REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

N°d'ordre: ....

THESE DOCTORAT

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Equations différentielles et aux dérivées partielles

Thème

Solutions faibles des problèmes aux limites associés aux équations différentielles d'ordre fractionnaire

Présenté par :

BENMEDDOUR Mohamed Ourabah

Soutenu le 02 / 11 / 2023, devant le jury:

GASMI Abdelkader	Pr	Université de M'sila	Président
SAADI Abderachid	MCA	Université de M'sila	Encadreur
MOKHTARI Abdelhak	MCA	Université de M'sila	Examinateur
DAHIA Elhadj	Pr	ENS de Boussada	Examinateur
RAHMOUNE Abdelaziz	MCA	Université de Laghouat	Examinateur
YAZID Fares	MCA	Université de Laghouat	Examinateur

بسم الله الرحمن الرحيم

كلمة شكر

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم:

﴿ من لا يشكر الناس لا يشكر الله ﴾

أخرجه أحمد والترمذي وصححه الألباني.

عملا بهذا الحديث الشريف أتقدم بشكري الجزيل إلى:

- **الأبوين الكريمين**
- **أعضاء لجنة المناقشة**
- **الأساتذة الذين درسوني في مختلف الأطوار**
- **كل من أعانني على إنجاز هذا العمل من قريب أو بعيد**

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

$AC(a,b)$	:	espace des fonctions absolument continues sur (a,b),
$C([a,b])$	:	espace des fonctions continues sur $[a,b]$,
$C^n([a,b])$	:	espace des fonctions continument dérivables d'ordre n sur $[a,b]$,
$C^\infty([a,b])$	:	espace des fonctions infiniment dérivables sur $[a,b]$,
$C_c^\infty(]a,b[)$	:	espace des fonctions infiniment dérivables, a support compact dans $]a,b[$,
$L^p(a,b)$	:	espace de Lebesgu sure $]a,b[(1 \leq p \leq \infty)$,
$W^{1,p}(a,b)$	:	espace de Sobolev sure $]a,b[(1 \leq p < \infty)$,
$I_{a^+}^\alpha f, I_{b^-}^\alpha f$	:	intégral à gauche et à droite de Riemann-Liouville,
$D_{a^+}^\alpha f, D_{b^-}^\alpha f$	:	dérivée à gauche et à droite de Riemann-Liouville,
${}^H I_{a^+}^\alpha f, {}^H I_{b^-}^\alpha f$	:	intégral à gauche et à droite d'Hadamard,
${}^H D_{a^+}^\alpha f, {}^H D_{b^-}^\alpha f$	:	dérivée à gauche et à droite de d'Hadamard,
${}^\sigma I_{a^+}^\alpha f, {}^\sigma I_{b^-}^\alpha f$	:	intégral à gauche et à droite $\sigma -$ généralisée,
${}^\sigma D_{a^+}^\alpha f, {}^\sigma D_{b^-}^\alpha f$	:	dérivée à gauche et à droite $\sigma -$ généralisée,
${}^\rho I_{a^+}^\alpha f, {}^\rho I_{b^-}^\alpha f$	:	intégral à gauche et à droite de Katugampola,
${}^\rho D_{a^+}^\alpha f, {}^\rho D_{b^-}^\alpha f$	:	dérivée à gauche et à droite de de Katugampola,
$W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$	:	espace de Sobolev fractionnaire de Riemann-Liouville,
${}^H W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$	:	intégral à gauche et à droite d'Hadamard,
${}^\sigma W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$	:	espace de Sobolev fractionnaire $\sigma -$ généralisée,
${}^\rho W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$	:	espace de Sobolev fractionnaire de Katugampola.

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire joue un rôle crucial dans la modélisation de phénomènes réels qui présentent une variabilité globale et impliquent des dépendances historiques, des interactions à longue distance et des facteurs héréditaires. Contrairement au calcul classique qui se concentre sur les changements locaux de dynamique, le calcul fractionnaire permet de capturer ces aspects globaux et complexes. Dans la littérature, il existe plusieurs versions d'intégrales et de dérivées fractionnaires, chacune ayant ses propres avantages et inconvénients. Parmi les versions les plus couramment utilisées, on trouve les intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Riesz, Erdèlyi-Kober, Weyl et Hadamard. Chaque version est adaptée à la description de phénomènes spécifiques et présente des propriétés mathématiques distinctes. L'utilisation du calcul fractionnaire dans la construction de modèles mathématiques permet de mieux rendre compte de la complexité et de la richesse des phénomènes réels. Les équations différentielles/intégrales fractionnaires fournissent une formulation mathématique adaptée pour étudier les systèmes dynamiques et les processus qui présentent des caractéristiques non locales, des interactions à longue distance, une mémoire à long terme et d'autres phénomènes complexes. Ces modèles basés sur le calcul fractionnaire sont largement utilisés dans divers domaines scientifiques et d'ingénierie, tels que la physique, la biologie, l'économie, la finance, l'ingénierie des matériaux, la théorie du contrôle, etc. Ils permettent de représenter de manière plus précise et réaliste les phénomènes étudiés, en tenant compte de la variabilité globale et des dépendances historiques

[9, 11, 19, 26, 27, 28, 29, 30].

Effectivement, les problèmes à deux points associés à des équations différentielles du second ordre ont été étendus aux équations d'ordre fractionnaire entre 1 et 2. Ces problèmes ont fait l'objet de nombreuses études dans la recherche mathématique, tant dans les travaux anciens que dans les développements modernes. Dans le contexte des équations différentielles d'ordre fractionnaire, le concept de solution faible revêt une importance particulière. Plusieurs formules de solutions faibles ont été découvertes en fonction des équations spécifiques étudiées. Ces solutions faibles ont attiré une grande attention de la part des chercheurs en utilisant des approches variationnelles et la théorie des points critiques.

La présence d'une solution faible pour les équations fractionnaires d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x}(u, D_{-}u^{\alpha}, t) + D_{+}^{\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial y}(u, D_{-}u^{\alpha}, t)\right) = 0,$$

a été examiné par Bourdin [4]. Jarad et al. [15] exploré le même problème d'Euler-Lagrange en utilisant une dérivée fractionnaire généralisée de type Caputo.

Chen et Liu assurent l'existence de trois solutions faibles pour le problème $p-$Laplacien dans leur article [8]. On découvre des œuvres supplémentaires dans [25] et [16] pour les systèmes, respectivement.

Dans [23, 24], les auteurs ont étudié un problème aux limites non linéaire du type :

$$\begin{cases} D_{-}^{\alpha}(D_{+}^{\alpha}u(t)) = \nabla F(t, u(t)), \text{ in } (0, T), \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases}$$

Dans un problème classique à deux points avec des conditions de Dirichlet :

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda(x)u(x) = f(x), \text{ in } (a, b), \\ u(a) = u_a, \ u(b) = u_b, \end{cases} \tag{1}$$

s'il existe une solution faible du problème (1), il appartient à un espace Sobolev adapté à ce type de problèmes, c'est l'espace $H^1(a, b)$, qui est un espace parmi les espaces de Sobolev $W^{1,p}(a, b)$ basé sur les espaces de Lebesgue $L^p(a, b)$. Il est évident d'essayer de trouver des espaces adaptés à des problèmes de frontière similaires, mais associé à des équations d'ordre fractionnaire :

$$(P') \quad \left(D_{b^-}^{\alpha}\left(D_{a^+}^{\alpha}u\right)\right)(x) + \lambda(x)u\left(x\right) = f\left(x\right), \text{ dans } (a,b).$$

Un espace de Sobolev classique $W^{1,p}(a,b)$ où $(a,b) \subset \mathbb{R}$ est défini par (voir [1, 7]) :

$$W^{1,p}(a,b) = \left\{u \in L^p(a,b), \exists g \in L^p(a,b); \int_a^b u.\varphi' = -\int_a^b g.\varphi, \forall \varphi \in C_c^{\infty}(a,b)\right\}. \qquad (2)$$

On peut définir l'espace de Sobolev $W^{1,p}(a,b)$ d'ordre $n > 1$ par :

$$W^{n,p}(a,b) = \{u \in W^{n-1,p}(a,b), u' \in W^{n-1,p}(a,b)\}. \qquad (3)$$

Cependant, un espace de Sobolev $W^{n,p}(a,b)$ peut être décrit (voir [14]) comme suivant : $W^{n,p}(a,b) = AC^{n,p}(a,b)$, où $AC^{n,p}(a,b)$ est l'espace des fonctions f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ tel qu'il existe $c_0, c_1, \cdots c_{n-1}$ et $\varphi \in L^p(a,b)$ vérifiant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \varphi(t)dt, x \in [a,b] \; p.p. \qquad (4)$$

Cet espace a une généralisation à l'espace $AC^{\alpha}(a,b); (n-1 < \alpha < n)$ des fonctions f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ tel qu'il existe $c_0, c_1, \cdots c_{n-1}$ et $\varphi \in L^p(a,b)$ vérifiant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k}{\Gamma(\alpha-n+1+k)}(x-a)^{\alpha-n+k} + I_{a^+}^{\alpha}\varphi, x \in [a,b] \; p.p, \qquad (5)$$

où $I_{a^+}^{\alpha}$ désignent l'intégrale gauche de Riemann-Liouville. Le travail était initialement axé sur la découverte des relations de confinement entre les espaces $AC^{\alpha}(a,b)$ (inclusions, injections, intégration par parties... voir [12, 13]), et plus tard, un ensemble de définitions d'espaces fractionnaires de Sobolev a été proposé (voir [14]).

Dans [5], une définition de l'espace de Sobolev fractionnaire basée sur $L^1(a,b)$ est donnée comme suivant :

$$W_{a^+}^{\alpha,1}(a,b) := \{u \in L^1(a,b); I_{a^+}^{1-\alpha}u \in W^{1,1}(a,b)\},$$

$$W_{b^-}^{\alpha,1}(a,b) := \{u \in L^1(a,b); I_{b^-}^{1-\alpha}u \in W^{1,1}(a,b)\},$$

qui est ensuite étendu à $W^{\alpha,p}$ (voir [10]).

Dans [14], les auteurs établissent un espace de Sobolev fractionnaire via l'approche Riemann-Liouville. Ils ont donné des propriétés topologiques, des inclusions et injections, puis appliqué ces résultats à des problèmes à deux points liés à ces espaces. D'autres propriétés et résultats sont traités dans les articles [5], [6], [12], [13].

Dans notre travail, nous aborderons le traitement des problèmes à deux points dans un intervalle borné en utilisant différentes approches, selon la méthodologie suivante :

i) Dans le premier chapitre, nous présenterons les définitions et les résultats préliminaires qui seront nécessaires pour les chapitres ultérieurs. Ces fondements théoriques nous permettront d'établir les bases nécessaires à notre étude.

ii) Dans le deuxième chapitre, nous fournirons un rappel et des compléments sur le calcul fractionnaire. Nous examinerons les différentes versions d'intégrales et de dérivées fractionnaires, et nous étudierons leurs propriétés spécifiques. Cela nous permettra de mieux comprendre les concepts fondamentaux du calcul fractionnaire, qui seront utilisés dans notre étude.

iii) Dans le troisième chapitre, nous nous concentrerons sur la présentation de différents types d'espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire. Nous aborderons les espaces de Sobolev de Riemann-Liouville, d'Hadamard, σ-généralisé et de Katugampola. Nous discuterons de leurs propriétés et de leurs applications potentielles dans la résolution de problèmes à deux points.

iv) Dans le quatrième chapitre, nous traiterons divers problèmes spécifiques. Nous aborderons un problème homogène de type Hadamard, un problème non homogène de type σ-généralisé, un problème de Sturm-Liouville de type Katugampola, ainsi qu'un problème p-laplacien de type Riemann-Liouville. Pour chaque problème, nous présenterons les formulations, les méthodes de résolution et les résultats pertinents. Enfin, nous fournirons une décomposition spectrale d'un opérateur de Sturm-Liouville de type Riemann-Liouville, ce qui permettra d'explorer plus en profondeur les propriétés spectrales de ce type d'opérateur.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous allons aborder des notions préliminaires de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées tout au long des chapitres suivants. L'introduction de ces notions préliminaires revêt une importance cruciale, car elle permettra aux lecteurs d'acquérir une compréhension solide des concepts fondamentaux nécessaires pour aborder les sujets plus avancés qui seront développés par la suite.

On va donner des idées clés sur quelques concepts reliées aux les espaces de Lebesgue et de Sobolev, les opérateurs linéaires compacts dans les espaces de Hilbert, notions de méthode variationnelle linéaire et non linéaire. L'importance de ces notions préliminaires réside également dans le fait qu'elles posent les bases nécessaires pour une compréhension plus avancée des concepts abordés par la suite.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b, 1 \leq p < +\infty$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $\sigma \in C^2([a,b])$ une fonction strictement croissante.

1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1 *On définit l'espace de Lebesgue :*

$$L^p(a,b) = \left\{ f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \, mesurable \ et \int_a^b |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

On a les propriétés suivantes :

i) $L^p(a,b)$ est un espace de Banach, muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(a,b)} = \left[\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}.$$

ii) $L^2(a,b)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(f,g)_{L^2(a,b)} = \int_a^b f(x) g(x) dx \, ; \quad \forall f, g \in L^2(a,b).$$

iii) $L^p(a,b)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.

iv) $L^p(a,b)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

Définition 1.2 *On définit*

$$L^\infty(a,b) = \{ f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R} \ mesurable, \ il \ existe \ c > 0 \, tel \ que \ |f(x)| \leq c, \ \ p.p. \ sur \ ]a,b[\}.$$

$L^\infty(a,b)$ est un espace de Banach, muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(a,b)} = \inf \{ c : |f(x)| \leq c, \ \text{ p.p. sur} \,]a,b[\}.$$

Proposition 1.1 (***Inégalité de Hölder***) *Soient $f \in L^p(a,b)$ et $g \in L^q(a,b)$, avec $1 \leq$*

$p, q \leq +\infty$ et q l'exposant conjugué de p c-à-d : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors, on a :

$$\begin{cases} f.g \in L^1(a,b), \\ \displaystyle\int_a^b |fg|\, dx \leq \|f\|_{L^p(a,b)} \|g\|_{L^q(a,b)}. \end{cases}$$

