

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Universite Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département de Mathématiques



## Mémoire de Master

**Domaine** : Mathématiques et de L'informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : EDPs et applications

## Thème

---

---

**Etude d'un modèle mathématique liés à COVID 19**

---

---

Présenté par :

**CHIKH Bochra**

Soutenu le :19/06/2022

Devant le jury composé de :

Pr. MERZOUGUI Abdelkrim

Prof, Univ de M'sila

Président

Pr. BENHAMIDOUCHE Nouredine

Prof, Univ de M'sila

Rapporteur

Dr. BOUNAB Noura

Dr. Univ de M'sila

Examineur

**Année universitaire 2021/2022**

---

# Remerciements

---

Je tiens à remercier tout premièrement **ALLAH** le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donnée durant toutes ces longues années.

Ainsi, je tiens également à exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur **Pr. Benhamidouche Noureddine** pour avoir d'abord proposer ce thème, pour son suivi continué toute le long de la réalisation de ce mémoire et n'a pas cessé de me donner ses conseils.

Je tiens à témoigner ma gratitude à **Pr. MERZOUGUI Abdelkrim** et **Dr. BOUNAB Noura** d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire .

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à ce travail.

---

# Dédicace

---

A'

mon Père et Mère, à qui je dois tout et qui m'ont soutenu jusqu'au bout.

A'

mes Frères et mes Sœurs, à qui je souhaite beaucoup de réussite dans leurs vies.

A'

mon Mari, à que je souhaite beaucoup de réussite dans sa vie.

A'

tous mes amis qui ont une place spéciale dans ma vie et à qui je souhaite beaucoup de  
bonheur et de réussite.

A'

tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à ce travail.

Bohra

---

---

# Table des matières

---

<b>Notation</b>	<b>4</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>1 NOTATIONS ET DÉFINITIONS</b>	<b>7</b>
1.1 Équations différentielles ordinaires . . . . .	7
1.1.1 Définitions . . . . .	7
1.1.2 Types d'équations différentielles du premier ordre . . . . .	8
1.2 Système d'équations différentielles . . . . .	13
1.2.1 Système d'équations différentielles . . . . .	13
1.2.2 Système non linéaire . . . . .	15
1.3 Modélisation mathématique en biologie . . . . .	16
1.3.1 Modèle SIR . . . . .	16
1.3.2 Modèle SIRD . . . . .	17
<b>2 Résolution d'un modèle mathématique lié à COVID-19</b>	<b>18</b>
2.1 Modélisation du COVID-19 . . . . .	18
2.1.1 Modèle de Verhulst . . . . .	18
2.1.2 Lemme . . . . .	22
2.1.3 Lemme . . . . .	25
2.1.4 Proposition . . . . .	25
2.1.5 Le premier cas . . . . .	26
2.1.6 Le deuxième cas . . . . .	30
<b>3 Application</b>	<b>33</b>
3.1 Application pour L'épidémie de COVID-19 en Chine . . . . .	33
3.1.1 Lemme . . . . .	33
3.1.2 Proposition . . . . .	35

---

3.1.3	Lemme . . . . .	36
3.1.4	Proposition . . . . .	38
	<b>Discussion</b>	<b>43</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>
	<b>Abstract</b>	<b>51</b>

---

# Notation

---

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$\mathbb{R}$	Ensemble de tous les nombres réels.
$\mathbb{R}^n$	Ensemble de tous les n-tuples $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ .
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers naturels.
EDO	L'équation différentielle ordinaire.
A	Matrice.
$\det(A)$	Déterminant de matrice A.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes .
$C^k$	La classe des fonctions dérivable et sa dérivée est continue.
$\mathbb{R}^*$	Ensemble des nombres réels sauf zéro.
X	vecteur de $\mathbb{R}^n$ , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
COVID-19	Corona Virus Diseas 2019.
$u(t)$	Le nombre total de cas de COVID-19 au moment t.
$v(t)$	Le nombre total de décès au temps t.
$w(t)$	Le nombre total de patients guéris et sous traitement au temps t.
a	Le coefficient du mécanisme de transmission du virus.
b	Le coefficient d'efficacité des restrictions gouvernementales (règles de quarantaine).
$\gamma$	L'exposant, qui garantit que le nombre total de cas de COVID-19 est borné dans le temps.
$K(t)$	Le coefficient d'efficacité du système de santé pendant le processus épidémique.

---

# Introduction générale

---

En décembre 2019, une pneumonie de cause inconnue est apparue à Wahan, dans la province du Hubei en Chine. L'agent causal identifié par les autorités chinoises a été désigné comme pneumonie à nouveau coronavirus (maladie à coronavirus 2019 [COVID-19]) par l'Organisation mondiale de la Santé (OMS). Au 20 février 2020, il y avait eu 74675 cas confirmés en Chine continentale et plus de 2000 personnes sont décédées [1].

Le COVID-19 a suscité une attention intense non seulement en Chine mais à l'échelle internationale. Les gens étaient préoccupés par la propagation de l'épidémie et sa tendance de développement. De nombreuses recherches mathématiques ont porté sur la modélisation de la propagation et du développement du COVID-19 [2]. Il existe de nombreux modèles mathématiques utilisés pour décrire les processus épidémiques, et on peut les trouver dans n'importe quel livre consacré aux modèles mathématiques en biologie et en médecine [15].

Le modèle le plus connu s'appelle modèle SIR contenant trois équations différentielles ordinaires (ODE). Il existe plusieurs généralisations du modèle SIR, par exemple le modèle SEIR, qui implique quatre ODEs. Ces deux modèles sont principalement utilisés pour les simulations numériques en modélisation mathématique de l'épidémie de COVID-19 [2-14-5]. Ces dernières années, d'autres modèles ont été développés, dont un modèle mathématique simple pour l'épidémie de COVID-19, qui possède deux propriétés, à savoir l'une est intégrable et l'autre prédit les résultats, qui sont pertinents pour les mesures données. Ce modèle basé sur les équations différentielles ordinaires non linéaire a été proposé par [14] pour décrire la pandémie de COVID-19.

Notre mémoire a pour objectif de développer les travaux et les résultats élaborés dans [14]. Le mémoire est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous présentons les différents types d'équations différentielles et leurs définitions. Nous donnons également leurs propriétés et les méthodes de résolution. Nous présentons aussi la définition des modèles SIR et SIRD.

Dans le deuxième chapitre nous développons le modèle établi par [14] constitué de deux équations, l'une de type Bernoulli, donc intégrable, et l'autre décrit l'évolution des personnes décédés par rapport aux infectés.

Enfin dans le troisième chapitre, une application du modèle étudié est développé en comparaison avec les données épidémique de la Chine.

A la fin , des graphes d'illustration des résultats ont été présentés.

---

# NOTATIONS ET DÉFINITIONS

---

## 1.1 Équations différentielles ordinaires

### 1.1.1 Définitions

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), l'intervalle  $J \subset \mathbb{R}$  et  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

**Définition 1.1.** Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation mettant en relation une fonction ainsi qu'un certain nombre de ses fonctions dérivées. La forme générale d'une équation différentielle d'ordre  $n$  s'écrit :

$$G(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

où  $y$  représente une fonction de la variable  $t$ , et  $y'(t), \dots, y^{(n)}(t)$  ses dérivées successives [3].

### Équations différentielles du premier ordre

**Définition 1.2.** Une équation différentielle du premier ordre est une expression qui décrit une relation entre une fonction à une variable et sa dérivée première .

$$G(t, y, y') = 0.$$

Lorsque cette équation est résoluble en  $y'$ , on peut mettre sous la forme :

$$y' = g(t, y).$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est appelé solution générale.

**Définition 1.3.** On appelle solution d'une équation différentielle

$G(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$  toute fonction  $y = y(t)$  définie sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$ , possédant des dérivées successives  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  et vérifiant la relation

$$G(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \text{ sur } J.$$

**Remarque 1.1.** Si on ajoute à une équation une condition initiale  $y(t_0) = y_0$  on dit que le système

$$\begin{cases} y' &= g(t, y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

admet une solution particulière.

## 1.1.2 Types d'équations différentielles du premier ordre

### Équations différentielles à variables séparables

**Définition 1.4.** On appelle équation à variables séparables toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme

$$f(y)y' = g(t).$$

Où  $f$  et  $g$  sont des fonctions continues .

Dans la pratique, on écrit  $f(y)y' = g(t)$  de la façon suivante

$$f(y) \frac{dy}{dt} = g(t).$$

Ce que l'on peut encore écrire

$$f(y)dy = g(t)dt.$$

On intègre les deux cotés, ce qui donne

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt \Leftrightarrow F(y) = G(t) + c,$$

où  $G$  une primitive de  $g$ ,  $F$  une primitive de  $f$  et  $c$  une constante arbitraire.

### Équations différentielle homogènes

**Définition 1.5.** Il s'agit des équations du type

$$y' = f(t, y) = g\left(\frac{y}{t}\right) \tag{1.1}$$

ou bien de la forme

$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0$$

telles que  $P(t,y)$ ,  $Q(t,y)$  sont des fonctions homogènes sachant que  $f(t,y)$  est homogène si  $f(\lambda t, \lambda y) = \lambda^n f(t, y)$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

Pour intégrer cette équation on fait le changement d'inconnue suivant  $y = ut$ , soit encore  $u = \frac{y}{t}$ ,  $t \in 0$  et donc

$$y'(t) = u(t) + tu'(t),$$

on remplace dans (1.1), on trouve

$$tu'(t) = g(u) - u(t),$$

c'est une équation à variable séparable qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{u'}{g(u) - u} = \frac{1}{t}.$$

### Équation différentielles linaires

**Définition 1.6.** On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 toute équation différentielle de la forme :

$$y' + p(t)y = q(t), \quad (1.2)$$

où  $p$  et  $q$  sont des fonctions continues.

L'équation homogène associée à (1,2) est

$$y' + p(t)y = 0. \quad (1.3)$$

### 1. Méthode de résolution d'équation homogène

$$\begin{aligned} y' + p(t)y = 0 &\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = -p(t)y \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(t)dt \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(t)dt \\ &\Leftrightarrow \ln |y| = -P(t) + c \end{aligned}$$

Avec  $P$  une primitive de  $p$ , donc les solutions générales de l'équation différentielle (1,3) sont les fonctions

$$y(t) = C \exp(-P(t)).$$

Où  $C$  est une constante.

## 2. Résolution de l'équation avec second membre

### • Méthode de résolution

*Pour résoudre une équation différentielle linéaire*

$$y' + p(t)y = q(t).$$

*On suit les étapes suivantes*

1. Résoudre l'équation homogène associée (calcul de primitive) :  $y' + p(t)y = 0$ .
2. Trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.
3. Ajouter la solution particulière ( $y_p$ ) à la solution générale

$$y = y_p + C \exp(-P(t)).$$

*La valeur de  $C$  sera déterminée par une condition initiale. Dans le cas où la solution particulière n'est pas claire, on utilise la méthode suivante :*

### • Méthode de la variation de la constante

*Pour déterminer la valeur de  $C$  par la méthode de la variation de la constante, on montre si  $y$  est solution de l'équation homogène et ne s'annule pas sur  $J$ , on peut chercher une solution particulière de la forme :*

$$y_p = C(t) \exp(-P(t)).$$

*Comme  $C(t)$  est dérivable, on a :*

$$y' = C'(t) \exp(-P(t)) - C(t)p(t) \exp(-P(t)),$$

*en reportant dans l'équation (1.2), on obtient*

$$C' \exp(-P(t)) = q(t),$$

*alors par l'intégration*

$$k(t) = \int q(t) \exp(P(t)) dt,$$

*la solution particulière est donc,*

$$y(t) = C(t) \exp(-P(t)) = \exp(-P(t)) \int q(t) \exp(P(t)) dt.$$

**Équations de Bernoulli :**

Ce sont les équations de la forme :

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

avec  $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues et  $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$  (pour  $\alpha = 1$ , (1.4) est linéaire).

On peut écrire (1.4) de la forme :

$$y^{(-\alpha)} \frac{dy}{dt} + p(t)y^{(1-\alpha)} = q(t),$$

on pose :  $z = y^{1-\alpha}$

$$\Rightarrow z' = (1 - \alpha)y' y^{(-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{1 - \alpha} = y' y^{(-\alpha)}(t)$$

on remplace dans (1.4), on obtient

$$\frac{z'}{1 - \alpha} + p(t)z = q(t). \quad (1.5)$$

On cherche une solution à l'équation (1.5), c'est une équation linéaire par rapport la variable  $z$ .

Alors nous recherchons une solution homogène et particulière.

