REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et applications

Thème

Les solutions de viscosité des équations aux dérivées partielles

Présentée par :

M^{elle} DJEDILI Rima

Devant le jury composé de :

Dr	Arioua Yacine,	Université de M'sila	**Président**.
Pr	Benhamidouche Noureddine ,	Université de M'sila	**Encadreur**.
Dr	Bounab Noura ,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2019/2020

Table des matières

Dédicace

Ce travail est dédié

À mon cher père qui a toujours cru en moi et a mis a ma disposition tous les moyens nécessaires pour que je réussisse dans mes études.

À ma chère mère : que je ne cesse de remercier pour tout ce quelle ma donné. Elle ma supporté dans son ventre 9 mois. QuAllah le récompense pour tous ces bienfaits.

À mes très chers frères et surs Tarek, Abd el rahman, Nabil, Samira, Hadda, Halima ,ahlam : je ne peux exprimer travers ses lignes tous mes sentiments damour et de tendresse envers vous. Puisse lamour et la fraternité nous unissent jamais. Je vous souhaite la réussite dans votre vie, avec tout le bonheur quil faut pour vous combler. Merci pour votre précieuse aide la réalisation de ce travail.

*À*mes chèrs amis : En souvenir des moments agréables passés ensemble, veuillez trouver dans ce travail lexpression de ma tendre affection et mes sentiments les plus respectueux avec mes voeux de succes, de bonheur et de bonne santé.

A tous ceux ou celles qui me sont chers et que jai omis involontairement de citer.

A tous Mes enseignants tout au long de mes études.

A tous ceux qui ont participé de près ou de loin la réalisation de ce travail. tous ceux qui ont cette pénible tche de soulager les gens et diminuer leurs souffrances.

Remerciements

Je remercie Allah, Le tout puissant, Le Miséricordieux, qui nous a donne lopportunité de mener bien ce travail. Jexprime ma gratitude, mes remerciements mes parents qui ont fait de leur mieux pour maider.
Cest avec un grand plaisir que, jadresse mes sincères remerciements mon encadreur, Monsieur noureddine.benhamidouche pour ces conseils et son suivi durant la réalisation de mon travail.
Je tiens remercie également les nombres du jury qui ont bien voulu dexaminer ce travail.
Je remercie également les nombreux professeurs du département mathématique et informatique.
Mes remerciements aussi tous mes professeurs qui ont contribué mon information.
Je ne terminai pas sans avoir exprimé des remerciements envers toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire nous nous intéressons aux solutions de viscosité des équations aux dérivées partielles, nous avons commencé par donner des généralités sur les équations aux dérivées partielles.
En suite, nous donnons la défnition de solution de viscosité du problème

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

Et enfin, nous étudions l'unicité et l'existence des solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi sous certaines hypothèses.

Mots clés : Equation elliptique , Solution de viscosité, équation de Hamilton-Jacobi,existence,unicité la Solution.

Abstract

In this memory we are interested by the solution of viscosity and partial differential equations, we had started by giving generalities about the partial differential equations. Then, we had giving the definition of solution of viscosity of problems

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

Finally, we had study the unicity and existence of solution of viscosity of equations which refer to Hamilton-Jacobi by using certain hypotheses.

Keywords : Elliptical equation, Viscosity solution, Hamilton-Jacobi equation, existence, uniqueness the Solution.

ملخـــص:

في هذه المذكـرة نحن مهتمون بحلول اللزوجة للمعادلات التفاضلية الجزئية ، بدأنا بإعطاء العموميات في المعادلات التفاضلية الجزئية

بعد ذلك ، نقدم تعريف حل اللزوجة للمشكلة :

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

وأخيرًا ، ندرس تفرد ووجود حلول اللزوجة لمعادلات هاملتون–جاكوبي وفقًا لافتراضات معينة .

Notations

- $\exists$: quanticateur existentiel, $\exists x$:il existe un x
- $\forall$: Quanticateur universel,$\forall x$:quelque soit x où pour tout x.
- Ω : est un ouvert non vide.
- $\mathbb{R}$: Ensembles du nombre naturel.
- $\mathbb{R}^n$: Espace réel euclidien de dimension n.
- C^k : L'espace des fonctions continues de classe C^k.
- $|.|$: Désigne la valeur absolue de x.
- $\|.\|$: Norme euclidienne d'un vecteur ou d'une matrice.
- $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)=\partial_{x_i}u(x)=\partial_i u(x)=u_{x_i}(x)$
- $D^a u=D_1^{a_1}D_2^{a_2}.......D_n^{a_n}u=\frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1}......\partial x_n^{a_n}}u$
- $D_1 u(x) = \nabla u(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_i}(x))_{1\leq i\leq n}$
- $D_2 u(x) = \Delta u(x) = (\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x))_{1\leq i\leq n}$
- scs : semi continu supérieure.
- sci : semi continu inférieure.
- $|\alpha| = \sum_n^{i=1} \alpha_i$

0.1 Introduction

La modélisation d'un probléme réel utilise les lois de la physique (mécanique, électromagnétisme, etc.), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des équations différentielles Ordinaires ou par des équations aux dérivées partielles.
Les équations aux dérivées partielles interviennent aussi dans beaucoup d'autres domaines : en chimie par exemple pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des marchés et en finance pour étudier les produits dérivées.

Les équations aux dérivées partielles sont un sujet de recherche trés actif en mathématiques et elles sont lorigine de la création de beaucoup de concepts mathématiques comme, par exemple, la transformée de Fourier et la théorie des distributions.

Dans la plupart des cas il est trés difficilé, voire impossible d'exhiber les solutions d'une équation aux dérivées partielles.

Dans certaines cas on arrive montrer que le problème est bien posé (c-à-d qu'il admet une solution unique) .

Il y a plusieurs types des solutions pour les EDP_s :
Solution classique, solution dite "presque partout",solution faible , et solution de viscosité.

La notion de "solutions de viscosité" a été introduite en 1981 par M. G. Crandall et P. L. Lions, où ils ont donné la théorie de base des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre en dimension finie en démontrant l'existence et l'unicité de solutions de viscosité.

Un an plus tard M. G . Crandall, L .C . Evans et P. L. Lions ont reformulé et simplifier ce travail.

Quelques années plus tard, M. G. Crandall [7] et P. L. Lions ont remarqué que ces équations peuvent *être* étudiées aussi en dimension infinie. En fait, en dimension finie, pour comparer les sous-solutions aux sur-solutions de viscosité, lastuce était de maximiser aprés pénalisation une fonction semi-continue supérieurement dite fonction auxiliaire. Ainsi, ils ont supposé des hypothéses techniques d'uniformité sur le Hamiltonien, sur les sous-solutions et les sur-solutions de viscosité, ce qui a été justié par lutilisation des jeux différentiels pour l'existence.

Le but de ce mémoire est de présenter les idées fondamentales et les principaux résultats de la théorie des solutions de viscosité. On va alors sintéresser aux solutions de viscosité en donnat des exemples d'équations d'ordre 1 ou 2 .
Dans le premier chapitre on rappelle quelques définitions préliminaires, on donne alors Les types des solutions d'une équation aux dérivées partielles (solution classique, solution presque partout,.Solution faibles...) et nous mentionnons également les définitions(solution de viscosité,espaces de Sobolev.......)

Dans le deuxième chapitre oon étudie l'existence et l'unicité des solutions de viscosité par la méthode de Perron, en donnant des exemples d'équations aux dérivées partielles qui admettent une solutions de viscosité ,en particulier on s'interresse à l'équation dite ≪ eikonal ≫ en dimension un et deux. Et enfin on termine par l'équation dite ≪ Ange Amper ≫.

Dans le dernier chapitre, on va étudier les équations de Hamilton-Jacobi qui illustre bien la notion de solutions de viscosité. On termine par Quelques résultats d'unicité classiques, en donnant une forme de ces solutions sous certaines hypothèses.

Chapitre 1

Définitions préliminaires

1.1 Rappels sur les équations aux Dérivées Partielles

Définition 1.1 ***: équation aux Dérivées Partielles***(*voir[10]*)
Une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) d'ordre k est une équation liant une fonction inconnue u et ses dérivées jusqu'à l'ordre k.
En particulier, nous nous intéresserons au cas k = 1,2, c'est-à-dire :

$$K = 1 \quad , F(x, u, Du) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

$$K = 2 \quad , F(x, u, Du, D^2u) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

où $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$

1.1.1 Le cas des équations elliptiques

On s'intéresse ici à une équation de la forme

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad x \in \Omega$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ donné et $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ Dans toute la suite on supposera que F est "elliptique",c'est-à-dire que F est décroissante par rapport à la derni'ere variable :

$$F(x, s, p, X) \geq F(x, s, p, Y) \text{ si } X \leq Y \quad \forall (x, s, p, X, Y) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_{n,n}$$

(l'inégalité $X \leq Y$ étant comprise au sens des matrices symétriques).

1.1.2 Le cas d'une équation parabolique

Pour la commodité de la lecture, nous répétons les définitions de solutions de viscosité dans le cas d'une équation parabolique. On considère un problème de la forme

$$\partial_t u(t, x) + H(t, x, u(t, x), Du(t, x), D^2u(t, x)) = 0 \quad (t, x) \in]0, T[\times\Omega$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ donné et F :$]0, T[\times\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ On supposera toujours que F est elliptique ,c'est-à-dire décroissante par rapport à cette dernière variable.

Exemple 1.1 — $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$ *avec u=u(x,y) (équation de diffusion)*
$u_1(x, y) = 2x + y^2$ *solution dans tout* $\mathbb{R}^2$
$u_2(x, y) = e^{-x} sin(y)$ *solution dans* $\mathbb{R}^2$
$u_3(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} e^{\frac{y^2}{4x}}$ *solution dans* $\Omega \begin{cases} x > 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

Exemple 1.2 *1.* $\Delta u = 0$ *équation de Laplace*

2. $\Delta u - f = 0$ *équation de Poisson*

3. $u_{tt} - \Delta u = 0$ *équation des ondes*

4. $u_{tt} - u_{xx} + u_t + u = 0$ *équation des télégraphistes*

1.2 Quelques espaces fonctionnels

1.2.1 Espace L^p

Rappel : Lorsque X est un ensemble muni d'une mesure positive μ ,et $p \in [1, \infty[$,on note $L^p(X, d\mu)$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définies à un ensemble de mesure nulle prés, telles que $\int |f|^p \, d\mu < +\infty$. Cet ensemble est un espace vectoriel normé lorsqu'il est muni de

$$\|f\|_{L^p(X,d\mu)} = (\int |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{P}}$$

On note également $L^\infty(X, d\mu)$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définies à un ensemble de mesure nulle prés, telles que $|f| \geq C$ est de mesure nulle pour $C > 0$ assez grand (fonctions essentiellement bornées).
On note $\|f\|_{L^\infty(X,d\mu)}$ l'inf des $C > 0$ vérifiant cette propriété : il s'agit de nouveau d'une norme.
Lorsque X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ muni de la restriction à de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$, on note $L^p(X)$ au lieu de $L^p(X, d\mu)$.
Attention : les espaces de fonctions d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont parfois relatifs à une autre mesure, par exemple $L^p([0, \infty[, rdr)$ joue un *rôle* important quand on s'intéresse aux fonctions de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ à symétrie radiale.
Lorsque X est un ensemble fini ou infini d'enombrable (en particulier $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^N$), on note $l^p = L^p(X, d\mu)$ où μ est la mesure de comptage sur X : il s'agit donc d'un espace de suites lorsque $X = \mathbb{N}$. Lorsque $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ la notation est cohérente avec la notation $\|x\|_p$.

