale. La température Maximale à la quelle un matériau est supraconducteur est obtenue pour un champ extérieur nul.

Le supraconducteur présente la propriété nommée effet Meissner Ochsenfeld, qui consiste à ce que les lignes de champ magnétique sont expulsées du matériau sauf sur une très fine épaisseur, λ_L ($\sim 10^{-7}$ - 10^{-8} m), à la surface du métal. λ_L Augmente avec la température de manière que pour T proche de T_c , λ_L tend vers l'infini. Ainsi pour T supérieurs à T_c le comportement est non magnétique (aimantation nulle), par contre pour T inférieurs à T_c il est parfaitement diamagnétique (aimantation négative) si le champ magnétique extérieur n'est pas très élevé. Pour des fréquences élevées, en infrarouge (10^{12} ... 10^{14} Hz), le métal devient non supraconducteur même pour des températures très basses, ($T < T_c$). Les théories classiques qui expliquent ces propriétés sont basées sur les équations Maxwell London [03].

Les supraconducteurs se divisent en deux catégories : type I et type II .Ceux de type I sont Caractérisés par le fait que si le champ magnétique extérieur atteint la valeur critique l'effet Meissner [03] s'arrête brusquement. Le diamagnétisme est parfait pour H inférieurs à H_c et la dépendance avec la température est avec la température est parabolique (**Figure. I.9 (a)**) :

$$H_c(T) = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (\text{I. 1})$$

Où H_0 est la valeur du champ critique extrapolé à $T = 0$ K. La résistivité augmente brusquement à la valeur correspondante à l'état normal quand le champ magnétique dépasse la valeur de H_c [03].

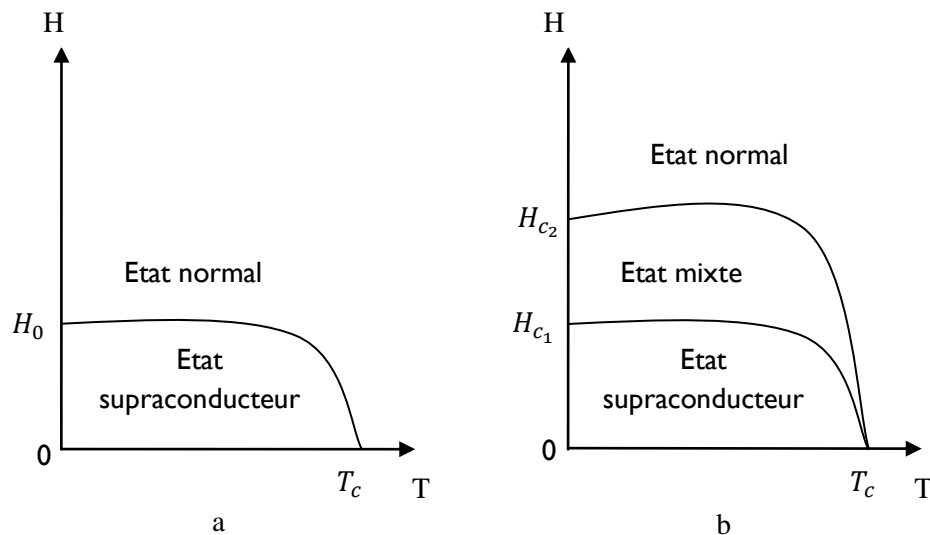


Figure. I.9 Dépendance du champ magnétique en fonction de la température.

Aux supraconducteurs de type II, le diamagnétisme parfait disparaît progressivement à partir d'une valeur de champ magnétique H_{c1} et la disparition totale du diamagnétisme est produite pour un champ H_{c2} . La caractéristique $H(T)$ des supraconducteurs de type II comporte plusieurs zones : une première dans laquelle la résistivité électrique est nulle ; une deuxième zone, où ρ peut prendre la valeur nulle ou correspondante à l'état normal ρ_n ou encore une valeur intermédiaire dépendante de facteurs comme la concentration des impuretés, la densité de courant, la direction du champ magnétique, etc.; la quatrième zone correspond à l'état normal ($\rho = \rho_n$). On peut considérer comme ordre de grandeurs les champs magnétiques $H_{c1} = 10$ kA/m, $H_{c2} = 10$ MA/m. Les supraconducteurs de type II sont constitués généralement des alliages ($Nb - Zr, Nb - Ti$), des composants supraconducteurs (Nb_3Sn, V_3Ga) et de métaux de transition avec une résistivité grande à l'état normal [03].

Pour des valeurs de champ comprises entre H_{c1} et H_{c2} ces matériaux présentent des zones à l'état normal, dans lesquelles l'induction magnétique est non nulle. Ces zones ont des formes filamentaires avec des diamètres, d , comparable à $2\lambda_L$ (la longueur de cohérence, $\lambda_L \ll \lambda_L$ pour les supraconducteurs de type II) et sont entourées de courants induits, dénommées tourbillons ou vortex séparées par des zones supraconductrices dans les quelles $B = 0$ et où se referment les lignes de courants tourbillonnaires [03].

I.5.3. Densité de courant critique

La densité de courant critique correspond à la valeur maximale au-delà de laquelle un champ électrique apparaît [03].

Pour les supraconducteurs de type I, la répartition du courant n'est pas homogène. Le courant de transport circule uniquement à la surface, dans l'épaisseur de pénétration de London. Pour les supraconducteurs de type II la densité de courant critique est fortement dépendante de l'induction B donc de la présence de vortex dans la structure du matériau. Pour une induction transverse, dans l'état mixte, un supraconducteur idéal présente une densité de courant nulle. Le courant de transport réagit avec les vortex et ceux-ci se déplacent lorsque la force créée de Lorentz $J_c(B)$ est supérieure aux forces d'ancrage (ou de pinning), entraînant une dissipation dans le matériau. Lorsque la densité de courant dépasse une valeur critique J_c les vortex sont arrachés. C'est le régime de flux-flow. Libérés, les vortex se déplacent. Un champ électrique est créé, proportionnel à $J - J_c$. Dans le régime de flux flow une résistivité dépendante de l'induction magnétique apparaît et elle est noté ρ_f [03].

$$\rho_f = \rho_n \frac{B}{\mu_0 H_{c2}} \quad \mu_0 H_{c1} \leq B \leq \mu_0 H_{c2} \quad (I.2)$$

Pour obtenir des grandes densités de courant critique les vortex doivent être solidement ancrés dans le matériau ou au moins quelques uns d'entre eux.

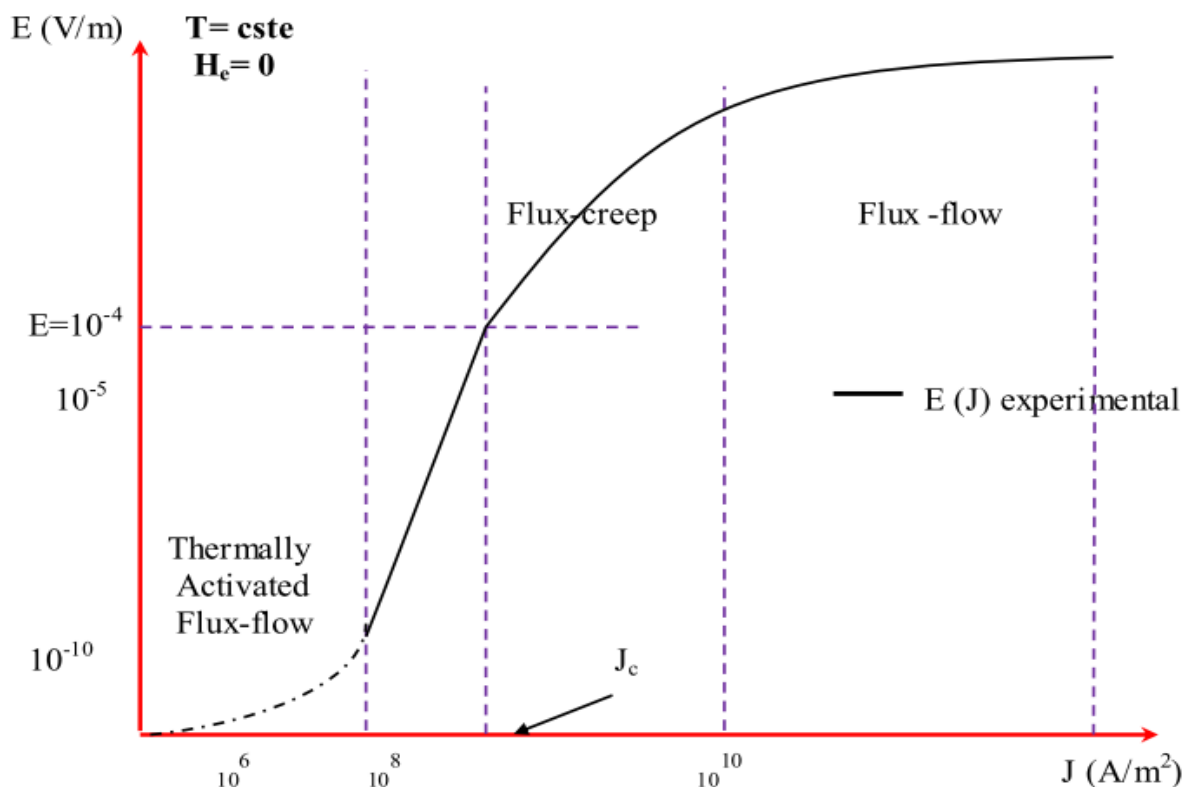


Figure. I.10 Dépendance du champ magnétique en fonction de la température.

La courbe expérimentale $E(J)$ représentée (**Figure .I.10**) donne une image classique d'un comportement de supraconducteur HTC. Sur cette courbe, on peut distinguer trois régimes de dépendance de la valeur de J : le thermally activated flux-flow (TAFF), le flux creep et le flux flow [03]. Ces régimes se différencient par un comportement magnétique du supraconducteur différent qui est fonction de la force de Lorentz et donc du courant appliqué :

Un premier régime appelé flux-flow pour des courants supérieurs au courant critique où la force de Lorentz est très supérieure aux forces d'ancrages des vortex, laissant ainsi les vortex se déplacer librement dans la même direction dans un mouvement collectif.

Un second régime situé autour du courant critique, appelé flux-creep. La densité de vortex est assez forte. Des vortex interagissent entre eux. Si l'un d'eux se décroche (Force de Lorentz plus la probabilité de saut), par interaction d'autres vortex vont se déplacer. On va donc observer Des déplacements de vortex par "paquets".

Un dernier régime, très controversé (en pointillé sur la (**Figure .I.10**)), pour de faibles courants appelés TAFF où les vortex sauteraient en moyenne tous dans la même direction d'un point d'ancrage à un autre de manière désordonnée. Ce régime n'est pas encore bien défini et dépend de la température (à basse température, le réseau de vortex serait "gelé" et il n'y aurait donc plus aucune dissipation. On passe donc directement en régime de fluxcreep) [03].

Les pertes en régime TAFF sont totalement négligeables devant les pertes en régime de flux-creep. Le régime de flux-flow est le plus dissipatif [03].

I.6. Réseau des vortex

I.6.1. Structure d'un vortex

Les supraconducteurs de type II sont les matériaux les plus étudiés, que ce soit en physique fondamentale ou en physique appliquée. Cet intérêt est dû aux propriétés de leur état Mixte qui induisent de forts paramètres critiques (T_c ; H_c ; J_c). Ces matériaux représentent, de par leur comportement des vortex, un système modèle pour beaucoup de domaines de la physique [02].

Le physicien A.A. Abrikosov démontra analytiquement que le champ magnétique pénètre dans un matériau de type II sous la forme de " nano tourbillons d'électricité", contenant chacun un même quantum de flux magnétique. Par analogie avec d'autres systèmes physiques, ils sont nommés vortex et leur structure se schématise selon la (**Figure. I.11**). Ils se composent d'un cœur de rayon $\xi(T)$, s'assimilant à un cylindre à l'état normal, autour duquel circulent des courants supraconducteurs d'écrantage sur une longueur $\lambda(T)$ (**Figure. I.11**). Les cœurs sont composés de quasi particules (électrons ou trous) dont la distribution énergétique est quantifiée selon celle de l'état normal [02]. Ces excitations électroniques restent confinées dans le cœur tant que leur énergie n'excède pas le gap supraconducteur d'énergie $\Delta(T)$. Au delà, elles

peuvent quitter le cœur pour relaxer vers l'état supraconducteur qui est plus favorable énergiquement. Ces phénomènes de dépeuplement du cœur des vortex sous l'effet d'un champ électrique peuvent influencer considérablement les mécanismes de dissipation sous \vec{B}_a . L'orientation et le sens de ces vortex sont globalement identiques à celle du champ Magnétique appliqué \vec{B}_a , mais elle peut localement être modifiée pour des raisons énergétiques. La philosophie générale est qu'un vortex minimise son énergie en plaçant son cœur normal dans les zones les moins supraconductrices [02].

Ceci est particulièrement effectif dans les matériaux anisotropes, comme les cuprites SHTC où la supraconductivité est généralement attribuée aux plans C_uO_2 [02].

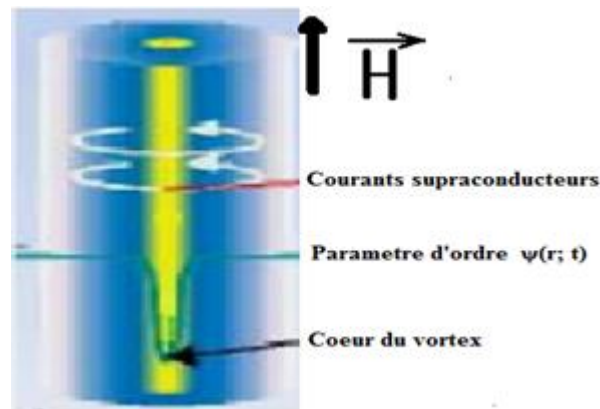


Figure. I.11 Structure d'un vortex.

I.6.2. Les effets du piégeage

Par définition, le courant critique I_c est le courant que crée une force de Lorentz, et pour déplacer les vortex, il faut que cette force soit supérieure aux forces d'ancrage des vortex. Si la force de Lorentz l'emporte sur l'inertie des vortex, ceux-ci se mettent en mouvement avec pour conséquence la dégradation de la supraconduction. Pour éviter cet effet pervers, il faut piéger les vortex, c'est à dire les ancrer. Comme les vortex sont "chargés", il suffit de minimiser leur "charge". Or, aucun matériau n'est absolument parfait et il existe des imperfections (impuretés, inhomogénéités, défauts...) dans tous les matériaux. Ces défauts peuvent, par conséquent, servir à ancrer les vortex. Les centres de piégeage vont dépendre, en partie, de la nature des défauts du matériau et leur efficacité sera maximale lorsque leur taille est comparable à celle des vortex. Or, les vortex qui, à l'origine, sont des cylindres parallèles au champ magnétique, passent par les impuretés, ce qui va minimiser leur énergie. De plus, il n'est pas nécessaire que tous les vortex soient piégés parce que, formant un réseau triangulaire, il suffit d'en bloquer quelques uns pour bloquer le tout (**Figure. I.12**) [02].

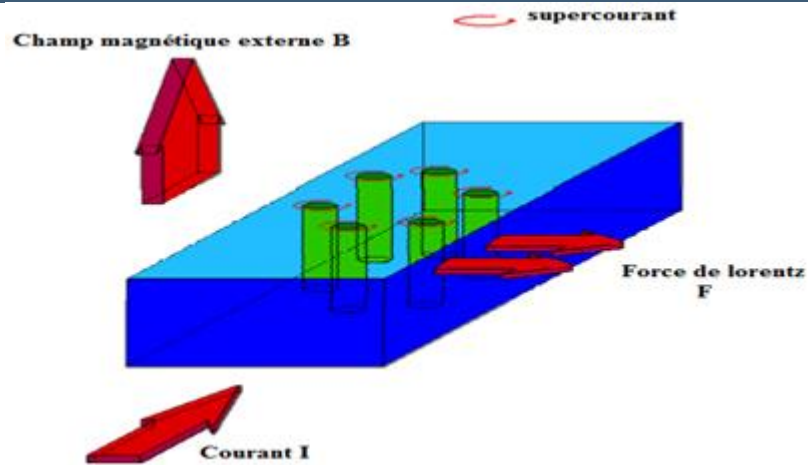


Figure. I.12 Mouvement des vortex dans un supraconducteur.

Le piégeage des vortex n'est pas une propriété spécifique des supraconducteurs à haute température critique. Mais les hautes températures rendent le piégeage thermiquement activé et le mouvement du flux plus important. En outre, contrairement aux supraconducteurs classiques, la ligne de fusion dans des SHTC se trouve au-dessous de la ligne $H_c(T)$ à cause de l'anisotropie [02].

Différentes sources de piégeage ont la capacité de figer les vortex dans une position:

- La plus évoquée d'entre elles est le piégeage volumique qui correspond à un ancrage des vortex dans des zones de défauts, répartis dans le volume d'un matériau (**Figure. I.13**), où le paramètre d'ordre $\psi(r; t)$ est affaibli. Ces centres d'ancrage sont d'autant plus efficaces que les défauts ont une dimension proche des grandeurs caractéristiques $\lambda(T)$ et $\xi(T)$ [02].
- Une autre forme importante de piégeage est l'ancrage de surface qui se fonde sur l'idée que les vortex doivent se courber.

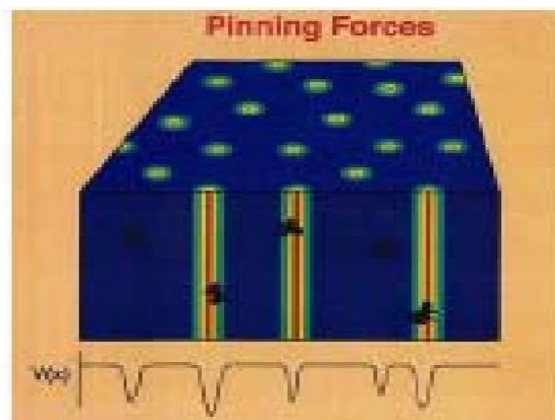


Figure. I.13 Ancrage des vortex.

I.7. Effet Josephson

L'effet Josephson est l'un des effets remarquables de la supraconductivité. C'est un phénomène quantique macroscopique qui apparaît à très basse température dans certains supraconducteurs. Dans l'état supraconducteur, les électrons s'attirent deux à deux et forment des paires, appelées paires de Cooper. L'effet Josephson est associé au passage de ces paires, par effet tunnel, au travers d'une barrière isolante placée entre deux supraconducteurs, appelée jonction Josephson (**Figure. I.14**) [02].