- **La solution homogène**

On a

$$\frac{z'}{1 - \alpha} + p(t)z = 0.$$

On sépare les variables

$$\frac{dz}{z} = -p(t)(1 - \alpha)dt$$

on intègre

$$\int \frac{dz}{z} = -(1 - \alpha) \int p(t)dt.$$

Alors

$$z_h = C \exp((\alpha - 1) \int p(t)dt)$$

Où  $C$  est une constante.

• **La solution particulière**

On a

$$z_p = C(t) \exp((\alpha - 1) \int p(t) dt).$$

On calcule  $z_p'$ .

Ensuite, nous substituons  $z_p$  et  $z_p'$  dans l'équation (1.5), on trouve.

$$C(t) = \int q(t) \exp((-\alpha + 1) \int p(\tau) d\tau) dt.$$

Alors

$$z_p = \int q(t) \exp((-\alpha + 1) \int p(\tau) d\tau) dt \exp((\alpha - 1) \int p(t) dt)$$

la solution générale de l'équation (1.5) est

$$z = z_p + z_h.$$

Donc

$$z = \int q(t) \exp((-\alpha + 1) \int p(\tau) d\tau) dt \exp((\alpha - 1) \int p(t) dt) + C \exp((\alpha - 1) \int p(t) dt).$$

Et on a  $z = y^{1-\alpha} \Leftrightarrow y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ .

Alors la solution de l'équation de Bernoulli (1.4) est :

$$y = (\int q(t) \exp((-\alpha + 1) \int p(\tau) d\tau) dt \exp((\alpha - 1) \int p(t) dt) + C \exp((\alpha - 1) \int p(t) dt))^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

**Remarque 1.2.** Pour résoudre l'équation de **Bernoulli** on peut appliquer aussi le changement  $g=uv$ .

**Exemple 1.1.** Résoudre l'équation

$$ty' + y - ty^3 = 0 \tag{1.6}$$

on a pour

$$x \neq 0 : y' = -\frac{1}{t}y + y^3.$$

Ici,  $\alpha = 3$  on pose

$$z(x) = y^{-2}(t) = \frac{1}{y^2},$$

d'où

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(t)}} \text{ ou } y(x) = -\frac{1}{\sqrt{z(t)}}.$$

Intéressons nous au cas d'une condition initiale  $t = t_0$ , telle que  $y(t_0) > 0$ , i.e au cas

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{z(t)}} = z(t)^{-\frac{1}{2}}.$$

On obtient

$$y'(t) = -\frac{1}{2}z'(t)z(t)^{-\frac{3}{2}},$$

d'où

$$(1.6) \iff -\frac{1}{2}tz'(t)z(t)^{-\frac{3}{2}} + z(t)^{-\frac{1}{2}} + tz(t)^{-\frac{3}{2}} = 0,$$

alors

$$z'(t) = 2\frac{z(t)}{t} + 2.$$

Une solution particulière est  $z_p(t) = -2t$  est la solution homogène est  $z_h(t) = ct^2$ , d'où  $z(t) = ct^2 - 2t$ , et

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{ct^2 - 2t}}$$

lorsque la condition initial est donnée pour  $y(t_0) > 0$ , solution qui a un sens, soit sur  $I_1 = ]-\infty, \frac{2}{c}[$ , soit sur  $I_2 = ]\frac{2}{c}, +\infty[$  (suivant que  $t_0 \in I_1$  ou  $\in I_2$ ).

Lorsque la condition initial est donnée pour  $y(t_0) = 0$ , alors  $y(t) = 0$  pour tout  $t$  est solution.

## 1.2 Système d'équations différentielles

### 1.2.1 Système d'équations différentielles

**Définition 1.7.** Un système d'équations différentielles (Système Différentielle) est un système de la forme :

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(t, y_1, \dots, y_m) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, \dots, y_m) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_m' &= f_m(t, y_1, \dots, y_m) \end{cases}$$

On appelle solution on intégral de ces système un suite  $(y_1, \dots, y_m)$  de fonctions de finies et dérivable dans un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  telle que :

$$y_i = f(t, y_1, \dots, y_m), \quad i = 1, \dots, m.$$

### Système d'équations différentielle a' coefficients constants

**Définition 1.8.** Soit  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \text{ un vecteur de classe } C^K \text{ sur } I \text{ un intervalle de } \mathbb{R}.$$

Le **système linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et sans second membre est** :  $X'(t) = AX(t)$ .

Résoudre ce système, c'est trouver tous les vecteurs  $X(t)$  qui le vérifient.

**Exemple 1.2.** On résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z \end{cases}$$

Sa matrice est :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , et son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix},$$

donc

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 1) .$$

Et son valeurs propres est :

$$(2 - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 1) = 0.$$

On a donc trois valeurs propres distinctes  $2$ ,  $1+i$  et  $1-i$ . Par nécessité, on travaille pour le moment sur  $\mathbb{C}$ .

Et son vecteurs propres est :

on a

$$AX = \lambda X.$$

Donc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$$

$$\text{Si } \lambda = 2 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } \lambda = 1 - i \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } \lambda = 1 + i \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

sur  $\mathbb{C}$ , les solutions sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \exp((1+i)t) \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \exp((1-i)t) \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \exp(t) \begin{pmatrix} -\sin(t) + i \cos(t) \\ -\cos(t) - i \sin(t) \\ \cos(t) + i \sin(t) \end{pmatrix} + \gamma \exp(t) \begin{pmatrix} -\sin(t) - i \cos(t) \\ -\cos(t) + i \sin(t) \\ \cos(t) - i \sin(t) \end{pmatrix},$$

ce qui fait que sur  $\mathbb{R}$ , les solutions sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \exp(t) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c \exp(t) \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

### 1.2.2 Système non linéaire

**Définition 1.9.** Un système non linéaire est un système qui ne vérifie pas le principe de superposition. Son comportement est décrit par une équation (ou un système d'équations) différentielle non linéaire.

**Exemple 1.3.** Le système

$$\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + 5y(t) = 6u(t)$$

est non linéaire à cause du terme  $\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2$ .

## 1.3 Modélisation mathématique en biologie

La modélisation mathématique en biologie constitue aujourd'hui un instrument important dans la recherche en biologie. La modélisation sert à décrire une situation quantitative réelle du phénomène physique. La notion de modélisation émerge en biologie dans les années **1960-70** [1]. Et elle est devenue une étape clé de la recherche en biologie, car elle permet de mener une démarche expérimentale rigoureuse. La modélisation touche pratiquement toutes les branches de la biologie, notamment la propagation des épidémies, nous présentons dans la suite quelques modèles de la propagation des épidémies[4].

### 1.3.1 Modèle SIR

Ce modèle a été proposé en **1927** par deux chercheurs : **W.O.Kermack** et **A.G.Mckendrick**, leur méthode est encore à l'étude, il est largement utilisée dans la recherche en biologie [5].

Trois populations sont définies :

$S(t)$  : nombre d'individus sains

$I(t)$  : nombre d'individus malades

$R(t)$  : nombre d'individus retirés qui correspond à la population qui quitte le compartiment des infectés par guérison et immunisés contre la maladie, décès, etc.

Le modèle SIR s'écrit comme

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha.I(t).S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \alpha.I(t).S(t) - \beta.I(t) \\ \frac{dR}{dt} = -\beta.I(t) \end{cases}$$

Avec  $N$  : la population totale,  $N = S(t) + I(t) + R(t)$  et  $S(0) = S_0 > 0$ ,  $I(0) = I_0 > 0$  ce modèle est généralement utilisé pour décrire des maladies qui développent une immunité.

### 1.3.2 Modèle SIRD

Le modèle SIRD est un modèle développé par **William O.Kermack**, et **Anderson G.Mckendrick** à partir du modèle SIR, en ajoutant un autre inconnu c'est le nombre de décès [6]. Le modèle SIRD s'écrit comme

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{d(t)} &= -\frac{\beta S(t)I(t)}{N} \\ \frac{dI(t)}{d(t)} &= \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - (\gamma_1 + \gamma_2)I(t) \\ \frac{dR(t)}{d(t)} &= \gamma_1 I(t) \\ \frac{dD(t)}{d(t)} &= \gamma_2 I(t),\end{aligned}$$

où  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  et  $D(t)$  sont le nombre d'individus au temps  $t$  dans les classes de sensibles, infectés, guéris et décédés respectivement; alors que  $N$  est le nombre total d'individus dans la population. C'est-à-dire,  $N = S(t) + I(t) + R(t) + D(t)$ . Les valeurs initiales sont choisies comme étant  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$ , avec  $S_0 + I_0 = N$ , et  $R(0) = 0 = D(0)$ . Les paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont les taux d'infection.

---

# Résolution d'un modèle mathématique lié à COVID-19

---

Dans ce chapitre, nous présentons un modèle mathématique basé sur des équations différentielles ordinaires non linéaires pour étudier l'apparition de la nouvelle pandémie de coronavirus.

## 2.1 Modélisation du COVID-19

### 2.1.1 Modèle de Verhulst

Le premier modèle biologique non trivial utilisé pour le calcul et l'évolution temporelle d'une population de personnes a été créé en **1838** par **Verhulst** [8].

Il a proposé une approche basée sur la détermination de la population maximale pouvant être atteinte, en tenant compte de son développement passé et de son niveau actuel, ce maximum sera le chiffre de la population devenue stationnaire. Sa forme générale peut être exprimée. En faisant apparaître la vitesse de croissance comme une fonction décroissante du niveau atteint par la population :

$$\frac{du}{dt} = mu - nu^2$$

où  $m$  représente le taux de croissance instantané dans une situation où la croissance ne rencontre aucun obstacle,  $t$  le temps,  $u$  ( ou  $u(t)$  ) l'effectif de la population au temps  $t$ .

Le modèle de **Verhulst** peut-être utilisé pour calculer la population en tant que modèle pour calculer le nombre total de personnes infectées par le COVID-19.

Son modèle est généralement appelé la logistique modèle et a la forme (pour  $m=n=1$ )

$$\frac{du}{dt} = u(1 - u), \quad u(0) = N_0 > 0. \quad (2.1)$$

Nous résolvons l'équation (2.1) afin de trouver la solution générale du modèle logistique.

On a

$$\frac{du}{dt} = u(1 - u).$$

C'est une équation à variable séparable qui s'écrit sous la forme

$$\frac{du}{u(1 - u)} = dt.$$

En intégrant,

$$\int \frac{du}{u(1 - u)} = \int \frac{1}{u} du + \int \frac{1}{1 - u} du.$$

Et donc

$$\int \frac{1}{u} du + \int \frac{1}{1 - u} du = t + c$$

$$\ln(u) - \ln(1 - u) = t + c$$

$$\ln\left(\frac{u}{1 - u}\right) = t + c$$

$$\frac{u}{1 - u} = C \exp(t) \Leftrightarrow u = C \exp(t)(1 - u).$$

Où  $C$  est une constante réelle.

$$u(1 + C \exp(t)) = C \exp(t).$$

Alors

$$u(t) = \frac{C \exp(t)}{1 + C \exp(t)}. \quad (2.2)$$

Maintenant, nous recherchons  $C$  :

On calcule à partir de (2.2) la valeur de  $u$  en zéro.

$$u(0) = \frac{C}{1 + C},$$

donc

$$N_0 = \frac{C}{1 + C} \Leftrightarrow N_0 = C(1 - N_0),$$

enfin

$$C = \frac{N_0}{1 - N_0}.$$

On substitue la valeur de  $C$  dans (2.1).

Donc la solution exacte du modèle logistique (2.1) est

$$u(t) = \frac{N_0 \exp(t)}{1 + N_0(\exp(t) - 1)}.$$

Dans ce modèle trois scénarios différents pour l'évolution de la population sont proposés selon la valeur  $N_0$  [9]. Dans le modèle de **Verhulst** la fonction  $u(t)$  représente le nombre total de cas de COVID-19 définis jusqu'au jour  $t$  (pour tout nombre entier  $t$ ).

Nous supposons que le premier cas  $u_0$  était identifiés à  $t = 0$ . Évidemment, la fonction  $u(t)$  est non décroissante, par conséquent, nous allons prendre l'équation

$$\frac{du}{dt} = u(a - bu), \quad u(0) = u_0 \geq 0 \quad (2.3)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives.

On peut définir  $a$  comme  $a_0 S$ , où  $a_0 < 1$  est le taux d'infection et  $S$  est le nombre moyen de personnes en bonne santé, qui ont été en contact avec une personne régulièrement infectée (la soi-disant mécanisme de transmission du virus).

