REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

Équation de convection non linéaire et application

Présenté par :

Hamza Guendouz

Membres de jury:

ARIOUA Yacine	M.C.A,	Université de M'sila	**Président**.
BENHAMIDOUCHE Noureddine	Prof,	Université deM'sila	**Encadreur.**
BOUNAB Noura	M.C.A,	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2021/2022.

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu qui m'a donner tout la puissant et la volonté, le courage et la patience durant ces longues années de formation.

*Je tiens à remercier sincèrement **Mr : Noureddine BENHAMIDOUCHE**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour ses conseils.*

Mes remerciements vont également aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Aussi mes remerciements à tous les enseignants de département de ma thématiques et précisement, les enseignants de spécialité équations aux déri vées partielles et applications.

*Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier mon ami **Mohamed Bekkai** et toute personne qui m'a aidé à réaliser ce travail.*

Table des matières

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles d'évolution sont liées étroitement aux applications physiques, notamment les équations dites " équations de la physique " comme par exemple, l'équation de la chaleur, l'équation des ondes ou bien l'équation du transport.

Une classe d'EDPs d'évolution qui suscite l'intérêt en physique c'est l'équation de diffusion-convection non linéaire.

Plusieurs travaux ont traité ce type d'équation [1] [3] [5].

Cette équation a beaucoup d'applications notamment eu biologie dans le domaine de la dynamique de population .

Elle est semblable à l'équation connue de "Fisher" cette dernière, est étroitement liée aux phénomènes de propagation des épidémies.

Malheureusement on connait pas la solution exacte de l'équation de fisher.

Dans ce mémoire, nous allons développer les travaux réalisé par [5], concernant ce type d'équation.

Nous allons chercher diverses formes de solutions exactes, pour cette équation.

Le mémoire est constituée de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on va citer la définition de la fonction d'erreur et des rappels sur l'équation de la chaleur et de transport et leur propriétés.

Dans le deuxième chapitre, on va chercher les solutions de l'équation de convection linéaire et non linéaire à coefficients constants par la méthode de changement de variable.

Le troisième chapitre est consacré à la rechercher de solutions de l'équation de convection linéaire et non linéaire à coefficients variables par la méthode de changement de variable.

Chapitre 1

Rappels et Définitions

Dans ce chapitre nous donnons quelques rappels sur l'équation de la chaleur avec ou sans source et ses propriétés que nous utiliserons dans les chapitres suivants, ainsi que l'équation de transport.

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 Fonction d'erreur

Définition 1.1 *[1] On appelle fonction d'erreur ou encore fonction d'erreur de Gauss, la fonction*

$$erf : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

définie par

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds.$$

Comme l'exponentielle est une fonction continue sur R cette fonction est dérivable et sa dérivée est :

$$(erf)' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

C'est donc une fonction croissante, paire, avec

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = 1.$$

1.2 Problème de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

Définition 1.2 *[1] Soit le problème de l'équation de la chaleur suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

De point de vue physique, ce problème décrit la diffusion de la chaleur sur un tube (unidimensionnel) infini, dans ce cas la condition initiale représente la concentration initiale de la chaleur sur le tube.
La solution générale de ce problème est non connue, mais pour certaines conditions sur $u_0(x)$, la solution existe ; on a le théorème suivant

Théorème 1.3 *[1] Si la condition initiale $\varphi(x)$ est continue bornée, alors la solution $u(x,t)$ du problème de la chaleur, existe et elle s'écrit comme ;*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int \varphi(y) e^{\frac{-(x-y)^2}{4ct}}\, dy, \tag{1.2}$$

de plus la solution $u(x,t)$ est une fonction $C^\infty\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*\right)$.
La fonction

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{\frac{-x^2}{4ct}}, \tag{1.3}$$

est dite solution fondamentale ou fonction de Green du problème de la chaleur, dans ce cas on a ;

$$u(x,t) = \int \varphi(y) G(x-y,t) dy. \tag{1.4}$$

Remarque 1.4 *Le résultat reste valable si :*

1. *La condition initiale n'est pas continue, par exemple* $\varphi \in L^1$.
2. *La condition initiale est continue par morceau .*

Remarque 1.5 *La solution u peut s'écrire également comme*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int \varphi(x-y) e^{\frac{-y^2}{4ct}} \, dy. \tag{1.5}$$

Corollaire 1.6 *Soit* $G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{\frac{-x^2}{4ct}}$ *le noyaux de l'équation la chaleur (le noyaux Gaussien) alors*

1. $$\frac{\partial G}{\partial t} = c \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}. \tag{1.6}$$
2. $$G \in C^\infty\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*\right). \tag{1.7}$$

   .
3. $$\int_{\mathbb{R}} G(x,t) dx = 1. \tag{1.8}$$

Preuve du corollaire

1. *On vérifier que* $\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{\frac{-x^2}{4ct}}) = c \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{\frac{-x^2}{4ct}}) = c \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$.

   on a
   $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{\frac{-x^2}{4ct}}\right) = \frac{-2ct + x^2}{4ct^2\sqrt{4\pi ct}} e^{\frac{-x^2}{4ct}},$$
   et
   $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{\frac{-x^2}{4ct}}\right) = \frac{-2ct + x^2}{4c^2t^2\sqrt{4\pi ct}} e^{\frac{-x^2}{4ct}},$$
   alors
   $$\frac{\partial G}{\partial t} = c \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}.$$

2. *Pour montrer que $G \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}), \mathbb{R}_{+}^{*}\right)$ il suffit de voir que cette fonction est indéfiniment différentiable par rapport aux deux variables x et t.*
3. *Pour montrer que $\int_{\mathbb{R}} G(x,t)dx = 1$, c'est à dire $G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-y^2}{4ct}} dy = 1$, on utilise l'intégrale de Gauss :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{1.9}$$

en faisant le changement de variable $s = \frac{y}{\sqrt{4ct}}$, cela implique $\sqrt{4ct}ds = dy$, d'où

$\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-y^2}{4ct}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = 1$, *d'après la relation (**1.9**)*

. Revenons au théorème principale

Preuve du théorème

Vérifiant tout d'abord que la fonction $u(x,t)$ est solution du problème de la chaleur écrite sous la forme (**1.4**), en effet on a ;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int \varphi(y)G(x-y,t)dy\right) = \left(\int \varphi(y)\frac{\partial}{\partial t}G(x-y,t)dy\right), \\
&= c\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int \varphi(y)G(x-y,t)dy\right) = \left(\int \varphi(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x-y,t)dy\right) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},
\end{aligned}$$

donc

$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int \varphi(y)(\frac{\partial}{\partial t}G(x-y,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x-y,t))dy = 0$,et cela d'après la relation (**1.6**).