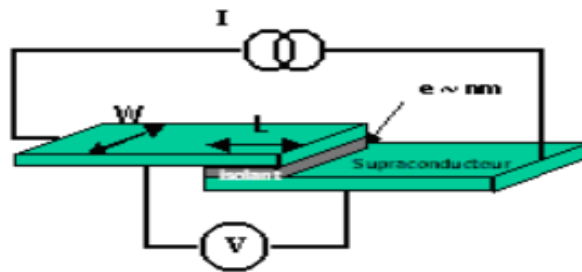


Figure. I.14 Schéma de la jonction Josephson.

I.8. Conclusion

Dans ce chapitre Nous avons présenté un aperçu historique sur les matériaux supraconducteurs, ainsi que leurs comportements magnétique, ainsi le réseau des vortex. On a conclu que l'inconvénient majeur pour les matériaux supraconducteurs reste toujours la température critique qui est très basse. La mise en place des modèles électromagnétiques régissant le comportement de ces matériaux fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre II

Modèles et applications des supraconducteurs

II.1.Introduction

II.2.Équations électromagnétiques décrivant le comportement d'un supraconducteur

II.3.Matériaux supraconducteurs HTC

II.4.Les Applications des supraconducteurs

II.5.Conclusion

II.1. Introduction

L'étude d'un dispositif électromagnétique nécessite la connaissance des champs électromagnétiques dans ce dispositif et donc les valeurs du flux, les forces magnétiques, etc., Le calcul du champ magnétique nécessite une résolution des équations électromagnétiques décrivant le comportement d'un supraconducteur.

L'induction magnétique B à l'intérieur d'un matériau en fonction du champ externe H , courant-tension sur un échantillon, on peut déduire la caractéristique expérimentale $V(I)$ qui se met habituellement sous la forme d'une loi de puissance.

Nous montrons aussi les utilisations et les applications de cette énergie renouvelable dans divers domaines.

II.2. Équations électromagnétiques décrivant le comportement d'un supraconducteur

Macroscopiquement, les équations de *Maxwell* restent valables pour décrire les phénomènes électromagnétiques qui se produisent dans un supraconducteur. En se plaçant en régime quasi-stationnaire (les courants de déplacement sont considérés comme nuls), elles s'écrivent [04]

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{J} \quad (\text{II. 1})$$

Comme pour les autres conducteurs, les équations suivantes viennent compléter les équations De *Maxwell* :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \vec{E} = \rho \vec{J} \quad (\text{II. 2})$$

Dans les équations (II. 1) et (II. 2) :

- \vec{E} est le champ électrique (en Vm^{-1}),
- \vec{B} est le champ d'induction magnétique (en T),
- \vec{H} est le champ magnétique (en Am^{-1}),
- \vec{J} est la densité de courant électrique (en A m^{-2}),
- σ est la conductivité du milieu (en $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$),
- ρ est la résistivité du milieu (en Ωm),
- μ est la perméabilité magnétique du milieu (en Hm^{-1}),

II.2.1. Relation B(H)

L'induction magnétique B à l'intérieur d'un matériau en fonction du champ externe H et de l'aimantation M est donnée par l'expression [04]:

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M = (1 + \chi)\mu_0 H = \mu_0 \mu_r H \quad (\text{II. 3})$$

Nous avons vu qu'un supraconducteur était diamagnétique, c'est à dire que B est nul à l'intérieur du matériau, lorsque $H < H_{c1}$. Ceci entraîne que $M = -H$ et $\chi = -1$. En revanche, lorsque le champ H_{c1} est supérieur à H , le matériau supraconducteur n'est plus diamagnétique. Comme le champ critique H_{c1} d'un supraconducteur de type II est de valeur faible, l'induction B auquel il est soumis lors de son utilisation est en général bien supérieure à μ_0 . Il peut donc être considéré comme macroscopiquement non magnétique [04].

On peut alors écrire $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ (**Figure. II.1**).

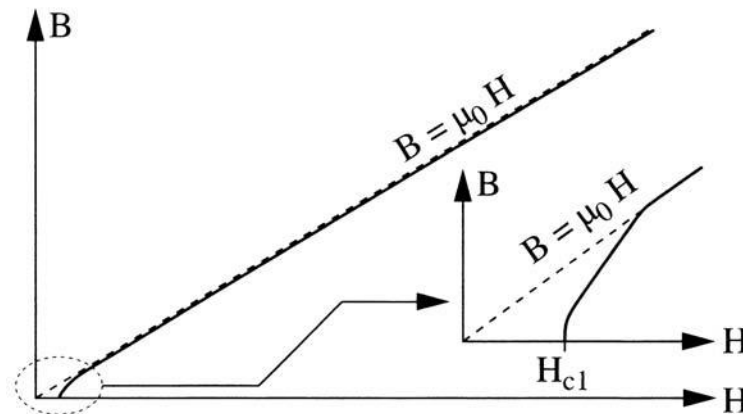


Figure. II.1 Caractéristique $B(H)$ d'un supraconducteur.

II.2.2. Relation $E(J)$

À partir de mesures courant-tension sur un échantillon, on peut déduire la caractéristique expérimentale $V(I)$ qui se met habituellement sous la forme d'une loi de puissance.

Si l'on Admet que cette caractéristique reste valable pour la densité de courant, la relation $E(J)$ s'écrit :

$$E = E_c \left(\frac{J}{J_c} \right)^n \quad (\text{II. 4})$$

Dans l'équation (II. 4), l'exposant n dépend non seulement du matériau, mais aussi de la température et de l'induction. Plus l'exposant n est élevé, et plus la transition est raide (**Figure. II.2**).

Le paramètre n est parfois considéré comme un indicateur de la qualité d'un ruban : plus il est élevé et plus le brin est d'excellente qualité. En effet, dans ce cas, pour des densités de courant et une valeur de n faibles, les pertes en régime sous-critique sont plus élevées que pour une valeur élevée de l'exposant (**Figure. II.1**). De plus, dans ce dernier cas, le courant critique peut alors être déterminé sans ambiguïté dès lors qu'une tension apparaît aux bornes de l'échantillon. La relation (II. 4) peut être introduite dans un programme informatique afin de déterminer Les grandeurs électromagnétiques. Analytiquement, elle devient cependant difficilement utilisable,

sauf dans le cas où n est grand. Alors, ce paramètre peut être considéré comme infini. Cette hypothèse conduit au modèle de l'état critique que nous développons ci-après.

II.2.3. Modèle de l'état critique, modèle de *Bean*

II.2.3.1. Modèle de l'état critique

L'hypothèse de ce modèle est que le coefficient n est considéré comme infini [04]. Ainsi, la caractéristique $E(J)$, représentée à la (Figure. II.3) se traduit mathématiquement par l'expression suivante :

$$J = J_c(|B|) \frac{E}{|E|} \tag{II.5}$$

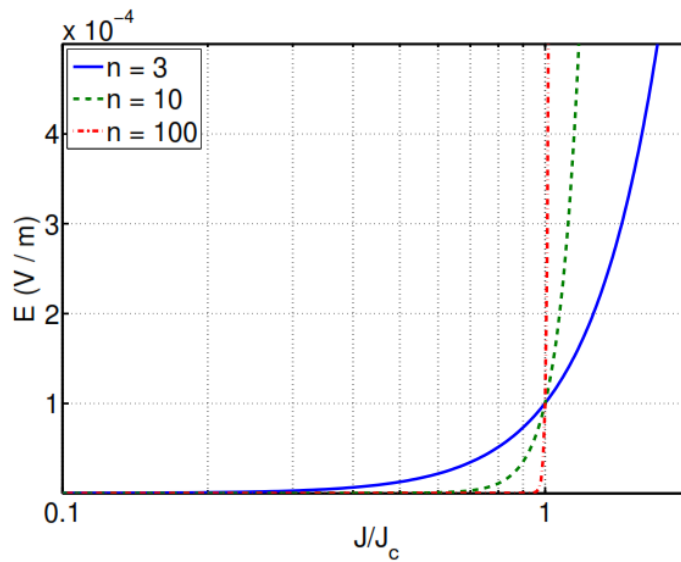


Figure. II.2 Caractéristique $E(J)$ d'un supraconducteur.

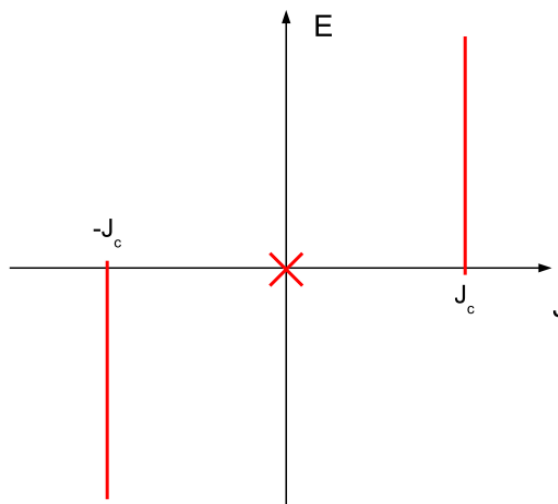


Figure. II.3 Caractéristique $E(J)$ d'un supraconducteur, modèle de l'état critique.

Par conséquent, la densité de courant J ne peut prendre que trois valeurs distinctes :

$(-J_c, 0$ ou $+J_c)$. Néanmoins, dans ce modèle, la valeur de J peut-être dépendante de l'induction \vec{B} .

II.2.3.2. Modèle de Bean

Le modèle de Bean à l'avantage d'être simple mathématiquement et de ce fait permet sur des exemples simples de bien comprendre la supraconductivité d'un point de vue macroscopique.

La (**Figure. II.4**) montre comment en tout point du supraconducteur, la densité de courant est liée au champ électrique. Le paramètre E_c est une valeur empirique du champ électrique à partir de laquelle le matériau devient résistif [05].

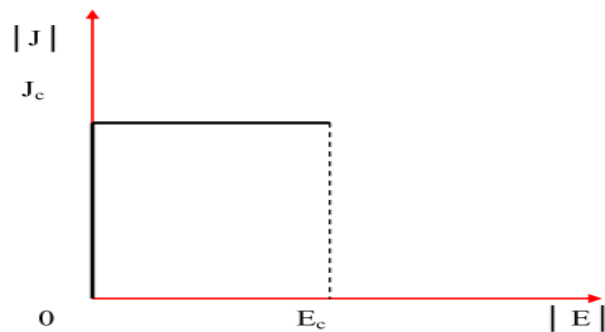


Figure. II.4. Modèle de Bean [5]

Ce modèle a été étudié dans le cas d'un problème monodimensionnel. Il a permis à partir de calculs analytiques d'obtenir des résultats satisfaisants. En revanche, il est difficilement exploitable dans le cas de problème bidimensionnel pour une approche numérique. La relation liant J et E par le modèle de Bean n'est pas un graphe fonctionnel, ce qui rend sa modélisation mathématique difficile. Lorsque le champ électrique est nul, la valeur absolue de la densité de courant peut prendre toutes les valeurs entre 0 et J_c [05].

Pour pouvoir l'exploiter d'un point de vue numérique, on utilise le modèle de Bean modifié.

L'approximation de ce modèle, on introduit une fonction $E \rightarrow J = \beta(E)$ approchant le modèle de Bean par l'intermédiaire de deux variables σ_f et E_n

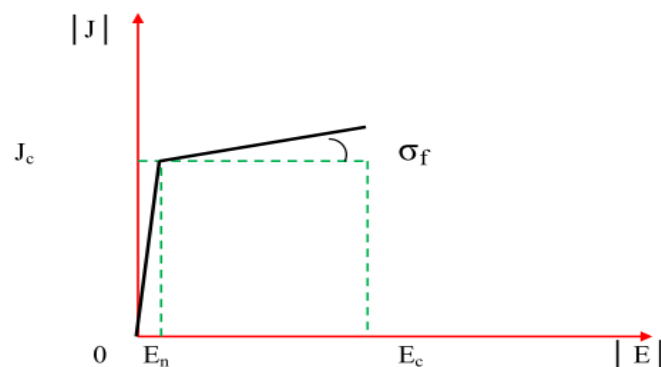


Figure. II.5. Le modèle de Bean modifié [5]

Pour des champs électriques de module supérieur à E_c , le matériau supraconducteur transite. Il passe de l'état supraconducteur à un état résistif et vérifie donc la loi d'ohm [05]:

$$J = \sigma E \quad (\text{II. 6})$$

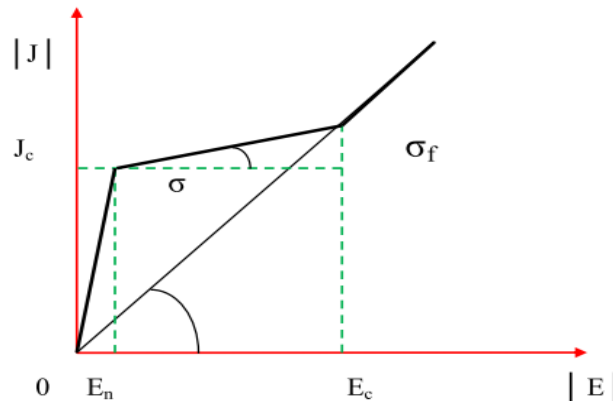


Figure II.6. Prise en compte du passage à un état résistif dans le modèle de Bean modifié.[5]

II.2.3.3. Le modèle de la loi de puissance

$$\vec{E}(\vec{J}) = \frac{E_c}{J_c} \left(\frac{J}{J_c} \right)^{N-1} \vec{j} \quad (\text{II. 7})$$

$$\vec{B}(\vec{H}) = \mu_0 \vec{H}$$

C'est un modèle qui modélise bien (voir la partie $J = J_c$ dans la **(Figure. I.10)** le comportement des supraconducteurs HTC autour de J_c [04]. Les paramètres de variation de cette loi sont la densité de courant critique, J_c et l'exposant, N . Avec ce modèle on peut faire varier les courbes $E(J)$ de sorte qu'on peut modéliser un conducteur normal pour $N = 1$ (loi de comportement linéaire) jusqu'à avoir une courbe raide comme dans le modèle de l'état critique pour un $N > 100$.

Par la suite, nous verrons des mesures expérimentales de pertes supraconductrices qui seront comparées à des modèles analytiques mais aussi aux résultats numériques donnés par des simulations basées sur cette loi de puissance [04].

II.2.3.4. Le modèle de KIM

Le modèle de Bean ainsi que la loi en puissance considèrent le matériau supraconducteur isotrope et isotherme. Ils ne tiennent pas compte de l'échauffement éventuel du conducteur sous l'effet des pertes qui entraînerait une diminution du courant critique [03]. Dans le modèle de Bean, la densité de courant critique est supposée constante quelque soit le champ magnétique extérieur. Dans la réalité la densité de courant dépend fortement de son orientation par rapport au champ et de l'induction magnétique, B . Une expression de $J_c(B)$ dans le cas isotrope a été donnée par Kim et :

$$J_c(|B|) = \frac{J_{c0} B_0}{|B| + B_0} \quad (\text{II. 8})$$

C'est le modèle le plus utilisé pour la modélisation de la dépendance de la densité de courant critique avec l'induction magnétique [03].

II.2.3.5. Le modèle exponentiel

Un autre modèle utilisé en développements numériques est le modèle de dépendance $J_c(B)$ suivant [03]:

$$J_c(|B|) = J_{c0} \exp\left(-\frac{|B|}{B_0}\right) \quad (\text{II.9})$$

II.2.4. Résumé des équations

Les équations décrivant le comportement électromagnétique d'un supraconducteur sont Résumées dans le (**Tableau. II.1**) suivant :

Équations de Maxwell	$\overline{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{div}(\vec{B}) = 0$ $\overline{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{J}$
Milieu non magnétique	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
Relation E(J)	$E = E_c \left(\frac{J}{J_c}\right)^n$
Modèle de l'état critique	$J = 0 \quad \text{ou} \quad J = \pm J_c$ $\Rightarrow \overline{\text{rot}}(\vec{H}) = \pm J_c(B) \quad \text{ou} \quad 0$
Modèle de <i>Bean</i>	$J_c \text{ indépendant de } \vec{B} $ $\Rightarrow \overline{\text{rot}}(\vec{H}) = \pm J_c \quad \text{ou} \quad 0$

Tableau. II.1 Équations décrivant le comportement électromagnétique d'un matériau supraconducteur [04].

II.3. Matériaux supraconducteurs HTC

En 1986, J. Bednorz et K. Müller, des laboratoires de recherche d'IBM à Zurich, ont découvert le premier composé supraconducteur à haute température critique. Il s'agit du composé $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$. La température critique de ce composé variait fortement avec le taux de substitution de Sr, le maximum, $T_c = 36\text{K}$. Plus tard, de nombreux nouveaux composés ont été découverts, les plus notoires étant le $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$, avec un T_c maximal 93K, le $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ ($T_c=93\text{K}$ en 1988), le $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$ ($T_c = 125\text{K}$, 1989) et le $\text{HgBa}_2\text{Ca}_3\text{Cu}_4\text{O}_8$ ($T_c = 135\text{K}$, 1993) [05].

Les supraconducteurs à haute température critique se distinguent des supraconducteurs "classiques" par le fait que ce sont des oxydes, au lieu d'être des composés intermétalliques. Tous les supraconducteurs à haute température critique ont une structure de maille élémentaire dérivée de la pérovskite, c'est-à-dire des couches de tétraèdres CuO_4 entre lesquelles se trouvent les ions Ba ou Sr, séparés par des couches contenant Y, Bi, Tl, Hg, etc. Cette structure en couches donne une très forte anisotropie aux propriétés mécaniques et électriques de ces composés. Par exemple, les plans contenant les ions de cuivre ont une conductivité dans l'état normal qui est beaucoup plus haute que celle des plans intermédiaires. Par conséquent, la résistivité le long de l'axe cristallin c (perpendiculaire aux plans CuO_2) peut être plus que 1000 fois plus grand que la résistivité le long des axes a et b (dans les plans CuO_2). Dans l'état supraconducteur aussi, on peut distinguer les plans CuO_2 à supraconductivité forte (haute densité de paires de Cooper) vis-à-vis des plans intermédiaires à supraconductivité faible (basse densité de paires de Cooper) [05].

II.4. Les Applications des supraconducteurs

Les propriétés extraordinaires des supraconducteurs n'ont cessé de faire rêver. De nombreuses applications ont été imaginées. On peut les classer en quatre groupes définis par la propriété fondamentale qui y conduit: Résistance nulle, effet Meissner, lévitation, effet Josephson [06].

Applications liées à la résistance nulle

- ✓ Les aimants supraconducteurs
- ✓ Les lignes de transport
- ✓ Les gros engins électromécaniques.

Applications liées à l'effet Meissner

- ✓ Blindage magnétique.