Il est clair que chaque personne infectée a eu des contacts avec un nombre limité de personnes (il s'agit généralement de parents et d'amis proches). Le terme  $bu$  a son effet contraire signifiant les personnes protégés par le gouvernement. Le paramètre  $B$  augmente avec la croissance de  $u(t)$ . En d'autres termes, des mesures doivent être prises pour stopper l'évolution de  $u(t)$ , sinon vous perdrez le contrôle du processus épidémique.

Par conséquent, nous supposons que  $B \approx bu^{1+\gamma}$  avec  $\gamma > 0$ , donc le terme  $bu^{1+\gamma}$  (ici  $b > 0$ ) conduisant à l'équation

$$\frac{du}{dt} = u(a - bu^\gamma), \quad u(0) = u_0 \geq 0. \quad (2.4)$$

**Remarque 2.1.** : Dans le cas  $\gamma = 1$ , l'équation (2.4) correspond à (2.3).

**Remarque 2.2.** :

- Dans le cas de  $b = 0$  (ne pas prendre de mesures préventives), alors  $\frac{du}{dt} = au$ , ce qui signifie que la maladie propage.
- Dans le cas de  $a = 0$ , alors  $\frac{du}{dt} = -bu^{\gamma+1}$  ce que signifie que la maladie a disparu.

On note que la non-linéarité dans (2.4) a été introduite par **Ayala, Gilpin et Ehrenfeldin** dans [10] pour décrire la compétition entre espèces, tant que l'équation logistique en épidémiologie se produit naturellement et apparaît sous forme générale selon les hypothèses de **Brauer** dans [11].

Pendant le processus épidémique, il existe deux possibilités pour les personnes infectées. La majorité, noté  $w$  se rétablit, tandis que certaines personnes, noté  $v$ , mourront. Évidemment, l'égalité

$$u = v + w. \quad (2.5)$$

Prendra place à tout moment  $t$ . Une équation typique pour l'évolution temporelle de  $v$  (voir la dernière équation dans le modèle SIR [5]) est

$$\frac{dv}{dt} = K(t)u, \quad v(0) = v_0 \geq 0. \quad (2.6)$$

Où  $v_0$  est le nombre de décès à  $t = 0$ .

**Remarque 2.3.** Ici le coefficient  $K(t) > 0$  reflète l'efficacité des soins de santé du système du pays (ou d'une région) concerné.

D'un point de vue mathématique, ce coefficient doit avoir le comportement asymptotique  $K(t) \rightarrow 0$ , si  $t \rightarrow \infty$ , sinon tous les malades mourront. Particulièrement, la formule utile pour le modèle  $K(t) = K_0 \exp(-\alpha t)$ ,  $\alpha > 0$  [14].

**Remarque 2.4.** : Une équation similaire à  $w$  peut être écrite mais il n'est pas nécessaire d'utiliser plus d'équations.

Nous précisons maintenant que le modèle (2.4) et (2.6) est construit sous des simplifications de base du processus épidémique impliqué.

En particulier, le modèle reconnaît implicitement que  $u \gg v$ , sinon les côtés droits des équations de base doivent inclure la fonction  $w$ .

La comparaison avec les données générales montre que la solution exacte du modèle (avec les paramètres spécifiés) conduit à des résultats en bon accord avec les données mesurées.

D'autre part, l'évolution des épidémies de COVID-19 dans de nombreux pays est critique car le taux de mortalité est plutôt très élevé, c'est-à-dire que l'hypothèse selon laquelle  $u \gg v$  est incorrecte. Par exemple,  $v \approx 0.14u$  dans l'Italie (au 5 Mai 2020)[14]. Dans de tels cas, le modèle (2.4)-(2.6) doit être généralisé comme suit.

$$\frac{du}{dt} = (u - v)(a - b(u - v)^\gamma), \quad u(0) = u_0 \geq 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{dv}{dt} = K(t)(u - v), \quad v(0) = v_0 \geq 0. \quad (2.8)$$

En effet, l'évolution temporelle de la fonction  $u$  ne peut pas dépendre des personnes infectées qui sont déjà mort. De même, le nombre de nouveaux décès ne peut pas dépendre des personnes déjà décédées. Compte tenu de l'égalité  $u - v = w$ , le modèle (2.7)-(2.8) est réduit à la forme

$$\frac{dw}{dt} = w(a - K(t) - bw^\gamma), \quad w(0) = w_0 = u_0 - v_0 \geq 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{dv}{dt} = K(t)w, \quad v(0) = v_0 \geq 0. \quad (2.10)$$

L'équation non linéaire (2.9) est l'équation connue de Bernoulli.

### 2.1.2 Lemme

La solution de problème (2.9) s'écrit comme

$$w(t) = \exp(at - \int_0^t K(\tau)d\tau) [w_0^{-\gamma} + b\gamma \int_0^t \exp(\gamma\tau a - \gamma \int_0^\tau K(y)dy)d\tau]^{-\frac{1}{\gamma}}. \quad (2.11)$$

#### Preuve

On résout le problème initiale (2.8) comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= w(a - K(t) - bw^\gamma) \\ \frac{dw}{dt} - w(a - K(t)) &= -bw^{\gamma+1} \end{aligned} \quad (2.12)$$

on multiplie les cotées de l'équation (2.12) par  $w^{-\gamma-1}$ .

Donc

$$w^{-\gamma-1} \frac{dw}{dt} - w^{-\gamma}(a - K(t)) = -b. \quad (2.13)$$

On suppose que

$$\begin{aligned} z &= w^{-\gamma} \\ \Rightarrow z' &= -\gamma w' w^{-\gamma-1} \\ \Rightarrow \frac{z'}{-\gamma} &= w' w^{-\gamma-1} \end{aligned}$$

en remplaçant dans l'équation (2.13), nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{z'}{-\gamma} - z(a - K(t)) &= -b \\ z' &= -\gamma z(a - K(t)) + \gamma b \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dt} + \gamma z(a - k(t)) = b\gamma. \quad (2.14)$$

On remarque (2.14) est une équation linéaire du premier ordre par rapport la variable  $z$ .  
On cherche d'abord une solution à l'équation homogène suivante :

$$\frac{dz}{dt} + \gamma z(a - k(t)) = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = -\gamma z(a - K(t)).$$

C'est une équation à variable séparable qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{dz}{z} = -\gamma(a - K(t))dt,$$

en intégrant, on trouve

$$\int \frac{dz}{z} = \int_0^t -\gamma a + \gamma K(t) dt$$

$$\ln(z) = -\gamma at + \gamma \int_0^t K(t) dt + c.$$

Alors la solution homogène s'écrit comme

$$z_h(t) = C \exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau),$$

maintenant, nous recherchons la solution particulière de l'équation suivante :

$$\frac{dz}{dt} + \gamma z(a - k(t)) = b\gamma,$$

on pose

$$z_p(t) = C(t) \exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau).$$

Alors

$$z_p'(t) = C'(t) \exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau) + C(t)(-\gamma a + \gamma K(t)) \exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau).$$

En remplaçant  $z_p$  et  $z_p'$  dans (2.14) alors

$$C'(t) \exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau) + C(t)(-\gamma a + \gamma K(t)) \exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau) + \gamma C(t) \exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau)(a - k(t)) = b\gamma.$$

Donc

$$C'(t) = \gamma b \exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau).$$

Par intégration

$$C(t) = b\gamma \int_0^t \exp(\gamma at - \gamma \int_0^t K(y) dy) d\tau.$$

Alors

$$z_p(t) = b\gamma \int_0^t [\exp(\gamma at - \gamma \int_0^t K(y) dy) d\tau] [\exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau)].$$

Et on a

$$z(t) = z_p(t) + z_h(t).$$

Alors

$$z(t) = C \exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau) + b\gamma \int_0^t (\exp(\gamma at - \gamma \int_0^t K(y) dy) d\tau) (\exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau)). \quad (2.15)$$

Maintenant, nous recherchons  $C$ .

On a d'après l'équation (2.15)

$$z(0) = C.$$

Et d'autre part on a

$$z(t) = w^{-\gamma} \Leftrightarrow z(0) = w_0^{-\gamma}.$$

Donc

$$C = w_0^{-\gamma}.$$

Alors

$$z(t) = w_0^{-\gamma} \exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau) + b\gamma \int_0^t (\exp(\gamma at - \gamma \int_0^t K(y) dy) d\tau) (\exp(-\gamma at + \gamma \int_0^t K(\tau) d\tau)).$$

Et on a

$$z(t) = w^{-\gamma} \Leftrightarrow w = z^{-\frac{1}{\gamma}},$$

donc

$$w = \exp(at - \int_0^t K(\tau) d\tau) [w_0^{-\gamma} + b\gamma \int_0^t \exp(\gamma \tau a - \gamma \int_0^t K(y) dy) d\tau]^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Est la solution de l'équation (2.9)

### 2.1.3 Lemme

La solution de problème (2.10) s'écrit comme

$$v(t) = \int_0^t K(\tau)w(\tau)d\tau + v_0. \quad (2.16)$$

#### Preuve

On résout le problème initiale (2.10) comme suit :

On a :

$$\frac{dv}{dt} = K(t)w.$$

C'est une équation à variable séparable qui s'écrit sous la forme :

$$dv = K(t)w(t)dt.$$

On intègre

$$v(t) = \int_0^t K(\tau)w(\tau)d\tau + c.$$

Maintenant nous recherchons  $c$ .

On a  $v(0) = v_0$ .

Et d'autre part on a  $v(0) = c$  alors  $c = v_0$ .

donc

$$v(t) = \int_0^t K(\tau)w(\tau)d\tau + v_0.$$

### 2.1.4 Proposition

Si  $K(t) = K_0 \exp(-\alpha t)$  (voir remarque (2.3) ) dans (2.10), la solution  $u(t)$  s'écrit comme

$$u(t) = K_0 \int_0^t \exp(-\alpha\tau)w(\tau)d\tau + v_0 + w(t). \quad (2.17)$$

#### Preuve

On a d'après (2.5)

$$u(t) = w(t) + v(t)$$

donc

$$u(t) = w(t) + \int_0^t K(\tau)w(\tau)d\tau + v_0. \quad (2.18)$$

Bien entendu, les calculs ultérieurs dépendent essentiellement de la forme du coefficient  $K(t)$  en particulier, en posant  $K(t) = k_0 \exp -\alpha t$ ,  $\alpha > 0$  on obtient

$$\begin{aligned} w(t) &= \exp(at - \int_0^t K_0 \exp(-\alpha\tau)d\tau)[w_0^{-\gamma} + b\gamma \int_0^t \exp(\gamma a\tau - \gamma \int_0^t K_0 \exp(-\alpha y)dy)]^{-\frac{1}{\gamma}} \\ w(t) &= \exp(at + \frac{K_0}{\alpha} \exp(-\alpha t) - \frac{K_0}{\alpha})[w_0^{-\gamma} - b\gamma \int_0^t \exp(\gamma\tau a + \frac{\gamma K_0}{\alpha} \exp(-\alpha\tau) - \frac{\gamma K_0}{\alpha})d\tau]^{-\frac{1}{\gamma}} \\ w(t) &= \exp(at + \frac{K_0}{\alpha} \exp(-\alpha t))[w_0^{-\gamma} \exp(\frac{\gamma K_0}{\alpha}) - b\gamma \int_0^t \exp(\gamma\tau a + \frac{\gamma K_0}{\alpha} \exp(-\alpha\tau))d\tau]^{-\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t K_0 \exp(-\alpha\tau)w(\tau)d\tau + v_0 \\ v(t) &= K_0 \int_0^t \exp(-\alpha\tau)w(\tau)d\tau + v_0. \end{aligned}$$

Donc

$$u(t) = K_0 \int_0^t \exp(-\alpha\tau)w(\tau)d\tau + v_0 + w(t).$$

Nous allons discuter les forme des solutions (2.9) et (2.10) selon d'autres valeurs du coefficient  $K$  qui représentent des situations particulières.

### 2.1.5 Le premier cas

On pose  $K=1$ .