On démontre maintenant que la solution (**1.2**), existe,
si la condition initiale $\varphi(x)$ est continue, bornée, alors

$|u(x,t)| = \left|\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int \varphi(x-y)e^{\frac{-y^2}{4ct}} dy\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int \varphi(x-y)G(y,t)dy\right| \leq Sup|\varphi(x-y)| \int G(y,t)dy,$

on pose $M = Sup|\varphi(x-y)|_{x\in\mathbb{R}}$, or d'après (**1.7**), on obtient

donc

$$|u(x,t)| \leq Sup|\varphi(x-y)| \int_{\mathbb{R}} G(y,t)dy \leq M.$$

donc la solution existe.

Pour montrer que $u(x,t)$ est une fonction $C^{\infty}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}_{+}^{*}\right)$ d'aprés(**1.4**), la solution dépend du noyaux de Gauss, or ce dernier est $G\in C^{\infty}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}_{+}^{*}\right)$ d'après (**1.7**). Donc la solution u est $C^{\infty}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}_{+}^{*}\right)$.

Exemple 1.7 *Soit la condition initiale suivante*

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases}1 & pour \quad x<0,\\ 0 & pour \quad x\geq 0,\end{cases}$$

on a

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}\int\varphi(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4ct}}\,dy=\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}\int\varphi(x-y)e^{\frac{-y^2}{4ct}}\,dy,$$

la condition initiale peut s'écrire comme :

$$\varphi(x-y)=\begin{cases}1 & pour \quad x<y,\\ 0 & pour \quad x\geq y,\end{cases}$$

d'où

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}\int_{x}^{\infty}e^{\frac{-y^2}{4ct}}\,dy, \tag{1.10}$$

on pose $\frac{y}{\sqrt{4ct}}=s$, cela implique $y=2\sqrt{ct}s$, en remplaçant dans l'intégrale (**1.5**), on obtient :

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{ct}}}^{\infty}e^{-s^2}ds.$$

Cela donne comme solution la fonction d'erreur que nous allons étudier tout à l'heure .

Définition 1.8 *[1]Fonction d'erreur elle est définie comme suit*

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds, \qquad \textbf{(1.11)}$$

on a aussi la fonction d'erreur complémentaire qui est définie comme :

$$erf_c = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-s^2} ds, \qquad \textbf{(1.12)}$$

ainsi on a

$$erf_c(x) + erf(x) = 1,$$

car

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = 1,$$

*d'après (**1.9**).*
*Donc pour l'exemple qu'on a vu la solution (**1.10**), s'écrit comme :*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{ct}}}^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} erf_c \left(\frac{x}{2\sqrt{ct}} \right).$$

1.3 Problème de l'équation de la chaleur avec source

Théorème 1.9 *[1] Soit $f = f(x,t)$, et soit $\varphi = \varphi(x)$, une fonction continue bornée ; alors le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur non homogène suivant*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in R, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{1.13}$$

admet une solution classique de la forme

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)G(x-y,t)dy + \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y,t-s)f(y,s)dyds, \tag{1.14}$$

avec G. le noyaux de Gauss.

Méthode de calcul de la solution

La méthode consiste à séparer le problème en deux problèmes suivants
Problème A

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \\ u_1(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{1.15}$$

Problème B

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x,t), \\ u_2(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1.16}$$

*On peut vérifier que la solution **(1.14)** du problème **(1.15)**, s'écrit comme $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, on connait déjà la solution du problème A **(1.15)**, qui s'écrit d'après **(1.4)**, comme :*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)G(x-y,t)dy.$$

reste a trouver la solution du problème **B***,*
soit le problème suivant qu'on le note B

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x,t-s)}{\partial t} = c\frac{\partial^2 v(x,t-s)}{\partial x^2}, \qquad x \in R, \quad t-s>0 \\ v(x,t=s) = f(x,t=s), \end{cases} \tag{1.17}$$

la solution de ce problème est donnée par

$$v(x,t-s) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t-s)f(y,s)dy,$$

on a la proposition dite de "Duhamel" suivante ;
la fonction u_B définie par

$$u_B(x,t) = \int_0^t v(x,t-s)ds, \tag{1.18}$$

*est solution du problème B (**1.16**), en effet*

$$\frac{\partial u_B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t v(x,t-s)ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} v(x,t-s)ds,$$

on a également

$$c\frac{\partial^2 u_B}{\partial x^2} = c\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t v(x,t-s)ds = c\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t-s)ds = \frac{c}{c}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} v(x,t-s)ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} v(x,t-s)ds.$$

1.3.1 Problème de l'équation de la chaleur avec source inconnue

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0\ ,\ b\ cst \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{\textbf{1.19}}$$

En faisant le changement de variable suivant $u(x;t) = e^{bt}v(x,t)$, dans le problème**(1.19)**, on obtient :

$$be^{bt}v(x,t) + e^{bt}\frac{\partial v}{\partial t} + ce^{bt}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + be^{bt}v(x,t).$$

En simplifiant on trouve

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = c\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ v(x,0) = \varphi(x), \end{cases}$$

On revient au problème de la chaleur, qu'on connait la solution

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)G(x-y,t)dy.$$

Ainsi la solution du problème **(1.19)**, s'écrit comme :

$$u(x,t) = e^{bt}v(x,t) = e^{bt}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)G(x-y,t)dy.$$

1.3.2 Problème de l'équation de la chaleur avec flux

Il s'agit du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + V\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, & x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & \end{cases} \tag{\textbf{1.20}}$$

Pour résoudre ce problème , on procède à la substitution suivante $z = x + Vt$, dans le problème (**1.20**), on obtient :

$$V\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = V\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + c\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}.$$

En simplifiant, ceci nous amène au problème de la chaleur sur la variable y, qu'on connait la solution :

$$u(z,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)G(z-y,t)dy.$$

donc la solution du problème (**1.20**), s'écrit comme :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)G(x+Vt-y,t)dy.$$

1.4 L'équation de transport

L'équation de transport modélise la concentration d'une substance qui s'écoule dans un fluide à un taux constant.

.

Définition 1.10 *[3] Pour les paramètre $c \in \mathbb{R}$, l'équation de transport sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ est*

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.21}$$

La solution à cette équation est calculée à l'aide d'une méthode de changement de variable.