Applications liées au phénomène de lévitation

- ✓ Trains à lévitation supraconductrice allemands et japonais.

Applications liées aux effets de cohérence

- ✓ Mesures de champs magnétiques (SQUID)
- ✓ Détecteurs de micro-ondes
- ✓ Ordinateurs supraconducteurs.

II.5. Conclusion

Dans ce chapitre Nous avons présenté les différentes théories et les Modèles sur les supraconducteurs, et les équations électromagnétiques décrivant le comportement d'un supraconducteur, et le classement de leurs applications en quatre groupes. Dans le prochain chapitre, on va voir comment peut-on présenter théoriquement la répartition du courant dans un fil cylindrique supraconducteur alimenté par un courant variable $i(t)$, dans l'objectif de déterminer l'évolution des frontières libre de conduction.

Chapitre III

L'évolution des frontières libres de conduction

III.1.Introduction

III.2.Géométrie et hypothèses adoptées

III.3.Mise en équation

III.4.Frontières libres de conduction

III.5.Première conduction

III.6.Régime permanent

III.7.Calcul des pertes dans le fil supraconducteur

III.8.Tension aux bornes d'une longueur L du fil

III.9.Conclusion

III.1. Introduction

Comme on l'a vu au chapitre I, les supraconducteurs de type II, ont des propriétés fondamentales très intéressantes. Dans ce chapitre on étudie le comportement d'un fil cylindrique seul alimenté par un courant imposé variable $i(t)$. On modélise ce système électromagnétique en associant la loi de conduction idéale BEAN aux équations de Maxwell. Nous donnons une solution analytique à ce problème, cela introduit des frontières libres de conduction dont nous étudions l'évolution. Pour le régime permanent nous évaluons différentes grandeurs globales comme la tension et les pertes.

III.2. Géométrie et hypothèses adoptées

Le fil cylindrique considéré est de section circulaire, de rayon R et de longueur infinie. La symétrie de révolution et la longueur infinie du système impliquent une indépendance en θ et en z des grandeurs électriques. Nous considérons dans la suite une portion de longueur L de ce fil.

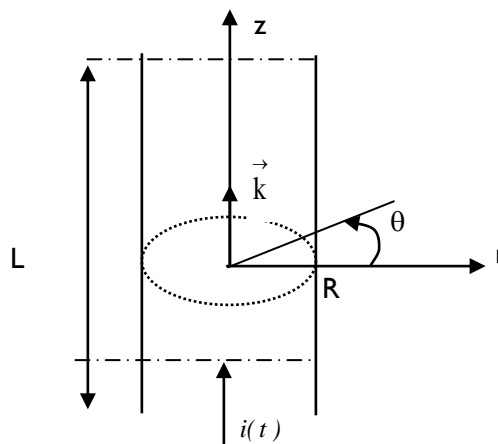


Figure. III.1 Définition de la géométrie du fil.

Les considérations précédentes impliquent que la densité de courant $\vec{j}(r, t)$ et le champ électrique $\vec{e}(r, t)$ sont colinéaires et portés par le vecteur unitaire \vec{k} .

$$\vec{j}(r, t) = j(r, t)\vec{k} \quad \vec{e}(r, t) = e(r, t)\vec{k}$$

Nous adopterons la loi de Bean idéale reliant $\vec{j}(r, t)$ à $\vec{e}(r, t)$ donnée par la relation :[8][11]

$$\vec{j} = j_c \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}$$

Ainsi, on a sur la (Figure .III.2), la loi de conductivité $j(e)$ utilisée dans la suite.

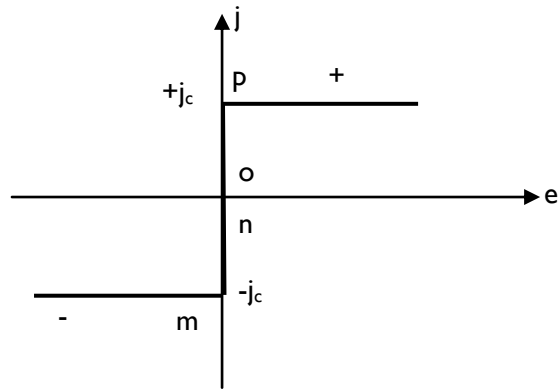


Figure.III.2 Loi de Bean Idéale.

Sur cette figure on distingue 5 états de conduction [8]. Deux (+ et -) avec pertes et trois (p, m et n) sans pertes.

Le courant injecté $i(t)$ dans le supraconducteur est sinusoïdal de période T :

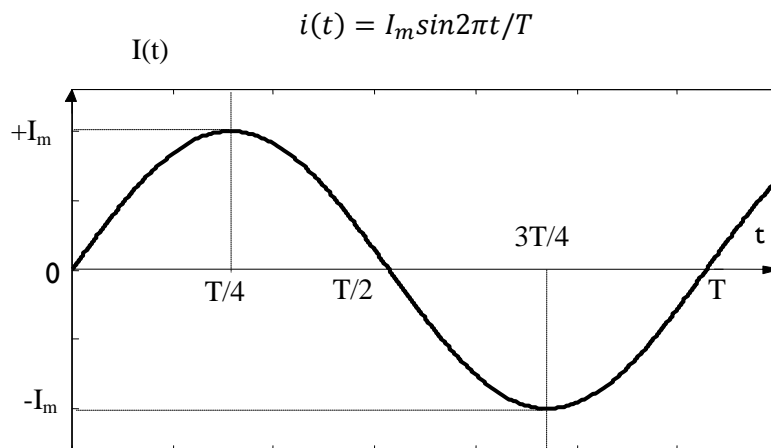


Figure.III.3 Courant imposé dans le fil supraconducteur circulaire.

III.3. Mise en équation

L'équation régissant $e(r, t)$ dans le supraconducteur s'écrit :

$$\vec{\Delta} \vec{e} = \overrightarrow{grad} (div \vec{e}) - \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot} \vec{e}) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{rot} \vec{h} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{j} \tag{III. 1}$$

$\vec{\Delta}$: désigne le Laplacien vectoriel.

$$\vec{\Delta} \vec{e} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{j} \tag{III. 2}$$

Qui se déduit des équations de Maxwell suivantes :

$$\overrightarrow{rot} \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \tag{III. 3}$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{h} = \vec{j} \tag{III. 4}$$

$$\vec{b} = \mu_0 \vec{h} \tag{III. 5}$$

$$div \vec{e} = 0 \tag{III. 6}$$

Conduisant à :

$$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} = r \mu_0 \frac{\partial j(e)}{\partial t} \quad (\text{III. 7})$$

Compte tenu des cinq états de conduction définis sur la (**Figure .III.2**) on a dans les deux états (+ -) où $j = j_c$ (constant):

$$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} = 0 \quad (\text{III. 8})$$

Et pour $e = 0$ (conductivité infinie), (III. 7) conduit à $\frac{\partial j}{\partial t} = 0$ (indépendance en t) soit $j = 0$ ou $j = \pm j_c$ des trois états **p m n**.

III.4. Frontières libres de conduction [9]

C'est l'analogie de (III.7) avec l'équation du transfert de la chaleur dans un milieu qui change d'état (eau-glace par exemple) et où $j(e)$ de la (**Figure .III.2**) est remplacée par une courbe $c(\theta)$ (capacité calorifique en fonction de la température θ). $c(\theta)$ Également discontinue à la température de changement d'état (chaleur latente de fusion solidification à $\theta=0^\circ\text{C}$ pour l'eau par exemple) et dans lequel existe un front mobile (eau-glace) qui conduit à introduire les cinq états de la (**Figure .III.2**) avec des frontières libres entre ces états. Ainsi pour $t>0$ $i(t)$ croissant une frontière libre de rayon $\rho(t)$ entre les états + et n progresse vers le centre du fil, (**Figure .III.4**).

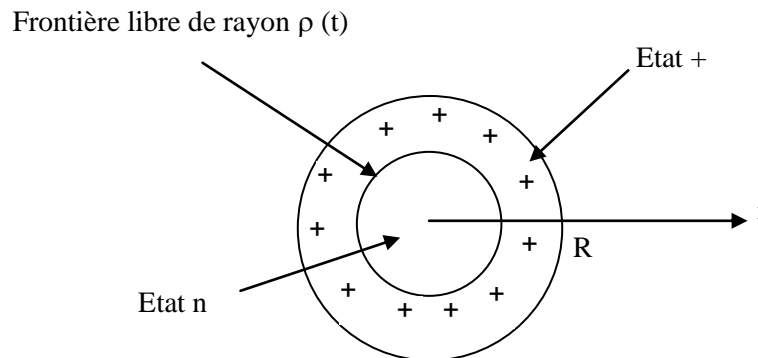


Figure.III.4. Frontière libre imposée par le courant $i(t)$

La conservation du courant définit ainsi est :

$$i(t) = (\pi R^2 - \pi \rho^2(t)) j_c \quad (\text{III. 9})$$

Soit
$$\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 = 1 - \frac{I_m \sin 2\pi \frac{t}{T}}{\pi R^2 j_c} \quad (\text{III. 10})$$

(III. 10) est valable si $\rho^2 > 0$, soit $I_m < \pi R^2 j_c$. On pose $I_c = \pi R^2 j_c$ courant critique du fil. Si $I_m > I_c$ la supraconductivité disparaît. On posera dans la suite $F = \frac{I_m}{I_c} \leq 1$ et on met (III. 10) sous la forme :

$$\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 = 1 - F \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \tag{III. 11}$$

Nous allons maintenant établir une relation entre la vitesse de progression $\frac{d\rho}{dt}$ de la frontière libre et les gradients de e de chaque côté de cette frontière. Pour cela on intègre (III. 7) comme suit :

$$\int_t^{t+dt} \int_{R^-}^{R^+} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} dr dt = \int_t^{t+dt} \int_{R^-}^{R^+} \mu_0 r \frac{\partial j}{\partial t} dr dt \tag{III. 12}$$

R^- et R^+ Grandeurs fixes choisies de telle sorte que $\rho(t)$ et $\rho(t + dt)$ soient compris et très proches entre ces deux grandeurs. Soit avec la propriété de dérivation sous le signe somme appliquée au second membre de (III. 12).

$$\int_t^{t+dt} \int_{R^-}^{R^+} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} dr dt = \int_t^{t+dt} \frac{d}{dt} \int_{R^-}^{R^+} \mu_0 r j(r, t) dr dt$$

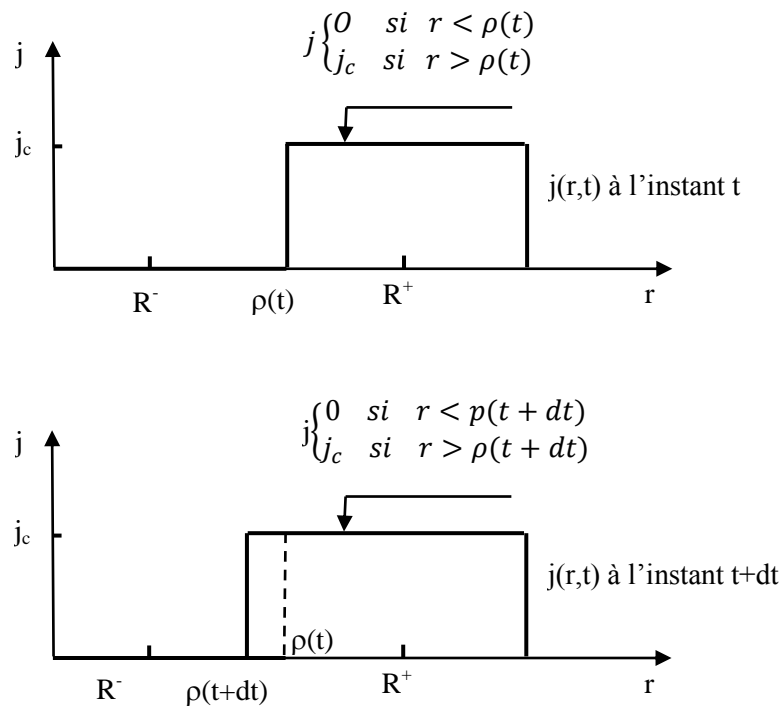


Figure.III.5. Evolution de la frontière libre ($d\rho = \rho(t + dt) - \rho(t)$).

Du première ordre en $d\rho$, dt on met l'équation précédente sous la forme suivante avec $r = \rho(t)$:

$$dt \left[\left(r \frac{\partial e}{\partial r} \right)_{R^+} - \left(r \frac{\partial e}{\partial r} \right)_{R^-} \right] = \int_{R^-}^{R^+} \mu_0 r j(r, t + dt) dr - \int_{R^-}^{R^+} \mu_0 \rho(t) j_c d\rho \tag{III. 13}$$

(Voir (Figure .III.5))

D'où la condition d'interface à la traversée de la frontière libre :

$$\sigma \left(\frac{\partial e}{\partial r} \right) = -\mu_0 \sigma(j) \frac{d\rho}{dt} \tag{III. 14}$$

Où $\sigma(x)$ avec $x = \frac{\partial e}{\partial r}$ ou bien j représente le saut de la grandeur x lorsqu'on traverse la frontière libre dans le sens des r croissants. Ainsi pour notre exemple de la (**Figure .III.5**), on a

$$\sigma(j) = j_c \text{ et } \sigma\left(\frac{\partial e}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{\rho+\delta} \text{ car } \left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{\rho+\delta} = 0.$$

III.5. Première conduction

On se place dans le cas où $t < \frac{T}{4}$ (première conduction) $e(r, t)$ est nul pour $r < \rho(t)$ et pour $r > \rho(t)$ il est défini par :

$$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial e}{\partial r} = 0$$

Avec les conditions aux limites

$$e(r, t) = 0 \quad \text{Si} \quad r = \rho(t) \text{ et } \left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{\rho(t)} = -\mu_0 j_c \frac{d\rho}{dt} \tag{III. 15}$$

En intégrant (III. 8) avec $(\rho, t) = 0$, on aura :

$$e(r, t) = A(t) \text{Log} \frac{r}{\rho(t)}$$

Soit en utilisant (III. 14) avec l'expression de $\rho(t)$ donnée par (III. 11) ; on obtient

$$A(t) \frac{1}{\rho} = \mu_0 j_c \frac{\pi R^2}{T \rho} F \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

D'où, si $r > \rho(t)$:

$$e(r, t) = \mu_0 \frac{I_m}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} \log \frac{r}{\rho(t)} \tag{III. 16}$$

Avec $I_m = F I_c$.

Les expressions (III. 16) et (III. 11) sont valables jusqu'au premier maximum de $i(t)$, ($t = \frac{T}{4}$) où la frontière libre est en $\rho_0 = R\sqrt{1 - F} \leq R$. Comme cela est mentionné dans [8] on montre dans l'annexe 1 pour $t > \frac{T}{4}$ que cette frontière libre ne peut pas revenir en arrière mais une nouvelle frontière démarre en R (surface du fil) à $t = \frac{T}{4}$ la précédente étant bloquée et il apparaît ainsi des couches concentriques de densités de courant $\pm j_c$.

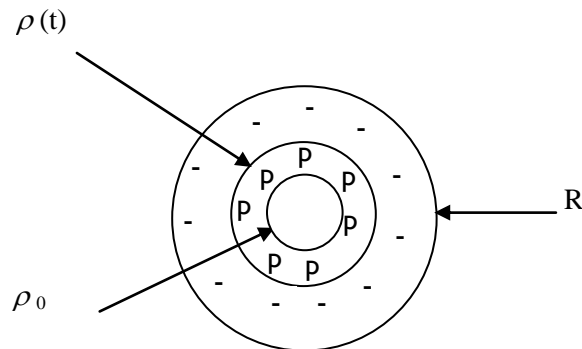


Figure.III.6 Positions des frontières libres dans la section du fil pour $t > \frac{T}{4}$.

III.6. Régime permanent

Pour $t > \frac{T}{4}$ la conservation de courant débité (**Figure .III.6**) définit un nouveau $\rho(t)$ tel que :

$$(\pi\rho^2(t) - \pi\rho_0^2).j_c - (\pi.R^2 - \pi\rho^2(t)).j_c = I_m \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Soit

$$\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 = 1 - \frac{F}{2} + \frac{F}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad (\text{III. 17})$$

Ceci est valable jusqu'à $t = \frac{3T}{4}$ où on a $\rho\left(\frac{3T}{4}\right) = \rho_0$ car pour $t > \frac{3T}{4}$ (III. 17) conduit à une frontière libre revenant en arrière ce qui est impossible.

On détermine $e(r, t)$ comme au (III. 4) précédent mais dans (III. 14) on doit remplacer j_c par $-2j_c$, car $\sigma(j) = -2j_c$. Et on a toujours $e(r, t) = 0$ si $r < \rho(t)$ car $e(\rho, t) = 0$.

Pour $r > \rho(t)$ on détermine $e(r, t)$ avec (III. 8) associée à $e(\rho, t) = 0$ et (III. 14) qui devient $\left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{\rho(t)} = 2\mu_0 j_c \frac{d\rho}{dt}$ où $\frac{d\rho}{dt}$ est maintenant déduit de (III. 17) ce qui conduit toujours à la même formule que (III. 16):

$$e(r, t) = \frac{\mu_0 I_m}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} \log\left(\frac{r}{\rho(t)}\right) \quad (\text{III. 18})$$

Mais avec $\rho(t)$ défini par (III. 17) et pour $\frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4}$.

Pour $t > \frac{3T}{4}$ $i(t)$ croît à nouveau et la relation (III. 17) conduit à un $\rho(t)$ croissant ce qui est toujours impossible donc une nouvelle frontière libre démarre en $r = R$ avec la configuration suivante des densités de courant dans la section du fil.

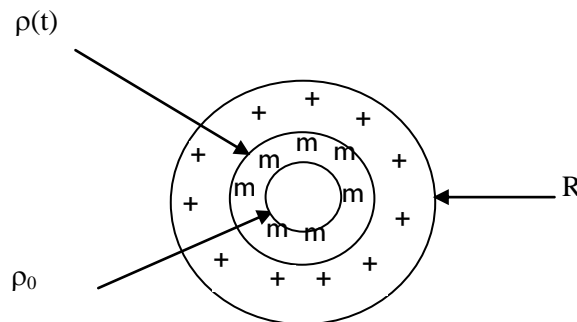


Figure.III.7 Configuration des densités de courant dans la section du fil supraconducteur pour $\frac{3T}{4} < t < \frac{5T}{4}$.