1.2.2 Espace C^s

Définition 1.2 *Lorsque K est un compact de $\mathbb{R}^N$, on note C(K) l'ensemble des fonctions continues sur K, muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$ (on pourra réflechir au lien entre cet espace et $L^\infty(K)$). Lorsque X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$, on considére parfois $C_b(X)$ ensemble des fonctions continues bornées sur X, muni de la même norme. On note $C_0(X)$ le sous-ensemble fermé de $C_b(X)$ défini comme adhérance des fonctions continues à support compact pour la norme uniforme (on pourra caractériser cet ensemble lorsque $X = \mathbb{R}^N$ ou un demi-espace ouvert de $\mathbb{R}^N$)*

Définition 1.3 *Pour X un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ et $s \in \mathbb{N}$ on note $C^s(X)$ l'ensemble des restrictions à X des fonctions qui sont de classe C^s sur un ouvert u contenant X. Lorsque X est compact, on munit $C^s(X)$ de la norme*

$$\|f\|_{C^s(X)} = \sum_{|a| \leq s} \|\partial_a f\|_\infty$$

Ici et dans la suite $a = (i_1, ..., i_N) \in \mathbb{N}^N$ est un multi-indice. On note
$|a| = i_1 + ... + i_1$. Pour $x = (x_1, ...x_N)$, on note $x^a = x_1^{i_1}......x_N^{i_n}$ et $\partial_a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial_{x_1}^{i_1}.........\partial_{x_N}^{i_N}}$
Dans les autres cas (X non compact), on considére plutôt l'ensemble $C_b^s(X)$ des fonctions dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre s sont bornées, muni de la même norme

1.3 Les types des solutions d'une équation aux dérivées partielles

(voir[10]) Il exister quatre types des solutions d'une équation aux dérivées partielles :

1. Solution classique
2. Solution presque partout
3. Solutions faibles
4. Solutions de viscosité

1.3.1 Solution classique (ou solution forte)

Soit une EDP d'ordre $s \geq 1$ une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite solution classique si : $u \in C^s(\Omega)$ et u solution de l'EDP tout $x \in \Omega$

Exemple 1.3 *Soit $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on cherche $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de*

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = f(t,x) & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.3}$$

Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$,on dit que u est une solution classique (ou solution fort) de (1.3) si :

1. $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $\forall (t,x) \partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = f(t,x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, u(0,x) = u_0(x)$

Exemple 1.4 *Déterminer la solution de l'équation suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4x^2 y$$

est une EDP d'ordre 2 a deux variable on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4x^2 y$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 4x^2 y$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4}{3}x^3 y + f(y)$$

$$u(x,y) = \frac{2}{3}x^3 y^2 + \int f(y)dy + G(x)$$

Donc si F et G sont de classe C^1 alors

$$u(x,y) = \frac{2}{3}x^3 y^2 + F(y) + G(x) \qquad F, G \in C^2$$

est une solution classique de l'EDP.

Remarque 1.1 *Les solutions classiques sont en générale unique, mais ils ne pourraient pas exister.*

1.3.2 Solutions faibles

Définition 1.4 *(voir [4]) La forme bilinéaire associée à l'opérateur sous forme divergence est :*

$$B[u,v] = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)udx$$

pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$
On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution faible de l'équation suivant :

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \text{ dans } \Omega \text{ si}$$

$$B[u,v]=(f,v)$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ *où (,) dénote le produit scalaire dans* $L^2(\Omega)$.
Supposons que H est espace de Hilbet réel de norme $\|\|$ *et de produit scalaire(,).*

Exemple 1.5 *Soit* $f \in C^2(\mathbb{R})$,$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ *On dit que u est solution faible de l'équation de transport non-linéaire*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,.) = u_0 \end{cases}$$

si

1. $u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})^3$
2. $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *On a* $\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u\partial_t\varphi + \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} f(u)\partial_x\varphi + \int_{\mathbb{R}} u_0\varphi(0,.) = 0$

Remarquons que toute solution faible de classe C^1 *(avec donnée initiale de même régularité) est solution forte, et que toute solution forte est solution faible.*

1.3.3 Solution presque partout

Définition 1.5 *Une partie N* $\in X$ *est dite* *négligeable* *si elle est contenue dans une partie mesurable et de mesure nulle, ie si*

$$\text{il existe } m \in M \text{ telle que } N \subset m \text{ et } \mu(m) = 0$$

Si on veut préciser la mesure, on dit que N est μ*-négligeable*

Définition 1.6 *On dit qu'une proposition P est vraie* *presque partout* *(on note "pp") si ellevraie partout sauf sur un ensemble négligeable, ie si*

$$[x \in X| \quad non \quad p(x)] \text{ est négligeable.}$$

Définition 1.7 *Soit une EDP d'ordre* $s \geq 1$*, une fonction* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue est appelé solution presque partout si le dérivés jusqu l'ordre s existent presque partout et u résout le EDP presque partout*

Exemple 1.6 *Une alternative ce problème est de définir une classe de solutions faibles, celles qui résolvent l'équation presque partout. Mais cette définition n'assure pas l'unicité de la solution. En effet, le problème suivant :*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u^2 = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

admet plusieurs solutions qui résolvent le problème presque partout mais qui ne sont pas égales presque partout.

Remarque 1.2 *En utilisant nouveau l'exemple de l'équation eikonale, nous montrer que la solution est le bon pour l'existence, mais très mauvais pour l'unicité*

1.3.4 Solution de viscosité

Définition 1.8 ***(Sous-solutions, sur-solutions, solutions)*** *On dit qu'une fonction* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est sous-solution de viscosité de (1.2)si u est semi-continue supérieurement (scs) dans* Ω *et si, pour toute fonction-test* $\varphi \in C^2(\Omega)$ *telle que* $u - \varphi$ *a un maximum local en un point* $x_0 \in \Omega$ *,on a*

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0$$

Symétriquement, on dit qu'une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est sur-solution de viscosité de (1.2) si* u *est semi-continue inférieurement (sci) dans* Ω *et si, pour toute fonction-test* $\varphi \in C^2(\Omega)$ *telle que* $u - \varphi$ *a un minimum local en un point* $x_0 \in \Omega$ *,on a*

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$$

Enfin, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est solution de viscosité de (1.2) si* u *est sous-solution et sur-solution de (1.2).*

Exemple 1.7 *Soit l'équation eikonal suivante :*

$$\left|u^{'}(x)\right| = 1 \qquad x \in (-1, 1)$$

Supposons quil existe une solution classique , tell que

$$u \in C^1(-1, 1) \text{ solution de l'équation eikonal}$$

avec

$$u(-1) = u(1) = 0$$

On a

$$\exists \xi \in (-1, 1)$$

tel que

$$u^{'}(\xi) = 0$$

et comme

$$u \in C^1(-1, 1)$$

Alors

$$u^{'} \text{ est continue sur (-1,1).}$$

donc

$$\text{il existe une voisinage de } \xi$$

telle que

$$\forall x \in \nu\xi \left|u^{'}(x)\right| < 1$$

avec

$$\nu_\epsilon = [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$$

alors

$$\forall x \in [\xi - \epsilon, \xi + \epsilon] \left|u^{'}(x)\right| < 1$$

C-à-d

$$\left|u^{'}(x)\right| \neq 1$$

Donc contradictions de l'équation eikonal . Alors n'admet pas une solution classique.

1.4 Applications possibles des solutions de viscosité

Voici quelques exemples d'EDP non-linéaires pour lesquels les solutions de viscosité sont utiles[8] . Le *contrôle* optimal est une des applications principales des solutions de viscosité, en finance notamment. Une liste très fournie d'applications peut *être* trouvée d ans [6].

Équation **de Hamilton-Jacobi**

$$H(x, u, Du) = 0$$

où H est le Hamiltonien.

Cette équation est très importante en contrôle optimal et en économie, en particulier quand elle prend la forme Hamilton-Jacobi-Bellman [1].

Mean Curvature Motion

$$u_t - \Delta u + \left\langle D^2 u \tfrac{Du}{|Du|}, \tfrac{Du}{|Du|} \right\rangle$$

Cette équation de géométrie différentielle décrit l'évolution d'une hypersurface essayant de minimiser son aire, elle a des applications en physique.

Equation de Monge-Ampère

$$det(D^2 u) = f(x)$$

Cette équation a des applications en transport optimal, et c'est sur celle-ci que nous avons choisi de nous concentrer.

1.5 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Définition 1.9 *Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^n$ .On dit qu'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω dans $\mathbb{R}$ est uniformément équicontinue si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall n \in \mathbb{N}\ , \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ |x - y| < \eta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$$

On énonce le théorème d'Arzelà-Ascoli dans un cas particulier, celui qui nous intéressera dans la suite du mémoire :

Théoréme 1.1 ***(Arzelà-Ascoli)*** *Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^n$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}^n$ uniformément équicontinues et uniformément bornées. Alors il existe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $f_{\phi(n)} \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f$ quand $n \longrightarrow +\infty$ sur tout compact de Ω*

corollaire 1.1 *La fonction limite f du théorème précédent est continue.*

1.6 Définition des espaces de Sobolev

Définition 1.10 *(voir[12]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient u et v dans $L^1_{loc}(\Omega)$ et α un multi-indice. On dit que v est la α^{eme} faible dérivée partielle et on note $D^\alpha u = v$*
si

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Omega)\ ,\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx$$

Remarque 1.3 *On peut prouver l'unicité de la dérivée au sens faible à un ensemble négligeable près en supposant v et v' deux dérivées α^{eme} au sens faible et appliquer la définition pour toute fonctions test φ.*

Définition 1.11 *(voir [12]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, si*
Pour tout multi-indice α de module plus petit que k, $D^\alpha u$ existe au sens faible et appartient à $L^p(\Omega)$.
La norme de cet espace est :

$$|u| = \begin{cases} (\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < \infty \\ max_{|\alpha|\leq k} \, |D^\alpha u|_\infty & si \quad p = \infty \end{cases}$$

Chapitre 2

Solutions de viscosité

2.1 Définition des Solution de viscosité

La définition d'une solution de viscosité et des explications plus détaillées peuvent *être* trouvées . Nous en donnerons ici une explication intuitive dans un exemple en une dimension.
Afin de définir la notion de solution de viscosité, nous avons tout d'abord besoin de parler de sous-différentielle et de sur-différentielle [3].

Définition 2.1 ***: Sous-différentielle*** *Soit u :*$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *Un vecteur p est un sous-gradient (resp. sur-gradient) de u en un point x si la droite orientée par p est tangente sous (resp. sur)*
On note l'ensemble des sous-gradients (resp. sur-gradients) de u en x :$D^{+}u(x)$*, (resp.* $D^{-}u(x)$*)*

Définition 2.2 ***Sous-différentielle*** *Une définition alternative très utile de la notion de sous-différentielle d'une fonction* C^s *est la suivante :*
On a $p \in D^{+}u(x)$ *(resp* $D^{-}u(x)$*) si et seulement si il existe une fonction* $\phi \in C^1$ *telle que* $\nabla\phi(x) = p$ *et* $u - \phi$ *admet un maximum (resp. minimum) local en x.*
Ces définitions s'appliquent également aux dérivées d'ordres supérieurs.

Définition 2.3 *Une fonction u est une sous-solution de viscosité de (1.1) si*

$$F(x, u(x), p) \leq 0, \ \forall x \in \Omega, p \in D^{+}u(x)$$

Une fonction u est une sur-solution de viscosité de (1.1) si

$$F(x, u(x), p) \geq 0, \ \forall x \in \Omega, p \in D^{-}u(x)$$

Une fonction u est une solution de viscosité si elle est à la fois une sur-solution et une sous-solution de viscosité

Nous allons montrer que ces définitions ont bien un sens lorsque u est de classe C^2

2.2 Solution de viscosité discontinue

Nous expliquons dans cette partie comment construire une solution de viscosité d'une équation lorsque lon en connait une sur et sous-solution et que lon sait que l'équation possède un "principe de comparaison ". En fait, le procédé décrit ici permet, de construire des solutions "très faibles" : des solutions dites discontinues.[8]

Définition 2.4 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. On appelle enveloppe (scs) la plus petite fonction scs supérieure u : cette fonction est notée* u^* *et est donnée par*

$$u^* = lim \ sup_{x' \longrightarrow x} u(x')$$

On appelle enveloppe (sci) la plus grande fonction sci inférieure u : cette fonction est notée u_* et est donnée par

$$u_* = lim\ inf_{x' \longrightarrow x} u(x^{'})$$

Remarque 2.1 *Notons que $u_* = -(-u^*)$ et u une fonction continue si et seulement si $u_* = (u^*)$*

Exemple 2.1 *Soit la fonction suivante :*

$$\begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Définition 2.5 *On dit quune fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution de viscosité discontinue de (1.2) si u^* est une sous-solution de (1.2) tandis que u_* est une sur-solution de cette équation.*

Exemple 2.2 *Soit u sous-solution de viscosité de (1.2) On va montrer que u est sur-solution de viscosité de :*

$$\tilde{F}(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \qquad x \in \Omega$$

Où

$$\tilde{F}(x, s, p, X) = -F(x, -s, -p, -X) \qquad \forall (x, s, p, X) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Soit $\varphi \in C^2$, tel que $u - \varphi$ admet un maximum local en x_0 ,c-à-d

$$u(x) - \varphi(x) \leq u(x_0) - \varphi(x_0)$$

donc u sous-solution de (1.2) , alors

u est semi continu supérieure (scs),

et comme

-u est semi continu inférieure (sci),

c-à-d

u est sur-solution de (1.2)

tel que

$$(-u(x)) - \varphi(x) \geq (-u)(x_0) - \varphi(x_0)$$

alors

$$u(x) - (-\varphi(x)) \leq u(x_0) - (-\varphi(x_0))$$

Donc, puisque u est sous-solution de (1.2), on a

$$\tilde{F}(x_0, (-u)(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) = -F(x_0, u(x_0), -D\varphi(x_0), -D^2\varphi(x_0)) \geq 0$$

2.3 Existence d'une solution de viscosité par la méthode de Perron

En 1987, H.Ishii a utilisé pour la première fois la méthode de Perron pour résoudre des équations non linéaire du premier ordre (méthode de perron pour les équations de HamiltonJacobi). Cette méthode a été introduite en 1923 par Oskar Perron [2].