Théorème 1.11 *[3]*

1. *La solution générale à **(1.21)**, est de la forme*

$$u(x,t) = u_0(x - ct).$$

Preuve du théorème

En va essayer de la résoudre par la méthode de changement de variable
on pose $u(x,t) = f(z)g(t)$, dans le problème (**1.21**)
telle que $z = x - ct$,
on trouve que

$$-cf'(z)g(t) + f(z)g'(t) + cf'(z)g(t) = 0,$$

$$\Rightarrow f(z)g'(t) = 0,$$

si $f(z) \neq 0$,
donc

$$g(t) = k,$$

donc

$$g(0) = 1 \Rightarrow k = 1,$$

on a

$$u(x,0) = f(x) = u_0(x),$$

$$\Rightarrow f(z) = u_0(z),$$

donc la solution de (**1.21**), s'écrit comme :

$$u(x,t) = u_0(x - ct),$$

Exemple 1.12 *Considérons le cas suivant :*

$$u_0(x) = e^{-x^2} \quad et \quad c = 1,$$

La solution est alors de la forme :

$$u(x,t) = u_0(x - t),$$

donc

$$u(x,t) = e^{-(x-t)^2}.$$

Chapitre 2

Etude de l'équation de convection - diffusion non linéaire avec coefficients constants

Dans ce chapitre nous étudions l'équation de convection - diffusion non linéaire avec coefficients constants suivant :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = au(x,t) - bu(x,t)^2 + D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (\mathbf{2.1})$$

Nous allons étudier différentes formes de cette équation selon les valeurs des constantes a, b, v, et D. Nous commençons par :

2.1 L'équation de convection linéaire

Pour $D = 0$ et $b = 0$, l'équation (**2.1**), s'écrit comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = au(x,t), & x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & \end{cases} \qquad (\mathbf{2.2})$$

cette équation est de convection linéaire.

Proposition : Une solution du problème (**2.2**), s'écrit sous la forme suivante

$$u(x,t) = \frac{u_0(x - vt)}{e^{-at}}.$$

Preuve :

On va essayer de la résoudre par la méthode de changement de variable
on pose
$u(x,t) = f(z)g(t)$, dans le problème (**2.2**),
telle que $z = x - vt$ et $a \neq 0$,
on trouve que

$$-vf'(z)g(t) + f(z)g'(t) + vf'(z)g(t) - af(z)g(t) = 0,$$

$$\Rightarrow f(z)g'(t) - af(z)g(t) = 0,$$

si $f(z) \neq 0$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow g'(t) = ag(t), \\ &\Rightarrow \int \tfrac{g'(t)}{g(t)} = \int adt, \\ &\Rightarrow g(t) = ke^{at}, \end{aligned}$$

telle que

$$k \in \mathbb{R},$$

on a

$$u(x,0) = g(0)f(x) = u_0(x),$$

d'autre part

$$g(0) = k \qquad \Rightarrow k = 1,$$

donc

$$g(t) = e^{at},$$

d'autre part

$$u_0(x) = f(x),$$

$$\Rightarrow f(z) = u_0(z),$$

on a

$$u(x,t) = f(z)g(t),$$

donc la solution de (**2.2**), s'écrit comme :

$$u(x,t) = \frac{u_0(x - vt)}{e^{-at}}. \tag{2.3}$$

2.1.1 Exemple

Considérons le cas suivant :

$$u_0(x) = e^x,$$

et on a aussi

$$u_0(x - vt) = e^{x-vt},$$

la solution est alors de la forme

$$u(x,t) = e^{x+(a-v)t}.$$

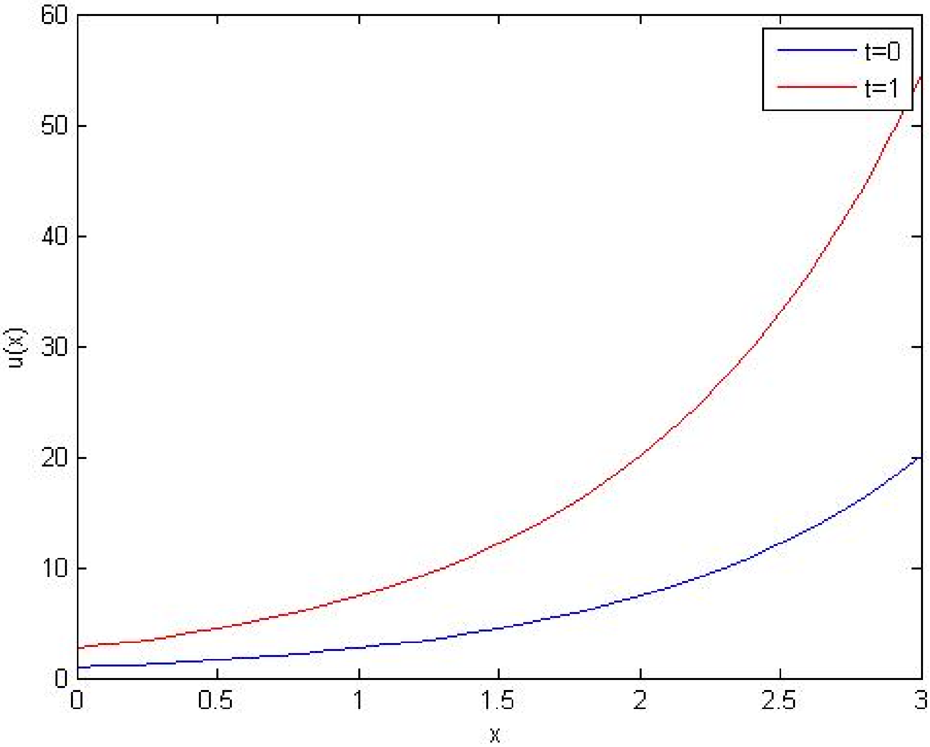

FIGURE 2.1 – La solution de l'exemple pour $v = 0, a = 1$

2.2 Problème de convection - diffusion linéaire

On prend a,D et v constants, et b égale à zéro dans l'équation (**2.1**), on obtient :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = au(x,t) + D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{array} \tag{2.4}$$

En faisant le changement de variable suivant $u(x,t) = e^{at}\psi(x,t)$, dans le problème (**2.4**), on obtient :

$$ae^{at}\psi(x,t) + e^{at}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + ve^{at}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = ae^{at}\psi(x,t) + De^{at}\frac{\partial \psi^2(x,t)}{\partial x^2},$$