Et la conservation du courant conduit à :

$$\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 = 1 - \frac{F}{2} + \frac{F}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad (\text{III. 19})$$

Et dans (III. 14) on a maintenant $(j) = 2j_c$. On constate que ces équations conduisent toujours à :

$$e(r, t) = \frac{\mu_0 I_m}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} \log \left(\frac{r}{\rho(t)} \right) \quad (\text{III. 20})$$

Mais avec $\rho(t)$ donné par (III. 19).

En $t = \frac{5T}{4}$ (III. 18) conduit à :

$$\rho \left(\frac{5T}{4} \right) = \rho_0 = R\sqrt{1-F}$$

Soit le même état qu'à $t = \frac{T}{4}$.

Le régime permanent de période T est ainsi atteint et se répète indéfiniment, le régime transitoire étant limité à $t < \frac{T}{4}$.

III.7. Calcul des pertes dans le fil supraconducteur [7][12][13]

L'expression des pertes instantanées pour la longueur L du fil supraconducteur à l'instant

$\frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4}$ Est :

$$P_1(t) = 2\pi L \int_{\rho(t)}^R e(r, t) (-j_c) \cdot r dr \quad (\text{III. 21})$$

Où $e(r, t)$ est donnée par la relation (III. 16), il n'y a pas de pertes pour $r < \rho(t)$ car alors $e(r, t) = 0$.

Pour $\frac{3T}{4} < t < \frac{5T}{4}$ on doit utiliser dans la relation (III. 21) $\rho(t)$ donné par l'expression (III. 19) et y remplacer $-j_c$ par j_c et on obtient alors pour l'expression $P_2(t)$ de la nouvelle intégrale de l'expression (III. 21) :

$$P_2(t) = P_1 \left(t - \frac{T}{2} \right) \quad (\text{III. 22})$$

Car on vérifie facilement que $\rho(t)$ donné par (III. 19) est égal à $\rho \left(t - \frac{T}{2} \right)$ donné par (III. 17).

L'intégration de l'expression (III. 21) conduit ainsi à :

$$\rho_1(t) = -\frac{\mu_0 I_c^2}{2T} F \left(-\frac{F}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T} + \frac{F}{2} + \text{Log} \left(1 - \frac{F}{2} + \frac{F}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T} \right) \right) \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad (\text{III. 23})$$

Et pour $P_2(t)$ on remplace t par $t - \frac{T}{2}$, c'est-à-dire que l'on remplace $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ et $\cos 2\pi \frac{t}{T}$ par leur opposés. Les pertes instantanées $\rho(t)$ ont donc $\frac{T}{2}$ comme période.

On a ainsi la puissance moyenne perdue \bar{P} dans la longueur L du fil :

$$\bar{P} = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} P_1(t) dt$$

L'intégration de cette dernière conduit à écrire \bar{P} sous la forme :

$$\bar{P} = \frac{L\mu_0 I_c^2}{\pi T} \left[\frac{F}{2} (2 - F) + (1 - F) \text{Log}(1 - F) \right] \quad (\text{III. 24})$$

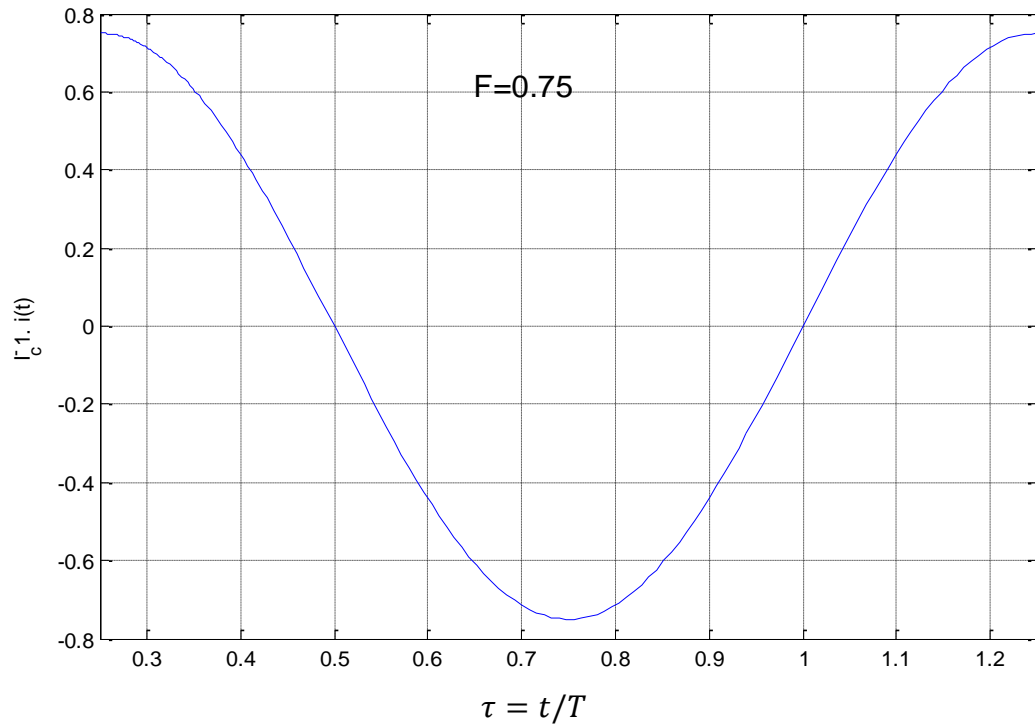


Figure.III.8 Courant $i(t)$ circulant dans le fil supraconducteur de longueur L .

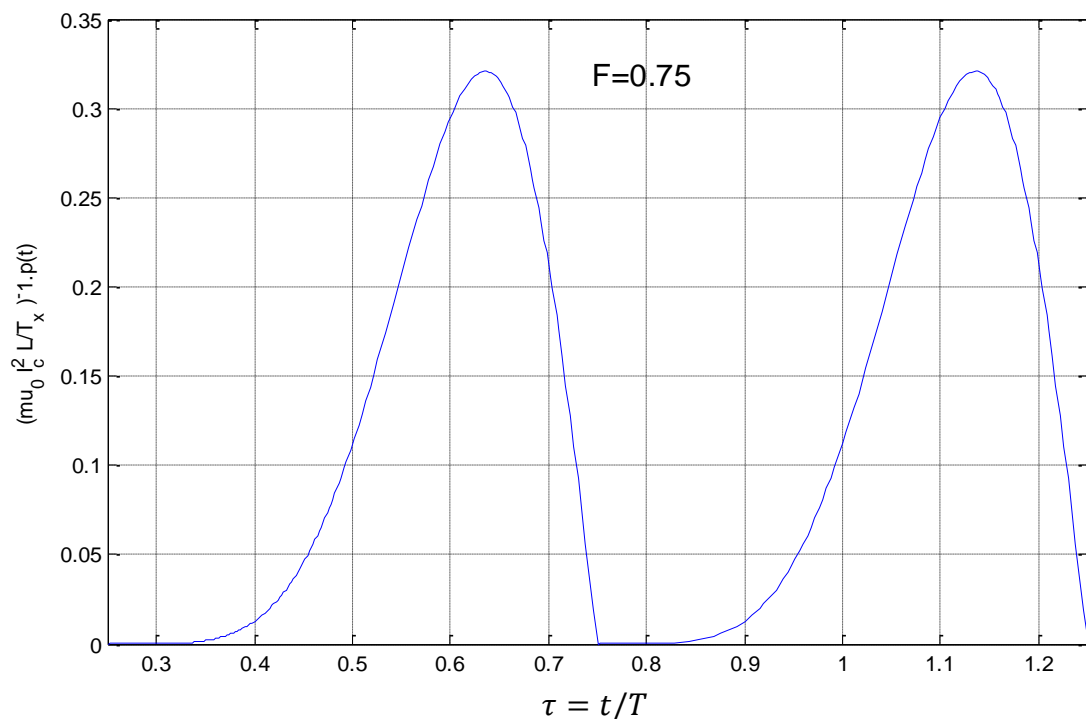


Figure.III.9 Pertes instantanées $p(t)$ en régime permanent dans une longueur L du fil supraconducteur.

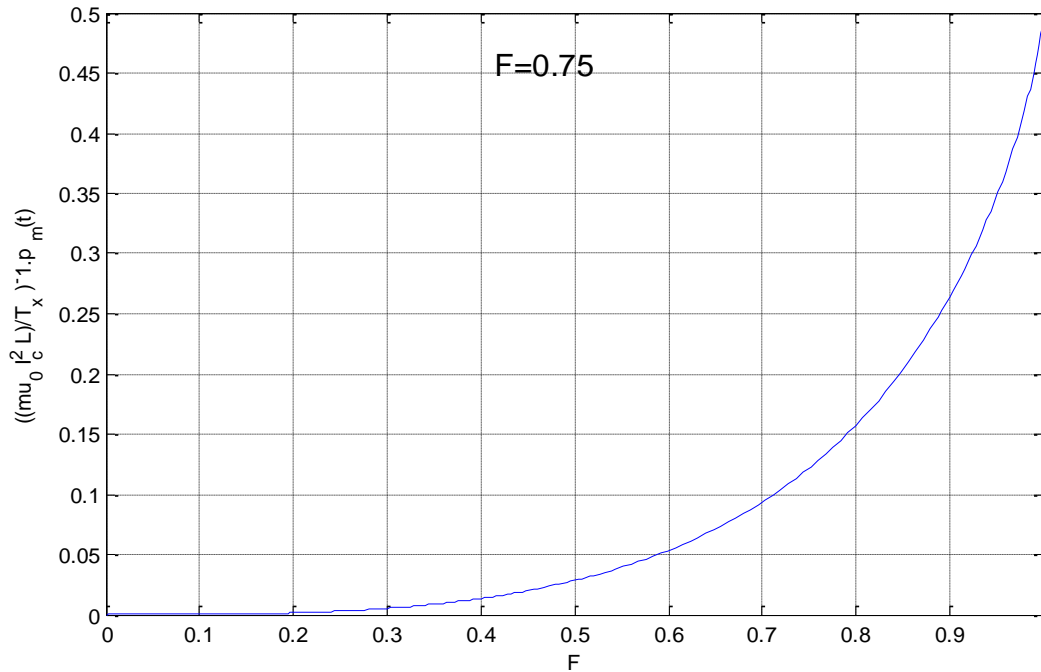


Figure.III.10 Pertes moyennes \bar{P} en régime permanent dans une longueur L du fil supraconducteur.

III.8. Tension aux bornes d'une longueur L du fil

La puissance $P(t)$ absorbée par le supraconducteur est le flux entrant du vecteur de Poynting $\vec{e} \wedge \vec{h}$ dans le cylindre supraconducteur de longueur L et de surface s :

$$P(t) = \oiint (\vec{e} \wedge \vec{h}) \cdot \vec{n} ds = p(t) + \frac{dw_m}{dt} \tag{III. 25}$$

$p(t)$ Représente les pertes instantanées précédentes et $\frac{dw_m}{dt}$ désigne la dérivée de l'énergie magnétique à l'intérieur du supraconducteur.

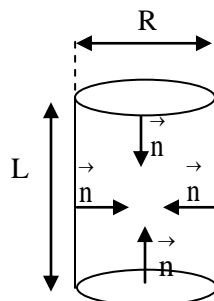


Figure 2.11 Définition des normales \vec{n} à la surface (s) pour le calcul du flux du vecteur de Poynting.

Dans le calcul de l'intégrale double de (III. 21) la contribution des surfaces de base de s est nulle car \vec{e} est normal à ces surfaces et \vec{h} est dans le plan de ces dernières.

Sur la surface latérale on a :

$$h(R, t) = \frac{i(t)}{2\pi R}$$

D'où

$$(\dot{e} \wedge \dot{h}) \cdot \dot{n} = e(R, t) \cdot \frac{i(t)}{2\pi R}$$

Donc constant sur cette surface latérale. On a ainsi :

$$P(t) = \frac{\mu_0 I_c L}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} \text{Log} \left(\frac{R}{\rho(t)} \right) \cdot i(t) \tag{III. 26}$$

Où $\rho(t)$ est toujours donné par (III. 17) et (III. 19). $P(t)$ a pour période $\frac{T}{2}$ comme $p(t)$

Entre $\frac{T}{4}$ et $\frac{3T}{4}$ on a :

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} p(t) \cdot dt + w_m \left(\frac{3T}{4} \right) - w_m \left(\frac{T}{4} \right)$$

Et en remarquant que $w_m \left(\frac{3T}{4} \right) = w_m \left(\frac{T}{4} \right)$ (signes des courants opposés donc même valeur de l'énergie magnétique) on a :

$$\bar{P}(t) = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} p(t) \cdot dt = \bar{p} \tag{III. 27}$$

On peut vérifier qu'un calcul direct de $\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} p(t) \cdot dt$ donne bien la formule (III. 24).

A partir de (III. 26) on peut ainsi définir une tension :

$$v(t) = \frac{\mu_0 I_c L}{T} F \cos 2\pi \frac{t}{T} \text{Log} \left(\frac{R}{\rho(t)} \right) \tag{III. 28}$$

Telle que :

$$P(t) = v(t) \cdot i(t) \tag{III. 29}$$

Cette tension supposée appliquée à la longueur L du supraconducteur fournit des pertes $p(t)$ et son énergie magnétique interne $w_m(t)$. $v(t)$ est la tension mesurée par un voltmètre V dans les conditions de la (Figure .III.12) [7].

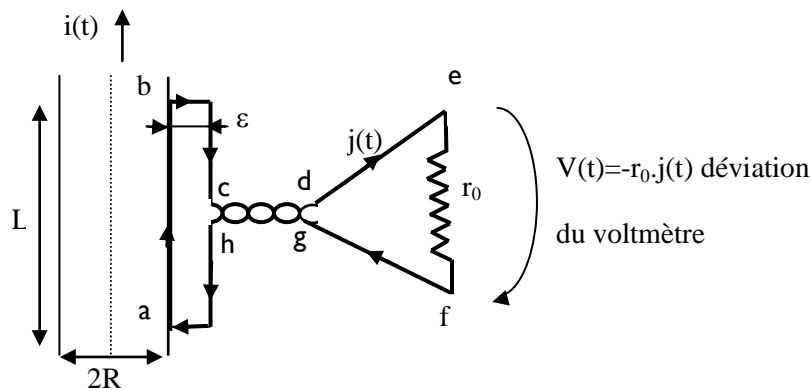


Figure.III.12 Mesure de la tension $v(t)$.

Les connexions, **bc** et **ha** sont très proches du fil supraconducteur ($\epsilon \neq 0$), alors que les connexions, **cd** et **gh** sont entrelacées de façon à minimiser le flux parasite enlacé.

r_0 désigne la résistance de grande valeur du voltmètre telle que $j(t)$ soit très faible.

En appliquant la loi d'induction de Faraday à la boucle $\gamma = abcdefgha$ de la (Figure.III.12) on a :

$$\oint e \cdot dl = -\frac{d\phi}{dt} \quad (\text{III. 30})$$

où le flux $\phi(t)$ traversant cette boucle γ est négligeable si la disposition précédente des fils de cette boucle est idéale, ce qui conduit à écrire (III. 30) sous forme :

$$0 = \oint e \cdot dl = \int_a^b e \cdot dl + \int_e^f e \cdot dl \quad (\text{III. 31})$$

car la chute de tension dans les connexions bcde et fgaha est négligeable ($j(t)$ faible et résistance négligeable devant r_0). On a ainsi d'après (III. 31)

$$\int_a^b e \cdot dl - V(t) = 0 \quad (\text{III. 32})$$

Soit

$$V(t) = e(R, t) \cdot L \quad (\text{III. 33})$$

Qui comparée à (3.27) donne :

$$v(t) = V(t) \quad (\text{III. 34})$$

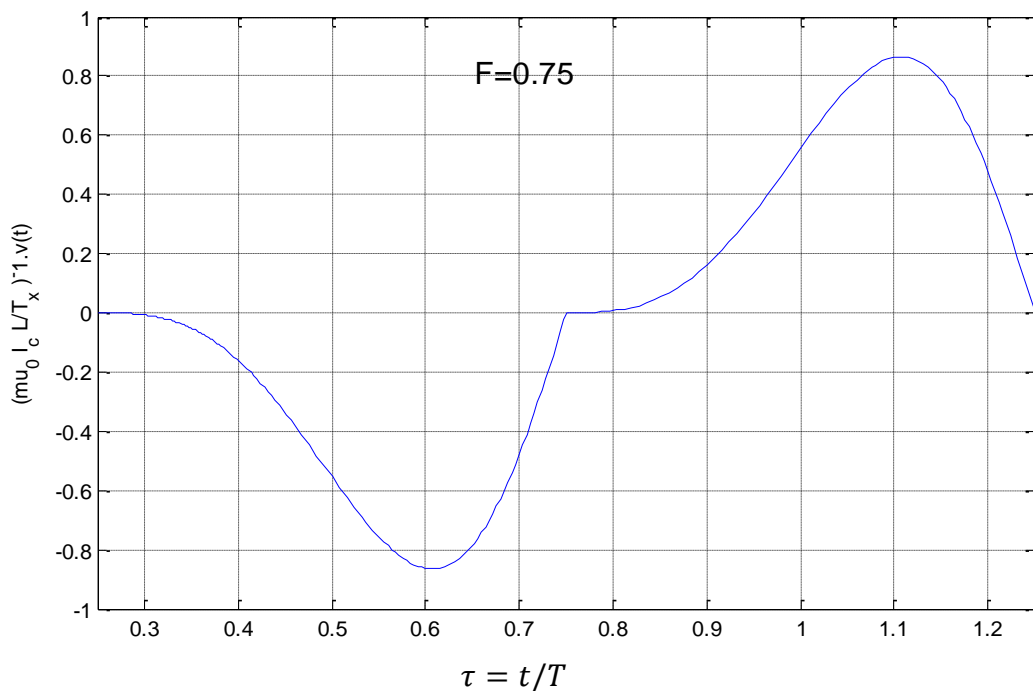


Figure.III.13 Tension $v(t)$ mesurée en régime permanent aux bornes d'une longueur L de fil supraconducteur parcouru par le courant $i(t)$ défini sur la Figure.III.8.

III.9. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le cas d'un fil supraconducteur de type II seul alimenté par un courant imposé variable et nous sommes arrivé à mettre en évidence l'intérêt de l'utilisation de la loi de BEAN idéale pour expliquer le phénomène des frontières libres. Dans la suite de ce travail, qui est dédié principalement aux calculs numériques de ces frontières libres de conduction, en tenant compte des principales caractéristiques des supraconducteurs, en utilisant la méthode des éléments finis.