2.3.1 La méthode de perron

Théoréme 2.1 *On suppose que* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une sous-solution de (1.2) tandis que* $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une sur-solution de cette équation.*
On suppose de plus

$$u \leq v \qquad dans\ \Omega$$

Alors il existe une solution de viscosité discontinue

$$w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ telle\ que \qquad u \leq w \leq v$$

Preuve : Soit $\epsilon = z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad |z^*$ est une sous-solution de (1.2) et $u \leq z \leq v$ Notons que

$$\epsilon \neq \Phi \text{ puisque } u \in \epsilon$$

posons

$$w(x) = sup_{z \in \epsilon} z(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

On va montrer que w est bien la solution cherchée. Remarquons dabord que

$$w \in \epsilon \text{ puisque } u \leq w \leq v \text{ et } w^* \text{ est une sous-solution de (1.2)}$$

Reste à prouver que w_* est une sur-solution de (1.2) Donc on montre par labsurde, Supposant

$$\exists x_0 \in \Omega \quad \text{ et } \quad \phi \in C^2$$

tel que $w_* - \phi$ admet un minimum local strict en x_0, c-à-d

$$w_*(x) - \phi(x) \geq w_*(x_0) - \phi(x_0)$$

et

$$F(x_0, w_*(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) < 0 \tag{2.1}$$

Quitte remplacer

$$\phi \text{ par } \phi - \phi(x_0) + w_*(x_0)$$

on peu supposer que

$$\phi(x_0) = w_*(x_0)$$

on montre d'abord que

$$w_*(x_0) < v(x_0)$$

En effet, sinon

$$w \leq v \Longrightarrow w_*(x_0) < v(x_0)$$

donc

$$v(x) - \phi(x) \geq v(x_0) - \phi(x_0)$$

Mais alors (2.1) contredirait que l'hypothèse que v est une sur-solution de (1.2) , Donc

$$w_*(x_0) < v(x_0)$$

Choisissons maintenant $r > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$et

1. $F(x, \phi(x) + \epsilon, D\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0 \qquad \forall x \in B_r(x_0)$
   (ce qui est possible d'après (2.1) et par continuité de F)
2. $(w_* - \phi)(x) > \epsilon \qquad \forall x \in \partial B_r(x_0)$
   (ce qui est possible car $w_* - \phi$ possède un minimum local strict en et $\phi(x_0) = w_*(x_0)$)
3. $\phi(x) < v(x) - \epsilon \qquad \forall x \in B_r(x_0)$
   (ce qui est possible puisque est sci et $\phi(x_0) = w_*(x_0) < v(x_0)$)

On pose

$$\begin{cases} w(x) \quad \text{si} & x \in \Omega / B_r(x_0) \\ max\{w(x), \phi(x) + \epsilon\} \quad \text{si} & x \in B_r(x_0) \end{cases}$$

On affirme que $z \in \epsilon$: En effet, daprès (3)

$$z \leq v, \text{ de plus } u \leq z \leq v$$

Montrons que z^* est une sous-solution de (1.2)
Soit ψ une fonction-test telle que

$$z^*(x) - \psi(x) \leq z^*(x_1) - \psi(x_1)$$

Si

$$z^*(x_1) = \psi(x_1)$$

Alors

$$w^*(x) - \psi(x) \leq w^*(x_1) - \psi(x_1)$$

donc

$$F(x_1, z^*(x_1), D\psi(x_1), D^2\psi(x_1)) \leq 0 \text{ puisque } w^* \text{ est sous-solution.}$$

Supposons maintenant que

$$z^*(x_1) > w^*(x_1)$$

Alors d'après la définition de z, On a

$$x_1 \subset \bar{B}_r(x_0).$$

Notons que, dans $\bar{B}_r(x_0)$

$$z^* = max\{w^*, \phi + \epsilon\}$$

Donc

$$z^*(x_1) = \phi(x_1) + \epsilon$$

et (2) implique $x_1 \in B_r(x_0)$.Par conséquent,

$$(\phi + \epsilon)(x) - \psi(x) \leq (\phi + \epsilon)(x_1) - \psi(x_1)$$

Ce qui *entraîne* que

$$D\phi(x_1) = D\psi(x_1) \text{ et } D^2\phi(x_1) \leq D^2\psi(x_1)$$

Alors

$$0 \geq F(x_1, \phi(x_1) + \epsilon, D\phi(x_1), D^2\phi(x_1)) \geq F(x_1, z^*(x_1) + \epsilon, D\psi(x_1), D^2\psi(x_1))$$

Nous avons donc prouvé que z^* est une sous-solution de (1.2),et $z \in \epsilon$
Prouvons nalement que

$$z \neq w$$

Soit(x_n) une suite qui converge vers x_0, tel que

$$w(x_n) \text{ tend vers } w_*(x_0)$$

Alors

$$z(x_n) \geq \phi(x_n) + \epsilon$$

De plus

$$(\phi(x_n) + \epsilon) \text{ converge vers } \phi(x_0) + \epsilon$$

Avec

$$\phi(x_0) + \epsilon > w_*(x_0)$$

Donc, pour assez

$$z(x_n) > w(x_n)$$

Nous avons donc prouvé que

$$\begin{cases} z \in \epsilon \\ \text{et} \\ z \neq w \end{cases}$$

Ceci est contradiction avec la construction *même* de w : Lhypothèse de d'épart (2.1)est donc impossible. Ceci montre que w est une sur-solution, et donc une solution de (1.2).

2.3.2 Existence d'une solution de viscosité continue

Définition 2.6 *(voir [9]) On dit que l'équation* (1.2) *vrie un principe de comparaison dans* Ω *si, pour toute sous-solution u et pour toute sur-solution v de* (1.2)*, si*

$$u \leq v \ \ dans \ \partial\Omega$$

Alors

$$u \leq v \ \ dans \ \Omega$$

Remarque 2.2 *Dans toute la suite, l'inégalité*

$$u \leq v \ \ dans \ \partial\Omega$$

signie par abus de notation :

$$lim_{x' \to x} sup_{x' \in \Omega} u(x^{'}) \leq lim_{x' \to x} inf_{x' \in \Omega} v(x^{'}) \qquad \forall x \subset \partial\Omega$$

Nous étudions maintenant le problème de Dirichlet pour l'équation (1.2) Soit

$$g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ une \ fonction \ continue.$$

corollaire 2.1 *Supposons que l'équation (1.2) vérie un principe de comparaison dans* Ω
Supposons également qu'il existe deux applications u et v telles que

1. *u est une sous-solution de (1.2) et*
$$lim_{x'\to x, x'\in\Omega} u^{'}(x) = g(x) \qquad \forall x \in \partial\Omega$$
2. *v est une sur-solution de (1.2) et*
$$lim_{x'\to x, x'\in\Omega} v^{'}(x) = g(x) \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

Alors il existe une unique solution de viscosité w de l'équation (1.2) telle que
$$w = g \ dans \ \partial\Omega$$
Autrement dit, le problème de Dirichlet
$$\begin{cases} F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 & x \in \Omega \\ u = g & x \in \partial\Omega \end{cases}$$
Possède une unique solution de viscosité.

Preuve : Par la méthode de Perron, on construit une solution discontinue w telle que
$$u \leq w \leq v.$$
On va montrer que
$$w_* = w^* = g \qquad \text{sur } \partial\Omega$$
En effet, pour tout $x \in \partial\Omega$ on a u est une sous-solution et v est une sur-solution, c-à-d
$$g(x) = lim_{x'\to x, x'\in\Omega} u^{'}(x) \qquad \forall x \in \partial\Omega$$
et
$$g(x) = lim_{x'\to x, x'\in\Omega} v^{'}(x) \qquad \forall x \in \partial\Omega$$
alors
$$g(x) = lim_{x'\to x, x'\in\Omega} u^{'}(x) \leq lim_{x'\to x, x'\in\Omega} v^{'}(x) = g(x)$$
donc
$$\begin{aligned} g(x) &= lim_{x'\to x, x'\in\Omega} u^{'}(x) \\ &\leq lim_{x'\to x} inf_{x\in\Omega} w(x^{'}) \\ &\leq w_*(x) \leq w^*(x) \\ &\leq lim_{x'\to x} sup_{x\in\Omega} w(x^{'}) \\ &\leq lim_{x'\to x, x'\in\Omega} v^{'}(x) = g(x) \end{aligned}$$
D'où
$$w_*(x) = w^*(x) \quad \text{sur } \partial\Omega$$
C-à-d w_* est une sur-solution et w^* est une sous-solution, et comme
$$w_*(x) \leq w^*(x) \quad \text{sur } \partial\Omega$$
le principe de comparaison affirme que
$$w_*(x) \geq w^*(x)$$
cela preuve que
$$w_*(x) = w^*(x)$$
et donc que w est en fait une solution de viscosité continue.

Remarque 2.3 *La méthode de perron est une bonne méthode pour prouver des résultats d'existence pour des EDP générale (c-à-d dordre 1 et du second ordre), seul son problème cest quelle ne donne ni la formule de la solution et ni des informations de la régularité sur la solution.*

2.4 Solutions de viscosité : Exemples

Nous allons maintenant voir quelques exemples de solutions de viscosité.

2.4.1 Solutions de viscosité pour l'équation eikonale en dimension 1

Nous revisitons ici l'équation eikonale

$$-\left|u^{'}\right|+1=0 \tag{2.2}$$

Nous voulons prouver que $u(x)=1-|x|$ en est solution de viscosité sur [-1,1].
Sur [-1,0[et]0,1[, u est dérivable et vérifie l'équation eikonale.
Alors que dans l'intervalle [-1,0[

$$u(x)=1+x \text{ et } u^{'}(x)=1$$
$$\text{donc } -\left|u^{'}\right|+1=0 \Longleftrightarrow -1+1=0$$

Alors que dans l'intervalle]0,1]

$$u(x)=1-x \text{ et } u^{'}(x)=1$$
$$\text{donc } -\left|u^{'}\right|+1=0 \Longleftrightarrow -1+1=0$$

La condition de sur-solution et de sous-solution est donc vérifiée sur ces intervalles.
Ici, nous avons le problème en 0, où u n'est pas dérivable.
On a clairement $D^{+}u(0)$=-1=1. On a donc bien $\forall p \in D^{+}u(0)$, $-|p|+1 \leq 0$ donc u est une sous-solution de viscosité de l'équation (2.2).
On voit également que $D^{-}u(x)=\Phi$, la propriété de sur-solution est donc trivialement vérifiée en 0.

donc u est une sous-solution et sur-solution alors bien une solution de viscosité (2.2).