Nous remplaçons la valeur de  $K=1$  dans (2.11), nous trouvons

$$\begin{aligned} w(t) &= [\exp(at - \int_0^t 1d\tau)][w_0^{-\gamma} + b\gamma \int_0^t \exp(\gamma a\tau - \gamma \int_0^t 1dy)d\tau]^{-\frac{1}{\gamma}} \\ w(t) &= \exp(at - t)[w_0^{-\gamma} + b\gamma \int_0^t \exp(\gamma a\tau - \gamma\tau)d\tau]^{-\frac{1}{\gamma}}, \end{aligned}$$

donc

$$w(t) = \frac{\exp(a-1)t}{[w_0^{-\gamma} + b\gamma \int_0^t \exp((\gamma a - \gamma)\tau)d\tau]^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

Enfin

$$w(t) = \frac{\exp(a-1)t}{[w_0^{-\gamma} + \frac{b}{a-1}(\exp(\gamma(a-1)t) - 1)]^{\frac{1}{\gamma}}}. \quad (2.19)$$

Nous remplaçons aussi la valeur de  $K=1$  dans (2.16), nous trouvons

$$v(t) = v_0 + \int_0^t w(\tau) d\tau$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{\exp(a-1)\tau}{[w_0^{-\gamma} + \frac{b}{a-1} \exp(\gamma(a-1)\tau) - 1]^{\frac{1}{\gamma}}} d\tau$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \exp((a-1)\tau) [w_0^{-\gamma} + \frac{b}{a-1} \exp(\gamma(a-1)\tau) - 1]^{-\frac{1}{\gamma}} d\tau$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t [\exp(-(a-1)\tau\gamma) w_0^{-\gamma} + \frac{b}{a-1} - \exp(-(a-1)\tau\gamma)]^{-\frac{1}{\gamma}} d\tau.$$

Alors

$$v(t) = v_0 - \frac{\gamma(a-1)(\exp(\gamma(a-1)t))}{w_0^{-\gamma} - 1} \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} (\exp(-\gamma(a-1)t)) (w_0^\gamma - 1) + \frac{b}{a-1} \right]^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}}. \quad (2.20)$$

Nous remplaçons la valeur des solutions (2.19) et (2.20) dans l'équation (2.5), nous trouvons.

$$u(t) = \frac{\exp((a-1)t)}{[w_0^{-\gamma} + \frac{b}{a-1}(\exp(\gamma(a-1)t) - 1)]^{\frac{1}{\gamma}}} - \frac{\gamma(a-1) \exp(\gamma(a-1)t)}{w_0^{-\gamma} - 1} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} (\exp(-\gamma(a-1)t) (w_0^{-\gamma} - 1 + \frac{b}{a-1})) \right)^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}} + v_0$$

$$u(t) = \frac{\exp((a-1)t)}{[w_0^{-\gamma} + \frac{b}{a-1}(\exp(\gamma(a-1)t) - 1)]^{\frac{1}{\gamma}}} - \left[ \frac{(a-1) \exp(\gamma(a-1)t)}{w_0^{-\gamma} - 1} \left( \frac{\gamma^{2\gamma-1}}{(\gamma-1)^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}}} \right) \exp(-(a-1)t(-1+\gamma)) (w_0^{-\gamma} - 1 + \frac{b}{a-1})^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}} \right] + v_0.$$

Donc

$$u(t) = \left( \frac{1}{w_0^{-\gamma} + \frac{b}{a-1}(\exp(\gamma(a-1)t) - 1)^{\frac{1}{\gamma}}} - \frac{(a-1)\gamma^{2\gamma-1}(w_0^{-\gamma} - 1 + \frac{b}{a-1})^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}}}{(w_0^{-\gamma} - 1)(\gamma-1)^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}}} \right) \exp((a-1)t) + v_0. \quad (2.21)$$

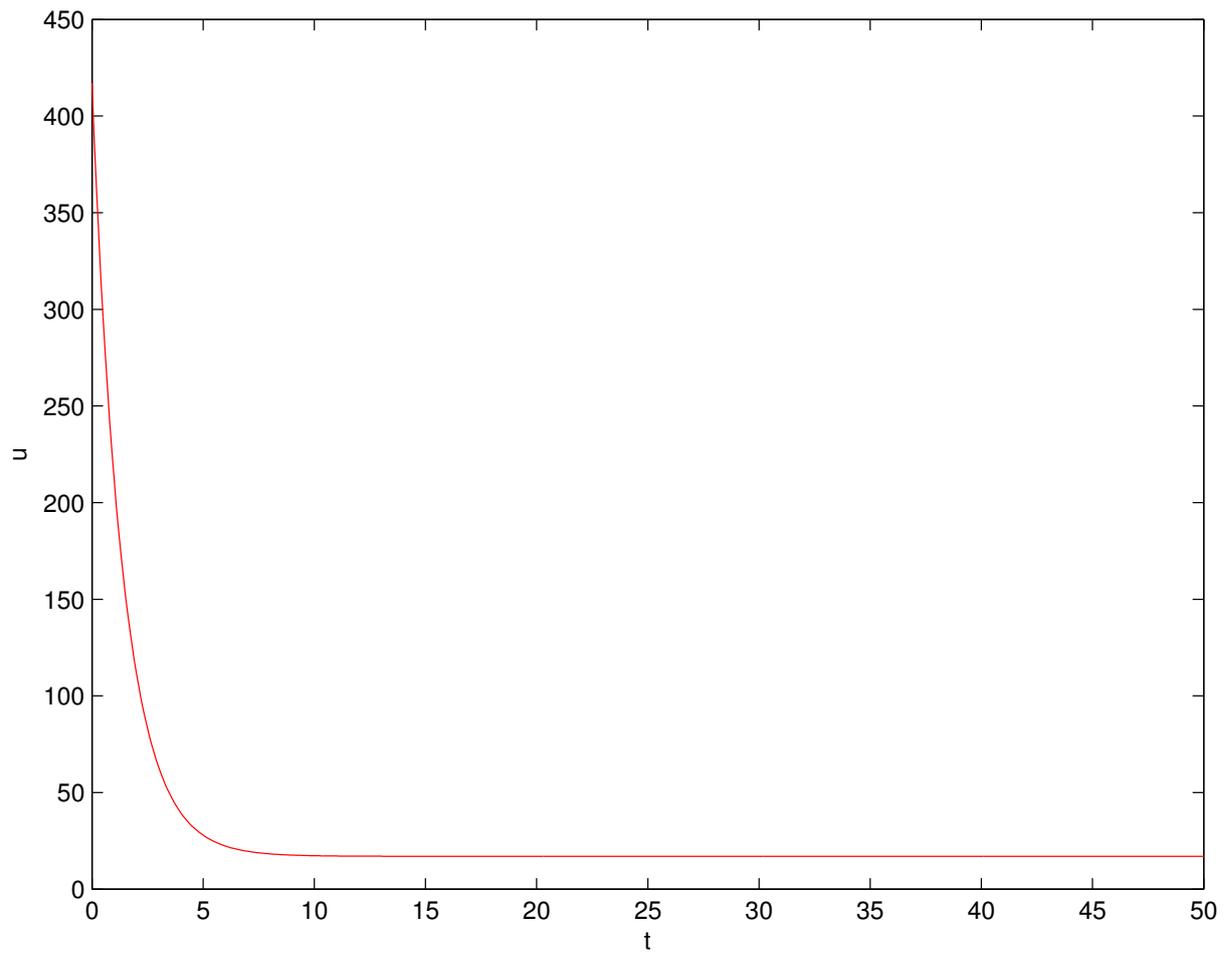


FIGURE 2.1: La solution  $u(t)$  (2.21) dans le cas  $K = 1$ , représente le nombre d'infecté total qui tend vers 0.

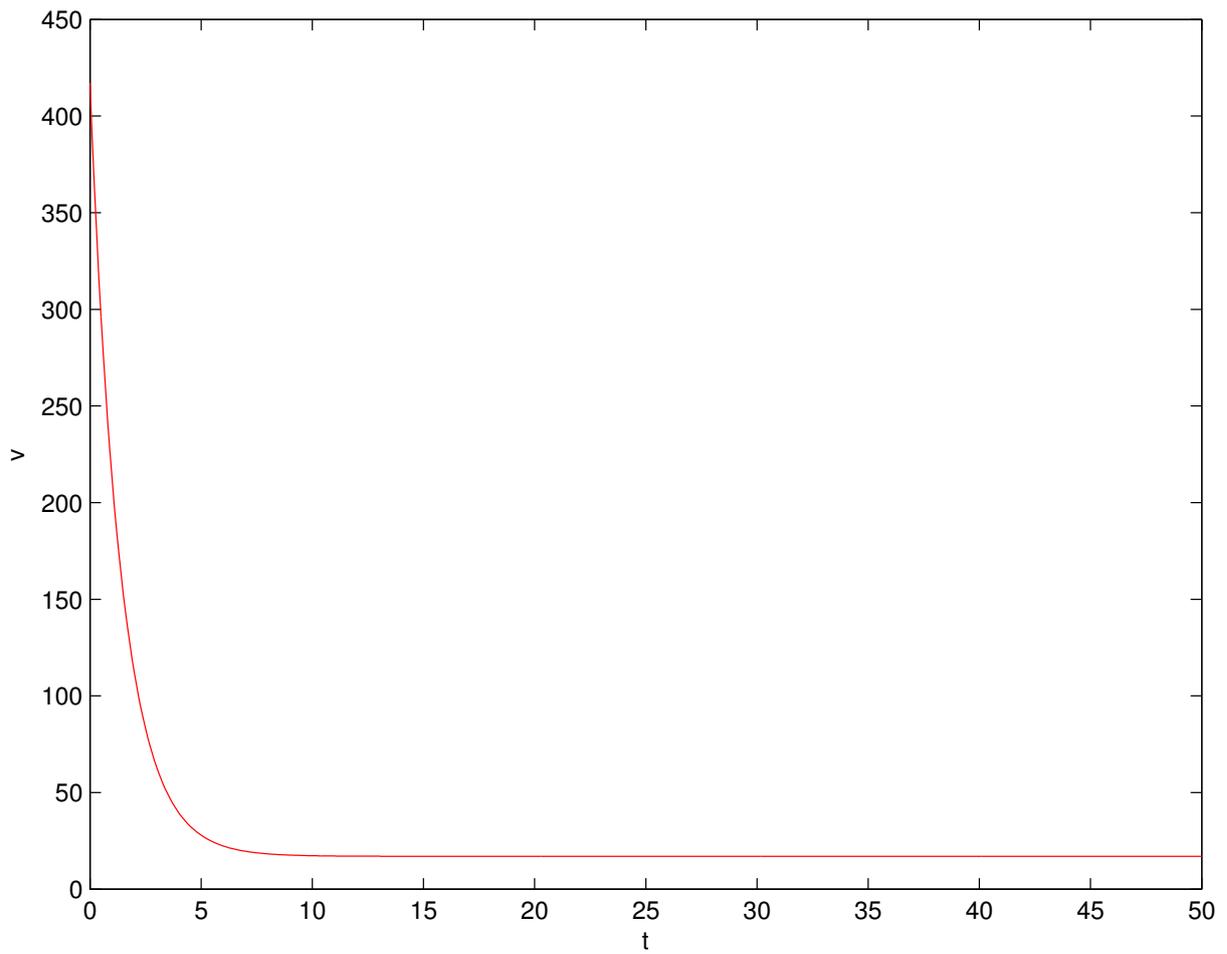


FIGURE 2.2: La solution  $v(t)$  (2.20) dans le cas  $K = 1$ , représente le nombre de décès qui tend vers 0.