Chapitre IV

Présentation des méthodes de résolution et simulations

IV.1. Introduction

IV.2. Conditions de passage entre deux milieux différents

IV.3. Méthodes de résolution des équations différentielles aux dérivées Partielles

IV.4. Simulation

IV.5. Conclusion

IV.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons exposé l'étude d'un fil cylindrique supraconducteur présenté par les outils mathématiques (équation de MAXWELL) pour la modélisation. La qualité des résultats de simulation nécessite la connaissance précise des différentes grandeurs électromagnétiques et propriétés physiques dans ce dispositif (Matériau) et donc les valeurs du flux, les forces magnétiques, etc., Le calcul par exemple d'un champ magnétique dans un matériau nécessite une résolution des équations de Maxwell.

Pour cela, il existe plusieurs méthodes pour le calcul des différents caractéristiques, ces méthodes sont fondées sur les méthodes analytiques, expérimentales et numériques, Ces dernières sont plus utilisées que les précédentes.

Dans ce travail concernant la modélisation de supraconducteur basé sur la loi du BEAN nous nous intéressons à la méthode d'éléments finis (MEF) avec suivi des frontières libre de conduction (FTM), pour exposer l'évolution (comportement) de ces différents frontière libre de conduction dans un fil supraconducteur.

IV.2. Conditions de passage entre deux milieux différents

Chaque deux milieux magnétiques de propriétés physiques différentes ont leurs conditions de passage d'un milieu a l'autre, ces conditions sont traduits par les équations [15], [16].

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \wedge \vec{n} = 0 \quad (IV.1)$$

La discontinuité de la composante normale de l'induction magnétique

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (IV.2)$$

La discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique due au courant surfacique s'ils existent.

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{n} = \vec{J}_s \quad (IV.3)$$

La discontinuité de la composante normale de l'induction électrique due aux charges surfaciques q_s si elles existent.

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \vec{\rho}_s \quad (IV.4)$$

IV.3. Méthodes de résolution des équations différentielles aux dérivées Partielles

Il existe plusieurs méthodes pour la résolution des équations aux dérivées partielles, ces méthodes sont analytiques, numériques ou mixtes (semi analytiques).

IV.3.1. Méthodes Analytiques

IV.3.1.1. Exemple de la méthode de séparation des variables

C'est la méthode la plus utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles, le principe de cette méthode consiste à mettre l'inconnue sous forme d'un produit des fonctions, dont chacune ne dépend que d'une seule variable [15,16].

Si on prend l'exemple : $\Delta V = 0$ en 2D, donc:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{IV. 5})$$

Avec : $V = X(x).Y(y)$ (IV. 6)

Par l'application de la méthode de séparation des variables: L'équation (IV.5), (II.5) devient:

$$Y(y). \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x). \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{IV. 7})$$

Si on met $X'' = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$ et $Y'' = \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}$ l'équation (IV. 7) devient:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \quad (\text{IV. 8})$$

Il existe une solution si il existe une constante λ appelée la constante de séparation telle que:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \quad (\text{IV. 9})$$

IV.3.2. Méthodes des intégrales (semi analytique)

IV.3.2.1. Méthodes des intégrales des frontières (MIF).

Cette méthode est basée sur la discrétisation des frontières du domaine, en utilisent pour cela le théorème de GREEN, Elle est limitée a la résolution des systèmes linéaire [15].

IV.3.2.2. Méthode des circuits couplés (MCC)

La (MCC) permet de fournir la solution d'une EDP par une expression intégrale de type BIOT ET SAVART, et elle est peut être couplée à une méthode numérique de discrétisation [15].

IV.3.3. Méthodes numériques

Ce sont des méthodes basées sur la discrétisation du domaine d'étude.

IV.3.3.1. Méthode des différences finies

Cette méthode est structurée sur la discrétisation du domaine d'étude suivant le développement limité de la série de Taylor en chaque nœud du maillage, ainsi l'équation différentielle est transformée en équation algébrique en chacun des nœuds. La distribution de la grandeur en question est obtenue par la résolution du système d'équation algébrique [18].

IV.3.3.2. Méthode des volumes finis (MVF)

La MVF se déduit à partir de la MDF. Le domaine d'étude est subdivisé en volumes élémentaires de telle manière que chaque volume entoure un nœud du maillage (celui des différences finies) [15].

La forme intégrale de l'EDP est discrétisée dans le domaine d'étude et intégrée sur chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale dans ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle) entre deux nœuds consécutifs...

Grâce à un libre choix de la fonction de liaison entre nœuds consécutifs, la procédure conduite à une solution plus précise que celle fournie par la MDF [15].

IV.3.3.3. Méthodes des éléments finis [17]**IV.3.3.3.1. Généralités**

Les codes éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisés lors de la conception et à l'analyse des produits industriels. Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée et peut sembler de moins en moins une affaire de spécialistes [17]. Si l'utilisation de la méthode se démocratise de par la simplicité croissante de mise en œuvre, la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, il reste néanmoins des questions essentielles auxquelles l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions :

- formaliser les non dits et les réflexions qui justifient les choix explicites ou implicites de son analyse du problème.
- évaluer la confiance qu'il accorde aux résultats produits.
- analyser les conséquences de ces résultats par rapport aux objectifs visés.

L'objectif de cette partie est de présenter les principes de base de cette méthode en insistant sur l'enchaînement des tâches (démarche et hypothèses associées) qui assurent la cohérence du processus de calcul. Ces connaissances vous seront utiles pour maîtriser les deux principales difficultés de mise au point d'un modèle numérique :

- problèmes préliminaires à la phase de calcul.
- problèmes liés à l'exploitation des résultats et le retour à la conception.

Il ne faut pas perdre de vue que l'analyse des résultats nécessite une bonne compréhension des différentes étapes mathématiques utilisées lors de l'approximation, pour pouvoir estimer l'erreur du modèle numérique par rapport à la solution exacte du problème mathématique [17].

Sans oublier que le modèle numérique ne peut fournir que de résultats relatifs aux informations contenues dans le modèle mathématique qui découle des hypothèses de modélisation.

Nous nous limiterons à la présentation de modèles élémentaires utilisés dans le cadre des théories linéaires. Bien que simples ces modèles permettent déjà de traiter un grand nombre d'applications liées aux problèmes de l'ingénieur. Du point de vue pédagogique, ils sont suffisamment complexes pour mettre en avant les difficultés de mise en œuvre de la méthode [17].

L'idée fondamentale de cette méthode est de discrétiser le problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple. Sur chacun de ces éléments il sera plus simple de définir des approximations nodales. Il ne reste alors qu'à assembler les formes matricielles élémentaires pour obtenir les équations relatives à la structure à étudier. C'est sous cette forme pragmatique qu'elle est utilisée par les ingénieurs, et que nous allons maintenant l'aborder [17].

IV.3.3.3.2. Démarche éléments finis

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, qui sont détaillées par la suite, sont les suivantes :

- discrétisation du milieu continu en sous domaines.
- construction de l'approximation nodale par sous domaine.
- calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
- assemblage des matrices élémentaires.
- prise en compte des conditions aux limites.
- résolution du système d'équations.

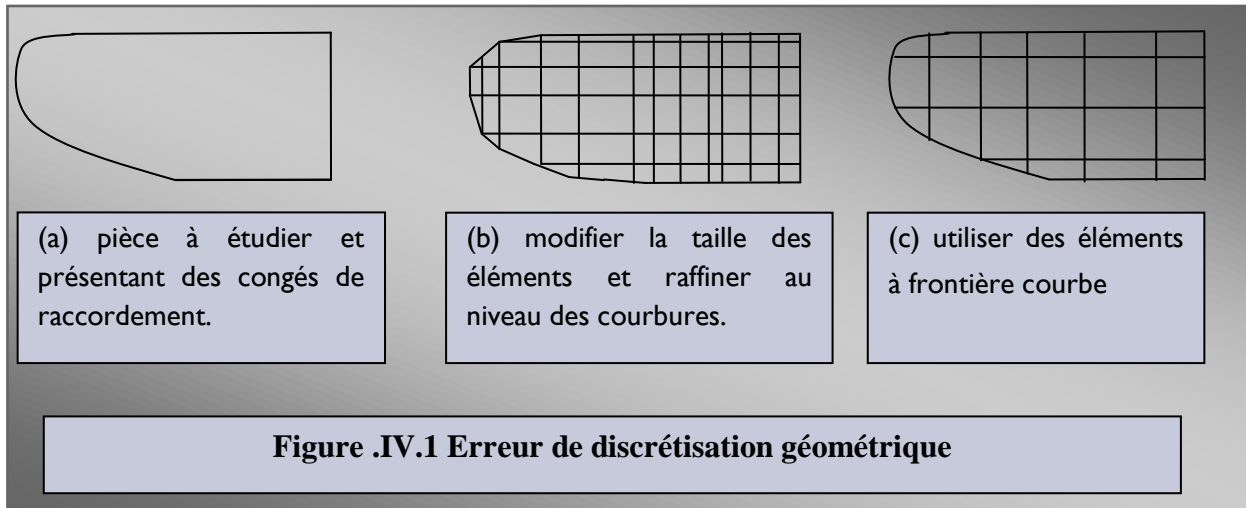
IV.3.3.3.2.1. Discrétisation géométrique

Cette opération consiste à procéder à un découpage du domaine continu en sous domaines :

$$D = \sum_{e=1}^{n_e} D_e \quad \text{Tel que } \lim_{e \rightarrow 0} (\cup_e D_e) = D$$

Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple. Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune.

Lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés comme proposé sur la (**Figure .IV.1**). Sur chaque élément nous allons chercher à définir une approximation de la fonction solution.



IV.3.3.3.2.2. Approximation nodale

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation u^* du champ des variables u par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément considéré, on parle de représentation nodale de l'approximation ou plus simplement d'approximation nodale [17].

Définition de l'approximation nodale

L'approximation par éléments finis est une approximation nodale par sous domaines ne faisant intervenir que les variables nodales du domaine élémentaire D_e :

$$\forall M_i \in D_e, u^*(M) = N(M)u_n \quad (\text{IV. 10})$$

Où $u^*(M)$ représente la valeur de la fonction approchée en tout point M de l'élément et N , la matrice ligne des fonctions d'interpolation de l'élément u_n variables nodales relatives aux nœuds d'interpolation de l'élément.

Dans le cas général le champ à approcher est un champ vectoriel. Nous utilisons alors la notation matricielle suivante $u^*(M) = N(M)u_n$. Les nœuds M_i sont des points de l'élément pour lesquels on choisit d'identifier l'approximation u^* à la valeur du champ de variables u . Nous en déduisons que :

$$\forall M_i, u^*(M_i) = u_i \quad (\text{IV. 11})$$

Soit pour l'approximation nodale :

$$\forall M_i, N_j(M_i) = \delta_{ij} \quad (\text{IV. 12})$$

➤ **Construction d'une approximation nodale linéaire**

L'interpolation nodale est construite à partir d'une approximation générale :

$$\forall M_i, u^*(M) = \boldsymbol{\phi}(M)a \quad (\text{IV. 13})$$

$\boldsymbol{\phi}$ Est une base de fonctions connues indépendantes, en général une base polynomiale et a , le vecteur des paramètres de l'approximation aussi dits paramètres généralisés, qui n'ont pas de signification physique.

Bases polynomiales complètes

- une dimension
 - linéaire $(1, x)$: deux variables
 - quadratique $(1, x, x^2)$: trois variables
- deux dimensions
 - linéaire $(1, x, y)$: trois variables
 - quadratique $(1, x, y, x^2, xy, y^2)$: six variables
- trois dimensions
 - linéaire $(1, x, y, z)$: quatre variables
 - quadratique $(1, x, y, z, x^2, xy, y^2, xz, z^2, yz)$: dix variables

Pour utiliser une base polynomiale complète, le nombre de termes doit être égal au nombre de variables nodales à identifier. Si l'on ne peut pas utiliser un polynôme complet, le meilleur choix consiste à respecter la symétrie des monômes conservés [17].

Bases polynomiales incomplètes

- deux dimensions : « bi - linéaire » $(1, x, y, xy)$: quatre variables
- trois dimensions : « tri - linéaire » $(1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz)$: huit variables

En identifiant aux nœuds l'approximation u^* à la valeur du champ de variables u , nous pouvons exprimer les paramètres généralisés a en fonction des variables nodales un :

$$u_n = u^*(M_n) = \boldsymbol{\phi}(M_n)a \quad (\text{IV. 14})$$

Soit, par inversion du système total :

$$a = Tu_n \quad (\text{IV. 15})$$

Pour éviter des erreurs de modèle trop importantes, la matrice à inverser doit être bien conditionnée. Ce conditionnement est lié au choix de la base polynomiale et à la géométrie des éléments. En reportant ce résultat dans l'approximation nous obtenons la matrice des fonctions d'interpolation :

$$N(M) = \phi(M)T \quad (\text{IV. 16})$$

➤ **Construction des fonctions d'interpolation d'un élément triangulaire**

Approximation nodale de quelques éléments de référence

Un élément de référence est un élément de forme géométrique simple, à frontière rectiligne par exemple, pour lequel l'approximation nodale est construite en suivant la démarche analytique précédente. Le passage de l'élément de référence à l'élément réel sera réalisé par une transformation géométrique. Nous entendons par élément réel un élément quelconque du domaine discrétisé [17].

Deux grandes familles d'éléments sont souvent présentées :

- les éléments de type Lagrange.
- les éléments de type Hermite.

Pour les éléments de type Lagrange, on augmente le nombre de nœuds en conservant une seule variable nodale. Pour les éléments de type Hermite on augmente le nombre de variables nodales, en retenant par exemple les valeurs des dérivées du champ aux nœuds. L'élément poutre présenté dans le chapitre suivant fait parti de la famille de l'Hermite [17].

Éléments à une dimension

La base de fonction linéaire illustrée sur la (**Figure .IV.2(a)**) s'écrit avec $s \in [0, 1]$:

$$N_1(s) = L_1 = 1 - s, N_2(s) = L_2 = s \quad (\text{IV. 17})$$

Cette base est utilisée pour les éléments barres et génère une discontinuité au niveau des champs de déformations et de contraintes au passage d'un élément à son voisin. Une base un peu plus riche, constituée de polynômes d'ordre 2 peu aussi être utilisée :

$$N_1(s) = L_1(2L_1 - 1), N_2(s) = 4L_1L_2, N_3(s) = L_2(2L_2 - 1) \quad (\text{IV. 18})$$

Ces fonctions de forme sont schématisées sur la (**Figure .IV.2(b)**). Le passage à l'ordre supérieur donne la base de la (**Figure .IV.2(c)**) où seules N_1 et N_2 sont illustrées : les deux autres fonctions N_3 et N_4 sont respectivement les symétriques de N_1 et N_2 par rapport à $s = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 N_1(s) &= \frac{L_1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2) & N_2(s) &= \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1) & (IV.19) \\
 N_3(s) &= \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2 - 1) & N_4(s) &= \frac{L_2}{2}(3L_2 - 1)(3L_2 - 2)
 \end{aligned}$$

L'élément associé est construit avec autre nœuds et une variable par nœud. Il est possible, avec la même base polynomiale, de construire un élément à deux nœuds ayant deux variables par nœud, c'est un élément de type l'Hermite illustré sur la (Figure .IV.2(d)) pour N_1 et N_2 : de la même manière que précédemment, les fonctions N_3 et N_4 se trouvent par symétrie. Si nous utilisons comme variables nodales le champ et sa dérivée première, nous obtenons les fonctions d'interpolation de l'élément poutre présenté dans la sous-section 3.2.1 :

$$\begin{aligned}
 N_1(s) &= 1 - 3s^2 + 2s^3 & N_2(s) &= 1 - 2s^2 + 2s^3 & (IV.20) \\
 N_3(s) &= 3s^2 - 2s^3 & N_4(s) &= -s^2 + s^3
 \end{aligned}$$

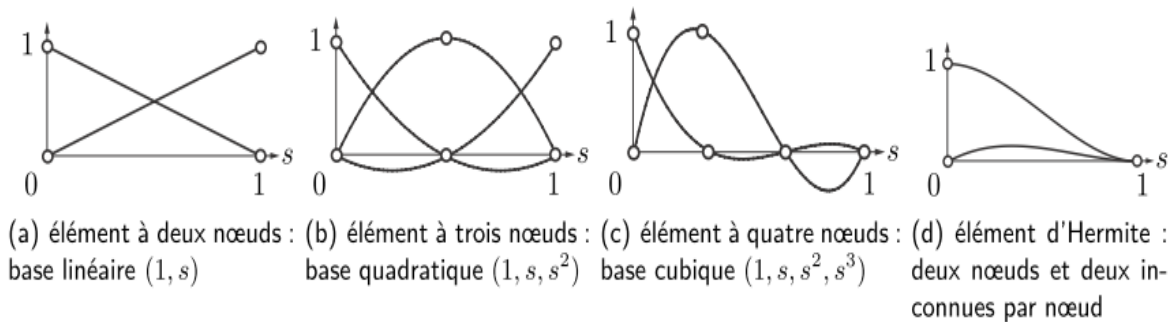


Figure .IV.2 Fonctions de forme à une dimension.

Élément triangulaire

Pour ce type d'élément, l'approximation utilise la base polynomiale linéaire $(1, s, t)$. L'élément de référence, aussi dit parent, est un triangle rectangle à trois nœuds de type « T3 ». L'approximation quadratique quant à elle utilise la base $(1, s, t, s^2, st, t^2)$. L'élément de

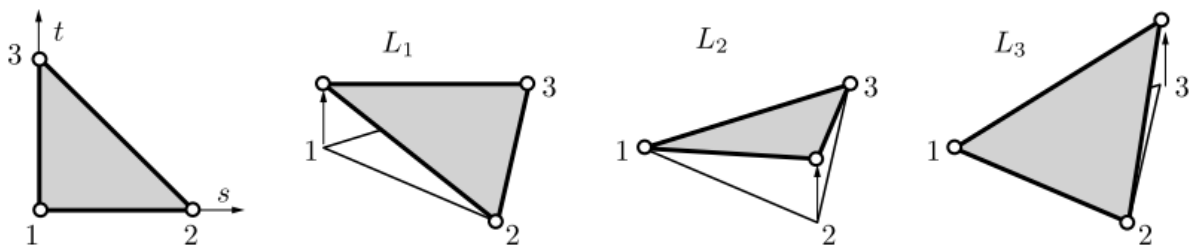


Figure .IV.3 Fonctions d'interpolation linéaires du triangle.

référence est un triangle rectangle à six nœuds de type « T6 ». Posons $L_1 = 1 - s - t$, $L_2 = s$ et $L_3 = t$. Pour :

- les trois nœuds sommet $i = 1, 2, 3$, les fonctions de forme s'écrivent :

$$N_i = (L_i - 1) \tag{IV.21}$$

- les trois nœuds d'interface $i = 1, 2, 3$:

$$N_{i+3} = 4L_jL_k \quad \text{Pour } j \neq i \quad k \neq i, j \tag{IV.22}$$

La (Figure .IV.4) donne une représentation de deux des fonctions d'interpolation. Les autres s'obtiennent par permutation des indices.