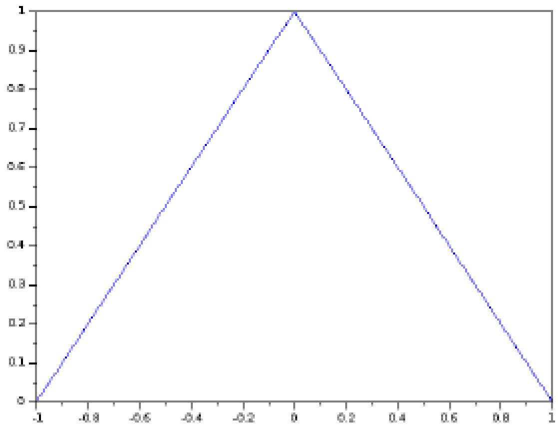

FIGURE 2.1 – Solution de viscosité de l'équation eikonale

2.4.2 Solutions de viscosité pour l'équation eikonale en dimension supérieure

Considérons d'abord un exemple typique d'équation elliptique trés dégénérée qu'est l'équation eikonale :

$$\|Du(x)\|=1 \quad x \in \Omega$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ est la norme euclidienne usuelle. C'est une équation du premier ordre, qui peut *être* vue comme une équation elliptique de la forme (1.2) en posant

$$F(x,s,p,X) = \|p\| \quad \forall (x,s,p,X) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_{n,n}$$

Pour fixer les idées on s'intéressera plus particuliérement au probléme de Dirichlet "homogéne"

$$\begin{cases} \|Du(x)\| = 1 & pour \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0 & pour \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

et on supposera que Ω est borné.
Notons d'abord que ce probléme n'a pas de solution classique, c'est-à-dire qu'il néxiste pas de fonction $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ solution de (2.3) . En effet, comme Ω est borné et que u est constant sur $\partial\Omega$ la fonction u posséde forcément un point de maximum ou de minimum x_0 dans Ω . Or en ce point, on doit avoir $Du(x_0) = 0$, ce qui est en contradiction avec l'équation.
On s'attend donc à ce que l'équation (2.3) posséde une solution généralisée, disons, vu l'équation, dans $W_0^{1,\infty}(\Omega)$. D'ailleurs, il est à peu prés immédiat que la fonction distance au bord de Ω, définie par

$$d_{\partial\Omega}(x) = min_{y\in\partial\Omega} \|y - x\| \tag{2.4}$$

est solution de (2.3) au sens presque partout. En effet, appartient à $W_0^{1,\infty}$, car c'est une fonction lips chitzienne, et une fonction de $W_0^{1,\infty}$ est presque partout différentiable (c'est le théoréme de Rademacher). De plus, on montre sans difficulté qu'un point $x \in \Omega$ est un point de différentiabilité de $d_{\partial\Omega}$ si et seulement si, x posséde une unique projection y sur $\partial\Omega$. Alors $Dd_{\partial\Omega}(x) = \frac{y-x}{\|y-x\|}$et est donc de norme 1. Notons que $-d_{\partial\Omega}$ est également solution presque partout.
Malheureusement, l'équation (2.3) possède en fait une infinité de solutions au sens presque partout. La meilleure façon de s'en convaincre est de travailler dans $\mathbb{R}$,avec $\Omega \in]-1,1[$ On peut montrer, en utilisant le théorème de Baire, que l'ensemble des solutions presque partout de (2.3) est un G_δ -dense dans l'ensemble

$$\left\{ w \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \quad | \; \|Dw\|_\infty \leq 1 \right\}$$

Cet ensemble de solutions est donc particulièrement gros. Pour le problème d'EDP qui nous occupe, cette situation est très désagréable. Elle peut cependant *être* utilisée pour construire des solutions pour des systèmes d'équations très dégénérées, lorsque l'on ne se préoccupe pas d'unicité.
Nous verrons plus loin qu'un critère possible de sélection des solutions est de demander à la solution de vérifier l'équation "au sens viscosité". Avec ce critère, $d_{\partial\Omega}$ sera l'unique solution de viscosité de l'équation (2.3).

Exemple 2.3 ***équation eikonale en dimension 2***

$$\sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2} = 1$$

2.4.3 Solutions de viscosité pour l'équation Monge-Ampère

Le but est ici de prouver numériquement que $u(x) = \frac{1}{2}((|x|-1)^+)^2$ est bien solution deviscosité de l'équation de Monge-Ampère : $det(D^2u(x)) = f(x)$,quand $f(x) = (1 - \frac{1}{x})^+$

2.4.3.1 étude de la fonction u

Nous dessinons la fonction u sur $[-2,2] \times [-2,2]$ figure(2.4).
On obtient une cuvette avec un fond plat.Cela se voit mieux lorsqu'on réalise une coupe de la courbe figure(2.5).
La fonction est C^2 partout, sauf sur le cercle unité.

2.4.3.2 Vérification de l'équation

Lors du calcul le déterminant de sa Hessienne, et on le compare à f. Puisqu'on peut construire u par révolution autour de l'axe des z, on se cantonne au plan y = 0,Nous avons donc montré que u satisfait l'équation Monge-Ampère

On obtient la figure(2.6).

En soustrayant f à ce résultat, on obtient le résultat de la figure(2.7). On voit que le résultat est très proche de f, à part sur le cercle unité.

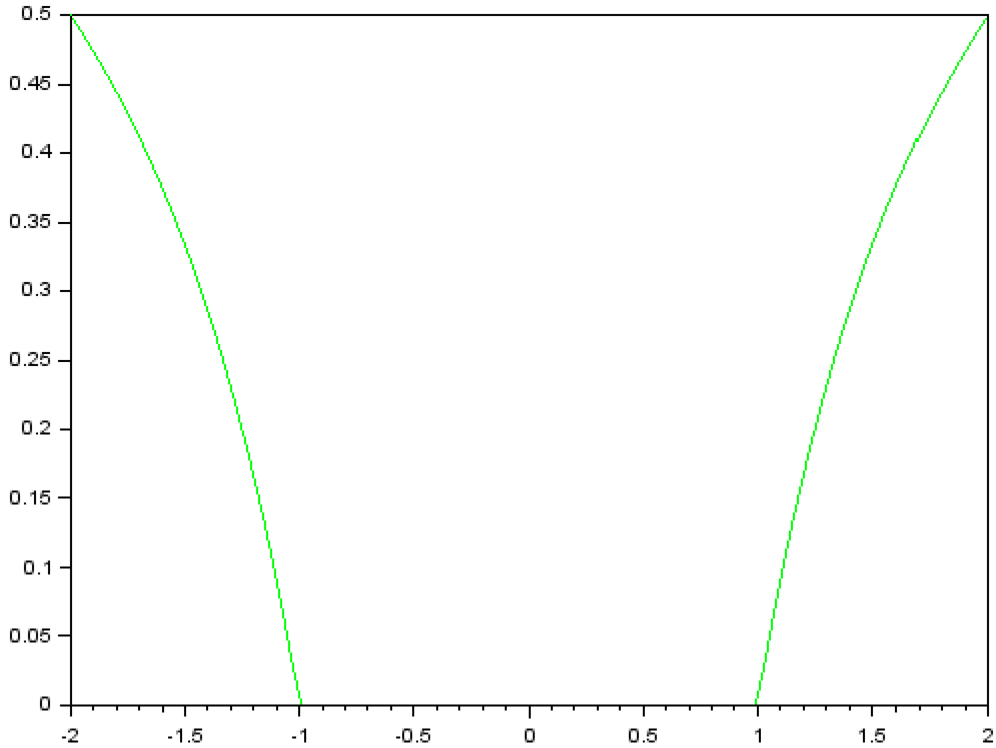

FIGURE 2.2 – fonction f

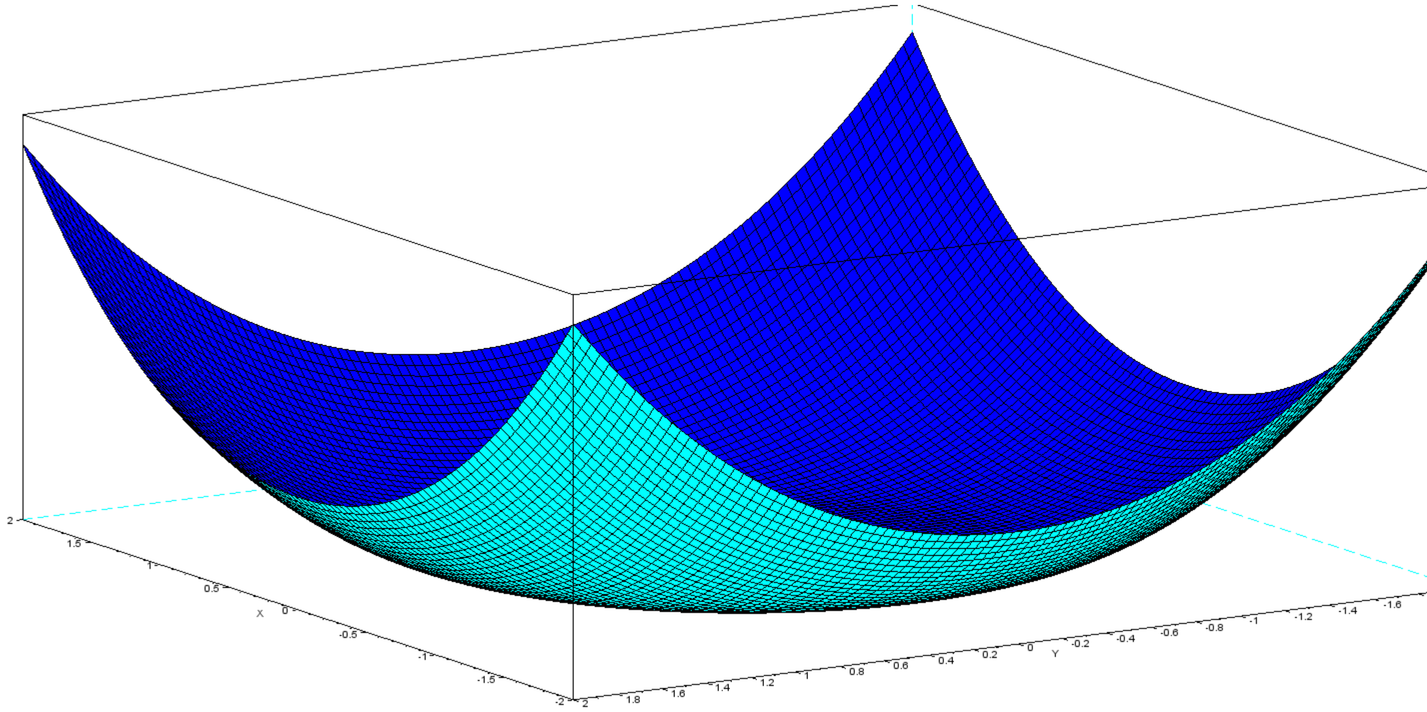

FIGURE 2.3 – fonction u vue d'au dessus

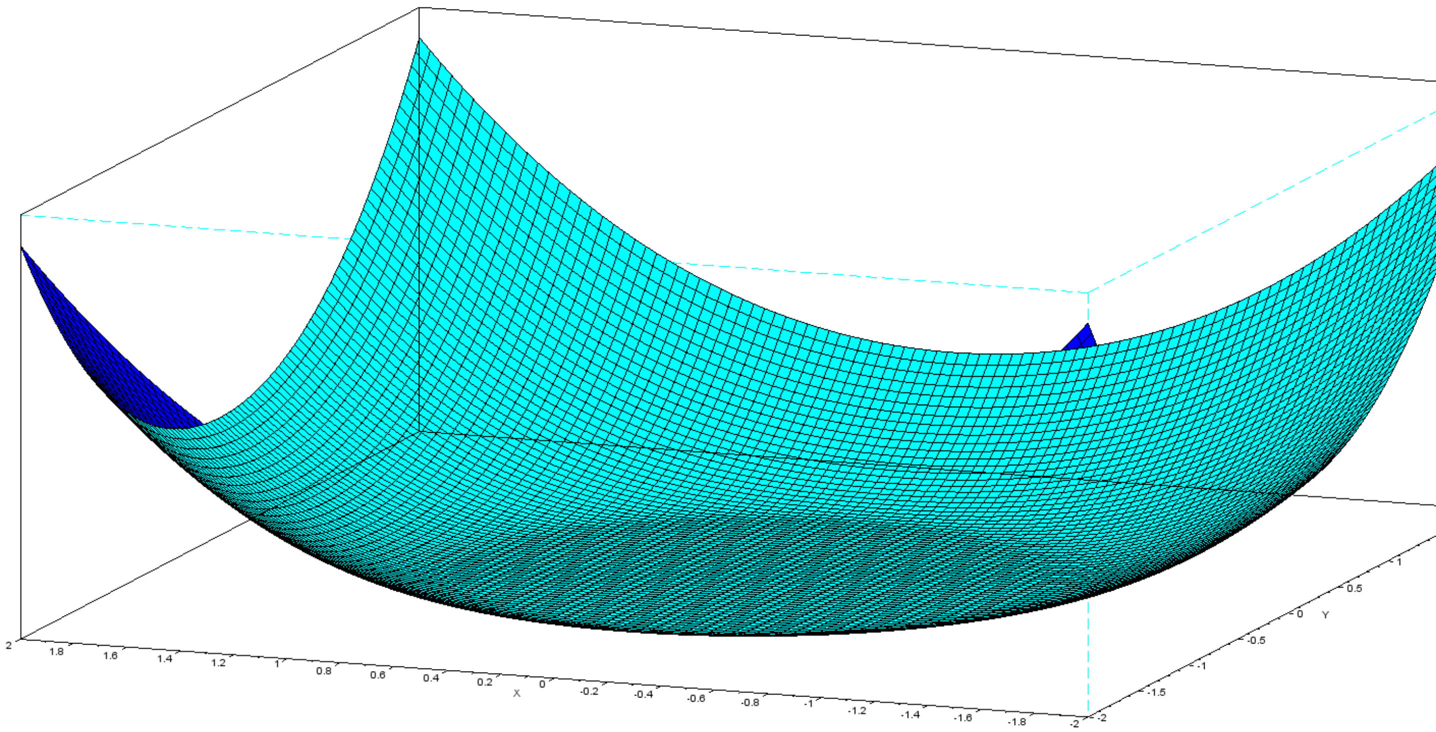

FIGURE 2.4 – fonction u vue d'en-dessous

2.4.3.3 Calcul des sous-gradients de u en (1,0)

Comme pour $u^{'}$,onapproxime $u^{''}(1^{+},0)$ par $\frac{u(1+2dx,0)-2u(1+dx,0)}{dx^{2}}$,et on fait tendre $dx>0$ vers 0.
On obtient :