1.2 Espaces $X_c^p(a,b)$ et $X_\sigma^p(a,b)$

Définition 1.3 *[19] Supposons que $0 < a < b$ et soit $c \in \mathbb{R}$. L'espace $X_c^p(a,b)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :*

$$\int_a^b |x^c f(x)|^p \frac{dx}{x} < +\infty,$$

c'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{X_c^p(a,b)} = \left(\int_a^b |x^c f(x)|^p \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.2 *Soit $p > 1$, $q > 1$ l'exposant conjugué de p. Alors, pour $f \in X_c^p(a,b)$ et $g \in X_c^q(a,b)$ on a la version suivante de l'inégalité de Hölder :*

$$\|f.g\|_{X_c^1(a,b)} \leq \|f\|_{X_c^p(a,b)} \cdot \|g\|_{X_c^q(a,b)}.$$

Preuve. Soit $f \in X_c^p(a,b)$, $g \in X_c^q(a,b)$. On a :

$$\int_a^b |x^c f(x) g(x)| \frac{dx}{x} = \int_a^b \left| \frac{x^{\frac{c}{p}} f(x)}{x^{\frac{1}{p}}} \right| \left| \frac{x^{\frac{c}{q}} g(x)}{x^{\frac{1}{q}}} \right| dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder dans $L^p(a,b)$, on obtient :

$$\int_a^b \left| \frac{x^{\frac{c}{p}} f(x)}{x^{\frac{1}{p}}} \right| \left| \frac{x^{\frac{c}{q}} g(x)}{x^{\frac{1}{q}}} \right| dx \leq \left(\int_a^b \left| \frac{x^{\frac{c}{p}} f(x)}{x^{\frac{1}{p}}} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \left| \frac{x^{\frac{c}{q}} g(x)}{x^{\frac{1}{q}}} \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc : $\|f.g\|_{X_c^1(a,b)} \leq \|f\|_{X_c^p(a,b)} \cdot \|g\|_{X_c^q(a,b)}$. ■

Théorème 1.1 *Si* $0 < a < b < +\infty$, *alors :* $X_c^p(a,b) = L^p(a,b)$ *et les normes* $\|.\|_{L^p(a,b)}$, $\|.\|_{X_c^p(a,b)}$ *sont équivalentes.*

Preuve. Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors, on a :

$$\int_a^b |x^c f(x)|^p \frac{dx}{x} = \int_a^b x^{pc-1} |f(x)|^p \, dx.$$

On distingue les deux cas suivants

i) Pour $pc - 1 \geq 0$, on a :

$$a^{pc-1} \int_a^b |f(x)|^p \, dx \leq \int_a^b x^{pc-1} |f(x)|^p \, dx \leq b^{pc-1} \int_a^b |f(x)|^p \, dx.$$

Donc : $f \in X_c^p(a,b)$ si et seulement si $f \in L^p(a,b)$ et on a :

$$a^{c-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(a,b)} \leq \|f\|_{X_c^p[a,b]} \leq b^{c-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(a,b)}.$$

ii) Pour $pc - 1 < 0$, on a :

$$b^{pc-1} \int_a^b |f(x)|^p \, dx \leq \int_a^b x^{pc-1} |f(x)|^p \, dx \leq a^{pc-1} \int_a^b |f(x)|^p \, dx.$$

Donc : $f \in X_c^p(a,b)$ si et seulement si $f \in L^p(a,b)$ et on a :

$$b^{c-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(a,b)} \leq \|f\|_{X_c^p(a,b)} \leq a^{c-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(a,b)}.$$

■

Définition 1.4 *[19] L'espace* $X_\sigma^p(a,b)$ *est l'ensemble des fonctions mesurables* $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *telles que :*

$$\int_a^b |f(x)|^p \sigma'(x) dx < +\infty,$$

c'est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{X_\sigma^p(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \sigma'(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.3 *Soit $p > 1$, $q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors pour $f \in X_\sigma^p(a,b)$ et $g \in X_\sigma^q(a,b)$ on a la version suivante de l'inégalité de Hölder :*

$$\|f.g\|_{X_\sigma^1(a,b)} \leq \|f\|_{X_\sigma^p(a,b)} \cdot \|g\|_{X_\sigma^q(a,b)} \,.$$

Preuve. Soit $f \in X_\sigma^p(a,b)$, $g \in X_\sigma^q(a,b)$. Comme σ est strictement croissante on a : $\sigma' > 0$. Alors :

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\sigma'(x)dx = \int_a^b \left|(\sigma'(x))^{\frac{1}{p}} f(x)\right| \left|(\sigma'(x))^{\frac{1}{q}} g(x)\right| dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder dans $L^p(a,b)$, on obtient :

$$\int_a^b \left|(\sigma'(x))^{\frac{1}{p}} f(x)\right| \left|(\sigma'(x))^{\frac{1}{q}} g(x)\right| dx \leq \left(\int_a^b \left|(\sigma'(x))^{\frac{1}{p}} f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \left|(\sigma'(x))^{\frac{1}{q}} g(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc :

$$\|f.g\|_{X_\sigma^1(a,b)} \leq \|f\|_{X_\sigma^p(a,b)} \cdot \|g\|_{X_\sigma^q(a,b)} \,.$$

■

Théorème 1.2 *On a : $X_\sigma^p(a,b) = L^p(a,b)$ et les normes $\|.\|_{L^p(a,b)}$, $\|.\|_{X_\sigma^p(a,b)}$ sont équivalentes.*

Preuve. Comme $\sigma \in C^2([a,b])$ alors, $\sigma' \in C([a,b])$. Donc : il existent $m_\sigma > 0, M_\sigma > 0$ tels que $m_\sigma < \sigma'(x) < M_\sigma$ pour tout $x \in [a,b]$.

Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, alors on a :

$$m_\sigma \int_a^b |f(x)|^p\,dx \leq \int_a^b |f(x)|^p\,\sigma'(x)dx \leq M_\sigma \int_a^b |f(x)|^p\,dx,$$

Donc : $f \in X_c^p(a,b)$ si et seulement si $f \in L^p(a,b)$ et on a :

$$m_\sigma \|f\|_{L^p(a,b)} \leq \|f\|_{X_\sigma^p[a,b]} \leq M_\sigma \|f\|_{L^p(a,b)} \,.$$

■

1.3 Espaces de Sobolev classiques

Définition 1.5 *Soit $m \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(a,b)$ est l'espace des fonctions $f \in L^p(a,b)$ telles qu'il existe $g_1, g_2, ..., g_m \in L^p(a,b)$ vérifiant :*

$$\int_a^b f(x)\varphi^{(k)}(x)dx = \int_a^b g_k(x)\varphi(x)dx, \quad \textit{pour tout} \;\; \varphi \in C_c^{\infty}(a,b)$$

On a les propriétés suivantes :

i) Les fonctions $g_1, g_2, ..., g_m$ appelées les dérivées faibles de f. On peut écrire au sens de distribution : $f' = g_1, f'' = g_2, \cdots, f^{(k)} = g_m$.

ii) $W^{m,p}(a,b)$ est un espace de Banach, muni de la norme :

$$\|f\|_{W^{m,p}(a,b)} = \|f\|_{L^p(a,b)} + \sum_{k=1}^{m} \left\|f^{(k)}\right\|_{L^p(a,b)}.$$

iii) L'espace $W^{m,2}(a,b) = H^m(a,b)$ est un espace de Hilbert, muni de produit scalaire :

$$(f,g)_{H^m(a,b)} = \int_a^b f(x)g(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \int_a^b f^{(k)}(x)g^{(k)}(x)dx,$$

iv) $W^{m,p}(a,b)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$,

v) $W^{m,p}(a,b)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$.

Proposition 1.4 *[7] On a les injections suivantes :*

i) *$W^{1,p}(a,b) \hookrightarrow C([a,b])$ avec compacité pour $1 < p \leq +\infty$.*

ii) *$W^{1,p}(a,b) \hookrightarrow L^{\infty}(a,b)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.*

ii) *$W^{m,p}(a,b) \hookrightarrow C^{m-1}([a,b])$ pour $1 < p \leq +\infty$.*

iv) *$W^{1,1}(a,b) \hookrightarrow L^q(a,b)$ avec compacité pour $1 \leq q < +\infty$.*

1.4 Espace des fonctions absolument continues

Définition 1.6 *[14] On désigne par $AC^{1,p}(a,b)$ l'espace des fonctions primitives du fonctions de $L^p(a,b)$, i.e :*

$$AC^{1,p}(a,b) = \left\{ f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R} / \exists c \in \mathbb{R}, \varphi \in L^1([a,b]) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt \right\},$$

Il résulte directement que : $f(a) = c$ et pour tout $x \in]a,b[$ on a : $f'(x) = \varphi(x)$.
On désigne $AC(a,b) = AC^{1,1}(a,b)$ (l'espace des fonctions absolument continues sur $]a,b[$).

Remarque 1.1 *[7] Une fonction f de $AC(a,b)$ est caractérisée par :*
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite finie des intervalles disjoints $]a_k, b_k[\subset]a,b[$ vérifiant $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ on a : $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \delta$.

Définition 1.7 *[19] On note $AC^{n,p}(a,b)$ l'espace des fonctions f, qui sont $(n-1)$ continument dérivables telles que $f^{n-1} \in AC^{1,p}(a,b)$, i.e. :*

$$AC^{n,p}(]a,b[) = \{ f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R} : f^{n-1} \in AC^{1,p}(a,b) \}.$$

Remarque 1.2 *Si $1 \leq p < \infty$ alors : $AC^{1,p}(a,b) = W^{1,p}(a,b)$.*

Remarque 1.3 *On dit que $f \in AC^{n,p}(a,b)$ si et seulement il existe $c_0, c_1, \cdots c_{n-1}$ et $\varphi \in L^p(a,b)$ tels que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \varphi(t)dt, \ p.p. x \in [a,b].$$

1.5 Problème variationnel linéaire abstrait

H désigne un espace de Hilbert et H' son dual topologique.

Définition 1.8 *On dit que la forme bilinéaire a est :*

i) *continue s'il existe $M > 0$ tel que pour tous $u, v \in H$ on a : $|a(u,v)| \leq M \|u\|_H . \|v\|_H$,*

ii) *$\alpha-$ elliptique pour $\alpha > 0$ si pour tous $u \in H$ on a : $a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2$,*

iii) *symétrique si* $a(u,v) = a(v,u)$ *pour tout* $u, v \in H$.

Définition 1.9 *On dit que la forme linéaire* L *est continue et on écrit* $L \in H'$ *s'il existe* $c > 0$ *tel que pour tout* $v \in H$ *on a :* $|L(v)| \leq c\|v\|_H$,

Un problème variationnelle linéaire abstrait est un problème sous la forme :

$$a(u,v) = L(v), \qquad \forall v \in H,$$

où $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur H et L est une forme linéaire sur H.

Théorème 1.3 (***Stampacchia***) *[20] Soit* $a(.,.)$ *une forme bilinéaire symétrique, continue,* $\alpha-$ *elliptique et* K *un convexe fermé et non vide de* H.
Etant donné $L \in H'$. *Alors, il existe unique* $u \in K$ *tel que pour tout* $v \in K$ *on a*

$$a(u, v-u) \geq L(v-u).$$

Preuve. On définit la fonctionnelle $J : u \in H \mapsto a(u,u) - 2L(u)$.
J est continue, et on a d'après la continuité de L et la coercivité de a :

$$\begin{aligned} J(u) = a(u,u) - 2L(u) &\geq \alpha\|u\|^2 - 2\|f\|_{H'}.\|u\| \\ &\geq \alpha\|u\|^2 - 2\left(\frac{\|L\|_{H'}^2}{2\alpha} + \frac{\alpha\|u\|^2}{2}\right) \\ &= -\frac{\|L\|_{H'}^2}{\alpha} \end{aligned}$$

Donc : $d = \inf\limits_{u \in K} J(u) \in \mathbb{R}$. Il existe alors une suite $(u_n) \subset K$ telle que : $d \leq j(u_n) \leq d + \dfrac{1}{n}$.
Soit $n, m \in \mathbb{N}$. Alors :

$$
\begin{aligned}
a(u_n-u_m,u_n-u_m) &= 2a(u_n,u_n)+2a(u_m,u_m)-a(u_n+u_m,u_n+u_m),\\
&= 2a(u_n,u_n)+2a(u_m,u_m)-4a\left(\frac{1}{2}(u_n+u_m),\frac{1}{2}(u_n+u_m)\right),\\
&= 2J(u_n)-4L(u_n)+2J(u_m)-4L(u_m)\\
&\quad -4J\left(\frac{1}{2}(u_n+u_m)\right)+8L\left(\frac{1}{2}(u_n+u_m)\right),\\
&= 2J(u_n)+2J(u_m)-4L(u_n+u_m)-4J\left(\frac{1}{2}(u_n+u_m)\right)+4L(u_n+u_m),\\
&= 2J(u_n)+2J(u_m)-4J\left(\frac{1}{2}(u_n+u_m)\right).
\end{aligned}
$$

En remarquant que $\frac{1}{2}\left(u_n+u_m\right)\in K$, alors : $J\left(\frac{1}{2}(u_n+u_m)\right)\geq d$,

ce qui donne $-4J\left(\frac{1}{2}(u_n+u_m)\right)\leq -4d$.

Alors : de précédant, et la coercivité de a :

$$
\begin{aligned}
\alpha\|u_n-u_m\|^2 &\leq a(u_n-u_m,u_n-u_m)\\
&= 2J(u_n)+2J(u_m)-4J\left(\frac{1}{2}(u_n+u_m)\right)\\
&\leq 2\left(d+\frac{1}{n}\right)+2\left(d+\frac{1}{m}\right)-4d\\
&= 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right).
\end{aligned}
$$

La suite (u_n) est alors une suite de Cauchy, et comme K est fermé dans H (donc complet), la suite (u_n) est converge vers $u\in K$.

Puisque J est continue, $J(u_n)$ converge vers $J(u)=d$.

Soit $v\in K,\psi:t\in[0,1]\mapsto\psi(t)=I(u+t(v-u))$. K est convexe, $t\in[0,1]$, et $u,v\in K$.

Alors : $u+t(v-u)=tv+(1-t)u\in K$.

Donc : $\psi(t)=J(u+t(v-u))\geq J(u)=\psi(0)$ et

$$
\begin{aligned}
\psi(t) &= a(u+t(v-u),u+t(v-u))-2(Lu+t(v-u)),\\
&= a(u,u)+2ta(u,v-u)+t^2a(v-u,v-u)-2L(u)-2tL(v-u),\\
&= \psi(0)+2ta(u,v-u)+t^2a(v-u,v-u)-2tL(v-u).
\end{aligned}
$$

Comme $\psi(t)\geq\psi(0)$, on trouve : $2ta(u,v-u)+t^2a(v-u,v-u)-2tL(v-u)\geq 0$.

Donc : $a(u, v-u) \geq L(v-u) - \dfrac{t}{2} a(v-u, v-u)$.

Lorsque t tend vers 0 , on obtient $a(u, v-u) \geq L(v-u)$.

Donc : u est une solution du problème.

Soit maintenant $L_1, L_2 \in H'$, u_1 une solution du problème à L_1 et u_2 une solution du problème associé à L_2.

Comme $u_1, u_2 \in K$ on a :

$$a(u_1, u_1-u_2) \leq L_1(u_1-u_2), \qquad a(-u_2, u_1-u_2) \leq -L_2(u_1-u_2),$$

Alors :

$\alpha\|u_1-u_2\|^2 \leq a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leq (L_1-L_2)(u_1-u_2)$.