En simplifiant, on trouve

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + v\,\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = D\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ \psi(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{2.5}$$

pour résoudre ce problème , on procède à la substitution suivante $z = x - vt$, dans le problème (**2.5**), on obtient :

$$-v\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} + v\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} = D\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2},$$

En simplifiant, ceci nous amène au problème de la chaleur sur la variable y, qu'on connait la solution :

$$\psi(z,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)G(z-y,t)dy,$$

donc la solution du problème (**2.5**), s'écrit comme

$$\psi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)G(x-vt-y,t)dy.$$

d'autre part

$$u(x,t) = e^{at}\psi(x,t),$$

donc la solution du problème (**2.4**), s'écrit comme :

$$u(x,t) = e^{at}\psi(x,t) = e^{at}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)G(x - vt - y, t)dy. \qquad (\mathbf{2.6})$$

2.2.1 Exemple

Soit la condition initiale suivante

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} T \quad pour \quad x < 0, \\ 0 \quad pour \quad x \geq 0, \end{cases}$$

T indique ici une température constante positive. on a

$$u(x,t) = \frac{e^{at}}{\sqrt{4\pi ct}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{\frac{-(x-vt-y)^2}{4ct}}\,dy = \frac{e^{at}}{\sqrt{4\pi ct}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)e^{\frac{-(y-vt)^2}{4ct}}\,dy.$$

la condition initiale peut s'écrire comme

$$\varphi(x-y) = \begin{cases} T \quad pour \quad x < y, \\ 0 \quad pour \quad x \geq y, \end{cases}$$

d'où

$$u(x,t) = \frac{Te^{at}}{\sqrt{4\pi ct}}\int_{x}^{\infty} e^{\frac{-(y-vt)^2}{4ct}}\,dy.$$

on pose $\frac{y-vt}{2\sqrt{ct}} = s$, cela implique $y = 2\sqrt{ct}s + vt$ et $dy = 2\sqrt{ct}ds$ en remplaçant dans l'intégrale (**2.6**), on obtient :

$$u(x,t) = \frac{Te^{at}}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-vt}{2\sqrt{ct}}}^{\infty} e^{-s^2} ds \qquad (\mathbf{2.7})$$

on a

$$erf_c = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-s^2} ds$$

Donc pour l'exemple qu'on a vu la solution (**2.7**), s'écrit comme :

$$u(x,t) = \frac{Te^{at}}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-vt}{2\sqrt{ct}}}^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} Te^{at} erf_c \left(\frac{x-vt}{2\sqrt{ct}} \right).$$

2.3 L'équation de convection non linéaire

En posant $D = 0$, dans l'équation (**2.1**), ceci s'écrit comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = au(x,t) - bu(x,t)^2, & x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{\textbf{2.8}}$$

cette équation est de convection non linéaire.

Proposition : Une solution du problème (**2.8**), s'écrit sous forme suivante

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-vt)}{e^{-at} + \frac{b}{a}(1-e^{-at})u_0(x-vt)}.$$

Preuve :

Pour résoudre ce problème analytiquement en faisant la transformation simple suivante $\varphi(x,t) = \frac{1}{u(x,t)}$, dans l'eq.**(2.8)**, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + v\,\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} + a\varphi(x,t) = b, & x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \end{cases} \tag{2.9}$$

En faisant le changement de variable suivant $\varphi(x,t) = f(z)g(t) + \frac{b}{a}$, dans le problème (2.9), telle que $z = x - vt$ et $a \neq 0$,
on trouve que

$$-vf'(z)g(t) + f(z)g'(t) + vf'(z)g(t) + af(z)g(t) + b = b,$$

$$\Rightarrow f(z)g'(t) + af(z)g(t) = 0,$$

si $f(z) \neq 0$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow g'(t) = -ag(t), \\ &\Rightarrow \textstyle\int \frac{g'(t)}{g(t)} = \int -adt, \\ &\Rightarrow g(t) = ke^{-at}, \end{aligned}$$

telle que

$$k \in \mathbb{R}$$

on a

$$\varphi(x,0) = g(0)f(x) + \frac{b}{a} = \varphi_0(x),$$

d'autre part

$$g(0) = k, \qquad \Rightarrow k = 1,$$

donc

$$g(t) = e^{-at},$$

d'autre part

$$\varphi_0(x) = f(x) + \frac{b}{a},$$

$$\Rightarrow f(z) = \varphi_0(z) - \frac{b}{a},$$

on a

$$\varphi(x,t) = f(z)g(t) + \frac{b}{a} = e^{-at}[\varphi_0(x-vt) - \frac{b}{a}] + \frac{b}{a},$$

alors

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(x-vt)e^{-at} + \frac{b}{a}(1-e^{-at}),$$

on a

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{u(x,t)},$$

alors

$$\frac{1}{u(x,t)} = \frac{e^{-at} + \frac{b}{a}(1-e^{-at})u_0(x-vt)}{u_0(x-vt)},$$

donc la solution de (**2.8**), s'écrit comme :

$$u(x,t) = \frac{u_0(x-vt)}{e^{-at} + \frac{b}{a}(1-e^{-at})u_0(x-vt)}. \qquad (\mathbf{2.10})$$

2.3.1 Exemple

Considérons le cas suivant :

$$u_0(x) = x,$$

et on a aussi

$$u_0(x - vt) = x - vt,$$

La solution est alors de la forme :

$$u(x,t) = \frac{1}{(e^{-at}/(x - vt)) + \frac{b}{a}(1 - e^{-at})}.$$

Observation

si on pose $b = 0$,

on trouve la solution de l'eq.(**2.3**).