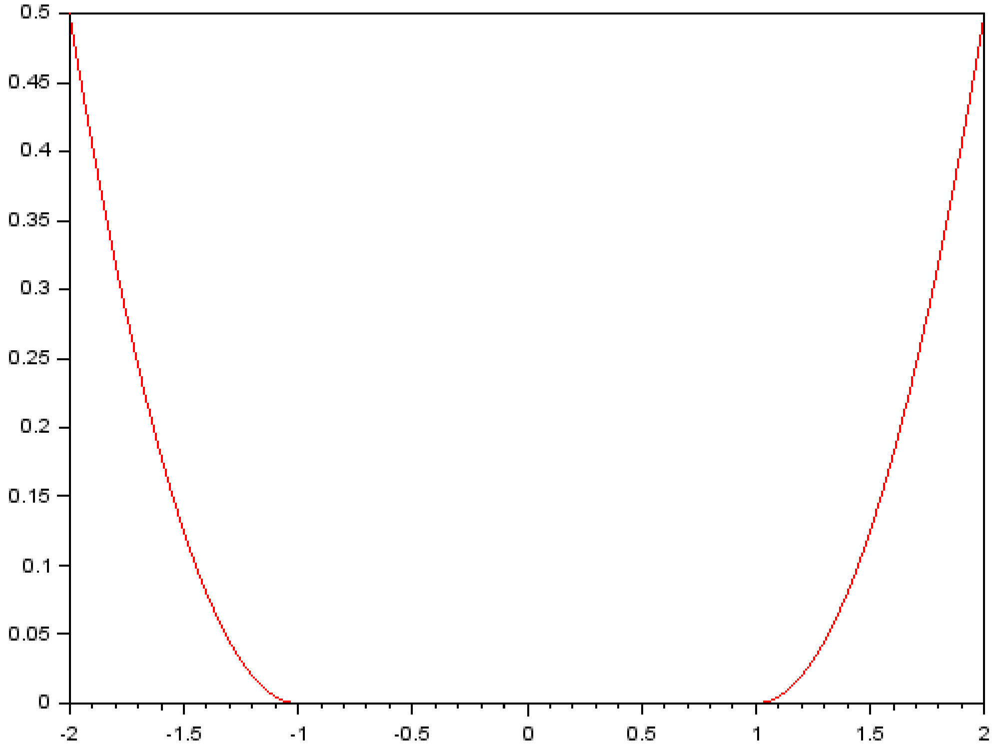

FIGURE 2.5 – fonction u dans le plan y=0

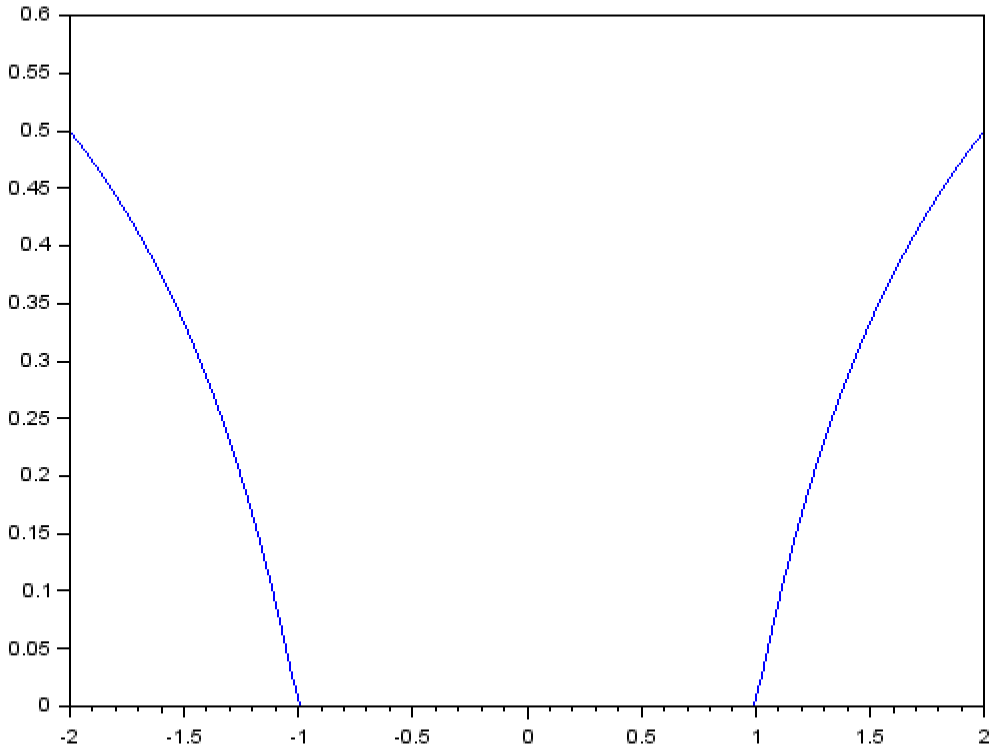

FIGURE 2.6 – $det(D^2u)$:membre de gauche de l'équation de Monge-Ampère

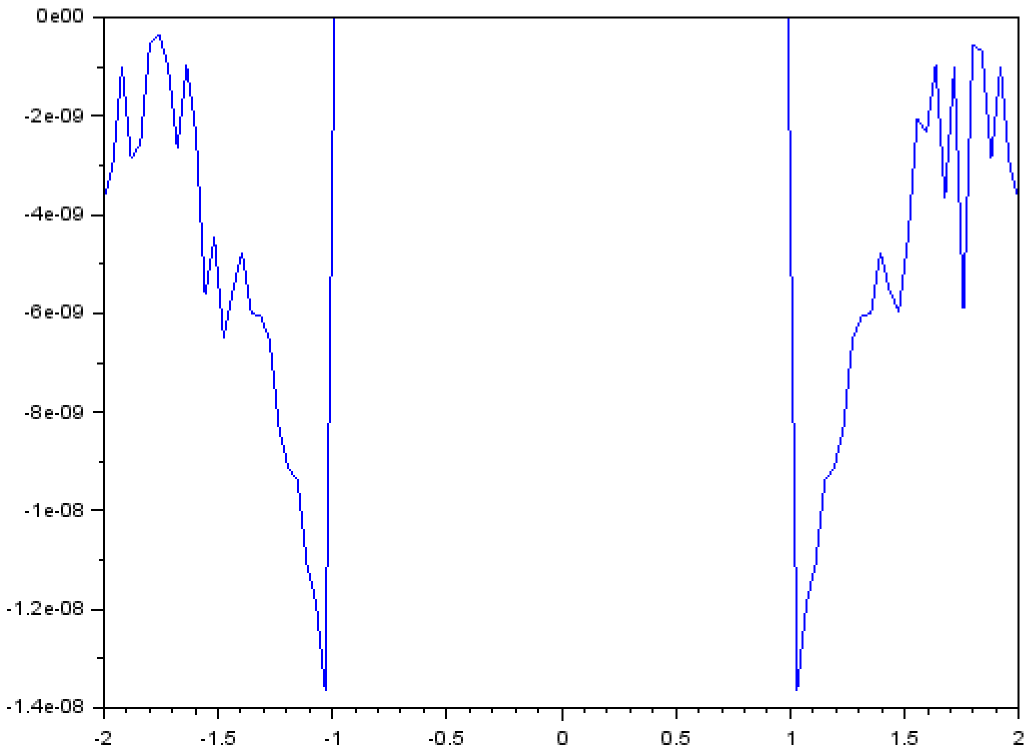

FIGURE 2.7 – Différence entre le membre de gauche et le membre de droite

2.5 Stabilité des solutions de viscosité

Soient F_n , $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des applications données.

Théoréme 2.2 ***(Stabilité)*** *On suppose que (u_n) est une suite de sous-solutions continues de*

$$F_n(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \qquad x \in \Omega \tag{2.5}$$

qui converge uniformément vers une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dans tous les compacts de Ω et que (F_n) converge uniformément vers F sur tous les compacts de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_{n,n}$ Alors u est encore une sous-solution de (2.5)

Remarque 2.4 *Un résultat symétrique est aussi vrai pour les sur-solutions et pour les solutions. Noter qu'un tel résultat est assez étonnant, puisqu'il affirme que l'on peut passer à la limite dans une équation avec seulement une hypothése de convergence uniforme.*
La démonstration nécessite quelques remarques préliminaires.

Lemme 2.1 *On peut remplacer "maximum local" (respectivement "minimum local") par "maximum local strict" (resp. "minimum local strict") dans la définition de sous-solution (resp. sur-solution).*

Preuve : On ne fait la preuve que dans le cas des sous-solutions, le cas des sur-solutions pouvant *être* traitédefa¸conidentique. On suppose que u est scs et que, pour toute fonction-test $\varphi \in C^2$ telle que $u - \varphi$ aun maximum local strict en un point $x_0 \in \Omega$,on a $F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$
Pour montrer que u est sous-solution, supposons que $u - \varphi$ a un maximum local en un point $x_0 \in \Omega$.
Posons

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + \|x - x_0\|^4.$$

Alors $u - \varphi_1$ a un maximum local strict en x_0 , et donc $F(x_0, u(x_0), D\varphi_1(x_0), D^2\varphi_1(x_0)) \leq 0$ par hypothése.
Or $D\varphi_1(x_0) = D\varphi(x_0)$ et $D^2\varphi_1(x_0) = D^2\varphi(x_0)$. D'où $F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0$

Le lemme suivant est pratiquement à la base de tous les arguments de stabilité et de perturbation, et *connaîtra* de multiples variantes par la suite.

Lemme 2.2 *Si une fonction continue $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ posséde un maximum local strict en un point x_0 et si une suite de fonctions continues (v_n) converge localement uniformément vers v, alors il existe une suite (x_n), avec x_n maximum local de v_n , qui converge vers x_0 .*

Preuve : Puisque la fonction continue v posséde un maximum strict en x_0 , il existe $r > 0$ tel que $B_{2r}(x_0)$ la boule ouverte centrée en x_n et de rayon 2r, est contenue dans Ω et telle que :

$$v(x_0) = max_{B_r(x_0)} v > max_{\partial B_r(x_0)} v$$

Comme (v_n) converge localement uniformément vers v, il existe un indice n_0 tel que $v_n(x_0) > max_{\partial B_r(x_0)} v_n$ pour tout $n \geq n_0$.
Mais alors v_n posséde un maximum local en un point x_n de $B_r(x_0)$. Reste à prouver que (x_n) converge vers x_0 . Soit y un point d'adhérence de la suite bornée (x_n) .
Comme pour tout $z \in \overline{B_r x_0}$, $v_n(x_n) \geq v_n(z)$,et comme v_n converge localement uniformément vers v, on a, en passant à la limite, $v(y) \geq v(z)$.
Donc y est un point de maximum de v dans $B_r(x_0)$ ce qui prouve que $y = x_0$ puisque x_0 est le seul point de maximum de v dans $B_r x_0$. La suite bornée (x_n) n'ayant qu'un seul point d'adhérence, x_n, elle converge vers x_0.
Preuve du théoréme
Soit une fonction-test $\varphi \in C^2$ telle que $u - \varphi$ posséde un maximum local strict en un point x_0. Alors, comme $u_n - \varphi$ converge localement uniformément vers $u - \varphi$, il existe une suite x_n qui converge vers x_0 ,et telle que x_n est un maximum de $u_n - \varphi$ pour tout n. Comme u_n est une sous-solution de (2.5) , on a $F_n(x_n, u_n(x_n), D\varphi(x_n), D^2\varphi(x_n)) \leq 0$,La suite (F_n) convergeant localement uniformément vers F, on peut passer à la limite pour obtenir $F(x_0, u_n(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0$
On utilise généralement ce résultat de la fa¸con suivante. On considére une suite de problémes-pour fixer les idées des problémes de Dirichlet par exemple :

$$\begin{cases} F_n(x, u, Du, D^2u) = 0 & dans \quad \Omega \\ u = g_n & sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