Si $L_1 = L_2 = L$ on trouve $u_1 = u_2$. ∎

Remarque 1.4 *Le théorème précédant reste vrais pour le cas générale de la forme bilinéaire a.*

Théorème 1.4 (***Lax-Milgram***) *[7] Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et $\alpha-$ elliptique sur H. Alors pour tout $L \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que :*

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

Si la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique, alors la solution unique u est caractérisé par la propriété,

$$\|u\|_H^2 - L(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} \|v\|_H^2 - L(v) \right\}.$$

1.6 Notions de la méthode variationnelle

Dans cette section, bien que nous ayons utilisé la référence [3] dans cette section, il existe plusieurs autres références précieuses traitant des concepts présentés, en particulier dans le domaine des problèmes d'optimisation et de minimisation. La consultation d'une gamme de sources permet d'obtenir une compréhension plus complète et d'explorer les développements les plus récents dans ce domaine.

Soit X un espace de Banach, U un ouvert de X et $J : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle.

Définition 1.10 *On dit que J est Fréchet différentiable au point $u \in U$ s'il existe $\ell(u) \in X'$ telle que* $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \dfrac{J(u+h) - J(u) - \ell(u)(h)}{\|h\|} = 0$.
On pose : $J'(u) = \ell(u)$.

Définition 1.11 *On dit que J est Gâteaux différentiable au point $u \in U$ s'il existe $\ell_G \in X'$ telle que pour toute $h \in X$ on a* $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{J(u+th) - J(u)}{t} = \ell_G(u)(h)$. *On pose :* $J'_G(u) = \ell_G(u)$

Proposition 1.5 *Si J est Gâteaux différentiable sur U et J'_G est continue au point u alors, J est Fréchet différentiable au point u et on a :* $J'_G = J'$.

Définition 1.12 *Supposons que J est Fréchet différentiable sur X. Un point critique de I est un point $u \in U$ tel que $J'(u) = 0$.*

Définition 1.13 *On dit que J est faiblement inférieurement semi-continue si pour toute suite $\{u_n\} \subset X$ converge faiblement vers $u \in X$, on a* $J(u) \leq \liminf\limits_{n \to +\infty} J(u_n)$.

Définition 1.14 *On dit que J est coercive si on a :* $\lim\limits_{\|u\| \to +\infty} J(u) = +\infty$.

Théorème 1.5 *Si J est Fréchet différentiable, coercive, et faiblement inférieurement semi-continue alors, J a un minimum global.*

1.7 Notions sur la théorie des opérateurs compacts

Dans cette section, nous avons présenté les notions qui sont largement couvertes dans le livre de référence [7] pour aborder la théorie des opérateurs linéaires. Cependant, il est important de souligner que ces notions sont également abordées dans plusieurs autres ouvrages qui traitent spécifiquement de la théorie des opérateurs linéaires.

Soit H un espace de Hilbert, muni de produit scalaire $(.,.)_H$ et la norme associée $\|.\|_H$. Soit T un opérateur linéaire de H dans H. On désigne pat I l'identité de H.

Définition 1.15 *On appelle base hilbertienne de H une suite $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ des éléments de H tels que :*

i) $\|w_n\|_H = 1$ *et* $(w_n, w_m)_H = 0$ *si* $n \neq m$.

ii) *vect*$\{w_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ *est dense dans* H.

Théorème 1.6 *Tout espace de Hilbert, séparable admet une base hilbertienne.*

Définition 1.16 *On dit que* T *est compact si l'image de la boule d'unité par* T *est relativement compact.*

Définition 1.17 **i)** *L'ensemble résolvante* $\rho(T)$ *est :*

$$\rho(T) = \{\kappa \in \mathbb{R} : (T - \kappa I) \textit{ est bijective sur} E\}.$$

ii) *Le spectre* $\sigma(T)$ *de l'opérateur* T *est* $\mathbb{R} \setminus \rho(T)$.

iii) *On appelle valeur propre tout* $\kappa \in \mathbb{R}$ *tel que* $\ker(T - \kappa I) \neq \{0\}$.
$\ker(T - \kappa I)$ *est appelé l'espace propre de* T *associé à* κ.

Proposition 1.6 *Soit* (κ_n) *une suite des réels distincts, tels que :*

$$\kappa_n \longrightarrow \kappa, \qquad\qquad \kappa_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}, \forall n.$$

Alors : $\kappa = 0$.

Définition 1.18 *On dit que* T *est autoadjoint si :*

$$\forall u, v \in H : (Tu, v) = (u, Tv).$$

On écrit : $T = T^*$.

Théorème 1.7 *On suppose que* H *est séparable et que* T *est autoadjoint, compact. Alors :* H *admet une base hilbertienne, formée des vecteurs propres de* T.

CHAPITRE 2

ÉLÉMENTS DE CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, notre objectif est de fournir des rappels et des compléments sur le calcul fractionnaire. Nous aborderons des concepts tels que l'intégration et la dérivation fractionnaires, ainsi que certains espaces fonctionnels associés à ce type de calcul. L'introduction de ces rappels et compléments permettra nous de consolider plusieurs connaissances sur le calcul fractionnaire et de mieux comprendre les aspects fondamentaux qui seront développés ultérieurement. Nous commencerons par revisiter les bases de l'intégration et de la dérivation fractionnaires, en mettant l'accent sur les particularités de ces opérations par rapport à leurs contreparties entières. Nous discuterons des propriétés et des applications spécifiques de ces opérations, afin de donner une vision globale du calcul fractionnaire. De plus, nous explorerons certains espaces fonctionnels de type fractionnaire, qui jouent un rôle crucial dans l'analyse des fonctions fractionnaires.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b, 1 \leq p < +\infty$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $\sigma \in C^2([a,b])$ une fonction strictement croissante.

2.1 Fonctions spéciales

Définition 2.1 *[19] On définit la fonction Gamma pour les valeurs positives comme suivant :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \ , \ (\alpha>0),$$

Proposition 2.1 *[19] Pour $\alpha>0, \ n \in \mathbb{N}$, on a :*

1. $\Gamma(1) = 1, \ \Gamma(0^+) = +\infty$,
2. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$,
3. $\Gamma(n+1) = n!$.

Proposition 2.2 [19] *Pour $\alpha>0, \ n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}$$

Définition 2.2 [19] *On définit la fonction Bêta comme suivante :*

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \quad (\forall\alpha>0, \beta>0).$$

Théorème 2.1 *Les fonctions Bêta et Gamma sont liées par la relation :*

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \ \alpha>0, \beta>0.$$

2.2 Opérateurs de Riemann-Liouville

Définition 2.3 *[19] Soit $\alpha > 0$, les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville gauche et droite d'ordre α de $f \in L^p(a,b)$ sont respectivement définis par .*

$$\left(I_{a^+}^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt. \tag{2.1}$$

$$\left(I_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}f(t)\,dt, \tag{2.2}$$

Proposition 2.3 *[19] Pour toute fonction $f\in L^p(a,b)$, nous avons $I_{a^+}^{\alpha}f, I_{b^-}^{\alpha}f\in L^p(a,b)$, de plus :*

$$\left\|I_{a^+}^{\alpha}f\right\|_{L^p(a,b)}\leq\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|f\right\|_{L^p(a,b)}, \tag{2.3}$$

$$\left\|I_{b^-}^{\alpha}f\right\|_{L^p(a,b)}\leq\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|f\right\|_{L^p(a,b)}. \tag{2.4}$$

Proposition 2.4 *[19] Soient $1\leq p,q\leq+\infty$ telles que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leq 1+\alpha$. Alors, pour toutes fonctions $f\in L^p(a,b)$, $g\in L^p(a,b)$ nous avons :*

$$\int_a^b f(x)\left(I_{b^-}^{\alpha}g\right)(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,I_{a+}^{\alpha}f(x)dx. \tag{2.5}$$

Définition 2.4 *[18] Soit $0<\alpha<1$, les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et à droite d'ordre α de $f\in L^p(a,b)$ sont respectivement définis par :*

$$\begin{aligned}\left(D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x) &= \frac{d}{dx}\left(I_{a^+}^{1-\alpha}f\right)(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f(t)\,dt,\ a<x<b.\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\left(D_{b^-}^{\alpha}f\right)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)\left(I_{b^-}^{n-\alpha}f\right)(x)\\ &= -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b (t-x)^{-\alpha}f(t)\,dt,\ a<x<b.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Maintenant, on introduit quelques propriétés des espaces suivants :

Définition 2.5

$$AC_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)=\left\{u\ /\ u(x)=\frac{A}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}+\left(I_{a^+}^{\alpha}\xi\right)(x),\ A\in\mathbb{R},\ \xi\in L^p(a,b)\right\},$$

$$AC_{b^-}^{\alpha,p}(a,b)=\left\{u\ /\ u(x)=\frac{B}{\Gamma(\alpha)}(x-b)^{\alpha-1}+\left(I_{b^-}^{\alpha}\zeta\right)(x),\ B\in\mathbb{R},\ \zeta\in L^p(a,b)\right\}.$$

Proposition 2.5 *[18] Soit* $0<\alpha<1,\ f\in AC_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$*, on a :*

$$\left(I_{a^+}^{\alpha}\ D_{a^+}^{\alpha}f\,\right)(x)=f\left(x\right)-\frac{\left(I_{a^+}^{1-\alpha}f\right)(a)}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(x-a\right)^{\alpha-1}. \tag{2.8}$$

Proposition 2.6 (***Intégration par partie***)*[14] Soit* $0<\alpha<1, 1\leq p,q<+\infty$ *telles que* $\dfrac{1}{p}<\alpha,\ \dfrac{1}{q}<\alpha$*. Alors pour toutes fonctions* $f\in AC_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$ *et* $g\in AC_{b^-}^{\alpha,q}(a,b)$*, on a :*

$$\begin{aligned}\int_a^b f\left(x\right)\left(D_{b^-}^{\alpha}g\right)(x)\,dx &= \left(I_{a^+}^{1-\alpha}f\ \right)(a)\,g\left(a\right)-\left(I_{b^-}^{1-\alpha}g\right)(b)\,f\left(b\right)\\ &\quad+\int_a^b\left(D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)\,g\left(x\right)dx.\end{aligned} \tag{2.9}$$

2.3 Opérateurs de Hadamard

Définition 2.6 *[18] Soit* $\alpha>0$*, les intégrales fractionnaires de Hadamard gauche et droite d'ordre* α *de* $f\in L^p\left(a,b\right)$ *sont respectivement définis par :*

$$\left({}^{H}I_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}f\left(t\right)\frac{dt}{t}. \tag{2.10}$$

$$\left({}^{H}I_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_x^b\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}f\left(t\right)\frac{dt}{t}. \tag{2.11}$$

Proposition 2.7 *Pour toute fonction* $f\in L^p\left(a,b\right),$ *nous avons* ${}^{H}I_{a^+}^{\alpha}f,\ {}^{H}I_{b^-}^{\alpha}f\in L^p\left(a,b\right),$ *de plus :*

$$\left\|{}^{H}I_{a^+}^{\alpha}f\right\|_{L^p(a,b)}\leq\frac{(b-a)^{\alpha}}{a^pb^{(\alpha-1)p}\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left\|f\right\|_{L^p(a,b)}, \tag{2.12}$$

$$\left\|{}^{H}I_{b^-}^{\alpha}f\right\|_{L^p(a,b)}\leq\frac{(b-a)^{\alpha}}{a^pb^{(\alpha-1)p}\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left\|f\right\|_{L^p(a,b)}. \tag{2.13}$$

Preuve. Soit $f\in L^p\left(a,b\right),$ alors pour tous $x\in(a,b)$ On a :

$$\left|\left({}^{H}I_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)\right|=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left|\int_a^x\left(\ln x-\ln t\right)^{\alpha-1}f\left(t\right)\frac{dt}{t}\right|.$$

En utilisant le théorème des accroissements finies de la fonction ln dans l'intervalle $[t,x]$, et pour tous $\tau \in [t,x] \subset [a,b]$ nous avons $\dfrac{1}{a^{\alpha-1}} \leq \dfrac{1}{\tau^{\alpha-1}} \leq \dfrac{1}{b^{\alpha-1}}$. alors :

$$\begin{aligned}
\left|\left({}^{H}I_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)\right| &\leq \frac{1}{b^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\left|\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,\frac{dt}{t}\right| \\
&\leq \frac{1}{ab^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\left|\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt\right| \\
&= \frac{1}{ab^{\alpha-1}}\left|\left(I_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)\right|,
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left|\left({}^{H}I_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)\right|^p \leq \frac{1}{a^p b^{(\alpha-1)p}}\left|\left(I_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)\right|^p,$$

ce qui donne :

$$\left\|{}^{H}I_{a^+}^{\alpha}f\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{1}{ab^{(\alpha-1)}}\left\|I_{a^+}^{\alpha}f\right\|_{L^p(a,b)}.$$

D'après (2.3) on trouve :

$$\left\|{}^{H}I_{a^+}^{\alpha}f\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{ab^{(\alpha-1)}\Gamma(\alpha+1)}\left\|f\right\|_{L^p(a,b)}.$$

La deuxième inégalité se fait de la même manière. ■

La proposition suivante donne une formulation similaire de l'intégration par parties (2.5) :

Proposition 2.8 *Soient* $1 \leq p, q \leq +\infty$ *telles que* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} \leq 1+\alpha$. *Alors, pour toutes fonctions* $f \in L^p(a,b)$, $g \in L^p(a,b)$ *nous avons :*

$$\int_a^b f(x)\left({}^{H}I_{b^-}^{\alpha}g\right)(x)\,\frac{dx}{x} = \int_a^b g(x)\;{}^{H}I_{a+}^{1-\alpha}f(x)\,\frac{dx}{x}. \tag{2.14}$$

Définition 2.7 *[18] Soit* $0 < \alpha < 1$, *les dérivées fractionnaires de Hadamard gauche et droite d'ordre* α *de* $f \in L^p(a,b)$ *sont respectivement définis par .*

$$\left({}^{H}D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x) = \delta_H\left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}f\right)(x) = \frac{x}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{-\alpha} f(t)\,\frac{dt}{t},\; a<x<b. \tag{2.15}$$

$$\left({}^{H}D_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)=(-\delta_H)\left({}^{H}I_{b^-}^{n-\alpha}f\right)(x)=-\frac{x}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{-\alpha}f(t)\,\frac{dt}{t},\ a<x<b. \tag{2.16}$$

Théorème 2.2 *[18] Soit* $0<\alpha<1,\ f\in AC_\delta[a,b]$*. Alors, on a :*

$$\left({}^{H}I_{a^+}^{\alpha}\,{}^{H}D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)=f(x)-\frac{\left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}f\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}. \tag{2.17}$$

Maintenant, on donne quelques propriétés des espaces fonctionnels suivants

Définition 2.8

$${}^{H}AC_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)=\left\{u\ /\ u(x)=\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}+\left({}^{H}I_{a^+}^{\alpha}\xi\right)(x),\ A\in\mathbb{R},\ \xi\in L^p(a,b)\right\},$$

$${}^{H}AC_{b^-}^{\alpha,p}(a,b)=\left\{u\ /\ u(x)=\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left({}^{H}I_{b^-}^{\alpha}\zeta\right)(x),\ B\in\mathbb{R},\ \zeta\in L^p(a,b)\right\}.$$