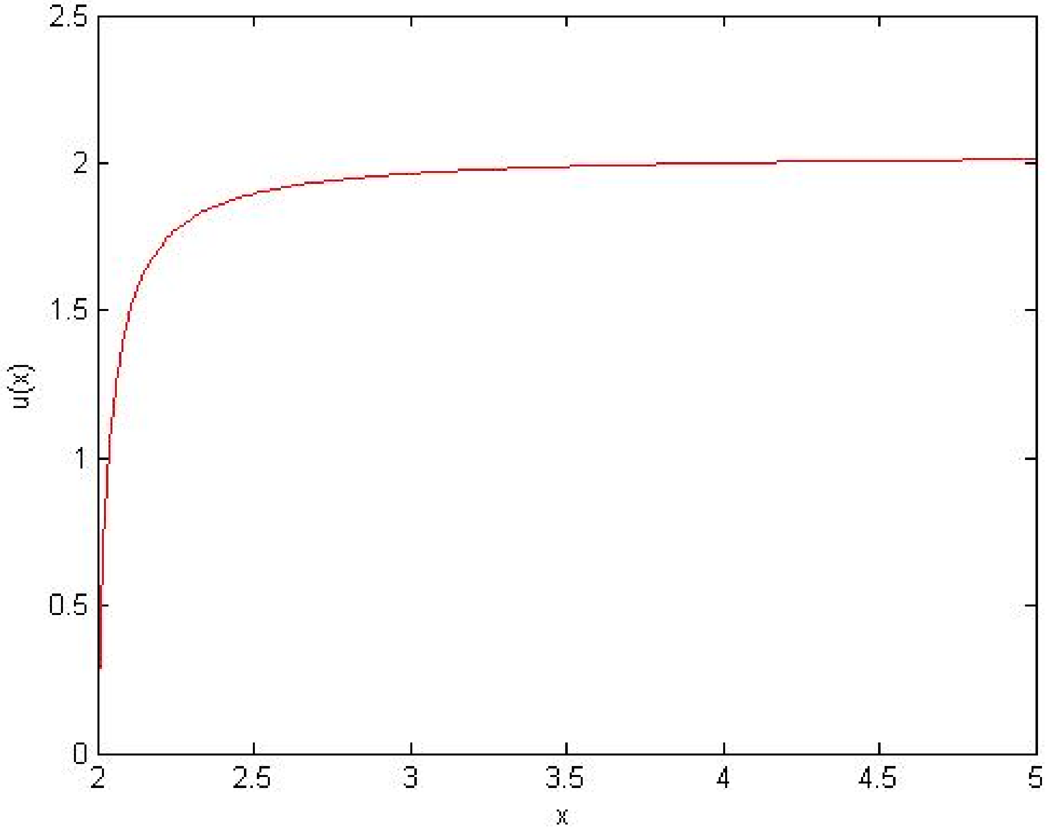

FIGURE 2.2 – La solution de l'exemple pour $t = 1$, $v = 1, a = 2$ et $b = 1$

Chapitre 3

Etude de l'équation de convection non linéaire avec coefficients variables

Dans ce chapitre nous étudions l'équation de convection non linéaire avec coefficients variables suivant :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v(t)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = a(x,t)u(x,t) - b(x,t)u(x,t)^2 + D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \tag{3.1}$$

Cette équation est liée ou phénomène de propagations des épidémies, où $u(x,t)$ représente la densité de population (par exemple, d'une équation générale colonie de bactéries) à la position x au temps t,avec un taux $a(x,t)$ est limité par un coefficient de compétition annihilation mutuelle $b(x,t)$ et elle est soumis à la convection à vitesse $v(t)$,qui se déplace de manière diffuse avec le coefficient D.
On considère le cas où D peut être négligé.

Nous allons étudier différentes formes de cette équation selon les valeurs des variables a, b, et v. Nous commençons par :

3.1 L'équation de convection linéaire

Pour $b(x,t) = 0$, l'équation (3.1), s'écrit comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v(t)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = a(t)u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \qquad (\mathbf{3.2})$$

cette équation est de convection linéaire.

Proposition : Une solution de problème (**3.2**), s'écrit sous forme

$$u(x,t) = u_0(x - \int_0^t v(s)ds)e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

Preuve :

En faisant le changement de variable suivant
$\psi(x,t) = u(x + V(t), t)$,
donc $\psi(x - V(t), t) = u(x,t)$,
On pose $V(t) = \int_0^t v(s)ds$, et $V'(t) = v(t)$,

D'où

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x + V(t), t) + v(t)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x + V(t), t).$$

on pose $h(t) = \psi(x,t)$,
D'où h est solution de l'équation différentielle linéaire (**3.2**),

$$h'(t) - a(t)h(t) = 0,$$

$$\Rightarrow h'(t) = a(t)h(t),$$
$$\Rightarrow \int \frac{h'(t)}{h(t)} = \int_0^t a(s)ds,$$

La solution homogène

$$h(t) = k(x)e^{\int_0^t a(s)ds},$$

on a

$$\psi(x,t) = k(x)e^{\int_0^t a(s)ds},$$

donc

$$\psi(x,0) = k(x) \quad \Rightarrow \quad k(x) = u_0(x),$$

on a

$$\psi(x - V(t)) = u_0(x - V(t))e^{\int_0^t a(s)ds},$$

on a

$$u(x,t) = \psi(x - V(t)),$$

la solution de (**3.2**), s'écrit comme :

$$u(x,t) = u_0(x - \int_0^t v(s)ds)e^{\int_0^t a(s)ds}. \qquad \textbf{(3.3)}$$

3.1.1 Exemple

Pour $v(t) = \alpha cos(wt)$ et $a(t) = \frac{1}{t+1}$ telle que α et w sont constants dans l'éq (**3.2**), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \alpha cos(wt)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{t+1}u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.4}$$

D'après (**3.3**), on obtient :

$$u(x,t) = u_0(x - \int_0^t \alpha\, cos(ws)ds)e^{\int_0^t \frac{1}{(s+1)}ds},$$

D'où

$$\int_0^t \alpha\, cos(ws)ds = [(\alpha/w)\, sin(ws)]_0^t = [(\alpha/w)\, sin(wt)],$$

et

$$e^{\int_0^t \frac{1}{(s+1)}ds} = e^{[ln(s+1)]_0^t} = t + 1,$$

donc la solution de (**3.4**), s'écrit comme :

$$u(x,t) = u_0\left(x - (\alpha/w)\, sin(wt)\right)(t+1).$$

on pose

$$u_0\left(x - (\alpha/w)\, sin(wt)\right) = \left(x - (\alpha/w)\, sin(wt)\right).$$