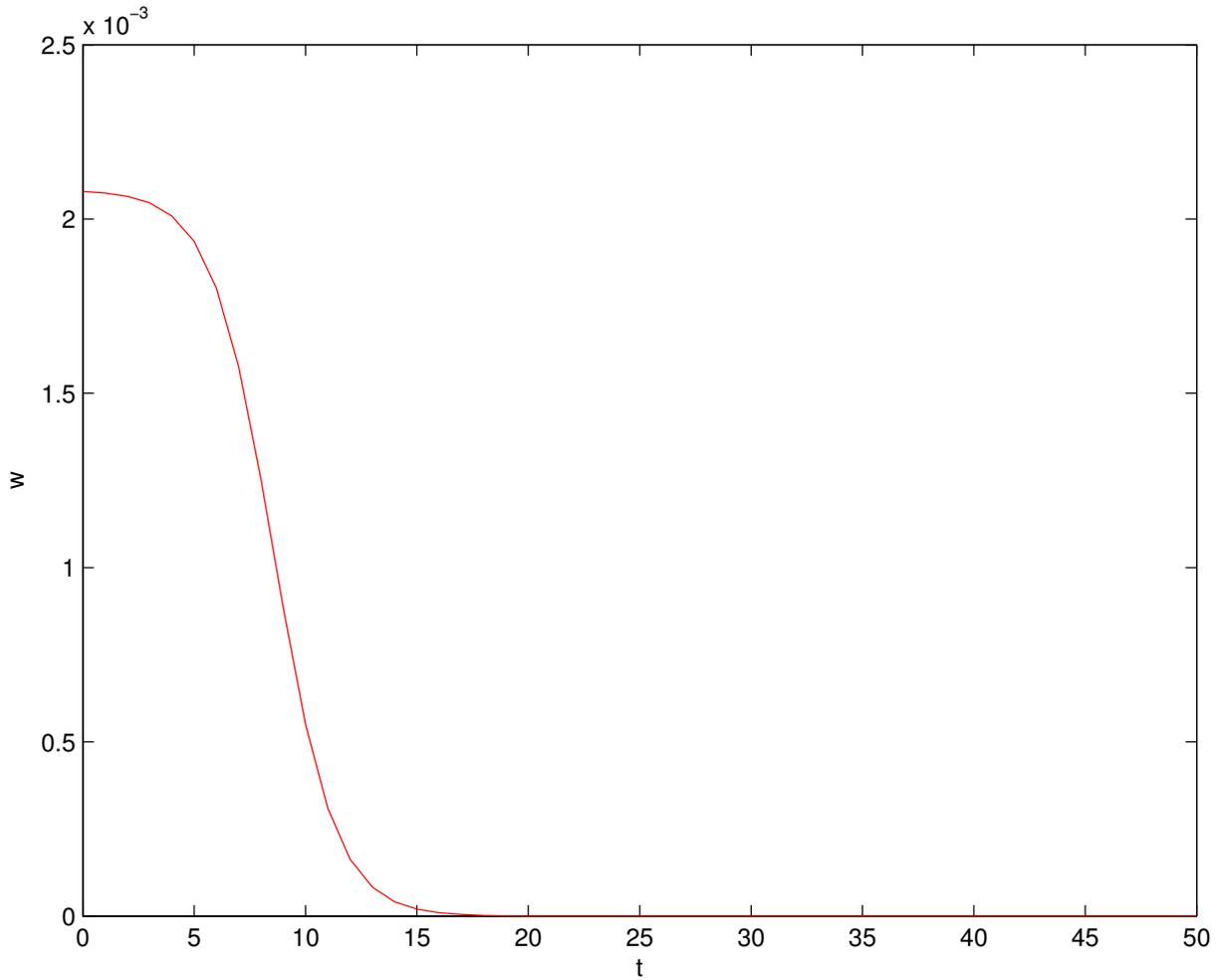


FIGURE 2.3: La solution  $w(t)$  (2.19) dans le cas  $K = 1$ , représente le nombre d'infecté qui tend vers 0 .

**Remarque 2.5.** *Ce choix ( $K=1$ ) ne représente pas la réalité, il décrit une situation où tous les infectés sont morts.*

### 2.1.6 Le deuxième cas

Dans le second cas, on prend  $K = \frac{1}{t}$  qui satisfait la condition suivante : si  $t \rightarrow 0$  alors  $K \rightarrow \infty$ .

Nous remplaçons la valeur de  $K = \frac{1}{t}$  dans l'équation (2.11), nous trouvons.

$$w(t) = \exp\left(at - \int_0^t \frac{1}{\tau} d\tau\right) \left(w_0^{-\gamma} + b\gamma \int_0^t \exp(\gamma a\tau - \gamma \int_0^t \frac{1}{y} dy) d\tau\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$$

$$w(t) = \exp\left(at - \ln(t) + \ln(0)\right) \left(w_0^{-\gamma} + b\gamma \int_0^t \exp(\gamma a\tau - \gamma(\ln(t) - \ln(0))) d\tau\right)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Donc

$$w(t) = (\exp(at) \times t \times 0) (w_0^{-\gamma} + b\gamma \int_0^t \exp(\gamma a\tau) (t^{-\gamma} \times 0) d\tau)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Nous obtenons

$$w(t) = 0. \quad (2.22)$$

Nous remplaçons la valeur de  $K = \frac{1}{t}$  dans l'équation (2.16), nous trouvons

$$v(t) = v_0. \quad (2.23)$$

Nous remplaçons l'équation (2.23) et (2.22) dans l'équation (2.5), nous trouvons

$$u(t) = v_0. \quad (2.24)$$

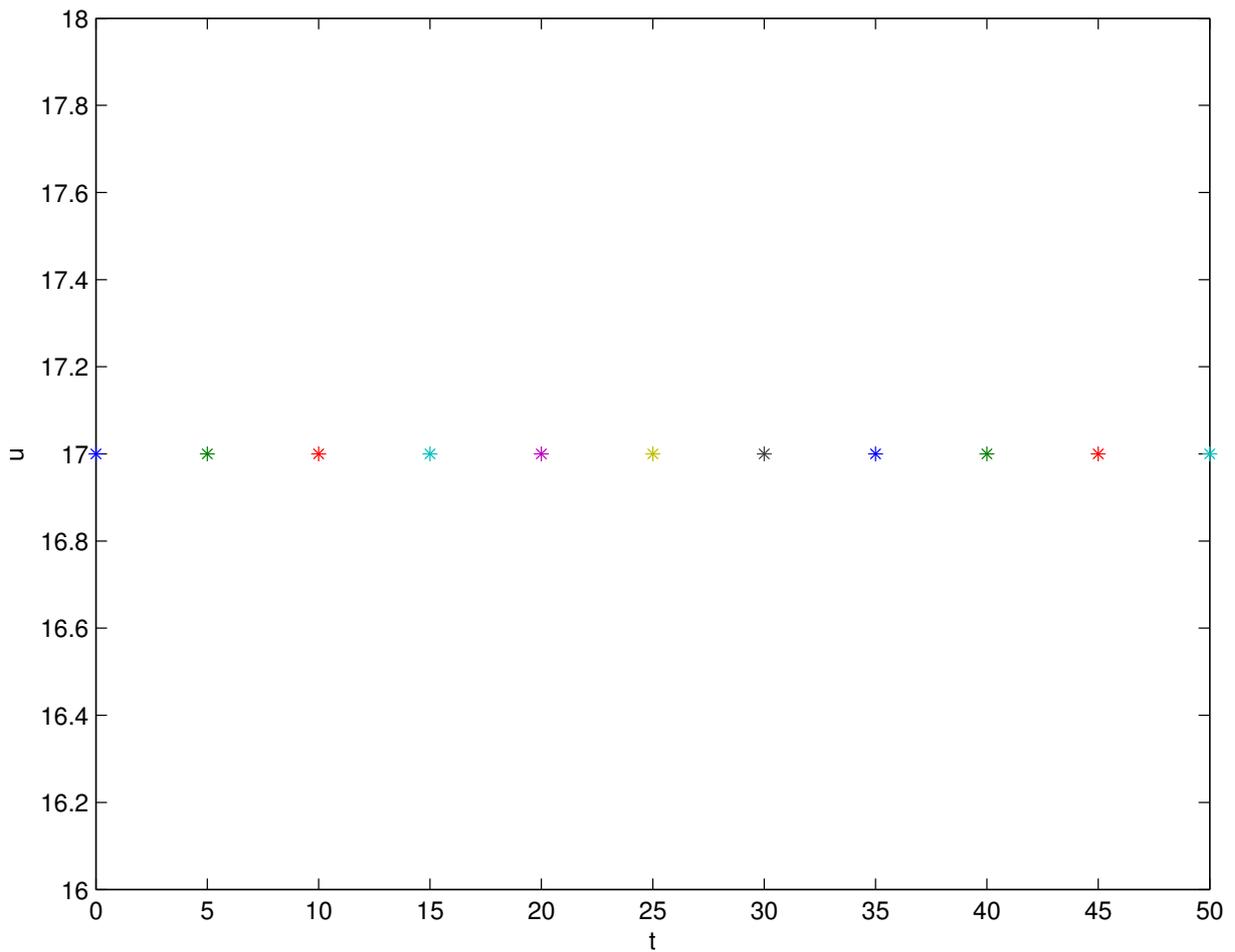


FIGURE 2.4: Solution  $u(t)$  (2.23) dans le cas  $K = \frac{1}{t}$ , représente le nombre de d'infecté total.

**Remarque 2.6.** *On note à travers ce deuxième cas ( $K = \frac{1}{t}$ ), le décès de toutes les personnes infectées par le virus.*

### Conclusion

*Nous concluons que les valeurs de  $K$  que nous avons choisies ne sont pas fiables et que  $K(t) = K_0 \exp(\alpha t)$  est le meilleur choix.*

# Application

Dans ce chapitre, nous allons présenter une application du modèle que nous avons étudié dans chapitre 2 en s'inspirant des travaux de [14].

Nous prenons l'exemple de l'épidémie de COVID-19 en Chine.

## 3.1 Application pour L'épidémie de COVID-19 en Chine

Dans le cas de la chine, le modèle qu'on va considérer est de la forme (2.3) et (2.6) qui correspond à la valeur de  $\gamma = 1$ , dans ce cas les solutions exactes du modèle (avec des paramètres correctement définis) conduisent à des résultats, qui correspondent avec les données mesurées en Chine. La solution générale de l'équation (2.3) est bien connue, de sorte que l'équation (2.6) avec la fonction donnée  $K(t)$  peut être facilement intégrée.

Donc, en posant  $K(t) = K_0 \exp(-\alpha t)$ ,  $\alpha > 0$ , on arrive à la valeur exacte de solution du modèle (2.3) et (2.6).

### 3.1.1 Lemme

Pour  $K(t) = K_0 \exp(-\alpha t)$  la solution  $u(t)$  de l'équation (2.3) s'écrit comme

$$u(t) = \frac{au_0 \exp(at)}{a + u_0 b(\exp(at) - 1)}. \quad (3.1)$$

**Preuve**

On a

$$\frac{du}{dt} = u(a - bu).$$

C'est une équation à variable séparable qui s'écrit sous la forme

$$du = u(a - bu)dt.$$

En intégrant

$$\int \frac{du}{u(a - bu)} = \int_0^t dt. \quad (3.2)$$

Alors

$$\int \frac{1}{ua} + \int \frac{b}{a(a - bu)} = \int dt$$

$$\frac{1}{a} \ln(au) - \frac{1}{a} \ln(a(a - bu)) = at + c$$

$$\frac{1}{a} (\ln(\frac{au}{a(a - bu)})) = t + c$$

$$\left(\frac{u}{a - bu}\right)^{\frac{1}{a}} = C \exp(t)$$

où  $C$  un nombre réel.

On a donc

$$\frac{u}{a - bu} = C \exp(at)$$

$$u(t) = aC \exp(at) - buC \exp(at)$$

$$u(1 + bC \exp(at)) = aC \exp(at)$$

$$u(t) = \frac{aC \exp(at)}{1 + bC \exp(at)}. \quad (3.3)$$

On cherche  $C$ .

On calcule la solution pour (3.3) en  $t = 0$

$$u(0) = \frac{ac}{1 + bc}$$

$$u_0(1 + bC) = aC$$

$$u_0 = (a - u_0b)C$$

$$C = \frac{u_0}{a - u_0b}.$$

Donc on remplace  $C$  dans (3.3), on trouve cette solution

$$u(t) = \frac{au_0 \exp(at)}{a + u_0b(\exp(at) - 1)}.$$

### 3.1.2 Proposition

Si  $K(t) = K_0 \exp(-\alpha t)$  la solution  $v(t)$  du l'équation (2.6) s'écrit comme

$$v(t) = au_0k_0 \int_0^t \frac{\exp(a - \alpha)\tau}{a + bu_0(\exp(at) - 1)} d\tau + v_0. \quad (3.4)$$

**Preuve**

On a

$$\frac{dv}{dt} = K(t)u. \quad (3.5)$$

On remplace (3.1) dans (3.5), obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= K_0 \exp(-\alpha t) \left( \frac{au_0 \exp(at)}{a + bu_0(\exp(at) - 1)} \right) \\ v(t) &= au_0k_0 \int_0^t \frac{\exp(a - \alpha)\tau}{a + bu_0(\exp(at) - 1)} d\tau + C. \end{aligned}$$

On calcule  $v(0)$ , pour trouver  $C$

$$v(0) = C.$$

D'où

$$C = v_0.$$

Donc

$$v(t) = au_0k_0 \int_0^t \frac{\exp(a - \alpha)\tau}{a + bu_0(\exp(at) - 1)} d\tau + v_0.$$

**Remarque 3.1.** L'intégrale dans (3.4) conduit à une expression impliquant la fonction spéciale **LerchPhi**  $(y, c, v) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(v+n)^c}$  [14], qui ne peut pas être exprimée en termes de fonctions élémentaires pour des paramètres  $\alpha$  et  $a$ . Cependant, cela peut être fait dans certains cas spécifiques. Par exemple, on obtient

$$v(t) = \frac{2K_0\sqrt{u_0}}{\sqrt{b(a - bu_0)}} \left( \arctan\left(\frac{\sqrt{bu_0}}{\sqrt{a - bu_0}} \exp\left(\frac{at}{2}\right)\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{bu_0}}{\sqrt{a - bu_0}}\right) \right) + v_0 \quad (3.6)$$

dans le cas :  $2\alpha = a$ .