Théorème 2.3 (***Intégration par partie***) *Soit* $1\leq p,q<+\infty$ *telles que* $\frac{1}{p}<\alpha,\ \frac{1}{q}<\alpha$*. Alors pour toutes fonctions* $f\in{}^{H}AC_{a^+}^{\alpha,p}[a,b]$ *et* $g\in{}^{H}AC_{b^-}^{\alpha,q}[a,b]$*, on a :*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\left({}^{H}D_{b^-}^{\alpha}g\right)(x)\frac{dx}{x} &= \left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}f\ \right)(a)\,g(a)-\left({}^{H}I_{b^-}^{1-\alpha}g\right)(b)\,f(b)\\ &\quad+\int_a^b\left({}^{H}D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)\,g(x)\frac{dx}{x}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Preuve. On a d'après la définition 2.8 :

$$f(x)=\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}+\left({}^{H}I_{a^+}^{\alpha}\xi\right)(x)\quad\text{et } g(x)=\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left({}^{H}I_{b^-}^{\alpha}\zeta\right)(x),$$

Ou $\xi,\ \zeta \in L^{p}(a,b)$. alors :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\left({}^{H}D_{b-}^{\alpha}g\right)(x)\frac{dx}{x} &= \int_a^b \left[\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} + \left({}^{H}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(x)\right]\zeta(x)\frac{dx}{x} \\
&= \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\zeta(x)\frac{dx}{x} + \int_a^b \left({}^{H}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(x)\zeta(x)\frac{dx}{x} \\
&= A\left({}^{H}I_{b-}^{\alpha}\zeta\right)(a) + \int_a^b \left({}^{H}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(x)\zeta(x)\frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left({}^{H}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)g(x)\frac{dx}{x} &= \int_a^b \xi(x)\left[\frac{B}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left({}^{H}I_{b-}^{\alpha}\zeta\right)(x)\right]\frac{dx}{x} \\
&= \frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}\xi(x)\frac{dx}{x} + \int_a^b \xi(x)\left({}^{H}I_{b-}^{\alpha}\zeta\right)(x)\frac{dx}{x} \\
&= B\left({}^{H}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(b) + \int_a^b \left({}^{H}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(x)\zeta(x)\frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_a^b f(x)\left({}^{H}D_{b-}^{\alpha}g\right)(x)\frac{dx}{x} - \int_a^b \left({}^{H}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)g(x)\frac{dx}{x} = A\left({}^{H}I_{b-}^{\alpha}\zeta\right)(a) - B\left({}^{H}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(b).$$

En notant que

$$\begin{aligned}
A\left({}^{H}I_{b-}^{\alpha}\zeta\right)(a) &= Ag(a) - \frac{A.B}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha-1}, \\
B\left({}^{H}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(b) &= Bf(b) - \frac{A.B}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha-1},
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
A\left({}^{H}I_{b-}^{\alpha}\zeta\right)(a) - B\left({}^{H}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(b) &= Ag(a) - Bf(b) \\
&= \left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}f\right)(a)\,g(a) - \left({}^{H}I_{b^-}^{1-\alpha}g\right)(b)\,f(b).
\end{aligned}$$

■

2.4 Opérateurs de type Katugampola

Soit $\alpha, \rho > 0, 1 \leq p < +\infty$ et $0 < a < b < +\infty$.

Définition 2.9 *[17] Les integrales fractionnaires de Katugampola gauche et droite d'ordre* α *de* $f \in L^p(a,b)$ *sont respectivement définis comme suivant :*

$$\left({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(t)\, t^{\rho-1} dt, \tag{2.19}$$

$$\left({}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\frac{t^\rho - x^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(t)\, t^{\rho-1} dt. \tag{2.20}$$

Remarque 2.1 *On a :*

i) *Si* $\rho = 1$, *on obtient les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville* $\left(I_{a^+}^{\alpha} f\right)$ *et* $\left(I_{b^-}^{\alpha} f\right)$.

ii) *Si* $\rho \longrightarrow 0$, *on obtient les intégrales fractionnaires de Hadamard* ${}^{H}I_{a^+}^{\alpha}$ *et* ${}^{H}I_{b^-}^{\alpha}$.

iii) ${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}$ *et* ${}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}$ *sont les opérateurs* ${}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}$ *et* ${}^{\sigma}I_{b^-}^{\alpha}$, *en posant :* $\sigma(x) = \dfrac{x^\rho}{\rho}$.

Proposition 2.9 *Pour toute fonction* $f \in L^p(a,b)$, *nous avons* ${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f,\ {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f \in L^p(a,b)$, *et on a de plus :*

i) *Si* $\rho > 1$:

$$\left\|{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{b^{(\rho-1)(\alpha+1)}(b-a)^\alpha}{a^{\rho-1}\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L^p(a,b)}, \tag{2.21}$$

$$\left\|{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{b^{(\rho-1)(\alpha+1)}(b-a)^\alpha}{a^{\rho-1}\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L^p(a,b)}. \tag{2.22}$$

ii) *Si* $0 < \rho < 1$

$$\left\|{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{a^{(\rho-1)(\alpha+1)}(b-a)^\alpha}{b^{\rho-1}\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L^p(a,b)}, \tag{2.23}$$

$$\left\|{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{a^{(\rho-1)(\alpha+1)}(b-a)^\alpha}{b^{\rho-1}\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L^p(a,b)}. \tag{2.24}$$

Preuve. Soit $f \in L^p(a,b)$, alors pour tous $x \in (a,b)$ on a :

$$|^{\rho}\left(I_{a^+}^{\alpha} f\right)(x)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^x \left(\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} f(t)\, t^{\rho-1} dt \right|.$$

En utilisant le théorème des accroissements finies de la fonction x^ρ dans l'intervalle $[t,x]$, il existe $\tau \in [t,x] \subset [a,b]$ telle que : $\dfrac{x^\rho - t^\rho}{\rho} = \tau^{\rho-1}$

i) Supposons que $\rho > 1$:

$$\begin{aligned}
\left|\left({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f\right)(t)\right| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^x \left(\tau^{\rho-1}\right)^{\alpha-1} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, t^{\rho-1} dt \right| \\
&\leq \frac{b^{(\rho-1)(\alpha+1)}}{a^{\rho-1}\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \right| \\
&\leq \frac{b^{(\rho-1)(\alpha+1)}}{a^{\rho-1}} \left|\left(I_{a^+}^{\alpha} f\right)(t)\right|,
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left|\left({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f\right)(t)\right|^p \leq \left(\frac{b^{(\rho-1)(\alpha+1)}}{a^{\rho-1}} \right)^p \left|\left(I_{a^+}^{\alpha} f\right)(t)\right|^p,$$

ce qui donne :

$$\left\|{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{b^{(\rho-1)(\alpha+1)}}{a^{\rho-1}} \left\|I_{a^+}^{\alpha} f\right\|_{L^p(a,b)}.$$

En utilisant la relation (2.3), on obtient :

$$\left\|{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{b^{(\rho-1)(\alpha+1)}(b-a)^\alpha}{a^{\rho-1}\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L^p(a,b)}.$$

ii) Supposons que $0 < \rho < 1$:

$$\begin{aligned}
\left|\left({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f\right)(t)\right| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^x \left(\tau^{\rho-1}\right)^{\alpha-1} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, t^{\rho-1} dt \right| \\
&\leq \frac{a^{(\rho-1)(\alpha+1)}}{b^{\rho-1}\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \right| \\
&\leq \frac{a^{(\rho-1)(\alpha+1)}}{b^{\rho-1}} \left|\left(I_{a^+}^{\alpha} f\right)(t)\right|,
\end{aligned}$$

On va suivre les étapes suivantes, on trouve :

$$\left\| {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f \right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{a^{(\rho-1)(\alpha+1)}(b-a)^{\alpha}}{b^{\rho-1}\Gamma(\alpha+1)} \left\| f \right\|_{L^p(a,b)}.$$

La deuxième inégalité se fait de la même manière. ■

La proposition suivante donne une formulation similaire de l'intégration par parties se trouve dans [15]

Proposition 2.10 *Soient* $1 \leq p, q \leq +\infty$ *telles que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$. *Alors, pour toutes fonctions* $f \in L^p(a,b)$, $g \in L^p(a,b)$ *nous avons :*

$$\int_a^b f(x) \left({}^{\rho}I_{b-}^{\alpha} g\right)(x)\, x^{\rho-1} dx = \int_a^b g(x)\, {}^{\rho}(I_{a+}^{\alpha} f)(x)\, x^{\rho-1} dx. \tag{2.25}$$

Définition 2.10 *Les dérivées fractionnaires au sens de Katugampola gauche et droite d'ordre* α *de* $f \in L^p(a,b)$ *sont respectivement définis par .*

$$\begin{aligned} \left({}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) &= \delta_{\rho}\left({}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha} f\right)(x) \\ &= \frac{x^{1-\rho}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \left(\frac{x^{\rho}-t^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(t)\, t^{\rho-1} dt, \quad a < x < b. \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} \left({}^{\rho}D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) &= (-\delta_{\rho})\left({}^{\rho}I_{b^-}^{1-\alpha} f\right)(x) \\ &= -\frac{x^{1-\rho}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \left(\frac{t^{\rho}-x^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(t)\, t^{\rho-1} dt, \quad a < x < b. \end{aligned} \tag{2.27}$$

ou $\delta_{\rho} = x^{1-\rho}\frac{d}{dx}$.

Théorème 2.4 *[21] Soit* $0 < \alpha < 1$, $f \in AC_{\delta}(a,b)$, *alors :*

$$\left({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}\, {}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \frac{\left({}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha} f\right)(a)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}. \tag{2.28}$$

Maintenant, on a les espaces fonctionnels suivants :

Définition 2.11

$$
{}^{\rho}AC_{a^{+}}^{\alpha,p}\left(a,b\right)=\left\{u\ /\ u\left(x\right)=\frac{A}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}+\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{\alpha}\xi\right)\left(x\right),\ A\in\mathbb{R},\ \xi\in L^{p}\left(a,b\right)\right\},
$$

$$
{}^{\rho}AC_{b^{-}}^{\alpha,p}(a,b)=\left\{u\ /\ u\left(x\right)=\frac{B}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{b^{\rho}-x^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}+\left({}^{\rho}I_{b^{-}}^{\alpha}\zeta\right)\left(x\right),\ B\in\mathbb{R},\ \zeta\in L^{p}(a,b)\right\}.
$$

Théorème 2.5 (***Intégration par partie***). *Soit $1\leq p,q<+\infty$ telles que $\dfrac{1}{p}<\alpha,\ \dfrac{1}{q}<\alpha$. Alors pour toutes fonctions $f\in{}^{\rho}AC_{a^{+}}^{\alpha,p}\left[a,b\right]$ et $g\in{}^{\rho}AC_{b^{-}}^{\alpha,q}\left[a,b\right]$, on a :*

$$
\begin{aligned}
\int_{a}^{b}f\left(x\right)\left({}^{\rho}D_{b^{-}}^{\alpha}g\right)\left(x\right)x^{\rho-1}dx &= \left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{1-\alpha}f\right)\left(a\right)g\left(a\right)-\left({}^{\rho}I_{b^{-}}^{1-\alpha}g\right)\left(b\right)f\left(b\right)\\
&\quad+\int_{a}^{b}\left({}^{\rho}D_{a^{+}}^{\alpha}f\right)\left(x\right)g\left(x\right)x^{\rho-1}dx.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Preuve. On a :

$$
f\left(x\right)=\frac{A}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}+\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{\alpha}\xi\right)\left(x\right)\quad\text{et } g\left(x\right)=\frac{B}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{b^{\rho}-x^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}+\left({}^{\rho}I_{b^{-}}^{\alpha}\zeta\right)\left(x\right),
$$

ou $\xi,\ \zeta\in L^{p}\left(a,b\right)^{1-\rho}$ .et $A=\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{1-\alpha}f\right)\left(a\right)$, $B=\left({}^{\rho}I_{b^{-}}^{1-\alpha}f\right)\left(a\right)$ alors :

$$
\begin{aligned}
\int_{a}^{b}f\left(x\right)\left({}^{\rho}D_{b^{-}}^{\alpha}g\right)\left(x\right)x^{\rho-1}dx &= \int_{a}^{b}\left[\frac{A}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}+\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{\alpha}\xi\right)\left(x\right)\right]\zeta\left(x\right)x^{\rho-1}dx\\
&= \frac{A}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{a}^{b}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}\zeta\left(x\right)\frac{dx}{x^{1-\rho}}+\int_{a}^{b}\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{\alpha}\xi\right)\left(x\right)\zeta\left(x\right)x^{\rho-1}dx\\
&= A\left({}^{\rho}I_{b^{-}}^{\alpha}\zeta\right)\left(a\right)+\int_{a}^{b}\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{\alpha}\xi\right)\left(x\right)\zeta\left(x\right)x^{\rho-1}dx.
\end{aligned}
$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
\int_{a}^{b}\left({}^{\rho}D_{a^{+}}^{\alpha}f\right)\left(x\right)g\left(x\right)\frac{dx}{x} &= \int_{a}^{b}\xi\left(x\right)\left[\frac{B}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{b^{\rho}-x^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}+\left({}^{\rho}I_{b^{-}}^{\alpha}\zeta\right)\left(x\right)\right]x^{\rho-1}dx\\
&= \frac{B}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{a}^{b}\left(\frac{b^{\rho}-x^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}\xi\left(x\right)\frac{dx}{x^{1-\rho}}+\int_{a}^{b}\xi\left(x\right)\left({}^{\rho}I_{b^{-}}^{\alpha}\zeta\right)\left(x\right)x^{\rho-1}dx\\
&= B\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{\alpha}\xi\right)\left(b\right)+\int_{a}^{b}\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{\alpha}\xi\right)\left(x\right)\zeta\left(x\right)x^{\rho-1}dx.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$\int_a^b f(x)\left({}^\rho D_{b-}^\alpha g\right)(x)\,\frac{dx}{x^{1-\rho}} - \int_a^b \left({}^\rho D_{a+}^\alpha f\right)(x)\,g(x)\,\frac{dx}{x^{1-\rho}} = A\left({}^\rho I_{b-}^\alpha \zeta\right)(a) - B\left({}^\rho I_{a+}^\alpha \xi\right)(b).$$

En notant que

$$\begin{aligned} A\left({}^\rho I_{b-}^\alpha \zeta\right)(a) &= Ag(a) - \frac{A.B}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}, \\ B\left({}^\sigma I_{a+}^\alpha \xi\right)(b) &= Bf(b) - \frac{A.B}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} A\left({}^\rho I_{b-}^\alpha \zeta\right)(a) - B\left({}^\rho I_{a+}^\alpha \xi\right)(b) &= Ag(a) - Bf(b) \\ &= \left({}^\rho I_{a^+}^{1-\alpha} f\right)(a)\,g(a) - \left({}^\rho I_{b^-}^{1-\alpha} g\right)(b)\,f(b). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\left({}^\rho D_{b-}^\alpha g\right)(x)\,\sigma'(x)\,dx &= \left({}^\rho I_{a^+}^{1-\alpha} f\right)(a)\,g(a) - \left({}^\rho I_{b^-}^{1-\alpha} g\right)(b)\,f(b) \\ &\quad + \int_a^b \left({}^\rho D_{a+}^\alpha f\right)(x)\,g(x)\,x^{\rho-1}dx. \end{aligned}$$

■

2.5 Opérateurs σ- généralisés

Soit $\alpha > 0$ et $\sigma \in C^2([a,b])$ une fonction strictement croissante. Il existe alors $m_\sigma > 0, M_\sigma > 0$ tels que pour tout $x \in [a,b]$ on a :

$$m_\sigma \le \sigma'(x) \le M_\sigma \tag{2.30}$$

$m_\sigma = \inf\limits_{[a,b]} \sigma', M_\sigma = \sup\limits_{[a,b]} \sigma'$.