Donc

$$u(x,t) = \left(x - (\alpha/w)\, sin(wt)\right)(t+1).$$

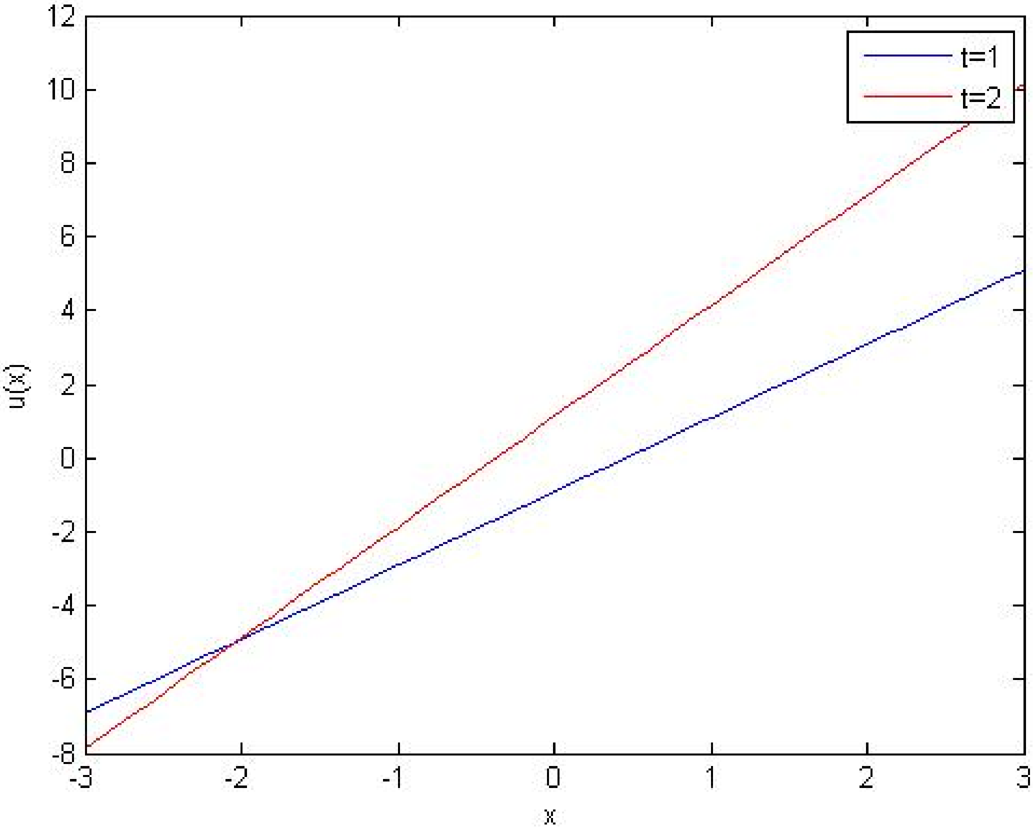

FIGURE 3.1 – La solution de l'exemple pour $\alpha = 1$ et $w = 1$

3.2 L'équation de convection non linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v(t)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = a(t)u(x,t) - b(x,t)u(x,t)^2, & x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{\textbf{3.5}}$$

cette équation est de convection non linéaire.

Proposition : Une solution de problème (**3.5**), s'écrit sous forme :

$$u(x,t) = \frac{1}{\left(e^{-\int_0^t a(s)ds}/u_0(x - \int_0^t v(s)ds)\right) + \int_0^t b\left(x - \int_{t'}^t v(s)ds\right)e^{-\int_{t'}^t a(s)ds}dt'}.$$

Preuve :

Pour résoudre ce problème analytiquement en faisant la transformation simple suivante $\varphi(x,t) = \frac{1}{u(x,t)}$, dans l'eq.**(3.5)**, on obtient :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + v(t)\,\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} + a(t)\varphi(x,t) = b(x,t), & x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \end{array} \tag{\textbf{3.6}}$$

En faisant le changement de variable suivant

$\psi(x,t) = \varphi(x + V(t), t)$,

donc $\psi(x - V(t), t) = \varphi(x,t)$,

On pose $V(t) = \int_0^t v(s)ds$, et $V'(t) = v(t)$,

D'où

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x + V(t), t) + v(t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x + V(t), t),$$

on pose $h(t) = \psi(x,t)$,

D'où h est solution de l'équation différentielle linéaire (**3.6**),

$$h'(t) + a(t)h(t) = 0,$$

$$\Rightarrow h'(t) = -a(t)h(t),$$
$$\Rightarrow \int \frac{h'(t)}{h(t)} = \int_0^t -a(s)ds,$$

La solution homogène

$$h(t) = k(x)e^{\int_0^t -a(s)ds},$$

La solution particulière

$$h_p(t) = k(t)e^{-\int_0^t a(s)ds},$$

on a

$$h_p'(t) = k'(t)e^{-\int_0^t a(s)ds} - k(t)a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds},$$

dans le problème **(3.6)**, on obtient :

$$k'(t)e^{-\int_0^t a(s)ds} - k(t)a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds} + k(t)a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds} = b(x + V(t), t),$$
$$\Rightarrow k'(t) = b(x + V(t), t)e^{\int_0^t a(s)ds},$$
$$\Rightarrow k(t) = \int_0^t \left[b(x + V(t'), t')e^{\int_0^{t'} a(s)ds} \right] dt',$$

donc

$$h_p(t) = \int_0^t \left[b(x + V(t'), t')e^{\int_0^{t'} a(s)ds} \right] dt' e^{-\int_0^t a(s)ds},$$
$$\Rightarrow h_p(t) = \int_0^t \left[b(x + V(t'), t')e^{-\int_{t'}^t a(s)ds} \right] dt',$$

on prend

$$h(t) = h_h(t) + h_p(t),$$
$$\Rightarrow h(t) = k(x)e^{-\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t \left[b(x + V(t'), t')e^{-\int_{t'}^t a(s)ds} \right] dt',$$
$$\Rightarrow \psi(x,t) = k(x)e^{-\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t \left[b(x + V(t'), t')e^{-\int_{t'}^t a(s)ds} \right] dt,'$$
$$\psi(x, 0) = k(x) \quad \Rightarrow \quad k(x) = \varphi_0(x),$$

d'autre part

$$\varphi(x,t) = \psi(x - V(t), t),$$

donc

$$\psi(x-V(t),t)=\varphi_0(x-V(t))e^{-\int_0^t a(s)ds}+\int_0^t\left[b(x-V(t)+V(t'),t')e^{-\int_{t'}^t a(s)ds}\right]dt',$$

et on a aussi

$$V(t')-V(t)=\int_0^{t'}v(s)ds-\int_0^t v(s)ds=-\int_{t'}^t v(s)ds,$$

donc la solution de (**3.6**), s'écrit comme :

$$\varphi(x,t)=\varphi_0\left(x-\int_0^t v(s)ds\right)e^{-\int_0^t a(s)ds}+\int_0^t b\left(x-\int_{t'}^t v(s)ds\right)e^{-\int_{t'}^t a(s)ds}dt',$$

on a

$$u(x,t)=\frac{1}{\varphi(x,t)},$$

donc la solution de (**3.5**), s'écrit comme :

$$u(x,t)=\frac{1}{\left(e^{-\int_0^t a(s)ds}/u_0(x-\int_0^t v(s)ds)\right)+\int_0^t b\left(x-\int_{t'}^t v(s)ds\right)e^{-\int_{t'}^t a(s)ds}dt'}. \qquad (\mathbf{3.7})$$