On suppose que (u_n) sont des solutions de ces problémes, que les données au bord convergent uniformément, et que les F_n convergent localement uniformément vers une fonction F Sous certaines hypothéses sur les (F_n), on démontre que les (u_n) sont localement uniformément continus (par exemple équi-Lipschitziens) dans Ω. On extrait une sous-suite convergente vers une limite u. Le théoréme 2.2 affirme alors que u est une solution de viscosité de

$$\begin{cases} F(x, u, Du, D^2u) = 0 & dans \quad \Omega \\ u = g & sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Le point-clé de la démonstration consiste à prouver que u est l'unique solution de cette équation. Nous nous attacherons par la suite à donner des hypothéses de structure sur F pour que ce soit bien le cas (voir les théorémes de comparaison plus loin). Alors, toute sous-suite convergente de la suite (u_n) convergera vers u, ce qui prouvera la convergence de la suitée.
En fait, pour obtenir le théoréme 2.2 ainsi que faire la démarche décrite au-dessus, l'hypothése de convergence uniforme de un vers u est inutilement forte.
On peut en effet se contenter d'une borne uniforme sur les solutions. Pour expliquer cela, nous introduisons la technique des "semi-limites relaxées" de Barles et Perthame. Soit (u_n) une suite de fonctions localement uniformément majorées (resp. minorées) dans Ω. On définit la semi-limite relaxée supérieure (resp. inférieure) par

$$u^* = \limsup_{x_n \to x} u_n(x_n) \qquad \forall x \in \Omega$$

$$u_* = \liminf_{x_n \to x} u_n(x_n) \qquad \forall x \in \Omega$$

Il est aisé de prouver que u^* est scs tandis que u_* est sci. Le théoréme de stabilité 2.2 s'adapte trés bien à ce type de convergence :

Théoréme 2.3 ***(Stabilité par semi-limites relaxées)*** *On suppose que (u_n) est une suite de sous-solutions localement uniformément majorées de (2.5) , et que (F_n) converge uniformément vers F sur tous les compacts de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_{n,n}$ .Alors u^* est encore une sous-solution de (1.2)*
De même, si (u_n) est une suite de sur-solutions localement uniformément minorées de (2.5), et si (F_n) converge uniformément vers F sur tous les compacts de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_{n,n}$ alors u_* est encore une sur-solution de (1.2).

Chapitre 3

Les solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi

Les équations de Hamilton-Jacobi sont de la forme :

$$\partial_t u + H(t, x, u, Du) = 0$$

Ces équations apparaissent naturellement dans de nombreux domaines. En physique, en économie, ou encore en épidémiologie [5].
Ceci a amené pierre Louis Lions un mathématicien français, professeur l'université paris Dauphine à développer avec son collègue Michael G. Crandall la théorie des solutions de viscosités au début des années 1980.
Ces solutions ont résolu beaucoup de diffcultés et restent aujourd'hui au centre de domaines de recherche actifs.
Dans ce chapitre nous intéressons l'équation :

$$\partial_t u + H(t, x, u, Du) = 0$$

Où

$$H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est le Hamiltonien.}$$

Définition 3.1 *Soit l'équation suivante :*

$$\partial_t u + H(t, x, u, Du) = 0 \tag{3.1}$$

avec condition initiale

$$u_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}. \textit{ Donc } u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$u(0, x) = u_0(x) \textit{ et } H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

est une fonction continue.

Définition 3.2 *Soit* $u \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

1. *On dit que u est une sous-solution de viscosité pour (3.1) si pour tout* $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *on a :* $u - \varphi$ *admet un maximum local en (t,x) un point de* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$*,alors*

$$\partial_t \varphi(t, x) + H(t, x, u(t, x), D\varphi(t, x)) \leq 0 \tag{3.2}$$

2. *On dit que u est une sur-solution de viscosité pour (3.1) si pour tout* $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *on a :* $u - \varphi$ *admet un minimum local en (t,x) un point de* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$*,alors*

$$\partial_t \varphi(t, x) + H(t, x, u(t, x), D\varphi(t, x)) \geq 0 \tag{3.3}$$

3. *u est une solution de viscosité si elle vérifie la fois (3.2) et (3.3)*

Remarque 3.1 *Si une solution de viscosité est différentiable en (t,x) alors elle vérfiée exactement (3.4) .*
Dans la suite on va montrer des résultats d'existence et d'unicité dans le cas

$$\begin{cases} \partial_t u + H(t,x,u,Du) = 0 \\ u(0,.) = u_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

3.1 Existence des solutions de viscosité par l'équation Hamilton-Jacobi

Dans cette partie nous allons présenter la méthode dite en anglais "vanishing viscosity" qui est l'origine du nom des solutions de viscosité et qui garantit l'existence de ce type de solution [1].
Comme on l'a vu, le probléme (3.4) n'admet pas en général des solutions classiques. Fixons $\epsilon > 0$ et ajoutons un terme notre équation qui va nous permettre de la régulariser :

$$\partial_t u_\epsilon + H(t,x,u_\epsilon,Du_\epsilon) = \epsilon \Delta u_\epsilon \tag{3.5}$$

et

Δu_ϵ désigne la Laplace de u_ϵ

Avec des conditions initiales réguliéres, ce probléme admet une solution C^2
L'objectif de cette méthode est de faire tendre $\epsilon \longrightarrow 0$ et espérer qu'il existe u limites de cette suite de fonctions qui sera une solution au moins de viscosité pour notre problème
On aimerait, en fait, que cette convergence se fausse de maniére uniforme sur tout compact car dans ce cas on a un résultat d'existence

Théoréme 3.1 *Soient $(\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs convergents vers 0 et $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions C^2 une suite de fonctions solution de (3.5) pour $\epsilon = \phi(n)$ telle qu'il existe u :*

$$u_{\phi(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\|\cdot\|_\infty} u$$

sur tout compact
Alors u est une solution de viscosité du problème (3.4)

Remarque 3.2 *Dans la pratique on peut souvent se ramener à ces hypothèses en utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli. Nous reviendrons sur cette remarque en fin de paragraphe.*
Nous allons commencer par énoncer et prouver un lemme qui nous sera utile dans la preuve du théorème :

Lemme 3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$,soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $\varphi \in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ telle que $u - \varphi$ admet un maximum local strict en x.*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonction convergent uniformément vers u, alors il existe une suite de point $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} x \\ u_{\phi(n)}(x_n) \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} u(x) \\ u_n - \varphi \text{ admet un maximum local en } x_n\text{,partir d'un certain rang.} \end{cases}$$

Preuve
On se place dans les hypothèses du lemme. Comme $u - \varphi$ admet un maximum local strict en x, pour $p > 0$ assez petit, il existe $\epsilon_p > 0$ telle que :

$$|x - y| = p \Longrightarrow u(y) - \varphi(y) + \epsilon_p < u(x) - \varphi(x)$$

Et par l'uniforme convergence de u_n vers u, il existe $N_p \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \geq N_P, \forall z \in \Omega, \, |u_n(z) - u(z)| < \frac{\epsilon_p}{4}$$

On en conclut en utilisant les deux inégalités que :

$$|x - t| = p \Longrightarrow u_n(y) - \varphi(y) + \frac{\epsilon_p}{2} < u_n(x) - \varphi(x)$$

Ainsi on en conclut que $u_n - \varphi$ admet un maximum local x_n sur $\overline{B(x,p)}$. Et ceci est vrai pour tout $n > N_p$. D'autre part, comme ρ est arbitrairement petit on a $x_n \longrightarrow x$ et par l'uniforme convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers u, on a : $u_n(x_n) \longrightarrow u(x)$

Preuve : (du Théoréme)

On va montrer que pour tout $\varphi \in C^1$ telle que $u - \varphi$ admet un maximum local en (t,x) on ait

$$\partial_t\varphi(t,x) + H(t,x,D\varphi(t,x)) \leq 0 \tag{3.6}$$

Soit

$$u - \varphi \text{ admet un maximum local strict en (t,x)}$$

on pose

$$\text{pour tout } (s,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \text{ , } \zeta(s,y) = \varphi(s,y) + |y-x|^2 + |s-t|^2$$

on a que $u - \zeta$ admet un maximum local strict en (t,x).

De plus

$$\partial_x\zeta(t,x) = \partial_x\varphi(t,x) \text{ et } \partial_t\zeta(t,x) = \partial_t\varphi(t,x)$$

donc dans la suite de la preuve on suppose que $u - \varphi$ admet un maximum local strict en (t,x).

On suppose que C^2,Soit

$\epsilon > 0$ comme $u_{\phi(n)}$ converge vers u uniformément sur tout compact.

On peut donc appliquer le lemme précédent et donc il existe $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tel que

$$\begin{cases} (t_n,x_n) \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} (t,x) \\ u_{\phi(n)}(t_n,x_n) \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} u(t,x) \\ u_{\phi(n)} - \varphi \text{ admet un maximum local en } (t_n,x_n) \text{, à partir d'un certain rang.} \end{cases}$$

Ainsi

$$\partial_* u_{\phi(n)}(t_n,x_n) = \partial_*\varphi(t_n,x_n) \text{ où } * \in (t,x)$$

et

$$\Delta u_{\phi(n)}(t_n,x_n) \leq \Delta\varphi(t_n,x_n)$$

De plus comme $u_{\phi(n)}$ résout (3.1) on obtient :

$$\partial_t\varphi(t_n,x_n) + H(t_n,x_n,\partial_x\varphi(t_n,x_n)) \leq \phi(n)\Delta\varphi(t_n,x_n)$$

Si

$$n \longrightarrow +\infty \text{ et par continuité de H on en conclut (3.6)}$$

mais seulement pour $\varphi \in C^2$. Il reste alors étendre ce résultat pour $\varphi \in C^1$.
Soit $\varphi \in C^1$ telle que $u - \varphi$ admet un maximum local strict en (t,x) et comme $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suit de fonctions C^2 convergent uniformément vers φ sur tout compact
telle que leurs dérivées convergent aussi uniformément sur tout compact vers la dérivée de φ . et par le lemme précédent, il existe $(t_n^{'}, x_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} (t_n^{'}, x_n^{'}) \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} (t, x) \\ u_{\phi(n)}(t_n, x_n) \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} u(t, x) \\ u_{\phi(n)} - \varphi \text{ admet un maximum local en } (t_n^{'}, x_n^{'}), \text{ à partir d'un certain rang.} \end{cases}$$

Donc

$$\partial_t\varphi_n(t_n^{'}, x_n^{'}) + H(t_n^{'}, x_n^{'},\partial_x\varphi_n(t_n^{'}, x_n^{'})) \leq 0$$

Si

$$n \longrightarrow +\infty \text{ et par continuité de H on en conclut (3.6)}$$

On peut raisonner de la méme maniére pour obtenir linégalité inverse et en déduire que u est bien une solution de viscosité

Remarque 3.3 *Pour justifier l'existence d'une suite de fonctions C^2 telle qu'elle converge uniformément vers une fonction u et telle que la suite des dérivées converge uniformément vers la dérivée de u on fait appel au produit de convolution et aux suites régularisantes.*
En fait, on va admettre cela, la méthode dite de vanishing viscosity permet de construire une suite de fonction uniformément bornée et uniformément équicontinue indexée par ϵ. Donc par le théorème d'Arzelà-Ascoli, il est possible d'enextraire une suite qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction u et par le Théorème 3.1 cette limite est une solution de viscosité. On a donc bien l'existence d'au moins une solution de viscosité du problème

3.2 Unicité des solutions de viscosité par l'équation Hamilton-Jacobi

Nous allons dans cette partie présenter un résultat dunicité des solutions de viscosité. Dans un premier temps on va le montrer dans le cas où

$$H = H(x, p)$$

et ensuit étendre ce résultat où

$$H = H(t, x, p)$$

Théoréme 3.2 *Supposons que le Hamiltonien H satisfait les conditions de continuité de Lipschitz*

$$\begin{cases} |H(x, p) - H(x, q)| \leq C\,|p - q| \\ |H(x, p) - H(y, p)| \leq |x - y|\,(1 + |p|) \qquad\qquad (C > 0) \end{cases}$$

Alors,il existe au plus une solution de viscosité uniformément continue et bornée du problème (3.4)

Remarque 3.4 *En résumé, grâce à ce théorème on a l'unicité des solutions de viscosité uniformément continues et bornées. Et par la section précédente on a l'existence de solutions de viscosité seulement continues. Donc pour que les deux résultats concordent parfaitement il faudrait l'unicité des solutions de viscosité continues.*

corollaire 3.1 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, il existe au plus une solution de viscosité continue du problème (3.4)*