Définition 2.12 *[19] Les intégrales fractionnaires généralisée gauche et droite d'ordre α de $f \in L^p(a,b)$ sont respectivement définis par :*

$$\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\sigma(x) - \sigma(t))^{\alpha-1} f(t)\, \sigma'(t)\, dt. \tag{2.31}$$

$$\left({}^{\sigma}I_{b^-}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\sigma(t) - \sigma(x))^{\alpha-1} f(t)\, \sigma'(t)\, dt, \tag{2.32}$$

Remarque 2.2 *On a les cas particulières :*

- **i)** *Si $\sigma(x) = x$, on obtient les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville $\left(I_{a^+}^{\alpha}f\right)$ et $\left(I_{b^-}^{\alpha}f\right)$.*
- **ii)** *Si $\sigma(x) = \ln x$, on obtient les intégrales fractionnaires de Hadamard $\left({}^{H}I_{a^+}^{\alpha}f\right)$ et $\left({}^{H}I_{b^-}^{\alpha}f\right)$.*

Proposition 2.11 *Pour toute fonction $f \in L^p(a,b)$, nous avons ${}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}f,\ {}^{\sigma}I_{b^-}^{\alpha}f \in L^p(a,b)$, de plus :*

$$\left\|{}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}f\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{M_{\sigma}^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha}}{m_{\sigma}\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L^p(a,b)}, \tag{2.33}$$

$$\left\|{}^{\sigma}I_{b^-}^{\alpha}f\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{M_{\sigma}^{\alpha+1}(b-a)^{\alpha}}{m_{\sigma}\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L^p(a,b)}. \tag{2.34}$$

Preuve. Puisque $\sigma \in C^{\infty}([a,b])$, la fonction σ' est borné. Donc, il existe m, M sont existes.

Soit $f \in L^p(a,b)$, alors pour tous $x \in (a,b)$ on a :

$$\left|\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)\right| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left|\int_a^x (\sigma(x) - \sigma(t))^{\alpha-1} f(t)\, \sigma'(t) dt\right|.$$

En utilisant le théorème des accroissements finies de la fonction σ dans l'intervalle $[t,x]$, on trouve

$$\left|\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)\right| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left|\int_a^x (\sigma'(\tau))^{\alpha-1} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, \sigma'(t) dt\right|.$$

En remarquant que pour tous $t,\tau \in [a,b]$ on a : $(\sigma'(\tau))^{\alpha-1}\sigma'(t) \leq \dfrac{M_\sigma^{\alpha+1}}{m_\sigma}$. alors :

$$\begin{aligned}
\left|\left({}^\sigma I_{a^+}^\alpha f\right)(t)\right| &\leq \frac{M_\sigma^{\alpha+1}}{m_\sigma \Gamma(\alpha)} \left| \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} \right| \\
&= \frac{M_\sigma^{\alpha+1}}{m_\sigma} \left| \left(I_{a^+}^\alpha f\right)(t) \right|.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left\| {}^\sigma I_{a^+}^\alpha f \right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{M^{\alpha+1}}{m} \left\| I_{a^+}^\alpha f \right\|_{L^p(a,b)}.$$

En utilisant (2.3)), on obtient :

$$\left\| {}^\sigma I_{a^+}^\alpha f \right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{M_\sigma^{\alpha+1}(b-a)^\alpha}{m_\sigma \Gamma(\alpha+1)} \left\| f \right\|_{L^p(a,b)}.$$

La deuxième inégalité se fait de la même manière. ■

La proposition suivante donne une formulation similaire de l'intégration par parties, généralise (2.5), (2.14) et (2.25) :

Proposition 2.12 *[21] Soient $1 \leq p,q \leq +\infty$ telles que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leq 1+\alpha$. Alors, pour toutes fonctions $f \in L^p(a,b)$, $g \in L^p(a,b)$ nous avons :*

$$\int_a^b f(x) \left({}^\sigma I_{b^-}^\alpha g\right)(x) \sigma'(x) dx = \int_a^b g(x)^\sigma I_{a+}^\alpha f(x) \sigma'(x) dx. \tag{2.35}$$

Définition 2.13 *[18] Soit $0<\alpha<1$. Les dérivées fractionnaires généralisée gauche et droite d'ordre α de $f \in L^p(a,b)$ sont respectivement définis par :*

$$\begin{aligned}
\left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha f\right)(x) &= \delta_\sigma \left({}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha} f\right)(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{\sigma'(x)\,dx} \int_a^x (\sigma(x)-\sigma(t))^{\alpha-1} f(t) \sigma'(t)\, dt,
\end{aligned} \qquad a<x<b. \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\left({}^{\sigma}D_{b^-}^{\alpha}f\right)(x) &= (-\delta_\sigma)\left({}^{\sigma}I_{b^-}^{1-\alpha}f\right)(x) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{\sigma'(x)\,dx}\int_x^b(\sigma(t)-\sigma(x))^{\alpha-1}f(t)\,\sigma'(t)\,dt, \quad a<x<b,\end{aligned} \tag{2.37}$$

avec $\delta_\sigma = \dfrac{1}{\sigma'(x)}\dfrac{d}{dx}$.

Théorème 2.6 *[18] Soit* $0<\alpha<1$, $f\in AC_\delta[a,b]$, *nous avons :*

$$\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}\;{}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x) = f(x) - \frac{\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}f\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1}. \tag{2.38}$$

On maintenant introduit les espaces suivants :

Définition 2.14 *On définit les espaces suivants :*

$${}^{\sigma}AC_{a^+}^{\alpha,p}(a,b) = \left\{u\ /\ u(x) = \frac{A}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1} + \left({}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}\xi\right)(x),\ A\in\mathbb{R},\ \xi\in L^p(a,b)\right\},$$

$${}^{\sigma}AC_{b^-}^{\alpha,p}(a,b) = \left\{u\ /\ u(x) = \frac{B}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(b)-\sigma(x))^{\alpha-1} + \left({}^{\sigma}I_{b^-}^{\alpha}\zeta\right)(x),\ B\in\mathbb{R},\ \zeta\in L^p(a,b)\right\}.$$

Théorème 2.7 (***Intégration par partie***). *Soit* $1\le p,q<+\infty$ *telles que* $\frac{1}{p}<\alpha$, $\frac{1}{q}<\alpha$. *Alors pour toutes fonctions* $f\in{}^{\sigma}AC_{a^+}^{\alpha,p}[a,b]$ *et* $g\in{}^{\sigma}AC_{b^-}^{\alpha,q}[a,b]$, *on a :*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\left({}^{\sigma}D_{b^-}^{\alpha}g\right)(x)\,\sigma'(x)\,dx &= \left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}f\right)(a)\,g(a) - \left({}^{\sigma}I_{b^-}^{1-\alpha}g\right)(b)\,f(b) \\ &\quad + \int_a^b\left({}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)\,g(x)\,\sigma'(x)\,dx.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Preuve. On a :

$$f(x) = \frac{A}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1} + \left({}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}\xi\right)(x) \text{ et } g(x) = \frac{B}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(b)-\sigma(x))^{\alpha-1} + \left({}^{\sigma}I_{b^-}^{\alpha}\zeta\right)(x),$$

ou $\xi,\ \zeta \in L^p(a,b)$. alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\left({}^{\sigma}D_{b-}^{\alpha}g\right)(x)\,\sigma'(x)\,dx &= \int_a^b \left[\frac{A}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1}+\left({}^{\sigma}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(x)\right]\zeta(x)\,\sigma'(x)\,dx \\ &= \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1}\zeta(x)\,\sigma'(x)\,dx \\ &\quad+\int_a^b \left({}^{\sigma}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(x)\,\zeta(x)\,\sigma'(x)\,dx \\ &= A\left({}^{\sigma}I_{b-}^{\alpha}\zeta\right)(a)+\int_a^b \left({}^{\sigma}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(x)\,\zeta(x)\,\sigma'(x)\,dx.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_a^b \left({}^{\sigma}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)\,g(x)\,\frac{dx}{x} &= \int_a^b \xi(x)\left[\frac{B}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(b)-\sigma(x))^{\alpha-1}+\left({}^{\sigma}I_{b-}^{\alpha}\zeta\right)(x)\right]\sigma'(x)\,dx \\ &= \frac{B}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (\sigma(b)-\sigma(x))^{\alpha-1}\xi(x)\,\sigma'(x)\,dx \\ &\quad+\int_a^b \xi(x)\left({}^{\sigma}I_{b-}^{\alpha}\zeta\right)(x)\,\sigma'(x)\,dx \\ &= B\left({}^{\sigma}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(b)+\int_a^b \left({}^{\sigma}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(x)\,\zeta(x)\,\sigma'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_a^b f(x)\left({}^{\sigma}D_{b-}^{\alpha}g\right)(x)\,\frac{dx}{x}-\int_a^b \left({}^{\sigma}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)\,g(x)\,\sigma'(x)\,dx = A\left({}^{\sigma}I_{b-}^{\alpha}\zeta\right)(a)-B\left({}^{\sigma}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(b).$$

En notant que

$$\begin{aligned}A\left({}^{\sigma}I_{b-}^{\alpha}\zeta\right)(a) &= Ag(a)-\frac{A.B}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(b)-\sigma(a))^{\alpha-1}, \\ B\left({}^{\sigma}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(b) &= Bf(b)-\frac{A.B}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(b)-\sigma(a))^{\alpha-1},\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}A\left({}^{\sigma}I_{b-}^{\alpha}\zeta\right)(a)-B\left({}^{\sigma}I_{a+}^{\alpha}\xi\right)(b) &= Ag(a)-Bf(b) \\ &= \left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}f\right)(a)\,g(a)-\left({}^{\sigma}I_{b^-}^{1-\alpha}g\right)(b)\,f(b),\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\left({}^{\sigma}D_{b^-}^{\alpha}g\right)(x)\,\sigma'(x)\,dx &= \left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}f\right)(a)\,g(a)-\left({}^{\sigma}I_{b^-}^{1-\alpha}g\right)(b)\,f(b)\\ &\quad+\int_a^b\left({}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)\,g(x)\,\sigma'(x)\,dx.\end{aligned}$$

■

CHAPITRE 3

ESPACES DE SOBOLEV D'ORDRES FRACTIONNAIRES

Dans ce chapitre, nous allons étendre les résultats liés aux espaces de Sobolev de type Hadamard décrits dans [2]. De plus, nous fournirons des compléments sur les espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire. Dans la première section, nous allons introduire un cas particulier du cas mentionné précédemment, où la fonction σ est définie par la formule $\frac{x^\rho}{\rho}$, avec ρ étant un nombre réel positif, ensuite on va traiter le cas générale. Cette formulation généralise simultanément le cas des espaces de Sobolev de type Riemann-Liouville, introduit dans [14]. Dans le reste du chapitre, nous étudions plusieurs propriétés des espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire, notamment leur complétude, réflexivité, séparabilité, ainsi que certaines injections. Ces propriétés des espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire sont essentielles pour comprendre et analyser les comportements des fonctions dans ces espaces, ainsi que pour développer des outils et des techniques appropriés pour résoudre certains problèmes mathématiques.

Soient $a < b < +\infty, 0 < \alpha < 1$ et $1 \leq p < +\infty$. Soit $\sigma \in C^2([a,b])$ une fonction strictement croissant. On pose :

$$m_\sigma = \min_{x\in[a,b]} \sigma'(x) \qquad M_\sigma = \max_{x\in[a,b]} \sigma(x) \tag{3.1}$$

3.1 Espaces de Sobolev de type de Katugampola

Nous considérons que $0 < a < b < +\infty$ et supposons que $\rho > 0$.

Définition 3.1 *Un espace de Sobolev fractionnaire via l'opérateur de Katugampola est défini comme suivant :*

$$^\rho W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(a,b) \ / \ \exists g \in L^p(a,b), \forall \varphi \in C_c^\infty(a,b) : \\ \displaystyle\int_a^b u(x) \left(^\rho D_{b^-}^\alpha \varphi \right)(x) x^{\rho-1} dx = \int_a^b g(x) \varphi(x) x^{\rho-1} dx, \end{array} \right\}. \tag{3.2}$$

Proposition 3.1 *la fonction g coïncide à $^\rho D_{a^+}^\alpha u$ p.p. dans (a,b).*

Preuve. Soient $u \in {}^\rho W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$, et $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$. On a $\left(^\rho D_{b^-}^\alpha \varphi \right)(x) \in L^q(a,b)$, pour $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On a aussi $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$,

$$\left(^\rho D_{b^-}^\alpha \varphi \right)(x) = -\left(^\rho I_{b^-}^{1-\alpha} \delta_\rho \varphi(t) \right)(x) = -\left(I_{b^-}^{(1-\alpha)\rho} t^{1-\rho} \varphi'(t) \right)(x),$$

et

$$\int_a^b u(x) \left(^\rho D_{b^-}^\alpha \varphi \right)(x) x^{\rho-1} dx = -\int_a^b u(x) \, ^\rho I_{b^-}^{1-\alpha} \left(x^{1-\rho} \varphi'(x) \right) x^{\rho-1} dx.$$

En appliquant (2.25), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) \left(^\rho D_{b^-}^\alpha \varphi \right)(x) x^{\rho-1} dx &= -\int_a^b \left(^\rho I_{a^+}^{1-\alpha} u \right)(x) \left(x^{1-\rho} \varphi'(x) \right) x^{\rho-1} dx \\ &= -\int_a^b \left(^\rho I_{a^+}^{1-\alpha} u \right)(x) \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie classique on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)\left({}^\rho D_{b^-}^\alpha \varphi\right)(x)\, x^{\rho-1}dx &= \left[-\left({}^\rho I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(x)\,\varphi(x)\right]_a^b \\ &\quad + \int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left({}^\rho I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)\right](x)\,\varphi(x)\,dx \\ &= \int_a^b \left(\delta_\rho I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(x)\,\varphi(x) x^{\rho-1}dx \\ &= \int_a^b \left({}^\rho D_{a^+}^\alpha u\right)(x)\,\varphi(x) x^{\rho-1}dx.\end{aligned}$$

Mais on a :

$$\int_a^b u(x)\left({}^\rho D_{b^-}^\alpha \varphi\right)(x)\, x^{\rho-1}dx = \int_a^b g(x).\varphi(x)x^{\rho-1}dx,$$

Alors :

$$g(x) = \left({}^\rho D_{a^+}^\alpha u\right)(x) \text{ p.p. dans } (a,b).$$

■

Théorème 3.1 ${}^\rho W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b) = {}^\rho AC_{a^+}^{\alpha,p}(a,b) \cap L^p(a,b)$. *De plus, on a :*

$$u(x) = \left({}^\rho I_{a^+}^\alpha\, {}^\rho D_{a^+}^\alpha u\right)(x) + \frac{\left({}^\rho I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}. \tag{3.3}$$

Preuve. Soit $u \in {}^\rho W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$, Alors $u \in L^p(a,b)\, , {}^\rho D_{a^+}^\alpha u \in L^p(a,b)$ et

$$\left({}^\rho I_{a^+}^\alpha\, {}^\rho D_{a^+}^\alpha u\right)(x) = u(x) - \frac{\left({}^\rho I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1},$$

Si $\rho > 1$, on a :

$$\left\| u - \frac{\left({}^\rho I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{b^{(\rho-1)(\alpha+1)}(b-a)^\alpha}{a^{\rho-1}\Gamma(\alpha+1)}\left\|{}^\rho D_{a^+}^\alpha u\right\|_{L^p(a,b)},$$

Si $0 < \rho < 1$, on a :

$$\left\| u - \frac{\left({}^\rho I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{a^{(\rho-1)(\alpha+1)}(b-a)^\alpha}{b^{\rho-1}\Gamma(\alpha+1)}\left\|{}^\rho D_{a^+}^\alpha u\right\|_{L^p(a,b)},$$

Ainsi
$$u\left(x\right)=\frac{\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{1-\alpha}u\right)\left(a\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}+\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{\alpha}\ {}^{\rho}D_{a^{+}}^{\alpha}u\right)\left(x\right).$$
Posons $A=\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{1-\alpha}u\right)\left(a\right)$ et $\xi={}^{\rho}D_{a^{+}}^{\alpha}u$, on obtient l'iclusion directe.