### 3.1.3 Lemme

Pour  $\gamma \neq 1$ , la solution exacte  $u(t)$  de l'équation (2.4) s'écrit comme

$$u(t) = a^{\frac{1}{\gamma}} u_0 \exp(at) (bu_0^\gamma (\exp(a\gamma t) - 1) + a)^{-\frac{1}{\gamma}}. \quad (3.7)$$

**Preuve**

On a

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u(a - bu^\gamma) \\ \frac{du}{dt} - au &= -bu^{\gamma+1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

On multiplie (3.8) par  $u^{-\gamma-1}$ .

On trouve

$$u' u^{-\gamma-1} - au^{-\gamma} = -b. \quad (3.9)$$

On pose

$$z = u^{-\gamma}.$$

D'où

$$\begin{aligned} z' &= -\gamma u' u^{-\gamma-1} \\ \frac{z'}{-\gamma} &= u' u^{-\gamma-1}. \end{aligned}$$

On remplace  $z$  et  $z'$  dans (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{z'}{\gamma} - az &= -b \\ z' + a\gamma z &= b\gamma \\ \frac{dz}{dt} + a\gamma z &= b\gamma. \end{aligned} \quad (3.10)$$

On cherche  $z_h$  :

$$\frac{dz}{dt} + a\gamma z = 0.$$

C'est une équation à variable séparable qui s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} dz &= -a\gamma z dt \\ \int \frac{dz}{z} &= \int_0^t -a\gamma dt \\ \ln(z) &= -a\gamma t + l. \end{aligned}$$

Alors

$$z_H(t) = L \exp(-a\gamma t).$$

D'autre part, on cherche  $z_p$ .

$$z_p(t) = L(t) \exp(-a\gamma t)$$

$$\dot{z}_p(t) = L'(t) \exp(-a\gamma t) + (-a\gamma) \exp(-a\gamma t) L(t)$$

on remplace  $z_p$  et  $\dot{z}_p$  dans (3.10), on trouve

$$L'(t) \exp(-a\gamma t) + (-a\gamma) \exp(-a\gamma t) L(t) + a\gamma L(t) \exp(-a\gamma t) = b\gamma.$$

Alors

$$L'(t) \exp(-a\gamma t) = b\gamma$$

$$L'(t) = b\gamma \exp(a\gamma t)$$

$$L(t) = b\gamma \int_0^t \exp(a\gamma t) dt$$

$$L(t) = b\gamma \left( \frac{1}{a\gamma} \exp(a\gamma t) - \frac{1}{a\gamma} \right).$$

D'où

$$L(t) = \frac{b}{a} (\exp(a\gamma t) - 1).$$

Donc

$$z_p(t) = \frac{b}{a} (\exp(a\gamma t) - 1) \exp(-a\gamma t),$$

et on a

$$z(t) = z_p + z_H.$$

Donc

$$z(t) = \frac{b}{a} (\exp(a\gamma t) - 1) \exp(-a\gamma t) + L \exp(-a\gamma t).$$

On multiplie  $z$  par  $\frac{a}{a}$

$$z(t) = \frac{a}{a} \left( \frac{b}{a} (\exp(a\gamma t) - 1) \exp(-a\gamma t) + L \exp(-a\gamma t) \right).$$

Et on a

$$z = u^{-\gamma}.$$

Donc

$$u(t) = a^{\frac{1}{\gamma}} u_0 \exp(at) (bu_0^\gamma (\exp(a\gamma t) - 1) + a)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

### 3.1.4 Proposition

Si  $K(t) = K_0 \exp(-\alpha t)$  et  $\gamma \neq 1$ , la solution  $v(t)$  de l'équation (2.6) s'écrit comme

$$v(t) = K_0 u_0 \int_0^t \exp((a - \alpha)t) ((bu_0^\gamma (\exp(a\gamma t) - 1) + a)^{-\frac{1}{\gamma}}) dt + v_0. \quad (3.11)$$

#### Preuve

On a

$$\frac{dv}{dt} = K(t)u$$

$$dv = K(t)u dt.$$

On remplace (3.7) dans (3.5)

$$dv = K_0 \exp(-\alpha t) (a^{\frac{1}{\gamma}} u_0 \exp(at) (bu_0^\gamma (\exp(a\gamma t) - 1) + a)^{-\frac{1}{\gamma}}) dt$$

$$v(t) = K_0 u_0 \int_0^t \exp((a - \alpha)t) ((bu_0^\gamma (\exp(a\gamma t) - 1) + a)^{-\frac{1}{\gamma}}) dt + C_1$$

$C_1$  est nombre réel, d'où

$$v(0) = v_0 = C_1.$$

Donc

$$v(t) = K_0 u_0 \int_0^t \exp((a - \alpha)t) ((bu_0^\gamma (\exp(a\gamma t) - 1) + a)^{-\frac{1}{\gamma}}) dt + v_0.$$

Nous devons maintenant spécifier tous les paramètres dans (3.1) et (3.4) en utilisant les données de l'épidémie de COVID-19 en Chine. Nous supposons dès le début que  $\gamma = 1$ , c'est-à-dire que le modèle (2.3) et (2.6) est appliqué. Pour valider notre modèle, on utilise les données officielles présentées par le gouvernement chinois avant le 17 Avril 2020 [10]. Nous fixons 22 Janvier à  $t = 0$  et immédiatement obtenir  $u_0 = 571$  et  $v_0 = 17$ . Le paramètre  $b$  peut être trouvé à partir du comportement asymptotique connu de la fonction  $u(t)$  dans (3.1) et les informations de [12], ainsi  $b = \frac{a}{80000}$ . L'intervalle plausible pour le paramètre est estimé numériquement par [14] en utilisant MAPLE. Ainsi, il a été prouvé numériquement que  $a \in [0.25, 0.30]$ .

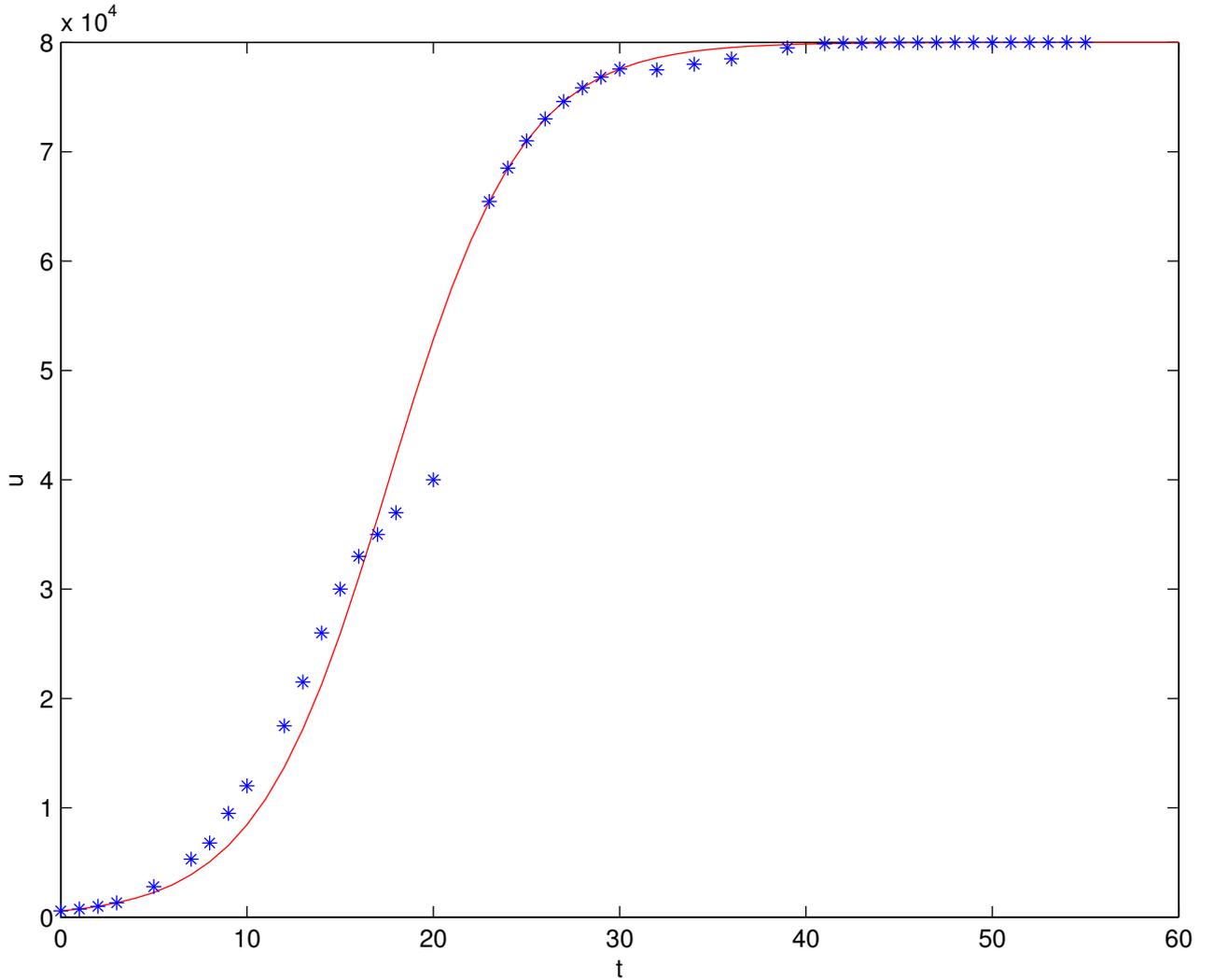


FIGURE 3.1: La comparaison de la solution exacte  $u(t)$  (3.1) avec  $a = 0.28$ ,  $b = \frac{7}{2000000}$ ,  $u_0 = 571$ , (courbe rouge) et les données mesurées des cas de COVID-19 en Chine (étoiles bleues), la valeur  $t=20$  correspond à la date de 11 Février.

Pare ce que la fonction  $v(t)$  devrait être une fonction monotone non décroissante (on rappelle qu'elle est le nombre total de décès), nous concluons que  $a > \alpha$ . Il a été identifié qu'un bon choix est  $4\alpha = a$ . Enfin, le coefficient  $K_0$  a été trouvé à partir de la formule

$$v|_{t=T} \equiv 571K_0 \int_0^T \frac{\exp(0.21)}{1 + \frac{571}{80000}(\exp(0.28) - 1)} d\tau + 17 = V$$

(ici  $v$  est le nombre total de décès dans le temps  $t = T$  présenté dans [12]) pour la valeur fixe de  $a = 0.28$ , la valeur du coefficient  $K_0$  varie lentement de 0.0092385 à 0.0096878 si  $T$  est changé de 65 à 45, respectivement. Ainsi, la valeur  $K_0 = 0.0094$  a été choisie. Les Fig.3.1 et Fig.3.2 représentent la comparaison des résultats obtenus à partir du modèle (2.3)

et (2.6) (avec les paramètres spécifiés ci-dessus) et les données mesurées pour l'épidémie de COVID-19 en chine [12]. On peut noter qu'il ya un bon accord entre le nombre total de cas de COVID -19 et celui prédit par notre modèle. Bien sûr, on peut affirmer que l'exactitude n'est pas suffisamment bon dans l'intervalle  $t \in [10, 25]$  de la Fig.3.1 cependant, nous supposons que soit la méthode de mesure des cas de COVID-19 qui a été corrigée, on un pic imprévisible de tels cas se sont produits vers la date  $t = 25$  (il ya un saut de 44653 cas le 11 Février à 58761 cas le 12 Février [12]).