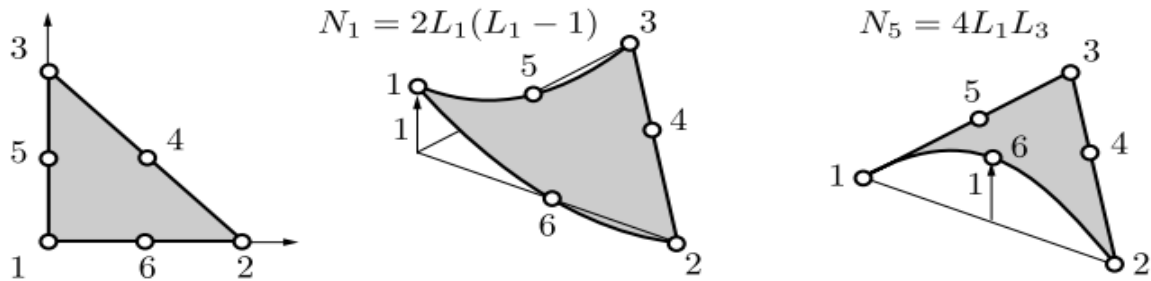


Figure .IV.4 Fonctions d'interpolation quadratiques du triangle. Les autres sont obtenues par rotation.

Élément à deux dimensions rectangulaire

L'approximation bilinéaire est déduite de la base polynomiale $(1, s, t, st)$ sur $(s, t) \in [-1, 1]$. L'élément de référence est un carré à quatre nœuds de type « Q4 ». Les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - s)(1 - t) & N_2 &= \frac{1}{4}(1 + s)(1 - t) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + s)(1 + t) & N_4 &= \frac{1}{4}(1 - s)(1 + t) \end{aligned} \tag{IV.23}$$

Sur la (Figure .IV.5), seule la fonction N_1 est représentée, les autres s'obtenant par permutation. De la même façon, on peut construire, à partir d'une base polynomiale complète, les fonctions d'interpolation des éléments rectangulaires à neuf nœuds, pour une approximation quadratique, et à seize nœuds pour une approximation polynomiale cubique.

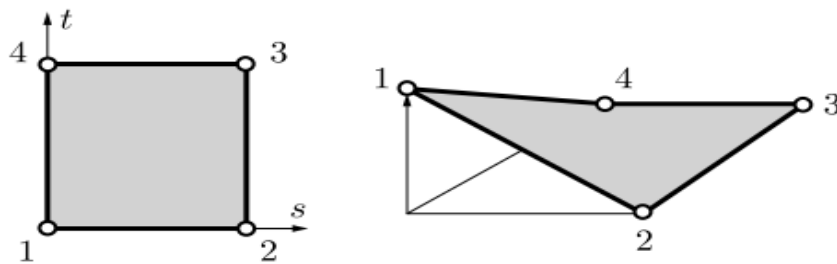


Figure .IV.5 Fonction d'interpolation N_1 du quadrangle. Les autres sont obtenues par rotation.

Ces éléments ont respectivement un et quatre nœuds internes.

Du point de vue pratique, on construit des éléments ayant un minimum de nœuds internes, car ces nœuds ne sont pas connectés aux nœuds des autres éléments. On utilise donc des bases polynomiales incomplètes mais symétriques. Le Q8 est construit à partir de la base $(1, s, t, s^2, st, t^2, s^2 t, st^2)$ et le Q12 est construit à partir de la base $(1, s, t, s^2, st, t^2, s^3, s^2 t, t^2 s, t^3, s^3 t, st^3)$ [17].

IV.3.3.3.2.3. Quantités élémentaires

Afin de présenter la démarche générale utilisée pour construire les formes matricielles et vectorielles sur chaque élément, nous utiliserons comme point de départ la forme intégrale du Principe des Travaux Virtuels associée à un problème de mécanique des structures. Cette forme intégrale est de même type que celles pouvant être déduites des méthodes variationnelles et la généralisation à des problèmes de physique est donc simple.

➤ Structure élastique de symétrie cylindrique

Les expressions des matrices élémentaires que nous venons de voir font apparaître des opérateurs différentiels et des intégrales sur le domaine élémentaire. Or, le calcul analytique des dérivations et de l'intégration n'est possible que pour des éléments très simples tels que la barre et la poutre. Dans un code éléments finis, ces calculs utilisent les notions d'intégration numérique sur des éléments de référence et de transformation géométrique entre éléments réels et éléments de référence [17].

IV.3.3.3.2.4. Assemblage et conditions aux limites

Les règles d'assemblage sont définies par la relation :

$$D \cong \sum_{e=1}^{n_e} D_e \quad (\text{IV. 24})$$

Attention à ne pas oublier l'erreur de discrétisation géométrique.

Matrices

L'assemblage des matrices élémentaires masse M_e et raideur K_e s'effectue selon les mêmes règles. Ces règles sont définies par sommation des termes correspondant au travail virtuel calculé pour chaque élément :

$$\sum_{e=1}^{n_e} \delta u_n^T M_e \ddot{u}_n = \delta U^T M \ddot{U} \quad \text{et} \quad \sum_{e=1}^{n_e} \delta u_n^T K_e u_n = \delta U^T K U \quad (\text{IV. 25})$$

Cette opération traduit simplement que la forme quadratique associée à l'ensemble du domaine est la somme des formes quadratiques des sous-domaines. Elle consiste à « ranger »

dans une matrice globale, les termes des matrices élémentaires. La forme de cette matrice dépend bien évidemment de l'ordre dans lequel sont définies les variables globales de \mathbf{U} .

Efforts imposés

L'assemblage ne pose pas de problème, il est défini par sommation des termes correspondant au travail virtuel calculé pour chaque élément :

$$\sum_{e=1}^{n_e} \delta u_n^T F_{d_e} = \delta U^T F_d \quad (\text{IV. 26})$$

Efforts inconnus

L'assemblage peut être mené de façon identique. Cependant, si les liaisons entre les éléments sont parfaites la somme des efforts inconnus aux nœuds internes de la structure est nulle. Nous pouvons en tenir compte pour simplifier l'expression du travail virtuel des efforts inconnus, en ne calculant que le travail virtuel des efforts correspondants aux liaisons cinématiques imposées à la structure, et à celui des liaisons non parfaites. Après assemblage, nous obtenons la forme matricielle du principe des travaux virtuels :

$$M\ddot{U} + KU = F_d + F_i \quad (\text{IV. 27})$$

Sous cette forme, nous avons N équations pour $N + P$ inconnues. Pour résoudre, il faut tenir compte des P conditions aux limites cinématiques associées aux P composantes inconnues du vecteur F_i .

➤ Assemblage et conditions aux limites

IV.3.3.3.3. Utilisation d'un logiciel éléments finis [17]

Un programme général de type industriel doit être capable de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à quelques centaines de milliers de variables). Ces programmes complexes nécessitent un travail d'approche non négligeable avant d'espérer pouvoir traiter un problème réel de façon correcte. Citons à titre d'exemple quelques noms de logiciels : NASTRAN, ANSYS, ADINA, ABAQUS, CASTEM 2000, CESAR, SAMCEF, etc. Les possibilités offertes par de tels programmes sont nombreuses :

- analyse linéaire ou non d'un système physique continu
- analyse statique ou dynamique
- prise en compte de lois de comportement complexes
- prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques, électromagnétiques, de plasticité, d'écoulement. . .) pouvant être couplés
- problèmes d'optimisation, etc.

L'utilisation de tels programmes nécessite une formation de base minimale.

IV.3.3.3.1. Déroulement d'une étude

Pour réaliser une étude par éléments finis, il faut que les objectifs de l'étude soient bien définis. Le cadre de l'étude, c'est-à-dire le temps et les moyens disponibles, doit être compatible avec les objectifs et la précision cherchée. Supposons toutes ces conditions remplies, l'étude proprement dite est organisée de façon logique selon les étapes suivantes :

Analyse du problème

Cette analyse doit fixer les paramètres du calcul et conduire à la réalisation d'un maillage. Cette phase basée sur l'expérience personnelle acquise dépend de nombreuses considérations. La difficulté essentielle est de trouver un bon compromis entre les paramètres propres au problème et ceux relatifs à l'environnement de travail. L'analyse du problème nous conduit à préciser un certain nombre d'hypothèses, et à effectuer des choix qui conditionnent les résultats.

Choix du type d'éléments

Il est fonction de la précision voulue, de la nature du problème, mais aussi du temps disponible. On choisira les éléments les mieux adaptés dans les familles disponibles.

Choix du maillage

Il dépend essentiellement de la géométrie, des sollicitations extérieures, des conditions aux limites à imposer, mais aussi des informations recherchées : locales ou globales. Sans oublier bien entendu le type d'outils dont on dispose pour réaliser ce maillage.

Hypothèses de comportement

Quel modèle retenir pour représenter le comportement du matériau. Le calcul est-il linéaire ? Doit-on modéliser l'amortissement ? Si le matériau est hétérogène ou composite, peut-on utiliser une méthode d'homogénéisation ? Peut-on traduire l'incompressibilité du milieu ? Lors d'une étude, on peut être amené à utiliser des éléments finis nouveaux. Il est induit- sable de vérifier leur comportement sur des problèmes élémentaires si possible proches de l'étude menée.

Création et vérification des données

Cette étape dépend du logiciel utilisé. La syntaxe utilisée pour définir le jeu de données est définie dans le mode d'emploi du bloc fonctionnel correspondant. En sortie, un fichier est créé, qui contient toutes les informations nécessaires à l'exécution des calculs. Les vérifications relatives au jeu de données se font généralement graphiquement, grâce à un module informatique appelé préprocesseur.

Différents contrôles peuvent être utilisés pour valider le jeu de données

- vérification de la géométrie de la pièce et du maillage
- vérification de la prise en compte des sollicitations et des conditions cinématiques (liaisons) imposées à la structure
- vérification des propriétés mécaniques utilisées.

Pour des problèmes spécifiques, d'autres contrôles seront envisagés. L'objectif d'éviter de faire tourner un calcul inutilement. Ceci d'autant plus que la recherche d'une solution acceptable pour un problème donné est rarement le résultat d'un seul calcul.

Exécution du calcul

Ce bloc, le plus coûteux en temps machine est souvent exécuté en tâche de fond. Un fichier de résultats permet de vérifier que les différentes phases de calculs se sont correctement déroulées :

- interprétation des données, vérification des paramètres manquants
- construction des matrices, espace utile pour les gros problèmes
- singularité de la matrice raideur, problème de conditions aux limites ou de définition des éléments
- convergence, nombre d'itérations, etc.

Ce fichier peut contenir aussi les résultats du calcul (déplacements, résidus, contraintes. . .) ce qui lui confère dans ce cas un volume généralement très important. Il peut arriver que le calcul échoue. Les principales sources d'erreurs généralement observées à ce niveau sont listées dans le (Tableau .IV.1).

Erreurs	causes	Remèdes
singularité de \mathbf{K}	éléments mal définis, existence de modes rigides, intégration numérique 6	Modifier la topologie du maillage, modifier les liaisons, modifier le nombre de points d'intégration
résolution des équations	arrondi numérique, non convergence	travailler en double précision, changer d'algorithme, augmenter le nombre d'itérations

Tableau .IV.1 Principales sources d'erreurs durant le calcul.

Exploitation des résultats

Les calculs demandés dans le cahier des charges ont le plus souvent pour objectif de valider ou de vérifier le dimensionnement d'une structure. Les résultats obtenus et les conclusions relatives aux phénomènes à étudier devront être présentés de façon synthétique : tableaux, courbes, visualisation. Cela justifie largement l'utilisation d'un post-processeur, qui propose des outils pour sélectionner les informations que l'on veut étudier [17].

Attention, lors de l'utilisation de ces outils, il faut savoir ce que cache l'information qui vous est proposée graphiquement, sachant que celle-ci est construite à partir de résultats discrets :

- valeur moyenne sur un élément : comment est-elle définie ?
- valeur maximale sur l'élément : comment est-elle calculée ?
- valeurs aux nœuds (écarts entre les éléments) : à quoi correspondent-elles ?
- les courbes d'iso-contraintes ont-elles une signification ? etc.

Différentes vérifications doivent être effectuées pour valider les résultats. Elles poussent, dans la plupart des cas, à remettre en cause le modèle pour en créer un nouveau, dont on espère qu'il améliorera la solution précédente.

Pour valider une solution, il faut procéder dans l'ordre, en estimant dans un premier temps la précision du modèle. Puis lorsque celle-ci est jugée suffisante, nous procédons à sa validation. Les indicateurs sur la précision du modèle sont généralement locaux. Ils concernent des informations élémentaires calculées aux nœuds ou aux points d'intégration, ces informations sont très souvent fournies en valeur moyenne sur l'élément. Les indicateurs locaux sur la précision d'un modèle mécanique peuvent être [17]:

- discontinuité des contraintes entre des éléments adjacents. Le plus simple, pour un matériau isotrope, est de visualiser la contrainte équivalente de Von Mises, cela permet d'avoir une idée des zones fortement chargées ayant un fort gradient de contrainte. Ces zones seront l'objet de toute notre attention.
- valeur du tenseur des contraintes sur les bords libres (certaines valeurs doivent être nulles). En pratique, il faudra estimer ces valeurs à partir des valeurs obtenues aux points d'intégration
- densité d'énergie interne de déformation sur chaque élément, l'idéal étant d'avoir un écart le plus faible possible.

Ayant les informations sur la qualité de la solution, différents contrôles peuvent être envisagés pour valider votre modèle :

- ordre de grandeur des résultats obtenus
- vérification des hypothèses du modèle
- justification des choix de départ.

La comparaison des résultats des différents modèles permet d'améliorer puis de valider un modèle final. Une fois la fiabilité du modèle assurée, on peut conclure sur l'adéquation entre la structure et le cahier des charges. La synthèse de ces calculs préliminaires est indispensable car elle vous permet de justifier et de définir les limites du (des) modèle(s) retenu(s).

IV.3.3.3.2. Techniques de calculs au niveau élémentaire

Ce paragraphe plus technique présente quelques aspects du calcul numérique des formes intégrales présentées précédemment. Ces calculs sont basés sur l'intégration numérique sur des éléments de référence et l'utilisation de la transformation géométrique pour définir les éléments réels à partir d'éléments de référence.

Transformation géométrique

Tout élément réel peut être défini comme l'image par une transformation géométrique d'un élément parent dit de référence pour lequel les fonctions d'interpolation sont connues. À l'image de la (Figure .IV.6), la transformation géométrique définit les coordonnées (x, y, z) de tout point de l'élément réel à partir des coordonnées (s, t, u) du point correspondant de l'élément de référence soit :

$$D_{référence} \begin{matrix} (s,t,u) \end{matrix} \rightarrow \tau_e \rightarrow D_{réel} \begin{matrix} (x,y,z) \end{matrix} \quad (IV.28)$$

Un même élément de référence permettra de générer une classe d'éléments réels. À chaque

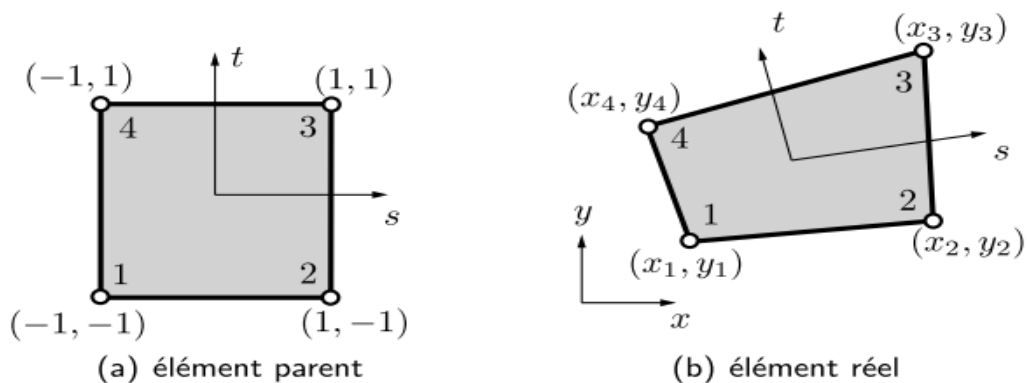


Figure .IV.6 Transformation géométrique linéaire d'un carré.

élément réel correspond une transformation géométrique différente, cette transformation devant être une bijection. Chaque transformation géométrique dépend des coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel. Pour les éléments les plus simples, la transformation est identique pour chaque coordonnée, et utilise une base de fonctions polynomiales.

Si les nœuds d'interpolation et les nœuds géométriques sont confondus, les fonctions de transformation géométrique N_g seront identiques aux fonctions d'interpolation N . Ces éléments sont dits iso paramétriques. En résumé, la transformation géométrique est définie par:

$$x = N_g^T(s, t, u)X_n \quad y = N_g^T(s, t, u)Y_n \quad z = N_g^T(s, t, u)Z_n \quad (IV. 29)$$

Avec X_n, Y_n, Z_n coordonnées des nœuds de l'élément réel et $N_g(s, t, u)$ rassemblant les fonctions de la transformation géométrique.

Exemples d'éléments de référence classiques

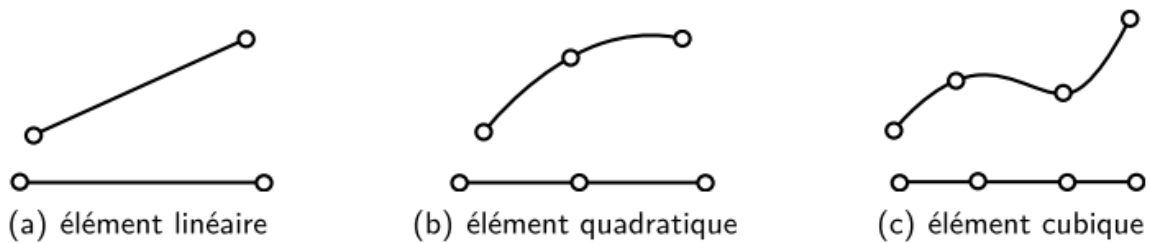


Figure .IV.7 Transformations géométriques d'éléments à une dimension avec en haut, l'élément réel et en bas, l'élément parent.