Réciproquement, soit $u\in{}^{\rho}AC_{a^{+}}^{\alpha,p}\left(a,b\right)\cap L^{p}\left(a,b\right)$, alors $u\in L^{p}\left(a,b\right)$ et il existe $A\in\mathbb{R}$ et $\xi\in L^{p}\left(a,b\right)$ telles que
$$u\left(x\right)=\frac{A}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}+\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{\alpha}\xi\right)\left(x\right),$$
Donc : ${}^{\rho}D_{a^{+}}^{\alpha}u=\xi\in L^{p}\left(a,b\right)$, qui donne l'iclusion réciproque. ■

Corollaire 3.1 *En utilisant* (2.21) *et le résultat ci-dessus, on obtient pour tout* $u\in{}^{\rho}W_{a^{+}}^{\alpha,p}(a,b)$:
$$\left\|u-\frac{\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{1-\alpha}u\right)\left(a\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}\right\|_{L^{p}(a,b)}\leq\frac{b^{(\rho-1)(\alpha+1)}(b-a)^{\alpha}}{a^{\rho-1}\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left\|{}^{\rho}D_{a^{+}}^{\alpha}u\right\|_{L^{p}(a,b)},\tag{3.4}$$

Remarque 3.1 *Si* u *est sous la forme* (3.3)*, alors* $u\in L^{p}(a,b)$ *si seulement si :*
$$\frac{\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{1-\alpha}u\right)\left(a\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}\in L^{p}(a,b).$$
Ainsi :

i) *Si* $(1-\alpha)p\geq1$*, alors* $u\in L^{p}(a,b)$ *si et seulement si* $\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{1-\alpha}u\right)\left(a\right)=0$.

ii) *Si* $\left({}^{\rho}I_{a^{+}}^{1-\alpha}u\right)\left(a\right)\neq0$*, alors* $u\in L^{p}(a,b)$ *si et seulement si* $(1-\alpha)p<1$.

Définition 3.2 *On définit dans* ${}^{\rho}W_{a^{+}}^{\alpha,p}\left(a,b\right)$, *deux normes*
$${}^{1}\left\|u\right\|_{{}^{\rho}W_{a^{+}}^{\alpha,p}(a,b)}^{p}=\left\|u\right\|_{L^{p}(a,b)}^{p}+\left\|{}^{\rho}D_{a^{+}}^{\alpha}u\right\|_{L^{p}(a,b)}^{p}.\tag{3.5}$$
$${}^{2}\left\|u\right\|_{{}^{\rho}W_{a^{+}}^{\alpha,p}(a,b)}^{p}=\left|{}^{\rho}I_{a^{+}}^{1-\alpha}u\left(a\right)\right|^{p}+\left\|{}^{\rho}D_{a^{+}}^{\alpha}u\right\|_{L^{p}(a,b)}^{p}.\tag{3.6}$$

Théorème 3.2 *Les deux normes* ${}^{1}\left\|.\right\|_{{}^{\rho}W_{a^{+}}^{\alpha,p}(a,b)}$ *et* ${}^{2}\left\|.\right\|_{{}^{\rho}W_{a^{+}}^{\alpha,p}(a,b)}$ *sont équivalentes.*

Preuve. Soit $u\in{}^{\rho}W_{a^{+}}^{\alpha,p}(a,b)$. On distingue deux cas :

i) Si $(1-\alpha p)<1$: D'après (3.3), on a :

$$u=\frac{{}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(a\right)}{\Gamma(\alpha)}(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho})^{\alpha-1}+{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}\,{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u(x).$$

En utilisant les mêmes arguments du Théorème 24 dans [14], on obtient :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(a,b)}^p &= \int_a^b\left|\frac{{}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(a\right)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}+{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}\,{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u(x)\right|^p dx\\
&\leq 2^{p-1}\left(\left|\frac{{}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha}u(a)}{\Gamma(\alpha)}\right|^p\int_a^b x^{1-\rho}\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{(\alpha-1)p}x^{\rho-1}dx+\|{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}\,{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\|_{L^p(a,b)}^p\right)
\end{aligned}$$

Alors :

Pour $\rho>1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(a,b)}^p &\leq \frac{2^{p-1}b^{\rho-1}}{((\alpha-1)p+1)\Gamma^p(\alpha)}\left(\frac{b^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{(\alpha-1)p+1}\left|{}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(a\right)\right|^p\\
&\quad+\frac{2^{p-1}b^{(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{1-\alpha}}{a^{\rho-1}\Gamma(2-\alpha)}\|{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\|_{L^p(a,b)}^p.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
{}^1\|u\|_{{}^HW_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)}^p &= \|u\|_{L^p(a,b)}^p+\|{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\|_{L^p(a,b)}^p\\
&\leq \frac{2^{p-1}a^{\rho-1}}{((\alpha-1)p+1)\Gamma^p(\alpha)}\left(\frac{b^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{(\alpha-1)p+1}\left|{}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(a\right)\right|^p\\
&\quad+\left(1+\frac{2^{p-1}a^{(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{1-\alpha}}{b^{\rho-1}\Gamma(2-\alpha)}\right)\|{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\|_{L^p(a,b)}^p\\
&\leq M_1\left(\left|{}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(a\right)\right|^p+\|{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\|_{L^p(a,b)}^p\right)\\
&= {M_1}^2\|u\|_{{}^{\rho}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)}^p,
\end{aligned}$$

où

$$M_1=\max\left\{\frac{2^{p-1}a^{\rho-1}}{((\alpha-1)p+1)\Gamma^p(\alpha)}\left(\frac{b^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{(\alpha-1)p+1},1+\frac{2^{p-1}a^{(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{1-\alpha}}{b^{\rho-1}\Gamma(2-\alpha)}\right\}.$$

Pour $0<\rho<1$**, on obtient :**

$$\begin{aligned}\|u\|^p_{L^p(a,b)} &\leq \frac{2^{p-1}a^{\rho-1}}{((\alpha-1)p+1)\Gamma^p(\alpha)}\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{(\alpha-1)p+1}\left|{}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u\,(a)\right|^p\\ &+\frac{2^{p-1}a^{(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{1-\alpha}}{b^{\rho-1}\Gamma(2-\alpha)}\left\|{}^\rho D^\alpha_{a+}u\right\|^p_{L^p(a,b)},\end{aligned}$$

et on fait les mêmes étapes.

Réciproquement, d'après le théorème de la moyenne ; il existe $x_0\in[a,b]$ telles que

$${}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u\,(x_0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b {}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u\,(x)\,dx.$$

Sachant qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned}{}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u\,(a) &= {}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u\,(x_0)-\int_a^{x_0}\frac{d}{dx}\,{}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u(x)\,dx\\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b {}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u(x)\,dx-\int_a^{x_0}\delta_\rho{}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u\,(x)\,x^{\rho-1}dx\\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b {}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u\,(x)\,dx-\int_a^{x_0}{}^\rho D^\alpha_{a+}u(x)\,x^{\rho-1}dx.\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\left|{}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u(a)\right| &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b\left|{}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u(x)\right|dx+\int_a^{x_0}\left|{}^\rho D^\alpha_{a+}u(x)\right|x^{\rho-1}dx\\ &\leq \begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\left\|{}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u\right\|_{L^1(a,b)}+\dfrac{1}{a^{1-\rho}}\left\|{}^\rho D^\alpha_{a+}u\right\|_{L^1(a,b)}, \text{ si } \rho>1,\\ \dfrac{1}{b-a}\left\|{}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u\right\|_{L^1(a,b)}+\dfrac{1}{b^{1-\rho}}\left\|{}^\rho D^\alpha_{a+}u\right\|_{L^1(a,b)}, \text{ si } 0<\rho<1.\end{cases}\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\left|{}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u\,(a)\right|\leq\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left\|{}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u\right\|_{L^p(a,b)}+\dfrac{1}{a^{\frac{1-\rho}{p}}(b-a)^{\frac{1}{p}-1}}\left\|{}^\rho D^\alpha_{a+}u\right\|_{L^p(a,b)}, \text{ si } \rho>1,\\ \dfrac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left\|{}^\rho I^{1-\alpha}_{a^+}u\right\|_{L^p(a,b)}+\dfrac{1}{b^{\frac{1-\rho}{p}}(b-a)^{\frac{1}{p}-1}}\left\|{}^\rho D^\alpha_{a+}u\right\|_{L^p(a,b)}, \text{ si } 0<\rho<1.\end{cases}$$

En appliquant (2.21) au premier terme de droite ci-dessus, on obtient :

Pour $\rho > 1$:

$$\left|{}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha}u(a)\right| \leq \frac{b^{(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{1-\alpha-\frac{1}{p}}}{a^{\rho-1}\Gamma(2-\alpha)} \|u\|_{L^p(a,b)} + \frac{b^{(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{2-\alpha-\frac{1}{p}}}{a^{\frac{(\rho-1)(p-1)}{p}}\Gamma(2-\alpha)} \|{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\|_{L^1(a,b)}.$$

Pour $0 < \rho < 1$:

$$\left|{}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha}u(a)\right| \leq \frac{a^{(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{1-\alpha-\frac{1}{p}}}{b^{\rho-1}\Gamma(2-\alpha)} \|u\|_{L^p(a,b)} + \frac{a^{(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{2-\alpha-\frac{1}{p}}}{b^{\frac{(\rho-1)(p-1)}{p}}\Gamma(2-\alpha)} \|{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\|_{L^1(a,b)}.$$

Ainsi :

Pour $\rho > 1$:

$$\begin{aligned}\left|{}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha}u(a)\right| &\leq 2^{p-1}\frac{b^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(1-\alpha)p-1}}{a^{(\rho-1)p}\Gamma^p(2-\alpha)} \|u\|_{L^p(a,b)}^p \\ &+2^{p-1}\frac{b^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(2-\alpha)p-1}}{a^{(\rho-1)(p-1)}\Gamma^p(2-\alpha)} \left\|{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^1(a,b)}^p.\end{aligned}$$

Pour $0 < \rho < 1$:

$$\begin{aligned}\left|{}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha}u(a)\right| &\leq 2^{p-1}\frac{a^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(1-\alpha)p-1}}{b^{(\rho-1)p}\Gamma^p(2-\alpha)} \|u\|_{L^p(a,b)}^p \\ &+2^{p-1}\frac{a^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(2-\alpha)p-1}}{b^{(\rho-1)(p-1)}\Gamma^p(2-\alpha)} \left\|{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^1(a,b)}^p.\end{aligned}$$

On déduit que :

$$\begin{aligned}{}^2\|u\|_{{}^{\rho}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)}^p &= \left|{}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha}u\,(a)\right|^p + \left\|{}^{H}D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^p(a,b)}^p \\ &\leq \begin{cases} \frac{2^{p-1}b^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(1-\alpha)p-1}}{a^{(\rho-1)p}\Gamma^p(2-\alpha)} \|u\|_{L^p(a,b)}^p \left\|{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^1(a,b)}^p \\ \quad + \left(1 + \frac{2^{p-1}b^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(2-\alpha)p-1}}{a^{(\rho-1)(p-1)}\Gamma^p(2-\alpha)}\right), \text{ si } \rho > 1, \\ \frac{2^{p-1}a^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(1-\alpha)p-1}}{b^{(\rho-1)p}\Gamma^p(2-\alpha)} \|u\|_{L^p(a,b)}^p \left\|{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^1(a,b)}^p \\ \quad + \left(1 + \frac{2^{p-1}a^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(2-\alpha)p-1}}{b^{(\rho-1)(p-1)}\Gamma^p(2-\alpha)}\right), \text{ si } 0 < \rho < 1. \end{cases} \\ &\leq M_2\left(\|u\|_{L^p(a,b)}^p + \|{}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\|_{L^1(a,b)}^p\right) \\ &= {M_2}^1\|u\|_{{}^{\rho}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)}^p,\end{aligned}$$

où

$$M_2=\begin{cases}\max\left\{\dfrac{2^{p-1}b^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(1-\alpha)p-1}}{a^{(\rho-1)p}\Gamma^p(2-\alpha)},1+\dfrac{2^{p-1}b^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(2-\alpha)p-1}}{a^{(\rho-1)(p-1)}\Gamma^p(2-\alpha)}\right\}, \text{si } \rho>1,\\ \max\left\{\dfrac{2^{p-1}a^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(1-\alpha)p-1}}{b^{(\rho-1)p}\Gamma^p(2-\alpha)},1+\dfrac{2^{p-1}a^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(2-\alpha)p-1}}{b^{(\rho-1)(p-1)}\Gamma^p(2-\alpha)}\right\}, \text{ si } 0<\rho<1\end{cases}$$

ii) $(1-\alpha p)\geq 1$: D'après la remarque 3.1, on a ${}^{\rho}I_{a^+}^{1-\alpha}u(a)=0$. Alors :

$$^{2}\left\Vert u\right\Vert_{^{H}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)}^{p}=\left\Vert {}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\right\Vert_{L^p(a,b)}^{p}\leq {}^{1}\left\Vert u\right\Vert_{^{\rho}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)}^{p},$$

et

$$\begin{aligned}^{1}\left\Vert u\right\Vert_{^{\rho}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)}^{p} &= \left\Vert u\right\Vert_{L^p(a,b)}^{p}+\left\Vert {}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\right\Vert_{L^p(a,b)}^{p},\\ &\leq \begin{cases}\left(1+\dfrac{2^{p-1}b^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(2-\alpha)p-1}}{a^{(\rho-1)(p-1)}\Gamma^p(2-\alpha)}\right)\left\Vert {}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\right\Vert_{L^p(a,b)}^{p}, \text{si } \rho>1,\\ \left(1+\dfrac{2^{p-1}a^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(2-\alpha)p-1}}{b^{(\rho-1)(p-1)}\Gamma^p(2-\alpha)}\right)\left\Vert {}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\right\Vert_{L^p(a,b)}^{p}, \text{si } 0<\rho<1.\end{cases}\\ &= \begin{cases}\left(1+\dfrac{2^{p-1}b^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(2-\alpha)p-1}}{a^{(\rho-1)(p-1)}\Gamma^p(2-\alpha)}\right){}^{2}\left\Vert u\right\Vert_{^{\rho}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)}^{p}, \text{si } \rho>1,\\ \left(1+\dfrac{2^{p-1}a^{p(\rho-1)(2-\alpha)}(b-a)^{(2-\alpha)p-1}}{b^{(\rho-1)(p-1)}\Gamma^p(2-\alpha)}\right){}^{2}\left\Vert u\right\Vert_{^{\rho}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)}^{p}, \text{si } 0<\rho<1.\end{cases}\end{aligned}$$

D'où, le résultat.