Preuve :
On suppose qu'il existe deux solutions de viscosité uniformément continues et bornées du problème (3.4) différentes,u et $\bar{u}$. On va dans un premier temps montrer que $u \leq \bar{u}$ par l'absurde : on suppose qu'il existe

$$(t^*, x^*) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n, \text{ telle que } u(t^*, x^*) > \bar{u}(t^*, x^*)$$

Etape 1
On pose

$$\sigma = sup \left\{ u(t,x) - \bar{u}(t,x) | u(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n \right\} > 0$$

Soit $(\epsilon, \lambda) \in]0,1[^2$, on pose
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\forall (t,s) \in [0,T]^2$
$\phi(t,s,x,y) = u(t,x) - \bar{u}(s,y) - \lambda(t+s) - \frac{1}{\epsilon^2}(|x-y|^2 + (t-s)^2) - \epsilon(|x|^2 + |y|^2)$.
Et comme u et $\bar{u}$ sont bornées, il existe (t_0, s_0, x_0, y_0) telle que :
$\phi(t_0, s_0, x_0, y_0) = max \left\{ \phi(t,s,x,y) \quad |(t,s,x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2 \right\}$.
Etape 2
On a

$$\phi(t_0, s_0, x_0, y_0) \geq sup \{ \phi(t,t,x,x) \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \} \tag{3.7}$$

On peut fixer ϵ et λ assez petit pour avoir :

$$sup \left\{ \phi(t,t,x,x) \quad |(t,x) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_2 \right\} \geq \frac{\sigma}{2} \tag{3.8}$$

D'autre part

$$\phi(t_0, s_0, x_0, y_0) \geq \phi(0,0,0,0)$$

d'où :

$$\bar{u}(0,0) - u(0,0) + u(t_0, x_0) - \bar{u}(s_0, y_0) \geq \lambda(t_0 + s_0) + \frac{1}{\epsilon^2}(|x_0 - y_0|^2 + (t_0 - s_0)^2 + \epsilon(|x|^2 + |y|^2)) \tag{3.9}$$

Maintenant en faisant tendre ϵ vers 0 par l'inégalité (3.9) on en déduit :

$$\begin{cases} |x_0 - y_0| = O(\epsilon) \\ |t_0 - s_0| = O(\epsilon) & (quand \quad \epsilon \longrightarrow 0) \end{cases} \tag{3.10}$$

De méme

$$\begin{cases} \epsilon |x_0|^2 = O(1) \\ \epsilon |y_0|^2 = O(1) & (quand \quad \epsilon \longrightarrow 0) \end{cases}$$

D'ou

$$\begin{cases} \epsilon^{\frac{1}{2}} |x_0|^2 = O(1) \\ \epsilon^{\frac{1}{2}} |y_0|^2 = O(1) & (quand \quad \epsilon \longrightarrow 0) \end{cases}$$

Donc

$$\epsilon^{\frac{1}{2}}(|x_0| + |y_0|) = O(1)$$

ainsi :

$$\epsilon(|x_0| + |y_0|) = O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) \tag{3.11}$$

Etape 3
Comme

$$\phi(t_0, s_0, x_0, y_0) \geq \phi(t_0, t_0, x_0, x_0)$$

on a

$$u(t_0,x_0)-\bar{u}(s_0,y_0)-\lambda(t_0+s_0)-\frac{1}{\epsilon^2}(|x_0-y_0|^2+|t_0-s_0|^2)-\epsilon(|x_0|^2+|y_0|^2) \geq u(t_0,x_0)-\bar{u}(s_0,x_0)-2\lambda t_0-2\epsilon|x_0|^2$$

$$\Longleftrightarrow \bar{u}(t_0,x_0)-\bar{u}(s_0,y_0)+\epsilon(x_0+y_0).(x_0-y_0)$$
$$\geq \frac{1}{\epsilon^2}(|x_0-y_0|^2+|t_0-s_0|^2) \tag{3.12}$$

Et en prenant en compte (3.10) et (3.11) et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et triangulaire, on déduit de(3.12) que $\epsilon(x_0+y_0).(x_0-y_0) \longrightarrow 0$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$ D'autre part, par uniforme continuité de $\bar{u}$ on a

$$\bar{u}(x_0,t_0)-\bar{u}(y_0,s_0) \longrightarrow 0$$

Donc :

$$\begin{cases} |x_0-y_0| = o(\epsilon) \\ |t_0-s_0| = o(\epsilon) \end{cases}$$

Etape 4 :
On note w le module de continuité de u et $\bar{w}$ celui de $\bar{u}$: On a donc $w(r) \longrightarrow 0$ quand $r \longrightarrow 0$ (de méme pour $\bar{w}$) et par (3.7) et (3.8) on a :

$$\frac{\sigma}{2} \leq \phi(t_0,s_0,x_0,y_0)$$

$$\leq u(t_0,x_0)-\bar{u}(s_0,y_0)$$

$$= u(t_0,x_0)-u(0,x_0)+u(0,x_0)-\bar{u}(0,x_0)$$

$$+\bar{u}(0,x_0)-\bar{u}(t_0,x_0)+\bar{u}(t_0,x_0)-\bar{u}(s_0,y_0)$$

$$\leq w(t_0)+\bar{w}(t_0)+\bar{w}(o(\epsilon))+0$$

Ainsi pour ϵ assez petit on déduit que $\frac{\sigma}{4} \leq w(t_0)+\bar{w}(t_0)$ et donc il existe $0<\mu<t_0$. On raisonne de la même manière pour obtenir $0<\mu<S_0$ quitte à réduire μ .Cela prouve que $t_0>0$ et que $s_0>0$
Etape 5 :
Considérons la fonction

$$h:(t,x) \longrightarrow \phi(t,s_0,x,y_0)$$

On sait qu'elle admet un maximum en (t_0,x_0) . Maintenant on pose $v=u-h$ On peut remarquer que v est C^1 et que $u-v$ admet un maximum en (t_0,x_0) .De plus, comme $t_0>0$ et que u est une solution, en particulier une sous-solution, de viscosité du problème (3.1)
on en déduit :

$$\partial_t v(t_0,x_0)+H(x_0,\partial_x v(t_0,x_0)) \leq 0$$

D'où :

$$\lambda+2\frac{t_0-s_0}{\epsilon^2}+H(x_0,\frac{2}{\epsilon^2}(x_0-y_0)+2\epsilon x_0) \leq 0 \tag{3.13}$$

On refait maintenant strictement le même raisonnement en considérant

$$\bar{h}:(s,y) \longrightarrow -\phi(t_0,s,x_0,y) \text{ qui admet un minimum en } (s_0,y_0)$$

On pose $\bar{v}=\bar{u}-\bar{h}$ et comme tout à l'heure, comme $\bar{u}$ est une solution, en particulier une sur-solution, de viscosité on en déduit que :

$$0 \leq -\lambda + 2\frac{t_0 - s_0}{\epsilon^2} + H(y_0, \frac{2}{\epsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\epsilon x_0) \tag{3.14}$$

Etape 6 :
Au vu des relations (3.13) et (3.14),on a :

$$2\lambda \leq H(y_0, \tfrac{2}{\epsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\epsilon y_0) - H(x_0, \tfrac{2}{\epsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\epsilon x_0)$$

Et donc par hypothèse sur H

$$\lambda \leq C\epsilon(|x_0| + |y_0|) + C\,|x_0 - y_0|\,(1 + \tfrac{|x_O - y_0|}{\epsilon^2} + \epsilon(|x_0| + |y_0|))$$

Et la quantité de droite converge vers 0 quand $\epsilon \longrightarrow 0$ donc on aboutit à la contradiction $0 < \lambda = 0$ ainsi $u < \bar{u}$
On prouve alors l'inégalité inverse en inversant le rôle de u et $\bar{u}$. Et donc $u = \bar{u}$.

Remarque 3.5 *Dans la preuve nous avons utilisé que le fait que u est sous-solution de viscosité et $\overline{u}$ est sur-solution de viscosité pour conclure que $u \leq \bar{u}$ quand ils ont la même condition initiale : la preuve repose sur un principe de comparaison.*

Remarque 3.6 *On peut facilement généraliser cette preuve au cas où $H = H(t, x, p)$. Il suffit au départ de prendre l'hypothèse : $|H(t, x, p) - H(t, y, p)| \leq C(|x - y| + |t - s|)(1 + |p|)$ et reprendre la preuve précédente.*

Preuve (du Corollaire)
Supposons qu'il existe deux solutions de viscosité u et $\bar{u}$ continues et diffiérentes du même problème alors il existe $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$ telle que $u(t, x) \neq \bar{u}(t, x)$ on peut donc appliquer le théorème d'unicité en considérant l'ensemble $[0, T] \times \overline{B(x, \epsilon)}$ avec T assez grand , puisque sur cet ensemble u et $\bar{u}$ sont uniformément continues et bornées, et aboutir à une contradiction.

3.3 Quelques résultats d'unicité classiques

Nous commençons par expliquer comment un tel principe se démontre, d'abord dans le cas des équations du premier ordre, puis, au dans le cas des équations du second ordre.

3.3.1 Une équation du premier ordre

Pour comprendre la première étape de la démonstration d'un principe de comparaison (le dédoublement des variables), nous commen¸cons par traiter le cas simple d'une équation du premier ordre de la forme :

$$H(x, u, Du) = 0 \qquad dans \quad x \in \Omega \tag{3.15}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait les hypothéses suivantes ,ils existe des constantes $\gamma > 0$ et $C \geq 0$ telles que :

1. $H(x, s_1, p) - H(x, s_2, p) \geq \gamma(s_1 - s_2) \quad \forall(x, s_1, s_2, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

2. $|H(x, s, p) - H(y, s, p)| \leq C(1 + |p|)\,|y - x| \quad \forall(x, y, s, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Voici le résultat que nous allons démontrer :

Théoréme 3.3 *Si u est une sous-solution de (3.15) est v une sur-solution de (3.15),et si*

$$u \leq v \ \ dans\ \partial\Omega$$

Alors

$$u \leq v \ dans \ \Omega \ .$$

Preuve : (voir [11]) La démonstration d'un principe de comparaison se fait (presque toujours) par labsurde. On suppose donc

$$\exists x \in \Omega \text{ tel que } u(x) > v(x)$$

On considère alors

$$M = sup_{x\in\Omega}(u-v)(x) > 0$$

Notons que le sup est en fait un max puisque louvert Ω est borné. En effet, en tout point x_0 de maximum de u-v, on a :

$$Du(x_0) = Dv(x_0) \text{ et } u(x_0) > v(x_0)$$

Or u et v étant respectivement sous-solution et sur-solution, alors

$$0 \geq H(x_0, u(x_0), Du(x_0)) - H(x_0, v(x_0), Dv(x_0)) \geq \gamma(u(x_0) - v(x_0))$$

d'après l'hypothèse (1) ce qui est absurde.
Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

$$w_\epsilon(x,y) = u(x) - v(x) - \tfrac{1}{\epsilon^2}\left|x-y\right|^2 \qquad (x,y) \in \Omega\times\Omega$$

Notons que w_ϵ est scs dans $\Omega\times\Omega$. Nous la prolongeons à $\bar\Omega\times\bar\Omega$ en posant

$$w_\epsilon(x,y) = limsup_{x',y'\longrightarrow(x,y),(x',y')\in\Omega\times\Omega} w_\epsilon(x^{'},y^{'}) \qquad \forall(x,y)\in(\bar\Omega\times\bar\Omega)/(\Omega\times\Omega).$$

Le lemme suivant affirme que la fonction w_ϵ au voisinage de son maximum et lorsque $\epsilon \longrightarrow 0^+$, se comporte comme la fonction u-v.

Lemme 3.2 *Soit* (x_ϵ, y_ϵ) *un maximum de* w_ϵ *dans* $\bar\Omega\times\bar\Omega$ *. Alors*

1. $lim_{\epsilon\longrightarrow0^+} w_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) = M$.

2. $lim_{\epsilon\longrightarrow0^+} \frac{2}{\epsilon}\left|x_\epsilon - y_\epsilon\right|^2 = 0$.