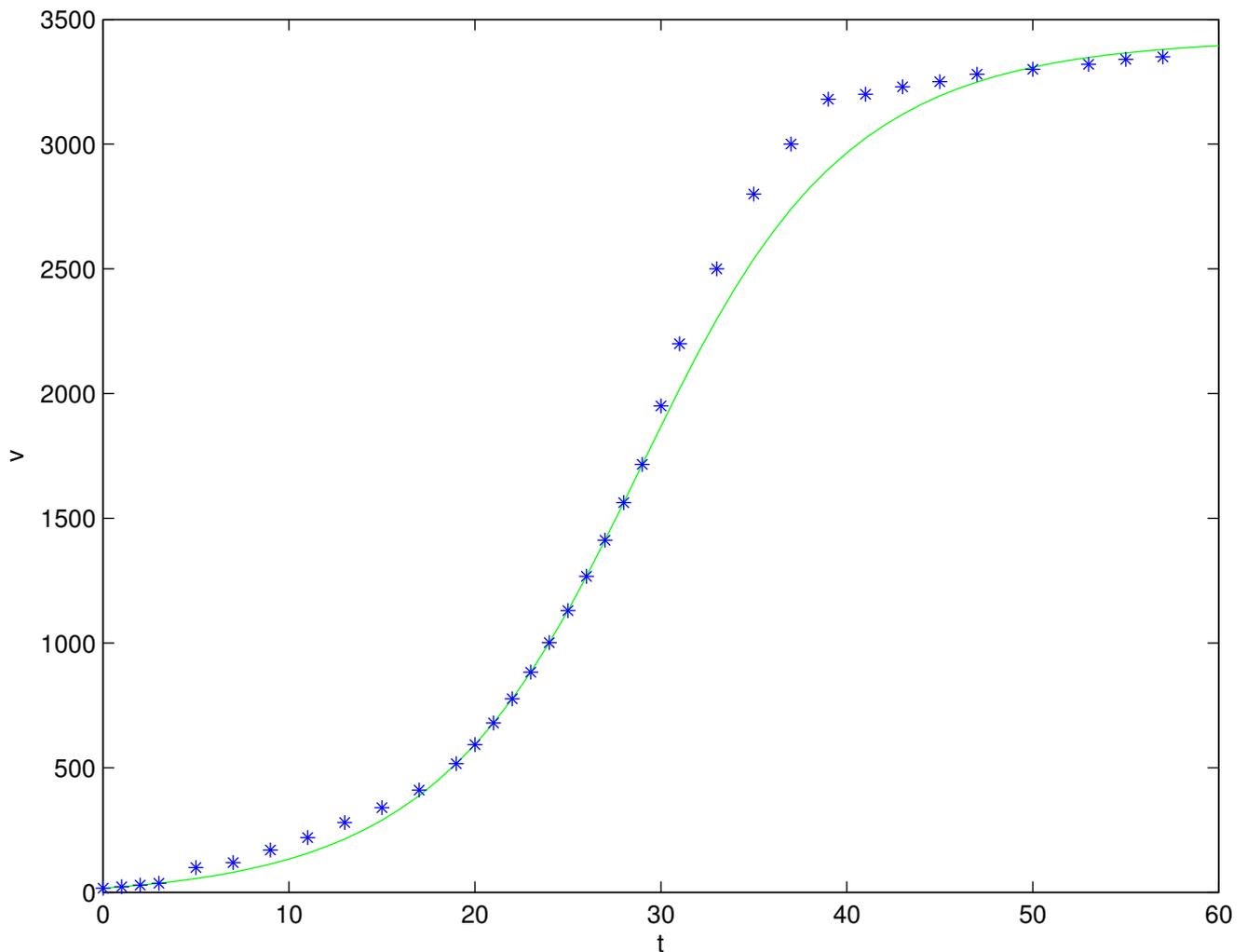


FIGURE 3.2: La comparaison de la solution exacte  $v(t)$  (3.4) avec  $a=0.28$ ,  $b = \frac{7}{2000000}$ ,  $u_0 = 571$ ,  $K_0 = 0.0094$ ,  $\alpha = 0.07$ ,  $v_0 = 17$ (courbe vert ) et les données mesurées du nombre total de décès cas en chine (étoiles bleues).

La comparaison entre le nombre total de décès et celui prédit par notre modèle montre cette exactitude est suffisamment bonne pour tout moment (voir Fig 3.2.). On peut aussi remarquer que la fonction  $v(t)$  continue d'augmenter au-delà du temps  $t = 60$ . Un tel comportement reflète la situation réelle dans le processus épidémique, à savoir : certaines personnes mourront même en l'absence de nouveaux cas de COVID-19, car ils ont été infectés plus tôt. Ainsi, le nombre final de décès sera fixé plus tard que celui des cas de COVID-19. Il convient de noter que le paramètre  $\gamma$  joue un rôle essentiel si l'on utilise l'équation (2.4) au lieu d'équation (2.3). Afin de mettre cela en évidence, nous présentons la solution exacte de l'équation (2.4) avec différentes valeurs de  $\gamma$  sur la Figure 3.3 (tous les autres paramètres sont les mêmes que sur la figure 3.3). On peut voir que  $\gamma = 1$  est un bon choix dans le cas de la Chine. D'autre part, en tenant compte des données connues [12], nous concluons que  $\gamma < 1$  dans le cas de nombreux autres pays (voir la section suivante).

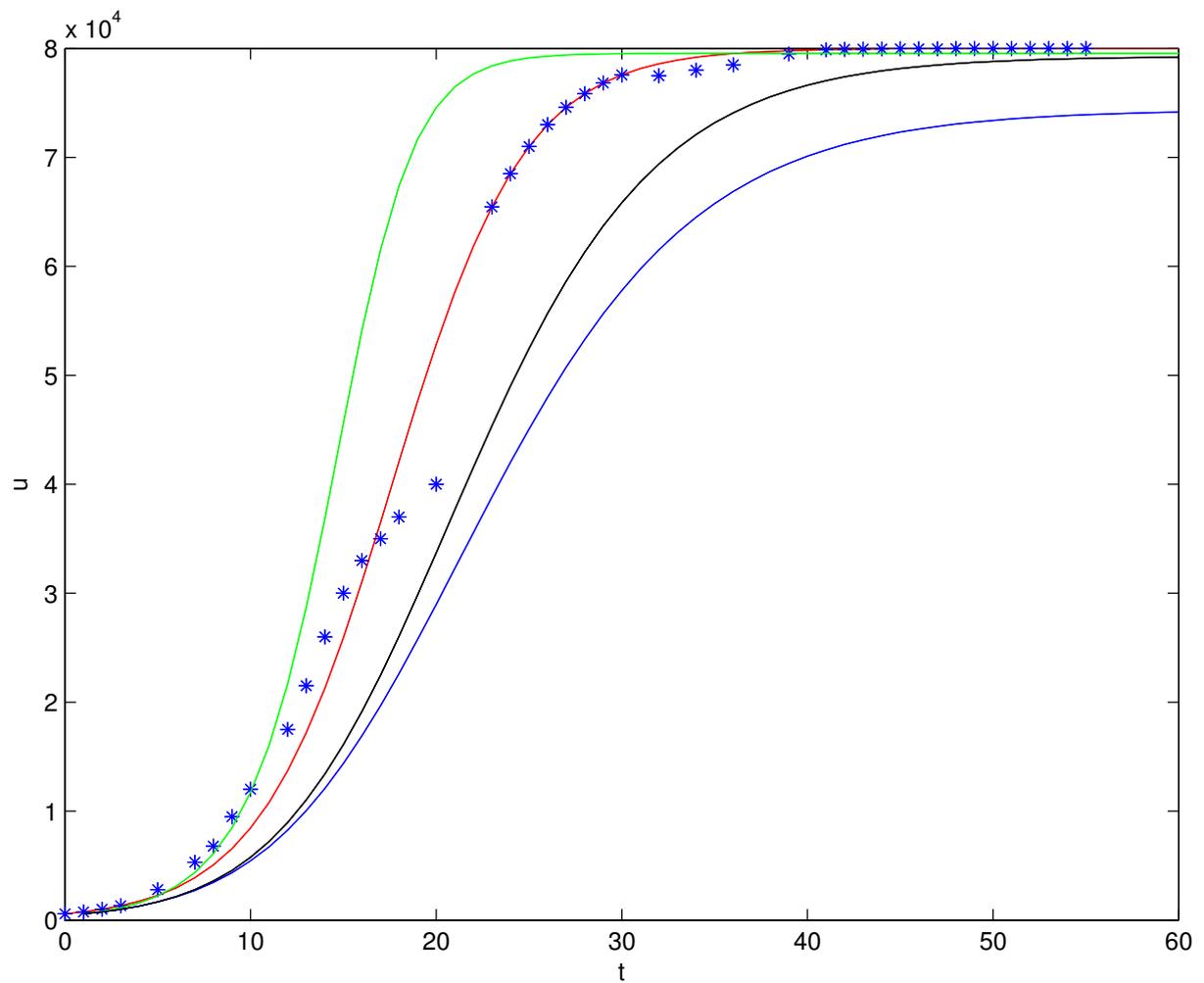


FIGURE 3.3: La solution  $u(t)$  de l'équation (2.4) pour  $\gamma = 0.3$  (courbe bleue),  $\gamma = 0.5$  (courbe noire),  $\gamma = 1.5$  (courbe verte) et les données mesurées des cas de COVID-19 en chine (étoiles bleues).

---

# Discussion

---

Dans ce travail, un modèle mathématique est proposé pour la description quantitative de l'épidémie du nouveau coronavirus COVID-19 en Chine. Bien que le modèle soit relativement simple, la comparaison avec les données énumérées dans [12] montre que la solution analytique du modèle (avec les paramètres correctement spécifiés) conduit aux résultats, qui sont en bon accord avec les données mesurées.

Certaines recommandations bien connues découlent naturellement du modèle. Il découle de la solution exacte (3.1) qu'il faut réduire le coefficient  $a = a_0 S$  autant que possible. Signifie que le nombre de contacts  $S$  doit être minimisé. D'autre part, le gouvernement devrait faire plus d'efforts (pour fermer les magasins, les restaurants, pour restreindre le trafic des transports, etc), afin pour augmenter la fonction  $B(u)$ . Ces efforts devraient s'accroître avec l'augmentation du nombre total des cas de COVID-19.

Les restrictions gouvernementales ne peuvent être levées qu'à la condition que le nombre de nouveaux cas de COVID-19 par jour a déjà commencé à diminuer de jour en jour. Cela signifie mathématiquement que la dérivée du second ordre de la fonction  $u(t)$  prend une valeur négative. Afin de trouver le nombre dit critique  $u^*$ , nous analysons la fonction  $u(t)$  de (3.1). Calcul de la dérivée du second ordre.

On a

$$u(t) = \frac{au_0 \exp(at)}{a + bu_0(\exp(at) - 1)}.$$

On Calcule de la dérivée du première ordre de  $u(t)$

$$u'(t) = \frac{a^2 u_0 \exp(at)(a + bu_0(\exp(at) - 1)) - (bu_0 a \exp(at))(au_0 \exp(at))}{(a + bu_0(\exp(at) - 1))^2}.$$

Alors

$$u''(t) = \frac{a^3 u_0 \exp(at) - bu_0^2 a^2 \exp(at)}{(a + bu_0(\exp(at) - 1))^2}$$

$$u''(t) = \frac{(a^3 u_0 \exp(at) - bu_0^2 a^2 \exp(at))(a(a + bu_0(\exp(at) - 1)) - 2bu_0 a \exp(at))}{(a + bu_0(\exp(at) - 1))^3}$$

$$u''(t) = \frac{(a^3 u_0 - bu_0^2 a^2) \exp(at)(a^2 + bu_0 a \exp(at) - bu_0 a - 2bu_0 a \exp(at))}{(a + bu_0(\exp(at) - 1))^3}$$

$$u''(t) = \frac{(a^3 u_0 - bu_0^2 a^2) \exp(at)(a^2 - bu_0 a - bu_0 a \exp(at))}{(a + bu_0(\exp(at) - 1))^3},$$

on obtient

$$u''(t) = \frac{(a^4 u_0 - bu_0^2 a^3) \exp(at)(a - bu_0 - bu_0 \exp(at))}{(a + bu_0(\exp(at) - 1))^3}$$

$$u''(t) = \frac{u_0 a^3 (a - bu_0) \exp(at)(a - bu_0 - bu_0 \exp(at))}{(a + bu_0 \exp(at) - bu_0)^3}$$

En résolvant l'équation algébrique  $u''(t) = 0$  par rapport au temps, on arrive à :

$$u''(t) = \frac{u_0 a^3 (a - bu_0) \exp(at^*)(a - bu_0 - bu_0 \exp(at^*))}{(a + bu_0 \exp(at^*) - bu_0)^3} = 0.$$

Alors

$$u_0 a^3 (a - bu_0) \exp(at^*)(a - bu_0 - bu_0 \exp(at^*)) = 0.$$

Donc

$$\exp(at^*)(a - bu_0 - bu_0 \exp(at^*)) = 0.$$

D'où

$$a - bu_0 - bu_0 \exp(at^*) = 0 \Leftrightarrow at^* = \ln\left(\frac{a - bu_0}{bu_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow t^* = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a}{bu_0} - 1\right)$$

d'où  $u^* = u(t^*)$ . D'autre part, la formule  $u'' = 0$  permet de trouver le paramètre  $b$  fourni. Le temps  $t^*$  est connu à partir des données mesurées. En supposant que  $a$  est connu, on calcule

$$u_0 a^3 (a - bu_0) \exp(at^*)(a - bu_0 - bu_0 \exp(at^*)) = 0.$$

Alors

$$a - bu_0 - bu_0 \exp(at^*) = 0$$

$$bu_0 - bu_0 \exp(at^*) = a.$$

Donc

$$b = \frac{a}{u_0 - u_0 \exp(at^*)}. \quad (3.12)$$

D'une manière assez similaire, on peut obtenir les formules analogues en utilisant la solution exacte (3.7) du modèle (2.4) et (2.6). Ces formules ont la forme.

$$t^* = \frac{1}{\gamma a} \ln\left(\frac{a}{b\gamma u_0^\gamma} - \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$b = \frac{a}{u_0^\gamma (\gamma \exp(a\gamma t^*) + 1)}.$$

**Remarque 3.2.** D'après (3.1) et (3.7) la solution  $u(t)$  équivalent  $u(t) \approx u_0 \exp(at)$ . Le paramètre  $a$  est fixé selon les données expérimental cela veut dire que notre solution permet de prédire le nombre total de cas de COVID-19.