■

3.2 Espaces de Sobolev de type $\sigma-$généralisée

On introduit maintenant, la définition des espaces de Sobolev de type $\sigma-$généralisée.

Définition 3.3 *Un espace de Sobolev fractionnaire généralisé est défini par :*

$$^{\sigma}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)=\left\{\begin{array}{l}u\in L^p(a,b)\ /\ \exists g\in L^p(a,b),\forall\varphi\in C_c^{\infty}(a,b):\\ \displaystyle\int_a^b u(x)\left({}^{\sigma}D_{b^-}^{\alpha}\varphi\right)(x)\,\sigma'(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,\varphi(x)\,\sigma'(x)\,dx,\end{array}\right\}. \tag{3.7}$$

Proposition 3.2 *La fonction g coïncides avec ${}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u$ p.p dans (a,b).*

Preuve. Soient $u \in {}^{\sigma}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$, et $\varphi \in C_c^{\infty}(a,b)$. Il est facile de montrer que $\left({}^{\sigma}D_{b^-}^{\alpha}\varphi\right)(x) \in L^q(a,b)$, telles que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1.$
De plus, $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ et on a :

$$\left({}^{\sigma}D_{b^-}^{\alpha}\varphi\right)(x) = -\left({}^{\sigma}I_{b^-}^{1-\alpha}\delta\varphi(t)\right)(x) = -\left({}^{\sigma}I_{b^-}^{1-\alpha}t\varphi'(t)\right)(x).$$

Alors :

$$\int_a^b u(x)\left({}^{\sigma}D_{b^-}^{\alpha}\varphi\right)(x)\,\sigma'(x)\,dx = -\int_a^b u(x)\,{}^{\sigma}I_{b^-}^{1-\alpha}\left(x\varphi'(x)\right)\sigma'(x)\,dx.$$

En appliquant (2.35), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)\left({}^{\sigma}D_{b^-}^{\alpha}\varphi\right)(x)\,\sigma'(x)\,dx &= -\int_a^b \left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(x)\left(\frac{1}{\sigma'(x)}\varphi'(x)\right)\sigma'(x)\,dx \\ &= -\int_a^b \left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(x)\,\varphi'(x)\,dx.\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie classique on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)\left({}^{\sigma}D_{b^-}^{\alpha}\varphi\right)(x)\,\sigma'(x)dx &= \left[-\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(x)\,\varphi(x)\right]_a^b \\ &\quad+\int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)\right](x)\,\varphi(x)\,dx. \\ &= \int_a^b \left(\delta^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(x)\,\varphi(x)\,\sigma'(x)\,dx. \\ &= \int_a^b \left({}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u\right)(x)\,\varphi(x)\,\sigma'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Depuis la relation :

$$\int_a^b u(x)\left({}^{\sigma}D_{b^-}^{\alpha}\varphi\right)(x)\,\sigma'(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,.\varphi(x)\,\sigma'(x)\,dx,$$

on obtient :

$$g(x) = \left({}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u\right)(x) \text{ p.p. dans } [a,b].$$

■

Théorème 3.3 ${}^{\sigma}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b) = {}^{\sigma}AC_{a^+}^{\alpha,p}(a,b) \cap L^p(a,b)$. *De plus, on a :*

$$u(x) = \frac{\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1} + \left({}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}\, {}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u\right)(x). \tag{3.8}$$

Preuve. Soit $u \in {}^{\sigma}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$, alors $u \in L^p(a,b)$, ${}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u \in L^p(a,b)$ et on a :

$$\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}\, {}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u\right)(x) = u(x) - \frac{\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1}.$$

Alors :

$$u(x) = \frac{\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1} + \left({}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}\, {}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u\right)(x).$$

Posons $A = \left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)$ et $\xi =^{\sigma} D_{a^+}^{\alpha}u$, on obtient l'iclusion directe.

Réciproquement, soit $u \in {}^{\sigma}AC_{a^+}^{\alpha,p}(a,b) \cap L^p(a,b)$, alors $u \in L^p(a,b)$ et il existe $A \in \mathbb{R}, \xi \in L^p(a,b)$ telles que

$$u(x) = \frac{A}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1} + \left({}^{\sigma}I_{a^+}^{\alpha}\xi\right)(x),$$

Donc ${}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u = \xi \in L^p(a,b)$, qui donne l'iclusion réciproque. ■

Corollaire 3.2 *D'aprè* (2.33) *et le résultat ci-dessus, on obtient pour tout* $u \in^{\sigma} W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$ *:*

$$\left\| u - \frac{\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1} \right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{M^{2-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}}{m\Gamma(2-\alpha)} \|{}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u\|_{L^p(a,b)}, \tag{3.9}$$

Remarque 3.2 *Notons que si* u *est sous la forme* (3.8)*, alors* $u \in L^p(a,b)$ *si seulement si :*

$$\frac{\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1} \in L^p(a,b).$$

Alors :

- **i)** *Si* $(1-\alpha)p \geq 1$*, alors* $u \in L^p(a,b)$ *si et seulement si* $\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a) = 0$.
- **ii)** *Si* $\left({}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a) \neq 0$*, alors* $u \in L^p(a,b)$ *si et seulement si* $(1-\alpha)p < 1$.

Définition 3.4 *On définit dans* ${}^{\sigma}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$ *les deux normes suivantes :*

$${}^{1}\|u\|^p_{{}^{\sigma}W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)} = \|u\|^p_{L^p(a,b)} + \|{}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u\|^p_{L^p(a,b)}.$$

$$^{2}\left\|u\right\|^{p}_{{}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)} = \left|{}^{\sigma}I^{1-\alpha}_{a^{+}}u\left(a\right)\right|^{p} + \left\|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}u\right\|^{p}_{L^{p}(a,b)}.$$

Théorème 3.4 *Les deux normes* $^{1}\left\|.\right\|_{{}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)}$ *et équivalent* $^{2}\left\|.\right\|_{{}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)}$ *sont équivalentes.*

Preuve. Soit $u \in {}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)$. u peut écrire sous la forme :

$$u = \frac{{}^{\sigma}I^{1-\alpha}_{a^{+}}u\left(a\right)}{\Gamma(\alpha)}\left(\sigma\left(x\right)-\sigma\left(a\right)\right)^{\alpha-1} + {}^{\sigma}I^{\alpha}_{a^{+}}\left({}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}\right)u(x).$$

On distingue deux cas :

i) $(1-\alpha)p < 1$:

En utilisant les mêmes arguments du théorème 24 dans [14], on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|u\right\|^{p}_{L^{p}(a,b)} &= \int_{a}^{b}\left|\frac{{}^{\sigma}I^{1-\alpha}_{a^{+}}u(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\sigma(x)-\sigma(a)\right)^{\alpha-1} + {}^{\sigma}I^{\alpha}_{a^{+}}\left({}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}\right)u(x)\right|^{p}dx \\
&\leq 2^{p-1}\left(\left|\frac{{}^{\sigma}I^{1-\alpha}_{a^{+}}u(a)}{\Gamma(\alpha)}\right|^{p}\int_{a}^{b}\left(\sigma\left(x\right)-\sigma(a)\right)^{(\alpha-1)p}dx + \left\|{}^{\sigma}I^{\alpha}_{a^{+}}\left({}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}\right)u\right\|^{p}_{L^{p}(a,b)}\right) \\
&\leq \frac{2^{p-1}}{m_{\sigma}((\alpha-1)p+1)\Gamma^{p}(\alpha)}\left(\sigma\left(b\right)-\sigma\left(a\right)\right)^{(\alpha-1)p+1}\left|{}^{\sigma}I^{1-\alpha}_{a^{+}}u\left(a\right)\right|^{p} \\
&\quad + \frac{2^{p-1}M^{\alpha+1}_{\sigma}(b-a)^{\alpha}}{m^{p}_{\sigma}\Gamma^{p}(\alpha+1)}\left\|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}u\right\|^{p}_{L^{p}(a,b)}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
^{1}\left\|u\right\|^{p}_{{}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)} &= \left\|u\right\|^{p}_{L^{p}(a,b)} + \left\|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}u\right\|^{p}_{L^{p}(a,b)} \\
&\leq \frac{2^{p-1}}{m_{\sigma}((\alpha-1)p+1)\Gamma^{p}(\alpha)}\left(\sigma\left(b\right)-\sigma\left(a\right)\right)^{(\alpha-1)p+1}\left|{}^{\sigma}I^{1-\alpha}_{a^{+}}u\left(a\right)\right|^{p} \\
&\quad + \left(1 + \frac{2^{p-1}M^{\alpha+1}_{\sigma}(b-a)^{\alpha}}{m^{p}_{\sigma}\Gamma^{p}(\alpha+1)}\right)\left\|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}u\right\|^{p}_{L^{p}(a,b)} \\
&\leq M_{1}\left(\left|{}^{\sigma}I^{1-\alpha}_{a^{+}}u\left(a\right)\right|^{p} + \left\|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}u\right\|^{p}_{L^{p}(a,b)}\right) \\
&= M_{1}\,{}^{2}\left\|u\right\|^{p}_{{}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)},
\end{aligned}$$

où

$$M_{1} = \max\left\{\frac{2^{p-1}}{m_{\sigma}((\alpha-1)p+1)\Gamma^{p}(\alpha)}\left(\sigma\left(b\right)-\sigma\left(a\right)\right)^{(\alpha-1)p+1}, 1 + \frac{2^{p-1}M^{\alpha+1}_{\sigma}(b-a)^{\alpha}}{m^{p}_{\sigma}\Gamma^{p}(\alpha+1)}\right\}.$$

Réciproquement, d'après le théorème de la moyenne, il existe $x_0 \in [a,b]$ telles que

$$^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(x_0\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b {}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(x\right)dx.$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(a\right) &= {}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(x_0\right) - \int_a^{x_0}\frac{d}{dx}\,{}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(x\right)dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b {}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(x\right)dx - \int_a^{x_0}\delta^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(x\right)\sigma'\left(x\right)dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b {}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(x\right)dx - \int_a^{x_0}{}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u(x)\,\sigma'\left(x\right)dx,
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|{}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(a\right)\right| &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b\left|{}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(x\right)\right|dx + \int_a^{x_0}\left|{}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u(x)\right|\sigma'\left(x\right)dx \\
&\leq \frac{1}{b-a}\left\|{}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right\|_{L^1(a,b)} + M_\sigma\left\|{}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^1(a,b)},
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\left|{}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(a\right)\right| \leq \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left\|{}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right\|_{L^p(a,b)} + \frac{M_\sigma\left(a\right)}{(b-a)^{\frac{1}{p}-1}}\left\|{}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^p(a,b)}.$$

En appliquant (2.33) au premier terme de droite ci-dessus, on trouve :

$$\left|{}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(a\right)\right| \leq \frac{M_\sigma^{2-\alpha}(b-a)^{1-\alpha-\frac{1}{p}}}{m_\sigma\Gamma(2-\alpha)}\left\|u\right\|_{L^p(a,b)} + \frac{M_\sigma}{(b-a)^{\frac{1}{p}-1}}\left\|{}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^p(a,b)},$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left|{}^{\sigma}I_{a^+}^{1-\alpha}u\left(a\right)\right|^p &\leq \left(\frac{M_\sigma^{2-\alpha}(b-a)^{1-\alpha-\frac{1}{p}}}{m_\sigma\Gamma(2-\alpha)}\left\|u\right\|_{L^p(a,b)} + M_\sigma(b-a)^{1-\frac{1}{p}}\left\|{}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^p(a,b)}\right)^p \\
&\leq 2^{p-1}\left(\frac{M_\sigma^{(2-\alpha)p}(b-a)^{(1-\alpha)p-1}}{m_\sigma^p\Gamma^p(2-\alpha)}\left\|u\right\|_{L^p(a,b)}^p + M_\sigma^p(b-a)^{p-1}\left\|{}^{\sigma}D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^p(a,b)}^p\right).
\end{aligned}$$

On déduit que :

$$\begin{aligned}
{}^{2}\|u\|^{p}_{{}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)} &= \left|{}^{\sigma}I^{1-\alpha}_{a^{+}}u(a)\right|^{p} + \|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}u\|^{p}_{L^{p}(a,b)} \\
&\leq \frac{2^{p-1}M_{\sigma}^{(2-\alpha)p}(b-a)^{(1-\alpha)p-1}}{m_{\sigma}^{p}\Gamma^{p}(2-\alpha)}\|u\|^{p}_{L^{p}(a,b)} \\
&\quad + \left(1+2^{p-1}M_{\sigma}^{p}(b-a)^{p-1}\right)\|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}u\|^{p}_{L^{p}(a,b)} \\
&\leq M_{2}\left(\|u\|^{p}_{L^{p}(a,b)} + \|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}u\|^{p}_{L^{1}(a,b)}\right) \\
&= M_{2}\,{}^{1}\|u\|^{p}_{{}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)},
\end{aligned}$$

où

$$M_{2} = \max\left\{\frac{2^{p-1}M_{\sigma}^{(2-\alpha)p}(b-a)^{(1-\alpha)p-1}}{m_{\sigma}^{p}\Gamma^{p}(2-\alpha)}, 1+2^{p-1}M_{\sigma}^{p}(b-a)^{p-1}\right\}$$

ii) $(1-\alpha)p \geq 1$:

D'après la remarque 3.2, nous avons ${}^{\sigma}I^{1-\alpha}_{a^{+}}u\,(a) = 0$. Alors,

$${}^{2}\|u\|^{p}_{{}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)} = \|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}u\|^{p}_{L^{p}(a,b)} \leq {}^{1}\|u\|^{p}_{{}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)},$$

et

$$\begin{aligned}
{}^{1}\|u\|^{p}_{{}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)} &= \|u\|^{p}_{L^{p}(a,b)} + \|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}u\|^{p}_{L^{p}(a,b)}, \\
&\leq \left(1+\frac{M_{\sigma}^{(\alpha+1)p}(b-a)^{\alpha p}}{m_{\sigma}^{p}\Gamma^{p}(\alpha+1)}\right)\|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^{+}}u\|^{p}_{L^{p}(a,b)}, \\
&= \left(1+\frac{M_{\sigma}^{(\alpha+1)p}(b-a)^{\alpha p}}{m_{\sigma}^{p}\Gamma^{p}(\alpha+1)}\right){}^{2}\|u\|^{p}_{{}^{H}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)}.
\end{aligned}$$

■

3.3 Complétude, réflexivité et séparabilité des espaces de Sobolev de type fractionnaire

Théorème 3.5 *L'espace ${}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)$ menu la norme ${}^{1}\|.\|_{{}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)}$ ou ${}^{2}\|.\|_{{}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^{+}}(a,b)}$ est un espace complet.*

Preuve. En utilisant les mêmes arguments de la preuve du théorème 25 dans [14], on va prouver qu'il est complet pour la norme ${}^2\|.\|_{{}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)}$, et de l'équivalence des normes ${}^1\|.\|_{{}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)}$ et ${}^2\|.\|_{{}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)}$, montre que ${}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$ est complet, pour la norme ${}^1\,\|.\|_{{}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)}$.