3.2.1 Vitesse moyenne dépendant du temps

Soit la vitesse moyenne oscillatoire et et donnée par $v(t) = vcos(wt)$ telle que v et w sont constants.
On prend a et b comme indépendants du temps et de l'espace, ceci s'écrit comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + vcos(wt)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = au(x,t) - bu(x,t)^2, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{\textbf{3.8}}$$

Proposition : Une solution du problème (**3.8**), s'écrit sous forme suivante

$$u(x,t) = \frac{1}{(e^{-at}/u_0[x - (v/w)sinwt]) + \frac{b}{a}(1 - e^{-at})}.$$

Preuve :
Pour résoudre ce problème analytiquement en faisant la transformation simple suivante $\varphi(x,t) = \frac{1}{u(x,t)}$, dans l'eq.**(3.8)**, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + vcos(wt)\,\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} + a\varphi(x,t) = b, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \end{cases} \tag{3.9}$$

En faisant le changement de variable suivant $\varphi(x,t) = f(z)g(t) + \frac{b}{a}$, dans le problème (3.9), telle que $z = x - (v/w)sin(wt)$ et $a \neq 0$, $w \neq 0$,
on trouve que

$$-vcos(wt)f'(z)g(t) + f(z)g'(t) + vcos(wt)f'(z)g(t) + af(z)g(t) + b = b,$$

$$\Rightarrow f(z)g'(t) + af(z)g(t) = 0,$$

si $f(z) \neq 0$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow g'(t) = -ag(t),\\
&\Rightarrow \int \tfrac{g'(t)}{g(t)} = \int -adt,\\
&\Rightarrow g(t) = ke^{-at},
\end{aligned}$$

telle que

$$k \in \mathbb{R}$$

on a

$$\varphi(x,0) = g(0)f(x) + \frac{b}{a} = \varphi_0(x),$$

d'autre part

$$g(0) = k, \qquad \Rightarrow k = 1,$$

donc

$$g(t) = e^{-at},$$

d'autre part

$$\varphi_0(x) = f(x) + \frac{b}{a},$$

$$\Rightarrow f(z) = \varphi_0(z) - \frac{b}{a},$$

on a

$$\varphi(x,t) = f(z)g(t) + \frac{b}{a} = e^{-at}[\varphi_0(x - (v/w)sin(wt)) - \frac{b}{a}] + \frac{b}{a},$$

alors

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(x - (v/w)sin(wt))e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at}),$$

on a

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{u(x,t)},$$

alors

$$\frac{1}{u(x,t)} = \frac{e^{-at} + \frac{b}{a}(1-e^{-at})u_0(x-(v/w)sin(wt))}{u_0(x-(v/w)sin(wt))},$$

donc la solution de (**3.8**), s'écrit comme :

$$u(x,t) = \frac{1}{(e^{-at}/u_0[x-(v/w)sinwt]) + \frac{b}{a}(1-e^{-at})}. \qquad \textbf{(3.10)}$$

Exemple 3.1 *Considérons le cas suivant :*

$$u_0[x-(v/w)sinwt]) = x-(v/w)sinwt$$

La solution est alors de la forme :

$$u(x,t) = \frac{1}{(e^{-at}/(x-(v/w)sinwt)) + \frac{b}{a}(1-e^{-at})}.$$

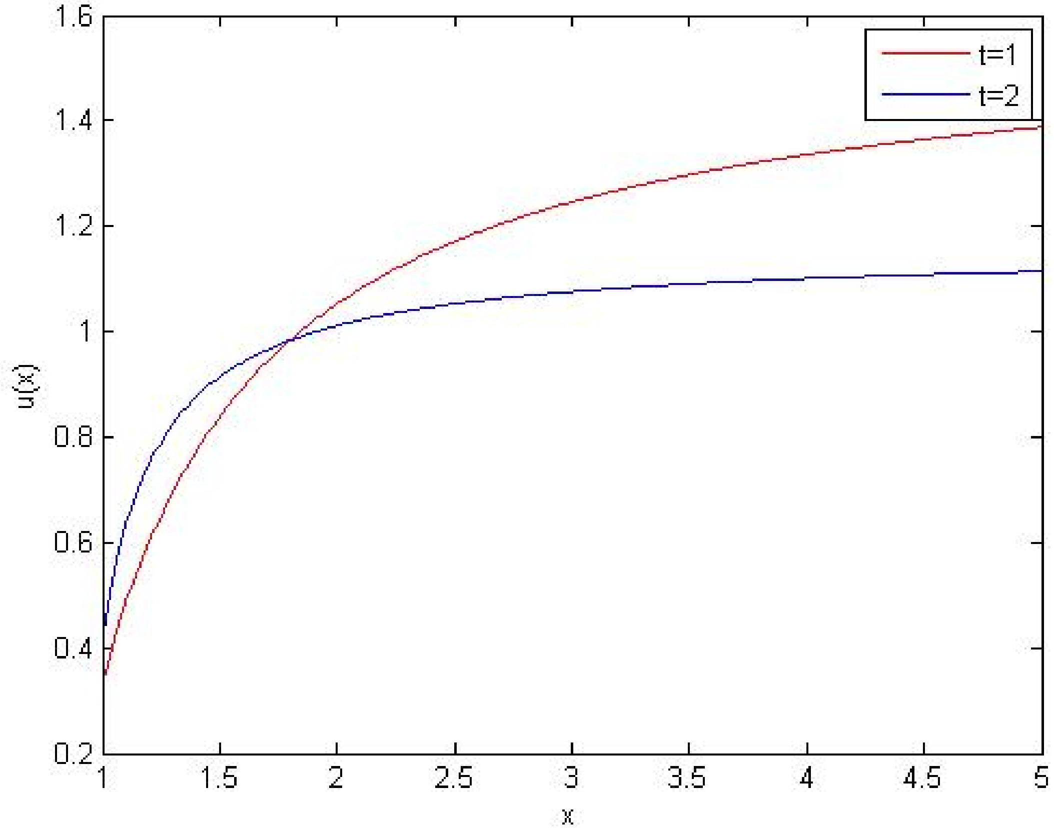

FIGURE 3.2 – La solution de l'exemple pour $v = w = 1, a = b = 1$

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons étudier deux types d'équations aux dérivées partielles de type diffusion-convection , la première c'est l'équation de convection-diffusion non linéaire avec coefficients constants et la deuxième c'est l'équation de convection non linéaire avec coefficients variables.