Si les données pour  $t^*$  et  $u^*$  sont connues. Prenons l'exemple de l'Autriche. Le nombre maximal de nouveaux cas quotidien a été enregistré le 26 Mars. Donc,  $u^* = 6909$ . Si nous fixons le 8 Mars comme point initial  $t = 0$ , alors  $t^* = 18$  et  $u_0 = 104$ . Maintenant, nous faisons une approximation des cas de COVID-19 mesurés à l'aide de la formule  $u(t) \approx 104 \exp(at)$  au cours des 15 premiers jours. Il paraît que le paramètre  $a = 0,27$  fournit une très bonne approximation au cours des 12 premiers jours (voir Fig. 3.4). Ainsi, en utilisant la formule (3.12), nous définissons  $b = 0,000020$ . Donc, nous pouvons prédire que le nombre total de cas de COVID-19 en Autriche devrait être  $u_{max} = \frac{a}{b} \approx 13500$ .

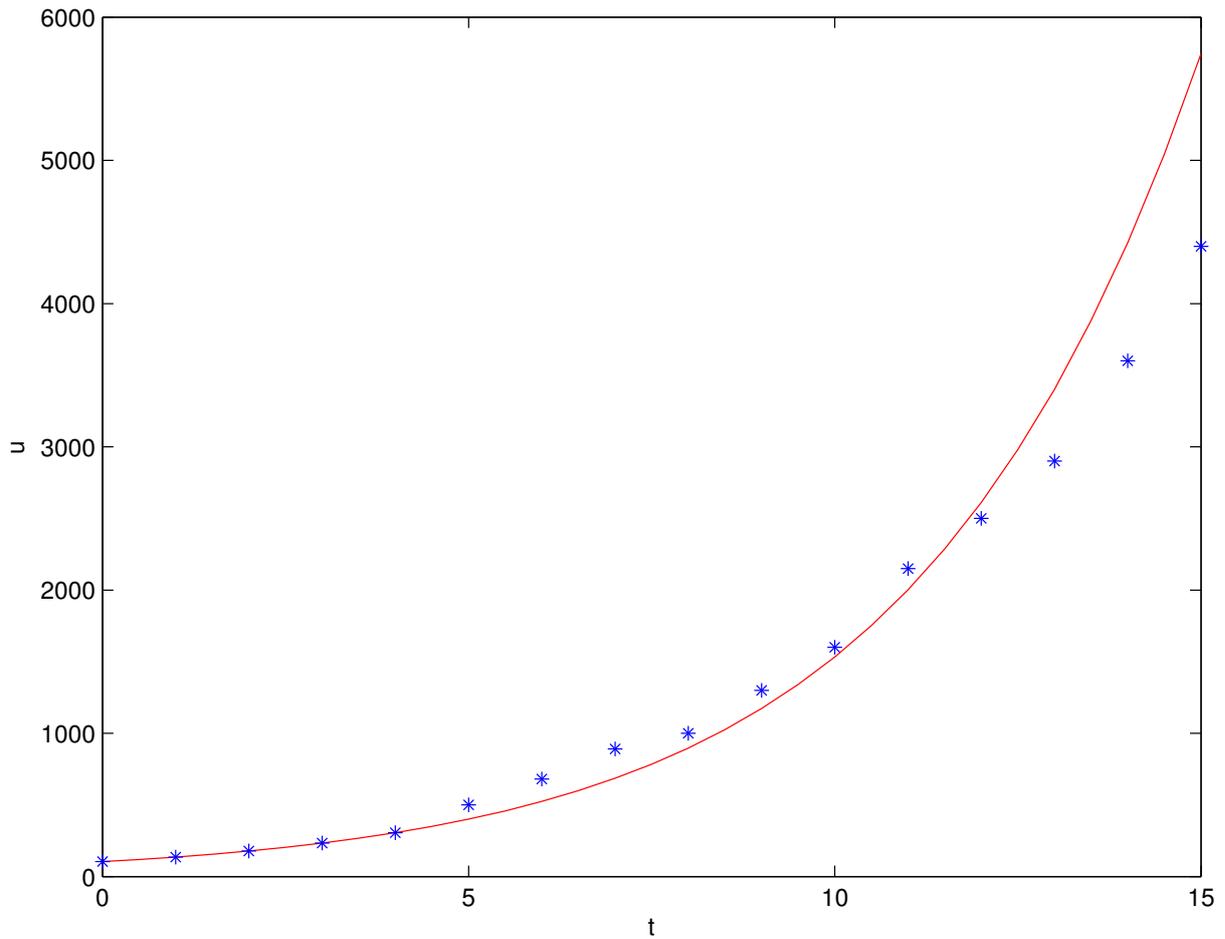


FIGURE 3.4: Une croissance exponentielle du nombre totale de cas de COVID-19 en Autriche au stade initial de la propagation du coronavirus (courbe rouge ) et les données mesurées (points bleues).

## Perspectives

*Une généralisation des équations de notre modèle peut être formulé comme suit [15].*

$$\begin{cases} \frac{\partial(u)}{\partial(t)} = d_1 \Delta u + u(a - bu^\gamma), \\ \frac{\partial(v)}{\partial(t)} = d_2 \Delta u + k(t)u, \end{cases} \quad (3.13)$$

*où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace,  $d_1$  et  $d_2$  sont des diffusions, les fonctions  $u(t, x, y)$  et  $v(t, x, y)$  sont des analogues de  $u(t)$  et  $v(t)$ . Bien sûr, le modèle généralisé basé sur le système de (3.13) et les conditions aux limites pertinentes (par exemple, les conditions de flux*

zéro à la frontière) sont beaucoup plus compliqué et ne peut pas être résolu analytiquement contrairement au modèle (2.3) et (2.6).

Ici, nous notons seulement que la première équation en (3.13) avec  $\gamma = 1$  est l'équation de **Fisher** classique [16]. On peut remarque que le système (3.13) peut être essentiellement simplifié en supposant que  $d_1 = d_2 = d$  à la forme (ici  $w = u - v$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u)}{\partial(t)} &= d \Delta u + u(a - bu^\gamma), \\ \frac{\partial(w)}{\partial(t)} &= u(a - bu^\gamma) - k(t)u.\end{aligned}$$

---

# Conclusion

---

*Un modèle mathématique simple a été proposé pour une étude visant à étudier l'épidémie du nouveau virus COVID-19 sur la base d'équations différentielles non linéaires. Basé sur le modèle **Verhulst**, qui décrit l'évolution d'une population totale pour calculer la population totale. Le modèle étudié est proposé par [14] qui est constitué de deux équations, la première de type **Bernoulli** que nous avons résolu complètement et la deuxième est une équation d'état.*

*Les résultats ont montré que la solution exacte au modèle obtenu conduit à bonne cohérence avec les résultats mesurés de COVID-19 en Chine, sans simulation numérique longue et complexe.*

*Le modèle nous a également montré l'importance d'appliquer les règles de quarantaine en COVID-19, et l'importance d'éviter tout contact avec des personnes infectés avec ce virus COVID-19.*

---

# Bibliographie

---

- [1] Shao, N.; Zhong, M.; Yan, Y.; Pan, H.; Cheng, J.; Chen, W. *Dynamic models for Coronavirus Disease 2019 and data analysis. Math. Meth. Appl. Sci.* 2020, 43, 4943–4949. [CrossRef] [PubMed]
- [2] Peng, L.; Yang, W.; Zhang, D.; Zhuge, C.; Hong, L. *Epidemic analysis of COVID-19 in China by dynamical modeling. arXiv* 2020, arXiv :2002.06563.
- [3] Affane, D. *Cours sur les Équation Différentielle. Université de Jijel.* 2015.
- [4] Mousset, S. *Biologie et Modélisation. France.* 2009.
- [5] fatima Zohra, Y. *Mise en place d'un système d'information décisionnel pour le suivi et la prévention des épidémies . Université d'oran ahmed ben bella.* (2016).
- [6] Brum, Arthur A and Duarte-Filho, Gerson C. *A comparative analysis between a SIRD compartmental model and the Richards growth model. Trends in Computational and Applied Mathematics.* 2021.
- [7] Efimov, D.; Ushirobira, U. *On Interval Prediction of COVID-19 Development Based on a SEIR Epidemic Model; Research Report; Inria Lille Nord Europe—Laboratoire CRISTAL—Université de : Lille, France,* 2020.
- [8] Verhulst, P.F. *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement.. Corr. Math. Phys.* 1838, 10, 113
- [9] Cherniha, R.; Davydovych, V *Nonlinear Reaction-Diffusion Systems—Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications in Biology; Lecture Notes in Mathematics 2196; Springer : Cham, Switzerland,* 2017.
- [10] Ayala, F.J.; Gilpin, M.E.; Ehrenfeld, J.G. *Competition between species : Theoretical models and experimental tests. Theor. Pop. Biol.* 1973, 4, 331–356. [CrossRef]
- [11] Brauer, F.; Castillo-Chavez, C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology; Springer :New York, NY, USA,* 2012.

- 
- [12] Available online : <https://www.worldometers.info/coronavirus> ,(accessed on 1 May 2020).
- [13] Cherniha, R. ; Davydovych, V A mathematical model for the COVID-19 outbreak. arXiv 2020, arXiv :2004.01487v2
- [14] Cherniha, Roman and Vasyl' Davydovych A Mathematical Model for the COVID-19 Outbreak and Its Applications *Symmetry* **6**,2020,12.
- [15] Cherniha, Roman and Davydovych, Vasyl',A mathematical model for the coronavirus COVID-19 outbreak arXiv preprint arXiv :2004.01487, 2020.
- [16] Fisher, R.A. The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics.* 1937, 7, 353–369. [CrossRef]
- [17] Murray, J.D. *Mathematical Biology*; Springer : Berlin, Germany, 1989.
- [18] Cherniha,R. ; Serov, M. ; Pliukhin, O. *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations : Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications*; Chapman and Hall/CRC : New York, NY, USA, 2018.

---

## Abstract

*The work proposed in this thesis consists in analyzing and studying a model of differential equations describing an evolution of the COVID-19 pandemic.*

*The study consists of demonstrating or looking for explicit solutions for these models, with a possible comparative study to be carried out with real data.*

**keywords :** *Nonlinear mathematical model - modeling infectious - exact solution.*

---

## Résumé

*Le travail proposé dans ce mémoire consiste à analyser et étudier un modèle d'équations différentielles décrivant une évolution de pandémie COVID-19.*

*L'étude consiste à démontrer ou chercher des solutions explicites pour ces modèles, avec une éventuelle étude comparative à réaliser avec des données réelles.*

**mots-clés :** *Nonlinear mathematical model - modeling infectious - exact solution.*

## ملخص

يتكون العمل المقترح في هذه الأطروحة من تحليل ودراسة نموذج للمعادلات التفاضلية التي تصف تطور جائحة COVID – 19.

تتكون الدراسة من إظهار أو البحث عن حلول واضحة لهذه النماذج ، مع إمكانية إجراء دراسة مقارنة مع بيانات حقيقية.

الكلمات المفتاحية: نموذج رياضي غير خطي - نمذجة معدية - حل دقيق.