Les transformations géométriques de la (Figure .IV.7) utilisent les fonctions d'interpolation linéaire, quadratique et cubique définies précédemment. Pour des éléments à deux ou trois dimensions les transformations géométriques conduisent respectivement à des frontières linéaires, quadratiques ou cubiques. La (Figure .IV.8) donne la position des nœuds pour les classes d'éléments triangulaires et quadrangulaires. La (Figure .IV.9) représente les trois classes d'éléments volumiques associés à une transformation linéaire. Pour chaque classe nous

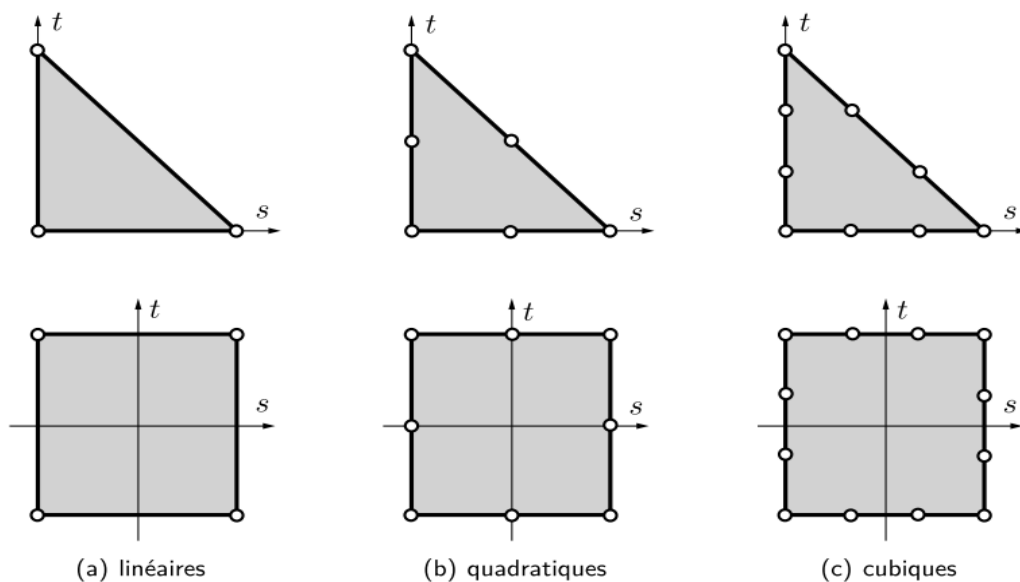


Figure .IV.8 Éléments parents triangulaires et quadrangulaires à deux dimensions.

définirons les éléments quadratiques et cubiques en plaçant les nœuds d'interface respectivement au milieu et au tiers des cotés, comme indiqué par la (Figure .IV.8). Les codes éléments finis utilisent ces éléments et bien d'autres plus complexes.

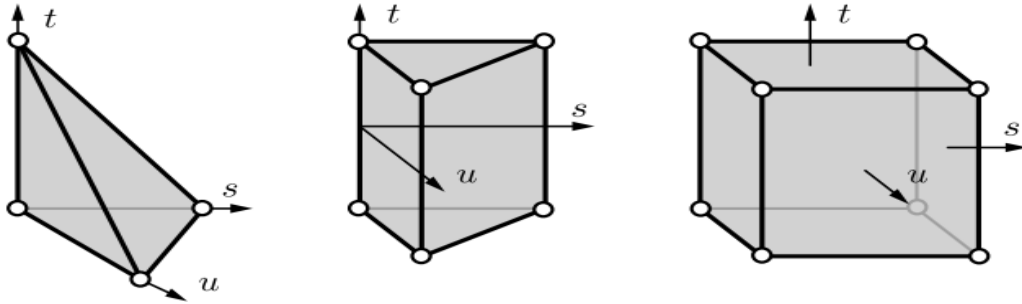


Figure .IV.9 Éléments parents volumiques à transformation linéaire.

Matrice jacobienne et transformation des opérateurs de dérivation

Les expressions des matrices élémentaires font apparaître des opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation. Or, en pratique, nous connaissons les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées de l'élément de référence (s, t, u) . Il faut donc exprimer les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées [17].

Réelles (x, y, z) . Posons :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (IV. 30)$$

J est la matrice jacobienne de la transformation. Pour chaque élément, cette matrice s'exprime en fonction des dérivées des fonctions connues de transformation géométrique et des coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel. En effet:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix} (x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_g}{\partial s} \\ \frac{\partial N_g}{\partial t} \\ \frac{\partial N_g}{\partial u} \end{bmatrix} [X_n \ Y_n \ Z_n] \quad (IV. 31)$$

J est le produit d'une matrice $(3 \times n)$ par une matrice $(n \times 3)$ toutes deux connues. La transformation devant être une bijection J^{-1} existe. La relation inverse permet alors de calculer les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{pmatrix} \quad (IV. 32)$$

Connaissant les dérivées premières $N_{i,s}$, $N_{i,t}$ et $N_{i,u}$, ces relations participent à la construction de la matrice $B(s, t, u)$ à partir de la matrice $B(x, y, z)$ qui s'exprime en fonction des dérivées première $N_{i,x}$, $N_{i,y}$ et $N_{i,z}$. Pour les éléments utilisant des dérivées secondes des fonctions d'interpolation, la démarche est identique. Il faut définir les termes en $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, les résultats de ces calculs plus complexes sont donnés dans [17].

Transformation et calcul numérique d'une intégrale

Le jacobien de la transformation géométrique permet de passer de l'intégration d'une fonction $f(x, y, z)$ définie sur l'élément réel à l'intégration sur l'élément de référence :

$$\int_{D_e} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{D_{réf}} f(s, t, u) \det J ds dt du \quad (IV. 33)$$

Cette intégration ne peut être évaluée analytiquement que dans des cas simples. En général, la fonction à intégrer est une fraction rationnelle polynomiale compliquée. Le calcul de l'intégrale sur l'élément de référence est donc effectué numériquement. Les formules d'intégration numérique permettent d'évaluer l'intégrale sous la forme générale suivante :

$$\int_{D_{réf}} dV \cong \sum_{i=1}^{N_{pi}} f(\xi_i) w_i \quad (IV. 34)$$

Où N_{pi} représente le nombre de points d'intégration sur l'élément de référence. Les ξ_i sont les coordonnées paramétriques des points d'intégration et w_i , les poids d'intégration. Le schéma d'intégration le plus utilisé pour les éléments à une dimension, les éléments quadrangulaires et parallélépipédiques est celui de Gauss. Pour les éléments triangulaires et prismatiques ce sont les formules de Hammer qui sont les plus utilisées. Ces deux schémas permettent d'intégrer exactement des fonctions polynomiales [17].

Précision de l'intégration numérique

L'intégration numérique exacte n'est possible que si la matrice jacobienne est constante et l'élément réel garde alors la même forme que l'élément de référence. Nous connaissons alors l'ordre de la fonction polynomiale à intégrer.

Dans le cas d'éléments réels de forme quelconque, la matrice jacobienne est une fonction polynomiale. Les termes à intégrer sont donc des fractions rationnelles, l'intégration numérique n'est pas exacte. La précision de l'intégration numérique diminue lorsque l'élément réel est

disproportionné, il faut modifier le maillage. En pratique, le choix du nombre de points d'intégration est une affaire d'expérience, ce nombre est souvent proposé par défaut dans les codes éléments finis. On peut utiliser un nombre de points d'intégration plus faible pour diminuer les temps de calcul, mais attention si le nombre de points est insuffisant la matrice raideur peut devenir singulière. Pour un problème de dynamique, l'intégration réduite peut introduire des modes parasites comme les phénomènes d'hourglass [17].

Calcul des matrices élémentaires

La matrice masse élémentaire s'écrit :

$$M_e = \int_{D_{réf}} N \xi^T \rho N(\xi) \det J dv \quad (IV.35)$$

La matrice raideur élémentaire :

$$K_e = \int_{D_{réf}} B \xi^T D B(\xi) \det J dv \quad (IV.36)$$

Et le vecteur force généralisée :

$$M_e = \int_{D_{réf}} N \xi^T f_d \det J dv \quad (IV.37)$$

La suite est indiquée dans (**l'algorithme .IV.1**).

```

Création de table des coordonnées  $\xi_r$  et poids  $\omega_r$  correspondant
aux points d'intégration pour les éléments de référence utilisés
Calcul des fonctions  $N$  et  $N_g$  et de leurs dérivées aux points
d'intégration
Pour chaque élément faire
    Pour chaque d'intégration  $\xi_r$  faire
        Calcul de  $J, J^{-1}$  et  $\det J$  au point d'intégration  $\xi_r$ 
        Construction des matrices  $D, B(\xi_r)$  et  $N(\xi_r)$ 
        Calcul de  $B(\xi_r)^T D B(\xi_r) \det J_{\omega_r}$ 
             $N(\xi_r)^T \rho B(\xi_r) \det J_{\omega_r}$ 
             $N(\xi_r)^T f_d(\xi_r) \det J_{\omega_r}$ 
        Accumuler dans  $K, M$  et  $\Phi$ 
    fin
fin de l'intégration
fin
fin de boucle sur les éléments

```

L'algorithme .IV.1 Organisation des calculs.

Au cours de l'intégration numérique, il est possible de tester le signe du déterminant de J qui doit rester constant pour tout point du domaine de référence.

➤ **Matrice raideur et vecteur force généralisé des éléments triangulaires**

IV.3.3.3.4. Organigramme d'un logiciel éléments finis

Tout logiciel de calcul par la méthode des éléments finis contient les étapes caractéristiques ou blocs fonctionnels décrits sur (**Figure .IV.10**).

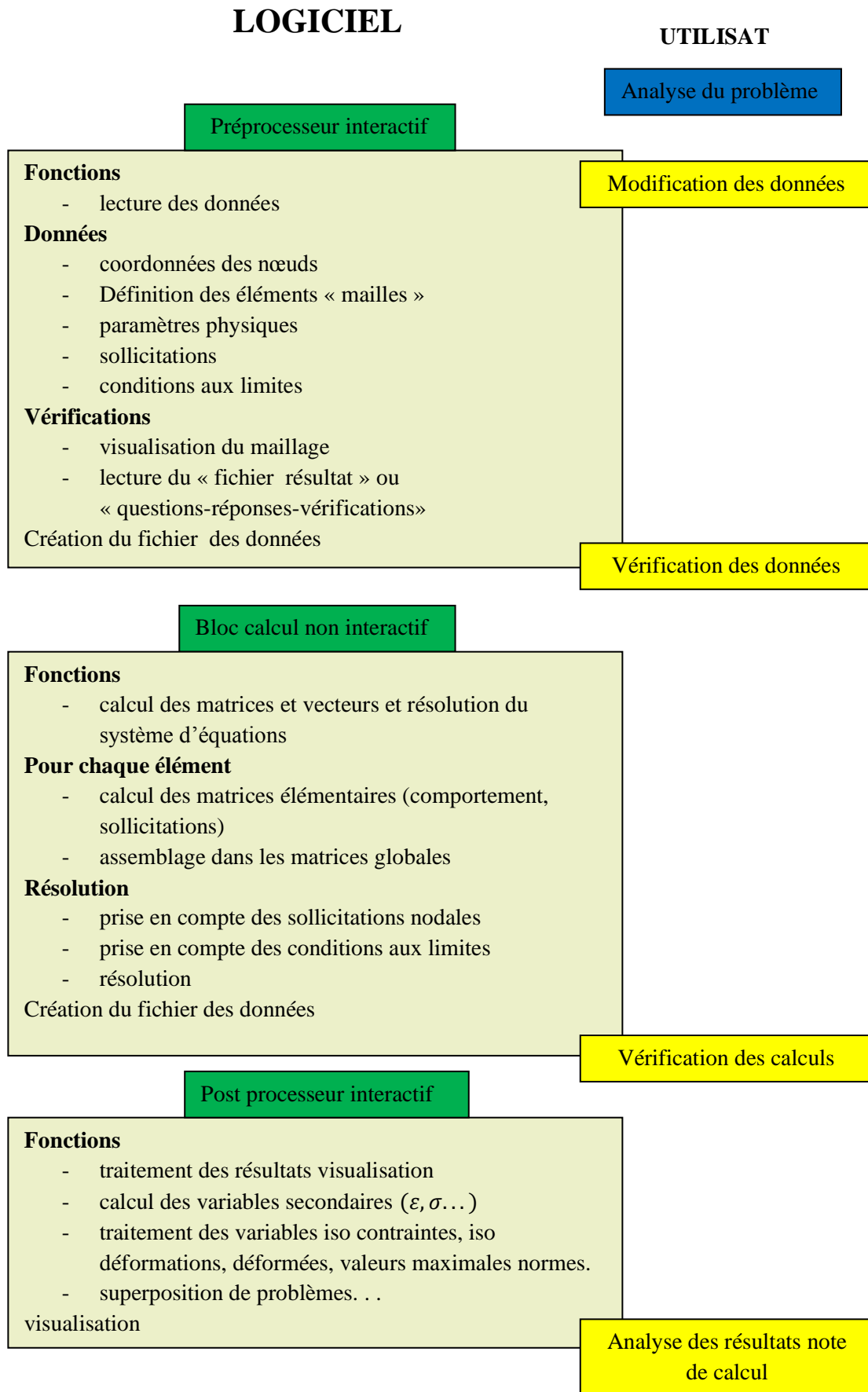


Figure .IV.10 Organigramme d'un logiciel éléments finis.

IV.4.simulation

Nous allons exposer dans cette partie des résultats de simulation sous logiciel MATLAB, En utilisant un code de calcul basé sur la MEF avec suivi des frontière libre (FTM) ‘Front Trecking méthode’, ces résultats déterminent le comportement numérique des frontière libre de conduction dans un $\frac{1}{4}$ de section de fil supraconducteur.

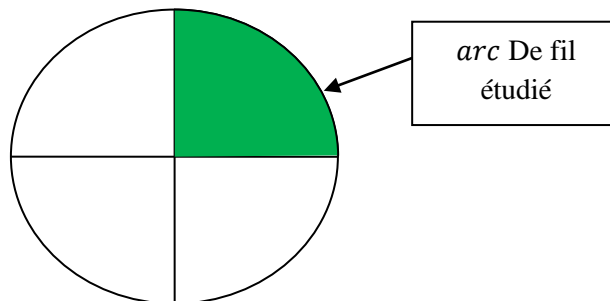


Figure .IV.11 Un $\frac{1}{4}$ de section de fil.

1ère. Frontière

Pour $0 < t < \frac{T}{4}$, $i(t)$ provoque une frontière libre de rayon $\rho(t)$ entre les états + et n progresse vers le centre du fil.

L'évolution de la frontière libre est décrite dans la (Figure. IV.12).

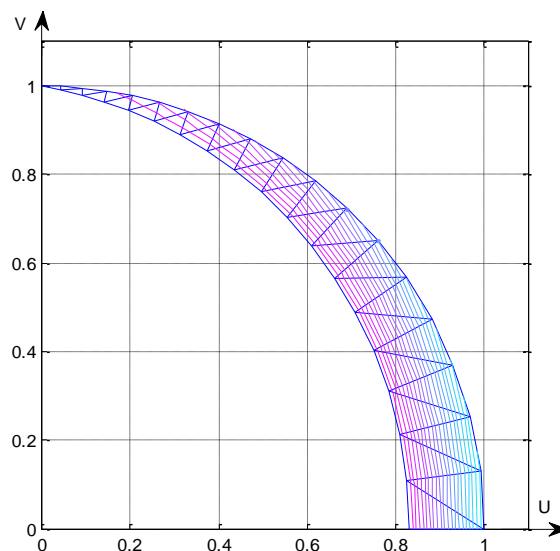


Figure. IV.12 première évolution de la frontière libre $0 < t < \frac{T}{4}$.

2eme. Frontière

Pour $\frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4}$, que cette frontière libre ne peut pas revenir en arrière mais une nouvelle frontière démarre en R (surface du fil) à $t = \frac{T}{4}$ la précédente étant bloquée et il apparaît ainsi des couches concentriques de densités de courant $\pm j_c$ (**Figure. IV.13**).

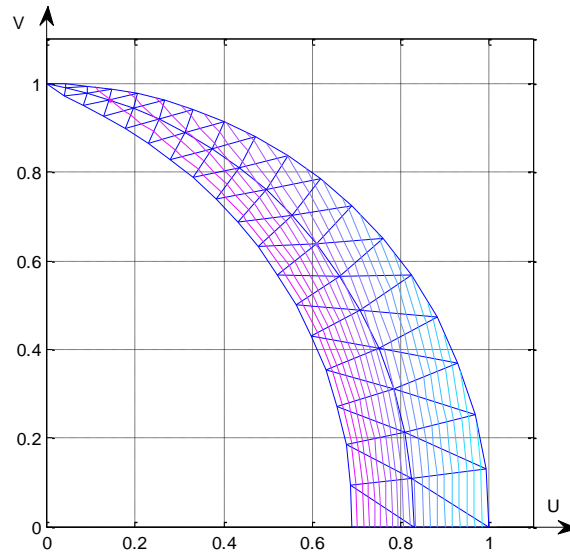


Figure. IV.13 2eme évolution de la frontière libre $\frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4}$.

3eme. Frontière

Pour $\frac{3T}{4} < t < \frac{5T}{4}$, $i(t)$ croit à nouveau et la relation (III. 17) conduit à un $\rho(t)$ croissant ce qui est toujours impossible donc une nouvelle frontière libre démarre en $r = R$ avec la configuration suivante des densités de courant dans la section du fil (**Figure. IV.14**).

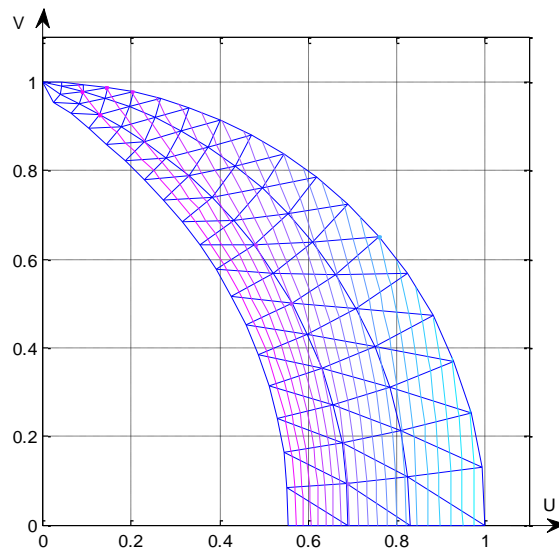


Figure. IV.14 3eme évolution de la frontière libre $\frac{3T}{4} < t < \frac{5T}{4}$.

4eme. Frontière

Pour $\frac{5T}{4} < t < \frac{7T}{4}$, que cette frontière libre ne peut pas revenir en arrière mais une nouvelle frontière démarre en R (surface du fil) à $t = \frac{5T}{4}$ la précédente étant bloquée et il apparaît ainsi des couches concentriques de densités de courant $\pm j_c$ (**Figure. IV.15**).