Ces équation sont liées des applications intéressantes eu biologie, et eu particules eu propagation des épidémies.

Nous avons calculer des solutions exactes pour les deux équations avec des exemples donnés explicitement.

Nous avons également représenter ces solutions par des graphes.

Bibliographie

[1] N. Benhamidouche, Cours Problème de Cauchy pour les EDPS d'évolution(2020/2021).

[2] Pavel Drabek, Gabriela Holubova,Element of partial differential Equations , de *Gruyter, Berlin New york, (2007).*

[3] D. Claire, G. Pierre ,Cours Équations aux Dérivées Partielles,Dunod(2012,2015)

[4] P.L. Sachdev Ch. Srinivasa Rao, Large Time Asymptotics for Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, Springer Science+Business Media, LLC (2010).

[5] L. Giuggioli, V.M. Kenkre Analytic solutions of a nonlinear convective equation in population dynamics Physica D 183(2003) 245–259

[6] E. Ben-Jacob, I. Cohen, H. Levine, Cooperative self-organization of microorganisms, Adv. Phys. 49 (2000) 395–554.

[7] J. Wakita, K. Komatsu, A. Nakahara, T. Matsuyama, M. Matsushita, Experimental investigation on the validity of population dynamics approach to bacterial colony formation, J. Phys. Soc. Jpn. 63 (1994) 1205–1211.

[8] A.L. Lin, B. Mann, G. Torres, B. Lincoln, J. Kas, H.L. Swinney, Localization and extinction of bacterial populations under inhomogeneous growth conditions, Preprint.

[9] B. Mann, Spatial phase transitions in bacterial growth, Ph.D. Thesis, 2001, Unpublished.

[10] D.R. Nelson, N.M. Shnerb, Non-Hermitian localization and population biology, Phys. Rev. E 58 (1998) 1383–1403 ; K.A. Dahmen, D.R. Nelson, N.M. Shnerb, Life and death near a windy oasis, J. Math. Biol. 41 (2000) 1–23.

[11] R.A. Fisher, The wave of advance of advantageous genes, Ann. Eugenics 7 (1937) 355–369.

[12] J.D. Murray, Mathematical Biology, 2nd ed., Springer, New York, 1993.

[13] K.K. Manne, A.J. Hurd, V.M. Kenkre, Nonlinear waves in reaction–diffusion systems : The effect of transport memory, Phys. Rev. E 61 (2000) 4177–4184.

[14] G. Abramson, A.R. Bishop, V.M. Kenkre, Effects of transport memory and nonlinear damping in a generalized Fisher's equation, Phys. Rev. E 64 (2001) 066615/1–066615/6.

[15] G. Abramson, V.M. Kenkre, A.R. Bishop, Analytic solutions for nonlinear waves in coupled reacting systems, Physica A 305 (2002) 427–436.

[16] G. Abramson, V.M. Kenkre, Spatiotemporal patterns in the Hantavirus infection, Phys. Rev. E 66 (2002) 011912/1–011912/5.

[17] M.A. Aguirre, G. Abramson, A.R. Bishop, V.M. Kenkre, Simulations in the mathematical modeling of the spread of the Hantavirus, Phys. Rev. E 66 (2002) 041908-13.

[18] J.N. Mills, T.L. Yates, T.G. Ksiazek, C.J. Peters, J.E. Childs, Long-term studies of hantavirus reservoir populations in the southwestern United States : rationale, potential, and methods, Emerg. Infect. Dis. 5 (1999) 95–101.

[19] E.W. Montroll, On nonlinear processes involving population growth and diffusion, J. Appl. Probab. 4 (1967) 281–290.

[20] M. Rotenberg, Diffusive logistic growth in deterministic and stochastic environments, J. Theor. Biol. 94 (1982) 253–280.

[21] V.M. Kenkre, M.N. Kuperman, Applicability of the Fisher equation to bacterial population dynamics, scheduled for publication, Phys. Rev. E. 67 (2003) 051921-5.

[22] D. Mollison, Spatial contact models for ecological and epidemic spread, J. Roy. Stat. Soc. B 39 (1977) 283–326.

[23] V.M. Kenkre, P. Parris, Saturation of charge carrier velocity with increasing lectric fields : Theoretical investigations for pure organic crystals, Phys. Rev. B 65 (2002) 205104/1–205104/11.

[24] V.M.Kenkre,Memoryfunctions, nonlinear techniques, and kinetic equation approaches, in :V.M.Kenkre, K. Lindenberg (Eds.), Proceedings of the PASI on Modern Challenges in Statistical Mechanics : Patterns, Noise, and the Interplay of Nonlinearity and Complexity, AIP, 2003, pp. 63–102.

[25] M. Kot, Elements of Mathematical Ecology, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

ملخص:

يتمثل العمل المقترح في هذه المذكرة في البحث عن حلول تحليلية ونموذج للمعادلات التفاضلية الجزئية لنوع الحمل الحراري غير الخطي.

تُستخدم هذه المعادلة على وجه الخصوص في ديناميكيات السكان وفي معالجة الإشارات من وجهة نظر تطبيقية.

الكلمات المفتاحية: الرياضيات غير الخطية -معادلة النقل – معادلة الحرارة - الحمل الحراري - الحل الدقيق.

Résumé:

Le travail proposé dans ce mémoire consiste à chercher des solutions analytiques et pour un modèle d'équations aux dérivées partielles de type convection non linéaire .

Cette équation est utilisée notamment en dynamique des population et en traitement du signal de point de vue application.

Mots clés : Mathématique non linéaire -Transport –Equation de la Chaleur - Convection – Solution exacte.

Abstract:

The work proposed in this thesis consists in seeking analytical solutions for a model of

partial differential equations of the nonlinear convection type.

This equation is used in particular in population dynamics and in signal processing from an application point of view.

Keywords :Nonlinear mathematics - Transport - Heat Equation- Convection - Exact solution.