3. *Il existe* $\theta > 0$ *et* $x_\epsilon > 0$ *tels que, pour tout* $\epsilon\in]0,\epsilon_0[$, $d_{\partial\Omega}(x_\epsilon) \geq \theta$ *et* $d_{\partial\Omega}(y_\epsilon) \geq \theta$.

preuve du théorème Comme la fonction w_ϵ a un maximum au point $(x_\epsilon, y_\epsilon) \in \Omega\times\Omega$ la fonction

$$x \longrightarrow u(x) - [v(y_\epsilon) + \tfrac{1}{\epsilon^2}\left|x-y_\epsilon\right|^2] \text{ a un maximum au point } x_\epsilon.$$

En utilisant la fonction-test

$$\varphi(x) = v(y_\epsilon) + \tfrac{1}{\epsilon^2}\left|x-y_\epsilon\right|^2$$

et le fait que u est une sous-solution, on obtient

$$H(x_\epsilon, u(x_\epsilon), \frac{2}{\epsilon^2}(x_\epsilon - y_\epsilon)) \leq 0 \tag{3.16}$$

De *même*, la fonction

$$y \longrightarrow v(y) - [u(x_\epsilon) + \tfrac{1}{\epsilon^2}\left|y-x_\epsilon\right|^2] \text{ a un minimum en } y_\epsilon$$

et donc, comme v est une sur-solution

$$H(y_\epsilon, v(y_\epsilon), \frac{2}{\epsilon^2}(x_\epsilon - y_\epsilon)) \geq 0 \tag{3.17}$$

On fait la différence entre (3.16) et (3.17) et on utilise l'hypothése (1) pour parvenir à

$$0 \geq H(x_\epsilon, u(x_\epsilon), \tfrac{2}{\epsilon^2}(x_\epsilon - y_\epsilon)) - H(y_\epsilon, v(y_\epsilon), \tfrac{2}{\epsilon^2}(x_\epsilon - y_\epsilon))$$

$$\geq \gamma(u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon)) + H(x_\epsilon, v(y_\epsilon), \tfrac{2}{\epsilon^2}(x_\epsilon - y_\epsilon)) - H(y_\epsilon, v(y_\epsilon), \tfrac{2}{\epsilon^2}(x_\epsilon - y_\epsilon))$$

$$\geq \gamma M_\epsilon - C(1 + \tfrac{2}{\epsilon^2}|x_\epsilon - y_\epsilon|)|x_\epsilon - y_\epsilon|.$$

Lorsque $\epsilon \longrightarrow 0^+$, on obtient, grce au lemme, que $0 \geq \gamma M_\epsilon$ ce qui est impossible.

3.3.2 Une équation du second ordre

Soit l'équation suivante

$$H(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \qquad x \in \Omega \tag{3.18}$$

Dans toute cette partie, nous supposerons que Ω est un sous-ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$, que H elliptique et continue, et qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$H(t, p, X) - H(s, p, X) \geq \gamma(t - s) \qquad t > s \quad \forall (s, t, p, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times M_{n,n} \tag{3.19}$$

Rappelons d'abord le théorème que nous allons prouver :

Théoréme 3.4 *Si u et v sont respectivement une sous- et une sur-solution de (3.18) et si*

$$u \leq v \qquad dans\ \partial\Omega$$

Alors

$$u \leq v \qquad dans\ \Omega$$

La démonstration débute exactement comme la démonstration dans le premier ordre

3.4 La forme d'une solution de viscosité

Jusqu'ici, nous avons défini les solutions de viscosité puis justié leur existence comme leur unicité (dans certains cas).
Néanmoins, nous n'avons jamais donné une idée de leur forme, cest que nous nous proposons de faire dans cette dernière partie.

3.4.1 La Formule de Hopf-lax

Considérons le problème aux conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} H(x, u, Du) + u_t = 0 & sur \quad \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ u(0, x) = u_0(x) & sur \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Supposons que le Hamiltonien et g vérient les conditions suivantes :

1.
$$p \longrightarrow H(p) \quad est \quad convexe. \tag{3.20}$$

2.
$$lim_{|p| \longrightarrow \infty} \frac{H(p)}{|p|} = \infty. \tag{3.21}$$

3.
$$u_0 \quad est \quad une \quad fonction \quad lipchitzienne. \tag{3.22}$$

Transformée de Legendre

Définition 3.3 *Soit $L : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$L \quad est \quad convexe \quad et \quad \frac{L(q)}{|q|} \longrightarrow_{|q|\longrightarrow+\infty} +\infty \tag{3.23}$$

On définit la transformée de Legendre par :

$$L^*(p) = sup_{q\in\mathbb{R}^n}[p \cdot q - H(q)].$$

Exemple 3.1 *On prend par exemple*

$$L(q) = \frac{1}{2}q^2$$

Pour tout $q \in \mathbb{R}$ Dans ce cas

$$L^*(p) = sup_{q\in\mathbb{R}^n}(p \cdot q - \frac{1}{2}q^2).$$

Et par une étude de fonction le maximum est atteint pour $q = p$, ainsi :

$$L^*(p) = \frac{1}{2}q^2$$

3.4.2 Une forme de solution de viscosité

Théoréme 3.5 *Les solutions de viscosité sous la forme de Hopf-Lax*
Supposons qu'en plus des conditions précédentes, u_0 est bornée, dans ce cas, l'unique solution de viscosité du problème précédente est :

$$u(x,t) = min_{y\in\mathbb{R}^n}\left[tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + u_0(y)\right]. \tag{3.24}$$

Preuve :

1. u est une fonction lipchitzienne égale à u_0 en 0 et bornée. Il suffit t de vérifier que
$$tmin_{y\in\mathbb{R}^n}\left[L\left(\frac{x-y}{t}\right) + u_0(y)\right].$$
est bornée est lipchitzienne.
2. Soit $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,T]$ telle que u-v admet un maximum local en (x_0, t_0)
Montrons alors que
$$\forall t < t_0, u(x_0,t_0) = min_{x\in\mathbb{R}^n}[(t_0-t)L(\tfrac{x_0-x}{t_0-t}) + u(x,t)]$$
En effet
$\forall t < t_0, min_{x\in\mathbb{R}^n}[(t_0-t)L(\frac{x_0-x}{t_0-t})+u(x,t)] = min_{x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}^n}[(t_0-t)L(\frac{x_0-x}{t_0-t})+tL(\frac{x-y}{t})+u_0(y)] \leq u(x_0,y_0)$
en prenant $y = x_0$ d'autre part,
$$(t_0-t)L(\tfrac{x_0-x}{t_0-t}) + tL(\tfrac{x-y}{t}) + u_0(y) \geq sup_{p\in\mathbb{R}^n}[p \cdot (x_0-y) - t_0H(p) + u_0(y)]$$
car
$$sup_pU(p) + sup_pV(p) \geq sup_p[U(p) + V(p)].$$
Ainsi
$$(t_0-t)L(\tfrac{x_0-x}{t_0-t}) + tL(\tfrac{x-y}{t}) + u_0(y) \geq u(x_0,t_0)$$
Or u-v admet un maximum local en (x_0, t_0), donc suffisamment proche de (x_0, t_0)
$$v(x_0,t_0) - v(x,t) \leq (t_0,t)L(\tfrac{x_0-x}{t_0-t})$$
Notons

$$\begin{cases} h = t_0 - t \\ q = \frac{x_0 - x}{t_0 - t} \end{cases}$$

Alors, en divisant par h puis en faisant tendre h vers 0 :

$$v_t(x_0, y_0) + Dv(x_0, y_0) \cdot q \leq L(q)$$

Ceci étant vrai pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, on a

$$sup_q[v_t(x_0, t_0) + Dv(x_0, t_0) \cdot q - L(q)] \leq 0$$

alors

$$v_t(x_0, t_0) + H[Dv(x_0, t_0)] \leq 0$$

donc u est une sous-solution de viscosité du problème considéré. Pour vérifier que u est une sur-solution exactement le *même*. Par conséquent, u est une solution de viscosité du problème considéré

Exemple 3.2 *Si*

$$L(q) = \frac{1}{2}q^2 \ \ et \ g(y) = y$$

Alors la formule de Hopf-lax nous donne :

$$u(x, t) = min_{y \in \mathbb{R}^d}[\frac{t}{2}L(\frac{x-y}{t})^2 + y \quad |y \in \mathbb{R}].$$

Et pour x et t fixé, une étude de fonction nous montre que le minimum est atteint pour $y = x - t.ainsi$

$$u(t, x) = x - \frac{t}{2}$$

Théoréme 3.6 *Sous les hypothèses (3.22) et (3.24) avec le Hamiltonien $H = L^*$, u est une solution de viscosité du problème :*

$$\partial_t u + H(x, u, Du) = 0$$

avec pour condition initiale $u(0, .) = u_0$

Preuve :

On va applique la définition de solution de viscosité et $u(0, .) = u_0$ et que u est Lipchitzienne.
Soit $v \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ telle que u-v admet un maximum local en $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.
Comme on veut prouver que u est un solution de viscosité, il faut montrer que

$$\partial_t v(t_0, x_0) + H(\partial_x v(t_0, x_0)) \leq 0$$

par le lemme précédent, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, t_0), u(t_0, x_0) \leq (t_0 - t)L(\frac{x_0 - x}{t_0 - t}) + u(t, x) \tag{3.25}$$

d'autre partir, $u - v$ admet un maximum local en (t_0, x_0) , on a

$$u(t, x) - v(t, x) \leq u(t_0, x_0) - v(t_0, x_0)$$

donc par (3.25) , on obtient pour $t < t_0$

$$v(t_0, x_0) - v(t, x) \leq (t_0 - t)L(\frac{x_0 - x}{t_0 - t}). \tag{3.26}$$

Maintenant posons $h = t_0 - t$ et $x = x_0 - h \cdot q(q \in \mathbb{R}^n)$: Avec ces notations on réécrit (3.26) :

$$v(t_0, x_0) - v(t_0 - h, x_0 - hq) \leq hL(q)$$

alors

$$\frac{1}{h}(v(t_0,x_0)-v(t_0-h,x_0-hq)) \leq L(q).$$

En faisant tendre $h \longrightarrow 0$, on obtient :

$$\forall q \in \mathbb{R}^n, \partial_t v(t_0,x_0)+\partial_x v(t_0,x_0)\cdot q - L(q) \leq 0$$

Donc

$$\partial_t v(t_0,x_0)+H(\partial_x v(t_0,x_0)) \leq 0$$

donc u est une sous-solution de viscosité du problème considéré. Pour vérifier que u est une sur-solution exactement le *même*. Par conséquent, u est une solution de viscosité

Exemple 3.3 *Dans le cas on a :*

$$u_0 : x \in \mathbb{R} \longmapsto -cos(x)$$

et

$$L : p \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{2}p^2$$

Alors par le théorème précédent :

$$u(t,x) = min\left\{\frac{t}{2}(\frac{x-y}{t})^2 - cos(y) \quad | y \in \mathbb{R}\right\}$$

Est l'unique solution de viscosité du problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2}(Du)^2 = 0 \\ u(0,x) = -cos(x) \quad , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié le principe et les notions de solution de viscosité , Par rapport aux solutions classiques et faible connu dans la littérature.
Des exemples d'illustration ont été présentés dans ce travail notamment l'équation dite ≪ eikonal ≫.
Nous avons également détaillé la résolution de l'equation de Hamilton-Jacobi quin admettent des soltuions de viscosité.
En les comparant évidemment avec les autres type des solutions classiques et faibles

Bibliographie

[1] Martino Bardi and Italo Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations.* Springer Science & Business Media, 2008.

[2] Guy Barles. Solutions de viscosité et équations elliptiques du deuxieme ordre. *Lecture notes available at http ://www. lmpt. univ-tours. fr/˜ barles/Toulcours. pdf*, 1997.

[3] Alberto Bressan. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations and optimal control problems. *Lecture notes*, 2011.

[4] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer Science & Business Media, 2010.

[5] Gianmarco Capitanio. *Familles tangentielles et solutions de minimax pour l'équation de Hamilton-Jacobi.* PhD thesis, Université Paris-Diderot-Paris VII, 2004.

[6] Michael G Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. Users guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American mathematical society*, 27(1) :1–67, 1992.

[7] Michael G Crandall and Pierre-Louis Lions. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Transactions of the American mathematical society*, 277(1) :1–42, 1983.

[8] Federica Dragoni. Introduction to viscosity solutions for nonlinear pdes, 2018.

[9] Jérôme Droniou and Cyril Imbert. Solutions de viscosité et solutions variationnelle pour edp non-linéaires. *Cours de DEA, Département de Mathématiques, Montpellier II*, 2002.

[10] Pedro Ferreira and Sylvie Mas-Gallic. Equations aux dérivées partielles. 2001.

[11] SN Kružkov. First order quasilinear equations in several independent variables. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 10(2) :217, 1970.

[12] Vladimir Maz'ya. *Sobolev spaces.* Springer, 2013.