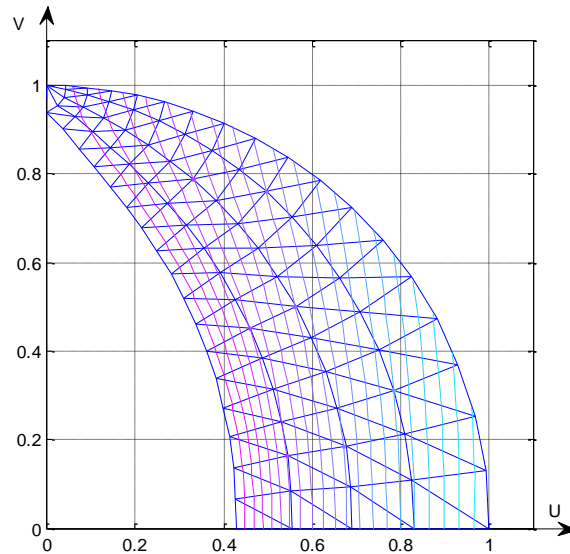


Figure. IV.15 4eme évolution de la frontière libre $\frac{5T}{4} < t < \frac{7T}{4}$.

5eme. Frontière

Pour $\frac{7T}{4} < t < \frac{9T}{4}$, $i(t)$ croit à nouveau et la relation (III. 17) conduit à un $\rho(t)$ croissant ce qui est toujours impossible donc une nouvelle frontière libre démarre en $r = R$ avec la configuration suivante des densités de courant dans la section du fil (**Figure. IV.16**).

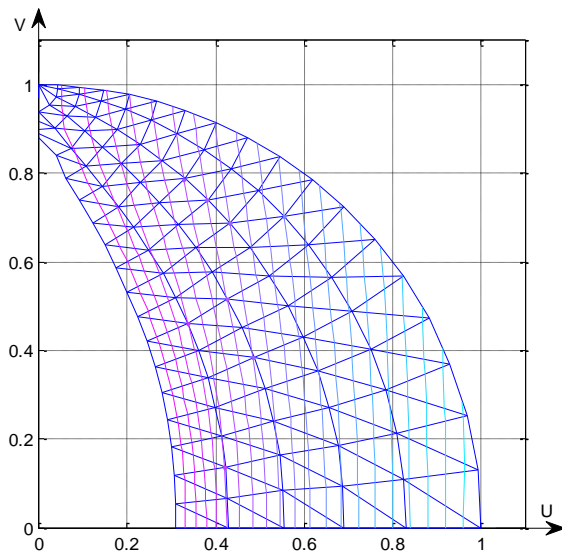


Figure. IV.16 5eme évolution de la frontière libre $\frac{7T}{4} < t < \frac{9T}{4}$.

6eme. Frontière

Pour $\frac{9T}{4} < t < \frac{11T}{4}$, que cette frontière libre ne peut pas revenir en arrière mais une nouvelle frontière démarre en R (surface du fil) à $t = \frac{9T}{4}$ la précédente étant bloquée et il apparaît ainsi des couches concentriques de densités de courant $\pm j_c$ (**Figure. IV.17**).

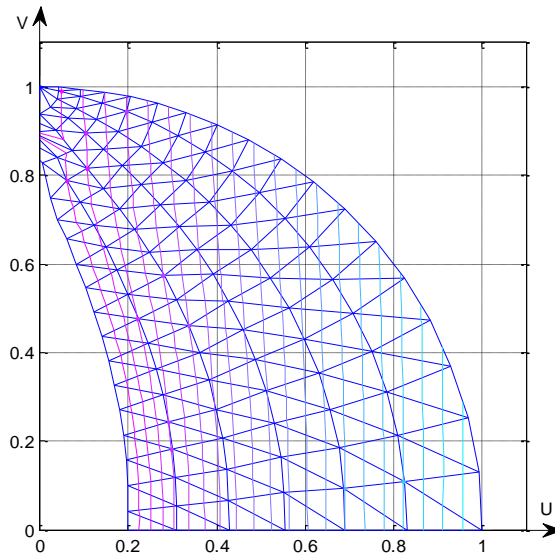


Figure. IV.17 6eme évolution de la frontière libre $\frac{9T}{4} < t < \frac{11T}{4}$.

7eme. Frontière

Pour $\frac{11T}{4} < t < \frac{13T}{4}$, $i(t)$ croit à nouveau et la relation (III. 17) conduit à un $\rho(t)$ croissant ce qui est toujours impossible donc une nouvelle frontière libre démarre en $r = R$ avec la configuration suivante des densités de courant dans la section du fil (**Figure. IV.18**).

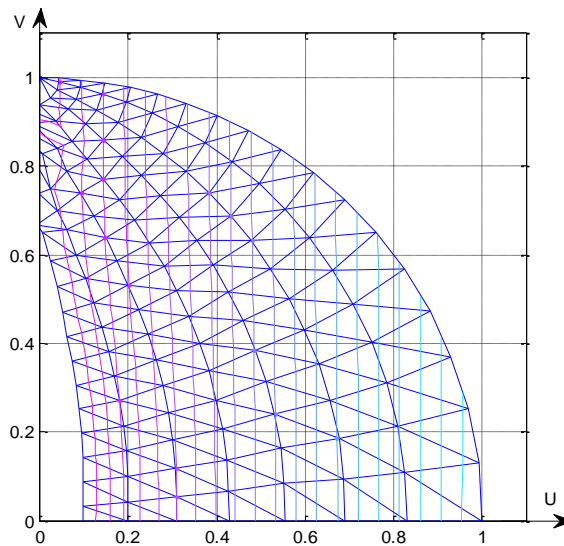


Figure. IV.18 7eme évolution de la frontière libre $\frac{11T}{4} < t < \frac{13T}{4}$.

8eme. Frontière

Pour $\frac{13T}{4} < t < \frac{15T}{4}$, que cette frontière libre ne peut pas revenir en arrière mais une nouvelle frontière démarre en R (surface du fil) à $t = \frac{13T}{4}$ la précédente étant bloquée et il apparaît ainsi des couches concentriques de densités de courant $\pm j_c$ (**Figure. IV.19**).

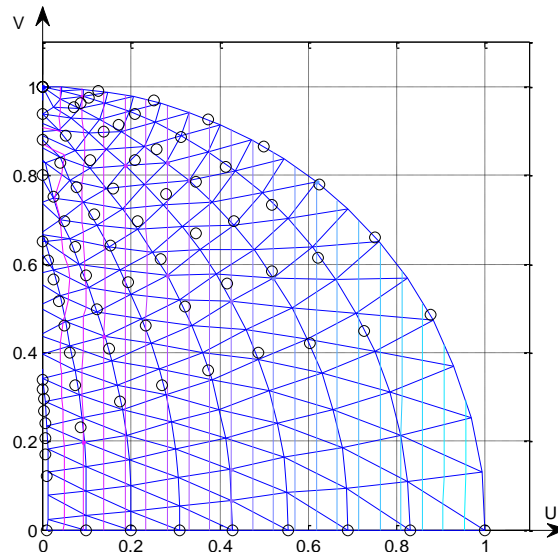


Figure. IV.19 8eme évolution de la frontière libre $\frac{13T}{4} < t < \frac{15T}{4}$.

Réseau

Le réseau de frontières libres de conduction dans un $\frac{1}{4}$ de section de fil est comme suit :

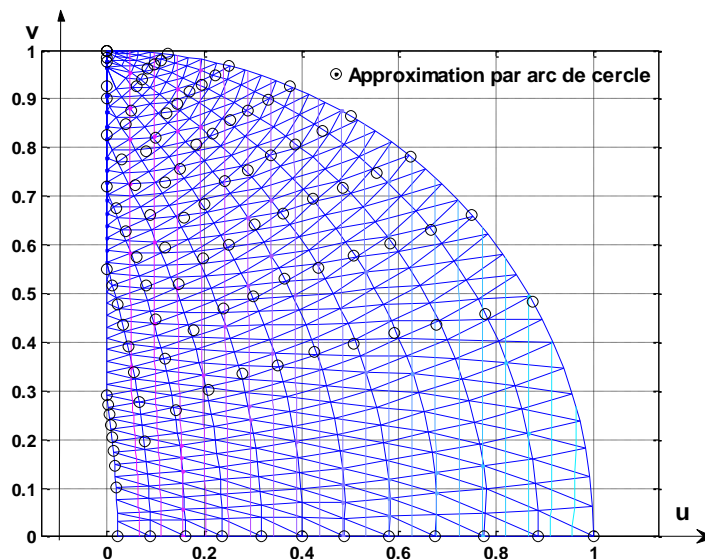


Figure. IV.20 Réseau de frontières libres

IV.6.Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé plusieurs méthodes pour le calcul de différentes caractéristiques, ces méthodes sont fondées sur la méthode numérique, nous nous sommes préoccupés plus particulièrement de la méthode d'éléments finis (MEF) suivie avec des frontières libres de conduction (FTM), pour exposer l'évolution (comportement) de cette frontière libre de conduction dans un fil supraconducteur.

Conclusion générale

La supraconductivité a été observée dans un grand nombre de composés, qui diffèrent soit par leurs structures soit par leurs propriétés supraconductrices, leurs classement dans des familles ce base :

- Soit sur leurs structures cristallographiques.
- Soit sur leurs propriétés supraconductrices (les matériaux HTC).

Les matériaux supraconducteurs sont utilisés généralement sous deux formes :

- ✓ Soit sous forme de rubans.
- ✓ soit sous forme de brins multi-filamentaires, utilisés généralement pour la fabrication de fils supraconducteurs, pour les différentes applications de la supraconductivité.

La modélisation des matériaux supraconducteurs permet de d'étudier leur comportement électromagnétique.

Cette modélisation, présente une version approchée du modèle de l'état critique de Bean qui d'une part, a l'avantage d'être plus facilement utilisable que le modèle de Bean non modifié. D'autre part, il pourrait tenir compte du déplacement et de piégeage des vortex.

Le travail présenté a pour but de modéliser un fil supraconducteur plongé dans un champ magnétique et de voir également son comportement électromagnétique (répartition des courants et l'évolution des frontières libres de conduction).

L'approche numérique utilisée est basée sur la méthode des éléments finis, nous avons donc développé un code de calcul, en utilisant la technique de suivi des frontières libres de conduction et des pertes et nous sommes arrivés à mettre en évidence l'intérêt d'utilisation des matériaux supraconducteurs pour renforcer les performances électromagnétiques et lutter contre les couches conductrices chez les matériaux classiques (pertes, échauffement, champs à saturation.....), il nous reste beaucoup de choses à faire dans ce travail donc comme perspective nous proposons de faire effectuer une étude d'un couplage thermique permettant de rendre compte de la transition possible du supraconducteur à l'état normal.

ANNEXE

Annexe A. Fil cylindrique seul alimenté par un courant imposé variable $i(t)$

Irréversibilité du déplacement d'une frontière libre phénomène de mémoire.

Lors de la *première* conduction ($t \leq \frac{T}{4}$) $i(t) = FI_c \sin 2\pi \frac{t}{T}$ est croissant, la frontière libre entre l'état $j = +j_c$ noté + et l'état $j = 0$ noté n progresse vers le centre du cercle jusqu'en $r = \rho_0 = \sqrt{1 - F}$ en satisfaisant (3.10) soit :

$$\frac{\rho(t)}{R} = \sqrt{1 - F \sin 2\pi \frac{t}{T}} \quad F \leq 1 \quad (\text{A1.1})$$

Sa vitesse $\frac{d\rho}{dt}$ est donc négative. La figure suivante donne cet état à un instant $t < \frac{T}{4}$.

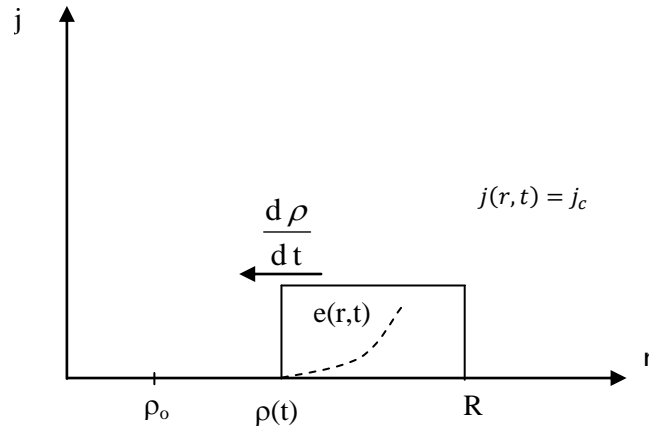


Figure. A.1 Etat de première conduction à $t < \frac{T}{4}$.

Et la condition d'interface (3.15) du chapitre 2 paragraphe 2.4:

$$\left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{\rho(t)-\varepsilon} - \left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{\rho(t)+\varepsilon} = -\mu_0(0 - j_c) \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{A1.2})$$

Est satisfaite avec :

$$\frac{d\rho}{dt} < 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{\rho(t)+\varepsilon} > 0, \left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{\rho(t)-\varepsilon} = 0$$

Et ainsi on a bien $e(r, t)$ et $j(r, t)$ de même signe.

Après $t = \frac{T}{4}$ on pourrait toujours satisfaire la conservation du courant au moyen de **(Figure. A.1)** mais alors on aurait $\frac{d\rho}{dt} > 0$ (retour en arrière de la frontière libre). Comme $j(r, t)$ est

toujours positif car égal à j_c , on devrait encore avoir $e(r, t) > 0$ soit $\left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{\rho(t)+\varepsilon} > 0$ car

$e(\rho(t), t) = 0$ et ainsi **(Figure. A.2)** étant toujours valable.

$$\left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{\rho(t)+\varepsilon} - \left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{\rho(t)-\varepsilon} = -\mu_0(j_c - 0) \frac{d\rho}{dt}$$

Avec toujours $\left(\frac{\partial e}{\partial r}\right)_{\rho(t)-\varepsilon} = 0$. Elle n'est plus satisfaite si $\frac{d\rho}{dt} > 0$. La solution est le démarrage d'une nouvelle frontière libre en $\rho = R$ régie par (3.17) du chapitre 2, ainsi (3.15) de ce même chapitre est satisfaite.

Ce phénomène de mémoire est dû au fait que $\rho(t)$ ne dépend pas seulement de la valeur instantanée de $i(t)$ mais de ses minimum et maximum antécédents à t . Ceci conduit au phénomène d'Hystérésis rencontré lors de l'utilisation des supraconducteurs de type II [10][14].

Références bibliographiques

- [01] K. Noureddine, «Les Supraconducteurs, Modèles et Applications», Mémoire de magistère, Université de Batna, 2007.
- [02] C. Souheila, «Etude des effets du dopage par du zinc sur les propriétés de la céramique supraconductrice $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ », Mémoire de magistère, Université de Constantine, 2006.
- [03] I. Klutsch, «Modélisation des supraconducteur et mesures», Thèse de Doctorat, L'institut national polytechnique de Grenoble, 2003.
- [04] J. Duron, «Modélisation de Matériaux supraconducteurs -application à un limiteur de courant», Thèse de Doctorat, École polytechnique fédérale de lausanne, N °3469, (2006).
- [05] B. Ahmed, «Contribution a la modélisation des matériaux supraconducteur critique (HTC)», Mémoire de Master, Université de M'sila, 2012.
- [06] M. AMIR, «Analyse d'une antenne micro ruban à patch supraconducteur », Mémoire de magistère, Université de Batna, 2010.
- [07] E. Vinot, «Modélisation des supraconducteurs HTC, Application au calcul des pertes AC», Thèse de Doctorat de l'I.N.P.Grenoble, 27 Avril 2000, Grenoble, France.
- [08] A. Guettafi, A. Chaghi, A. Benoudjit, G. Quichaud, «Evolution of Free-boundaries conduction into superconductor sphere in magnetic variable field», Compumag 2001, 2-5 July 2001, Evian, France.
- [09] R. Temam, Problèmes à frontière libre, Bullentin techenique Cisi, Bellamy-Paris, pp. 1-3, septembre 1995.
- [10] M. Maslouh, F. Boullault, A. Bossavit, and J.C Verite, «From Bean's Model to the H-M Characteristic of superconductor: Some numerical experiments », IEEE Transactions of on Applied superconductivity, vol. 7, n 3, pp. 3797-3801.
- [11] S. Ho Tam Fou, M. Maslouh, T. Lemoult et F. Bouillault, «Modélisation des phénomènes de supraconductivité: Application à électrotechnique», Actes de la conférence Electronique du Futur (EF'99), pp.131-134, mars 1999.
- [12] W. Norris, Calcution of hystersis losses in hard superconductors carrying ac : isolated conductors and adges of thin sheets, J. Phys D: Applied Physics, vol.3, pp489-507, 1970.

- [13] T. Fukunaga, R. Inada and A. Oata, «Current distributions and AC Losses in self-fields for superconductor tapes and cables», IEEE Transactions on Applied superconductivity, Vol.9,n 2, pp.1057-1060, June 1999.
- [14] M. Sjtrom, Hysteresis modeling of high temperature superconductors, Thèse de Doctorat és Sciences Techeniques, Ecole Polytechnique de Lausanne, Laboratory of NonLinear Systems, Lausanne, Suisse 2001.
- [15] N. Ouassila, «Etude et modélisation des paliers planaires», Thèse de magistère, Université mentouri de Constantine, 2009.
- [16] A. Rezik, «étude comparative des différents modèles éléments finis pour le calcul des forces d'origine magnétique», Mémoire de magistère, université de Jijel, 2002.
- [17] H. Oudin, «Méthode des éléments finis», Centrale Nantes, 2008.
- [18] M. Lotfi, «Etude et réalisation d'un dispositif péristaltique pour application médicale», Thèse de magistère, Université Hadj Lakhdar Batna, 2010.

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DE
DIPÔLME DE MASTER EN GENIE ELECTRIQUE**

SPECIALITE :

Ingénierie des Systèmes Electromécaniques

PROPOSE ET DIRIGE PAR : Mr. BELKHIRI. Salah

PRESENTE PAR: BAKOUR. Sallah. Eddine

THEME:

*Etude de l'évolution des frontières libres de conduction
dans les matériaux Supraconducteurs de type II*

Résumé

Les équations régissant les phénomènes physiques dans les matériaux supraconducteurs sont des équations aux dérivées partielles (EDP). La résolution analytique de ces équations dans une géométrie complexe telle que celle des frontières libres de conduction est impossible, Il faut alors avoir recours aux méthodes de résolution numérique. La méthode adoptée dans le cadre de notre travail celle des éléments finis avec suivi des frontières libres.

Mots clés :

Supraconducteur, Modélisation, Haute température critique, Frontière libre, MATLAB.