Soit (u_n) une suit de Cauchy dans ${}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}\,(a,b)$ menu de la norme ${}^2\,\|.\|_{{}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)}$.

On a d'après (3.8) :

$$u_n(x) = \frac{I^{1-\alpha,\rho}_{a^+} u_n(a)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} + I^{\alpha,\rho}_{a^+} D^{\alpha,\rho}_{a^+} u,$$

et :

${}^1\|u_n\|^p_{{}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)} = \|u_n\|^p_{L^p(a,b)} + \|{}^\sigma D^\alpha_{a^+} u_n\|^p_{L^p(a,b)}.$

${}^2\|u_n\|^p_{{}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)} = |{}^\sigma I^{1-\alpha}_{a^+} u_n(a)|^p + \|{}^\sigma D^\alpha_{a^+} u_n\|^p_{L^p(a,b)}.$

Comme (u_n) est de Cauchy dans ${}^\rho W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$, alors :

$\left({}^\sigma I^{1-\alpha}_{a^+} u_n(a)\right)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, (u_n) et $\left({}^\sigma D^\alpha_{a^+} u_n\right)$ sont des suites de Cauchy dans $L^p(a,b)$. Donc : (u_n) converge vers u dans $L^p(a,b)$, $\left({}^\sigma D^\alpha_{a^+} u_n\right)$ converge vers φ dans $L^p(a,b)$. On peut alors écrire d'après la continuité de l'opérateur ${}^\sigma I^\alpha_{a^+} : L^p(a,b) \longrightarrow L^p(a,b)$:

$$u(x) = \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} + {}^\sigma I^{\alpha,\rho}_{a^+} \varphi.$$

Donc : $u \in AC^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$ et$A = {}^\sigma I^{1-\alpha}_{a^+} u(a)$.

Comme $u \in L^p(a,b)$, on en déduit que $u \in {}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$ et $\varphi = {}^\sigma D^\alpha_{a^+} u$. ■

Le théorèmes suivants s'établissent de la même manière que le théorème 3.5 dans [1] :

Théorème 3.6 *L'espaces ${}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$. L'espace ${}^\sigma W^{\alpha,2}_{a^+}\,(a,b)$ est un espace de Hilbert séparable.*

.

Preuve. On muni l'espace ${}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$, de la norme ${}^1\|.\|_{{}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)}$ et soit l'opérateur $F :{}^\sigma\, W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b) \longrightarrow L^p(a,b) \times L^p(a,b)$ tel que : $F(u) = (u, {}^\sigma D^\alpha_{a^+} u)$. Cet opérateur est un isométrie et $F(W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b))$ est un sous espace fermé de $L^p(a,b) \times L^p(a,b)$. Alors :

i) Puisque $L^p(a,b)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$, donc : ${}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

ii) Puisque $L^p(a,b)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$, donc : ${}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.

■

3.4 Injections de Sobolev de type fractionnaire

Théorème 3.7 *Supposons que* $\min\{(1-\alpha)p, \alpha p\} > 1$. *Alors :* ${}^{\sigma}W^{\alpha,p}_{a^+} \hookrightarrow L^{\infty}(a,b)$.

Preuve. Puisque $(1-\alpha)p > 1$, on a d'après la formule (3.8) et la remarque 3.2 :

$$u(x) = \left({}^{\sigma}I^{\alpha}_{a^+}({}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^+}u)\right)(x).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left|\left({}^{\sigma}I^{\alpha}_{a^+}({}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^+}u)\right)(x)\right|, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_a^x (\sigma(x)-\sigma(t))^{\alpha-1}({}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^+}u)(t)\sigma'(t)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\sigma(x)-\sigma(t))^{\alpha-1}\left|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^+}u(t)\right|\sigma'(t)dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^x (\sigma(x)-\sigma(t))^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}(\sigma'(t))^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_a^x \left|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^+}u(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^x (\sigma(x)-\sigma(t))^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}(\sigma'(t))^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\left\|{}^{\sigma}D^{\alpha}_{a^+}u\right\|_{L^2(a,b)}.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_a^x (\sigma(x)-\sigma(t))^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}\sigma'^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}(t)dt &= \int_a^x (\sigma'(t))^{-\frac{(1-\alpha)p+(p-1)}{p-1}}(\sigma(x)-\sigma(t))^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}\sigma'(t)dt, \\
&\leq \frac{1}{m_{\sigma}^{\frac{(1-\alpha)p+(p-1)}{p-1}}}\int_a^x (\sigma(x)-\sigma(t))^{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}\sigma'(t)dt, \\
&= \frac{p-1}{(\alpha p-1)m_{\sigma}^{\frac{(1-\alpha)p+(p-1)}{p-1}}}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\frac{\alpha p-1}{p-1}}, \\
&= \frac{p-1}{(\alpha p-1)m_{\sigma}^{\frac{(1-\alpha)p+(p-1)}{p-1}}}(\sigma(b)-\sigma(a))^{\frac{\alpha p-1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Alors :

$$|u(x)| \leq \left[\frac{p-1}{(\alpha p-1)m_\sigma^{\frac{(1-\alpha)p+(p-1)}{p-1}}}\right]^{\frac{p-1}{p}} (\sigma(b)-\sigma(a))^{\frac{\alpha p-1}{p}} \|{}^\sigma D^\alpha_{a^+}u\|_{L^2(a,b)}. \tag{3.10}$$

Tenant en compte que $\|{}^\sigma D^\alpha_{a^+}u\|_{L^2(a,b)} = \ u\|_{{}^\sigma W^\alpha_{a^+}(a,b)}$, on obtient :

$$\|u\|_{L^\infty(a,b)} \leq C_\sigma \|u\|_{{}^\sigma W^\alpha_{a^+}(a,b)}.$$

■

Théorème 3.8 *Pour tout* $1 \leq q \leq p$, *tel que* $(1-\alpha)q < 1$, *on a :* ${}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b) \hookrightarrow {}^\sigma W^{\alpha,q}_{a^+}(a,b)$ *avec compacité.*

Preuve. Soit (un) une suite borné de ${}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$. Alors on a d'après (3.8) :

$$u_n(x) = \frac{{}^\sigma I^{1-\alpha}_{a^+}u_n(a)}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1} + {}^\sigma I^\alpha_{a^+}(D^\alpha_{a^+}u_n)(x),\ x \in]a,b[,$$

et

$$\|u_n\|^p_{{}^\sigma W^\alpha_{a^+}(a,b)} = |{}^\sigma I^{1-\alpha}_{a^+}u_n(a)|^p + \|{}^\sigma D^\alpha_{a^+}u_n\|^p_{{}^\sigma W^\alpha_{a^+}(a,b)}.$$

De la continuité de ${}^\sigma I^{1-\alpha}_{a^+}$, et la complétude de $\mathbb{R}$ et $L^p(a,b)$ on peut extraire une sous-suite (u_{nk}) telle que $\left({}^\sigma I^{1-\alpha}_{a^+}u_n(a)\right)$ converge vers ${}^\sigma I^{1-\alpha}_{a^+}u(a)$ dans $\mathbb{R}$ et $\left({}^\sigma D^\alpha_{a^+}u_n\right)$ converge vers φ dans $L^p(a,b)$.

Donc : $\left({}^\sigma D^\alpha_{a^+}u_n\right)$ converge vers φ dans $L^q(a,b)$ et on a :

$$u(x) = \frac{{}^\sigma I^{1-\alpha}_{a^+}u(a)}{\Gamma(\alpha)}(\sigma(x)-\sigma(a))^{\alpha-1} + {}^\sigma I^\alpha_{a^+}\varphi(x),\ x \in]a,b[,$$

Alors : $u \in {}^\sigma W^{\alpha,q}_{a^+}(a,b)$ et $\varphi = {}^\sigma D^\alpha_{a^+}u$.

D où : ${}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b) \hookrightarrow {}^\sigma W^{\alpha,q}_{a^+}(a,b)$ avec compacité. ■

Corollaire 3.3 *Il résulte du théorème précédant que pour tout* $1 \leq q \leq p$, *tel que* $(1-\alpha)q < 1$, *on a :* ${}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b) \hookrightarrow L^q(a,b)$ *avec compacité.*

Théorème 3.9 *Supposons que $\alpha p > 1$. Alors, l'ensemble suivant est fermé :*

$$K_p^\sigma = \left\{ v \in {}^\sigma W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b),\ \left({}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha} v\right)(a) = \mu_a, v(b) = \mu_b \right\} .\mu_a, \mu_b \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Preuve. Soit (v_n) une suite de K_p^σ, converge vers v dans ${}^\sigma W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$.

Alors : ${}^2\|v_n\|^p_{{}^\sigma W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)} = \left|{}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha} v_n(a)\right|^p + \|{}^\sigma D_{a^+}^\alpha v_n\|^p_{L^p(a,b)}$ est borné.

Donc : $\left({}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha} v_n(a)\right)$ est bornée, ainsi, on peut extraire une sous suite ${}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha} v_{nk}(a) = \mu_a$ converge vers $I_{a^+}^{1-\alpha} v(a)$. Alors : $I_{a^+}^{1-\alpha} v(a) = \mu_a$.

D'autre part, d'après (3.8) :

$$v_n(b) = \frac{{}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha} v_n(a)}{\Gamma(\alpha)} (\sigma(b) - \sigma(a))^{\alpha-1} + {}^\sigma I_{a^+}^\alpha (D_{a^+}^\alpha v_n)(b),$$

et de (3.10) on a : $|v_n(b)| \leq \left[\dfrac{p-1}{(\alpha p - 1) m_\sigma^{\frac{(1-\alpha)p+(p-1)}{p-1}}}\right]^{\frac{p-1}{p}} (\sigma(b) - \sigma(a))^{\frac{\alpha p - 1}{p}} \|{}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\|_{L^2(a,b)}$.

Donc : $(v_n(b))$ est bornée, ainsi, on peut extraire une sous suite $v_{nl}(b) = \mu_b$ converge vers $v(b)$. Alors : $v(a) = \mu_b$.

D'où K_p^σ est fermé. ■

Corollaire 3.4 *Il résulte que :*

- **i)** $\left\{ v \in {}^\sigma W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b),\ \left({}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha} v\right)(a) = 0, v(b) = 0 \right\}$ *est un sous-espace fermé de* ${}^\sigma W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$.
- **ii)** $\left\{ v \in {}^\sigma W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b),\ v(b) = 0 \right\}$ *est un sous-espace fermé de* ${}^\sigma W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)$.

CHAPITRE 4

SOLUTIONS FAIBLES DE QUELQUES PROBLÈMES AUX LIMITES

Les solutions faibles dans les espaces de Sobolev offrent une approche puissante pour étudier les problèmes considérés. Elles permettent de généraliser la notion de solution, de traiter des problèmes plus complexes et de considérer des conditions aux limites plus générales. Les espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire fournissent une structure mathématique compatible pour étudier ces solutions.

Dans ce chapitre, quelques problèmes ont été abordés. Nous avons tout d'abord traité un problème homogène de type Hadamard, suivi d'un problème non homogène de type σ généralisé. Ensuite, nous avons examiné un problème de Sturm-Liouville de type Katugampola, et enfin, nous avons étudié un problème p-laplacien de type Riemann-Liouville. Pour conclure ce chapitre, une décomposition spectrale d'un opérateur de Sturm-Liouville de type Riemann-Liouville a été présentée.

Supposons que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1, 0 < a < b < +\infty,\ \sigma \in C^2([a,b])$ vérifiant (3.1) et $\rho > 0$.

4.1 Un problème de Hadamard linéaire, homogène

En considérant le problème à deux points avec des conditions aux limites mixtes homogènes suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \left({}^H D_{b^-}^{\alpha} \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} u\right)\right)(x) + \lambda(x) u(x) = f(x), \text{ dans } (a,b), \\ \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} u\right)(a) = u(b) = 0, \end{cases}$$

avec : $a > 0, \lambda \in L^{\infty}(a,b)$ et $f \in L^2(a,b)$.

Soit K la sous-espace fermé de type **ii)** du corollaire 3.4, défini par :

$$K = \left\{ v \in {}^H W_{a^+}^{\alpha,2}(a,b) : \ v(b) = 0 \right\}.$$

On va établir une formulation variationnelle du problème (P), on multipliera les deux membres de la première équation par une fonction suffisamment régulière v, on obtient :

$$\left({}^H D_{b^-}^{\alpha} \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} u\right)\right)(x)\, v(x) + \lambda(x) u(x)\, v(x) = f(x)\, v(x).$$

Par l'intégration sur l'intervalle (a,b), on obtient :

$$\int_a^b \left({}^H D_{b^-}^{\alpha} \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} u\right)\right)(x)\, v(x) \frac{dx}{x} + \int_a^b \lambda(x) u(x)\, v(x) \frac{dx}{x} = \int_a^b f(x)\, v(x) \frac{dx}{x}.$$

En utilisant la formule (2.18) de l'intégration par partie au premier terme, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b \left({}^H D_{b^-}^{\alpha} \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} u\right)\right)(x)\, v(x) \frac{dx}{x} &= \left({}^H I_{a^+}^{1-\alpha} v\right)(a) \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} u\right)(a) \\ &\quad - {}^H I_{b^-}^{1-\alpha} \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} u\right)(b)\, v(b) \\ &\quad + \int_a^b \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} u\right)(x) \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} v\right)(x) \frac{dx}{x} \\ &= \int_a^b \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} u\right)(x) \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} v\right)(x) \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

À cette étape, on peut supposer que $v \in K$.

En tenant compte de l'hypothèse ci-dessus et des conditions aux limites, nous arrivons au problème variationnel suivant :

$$(PV) \quad \int_a^b \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} u\right)(x) \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} v\right)(x) \frac{dx}{x} + \int_a^b \lambda(x) u(x) v(x) \frac{dx}{x} = \int_a^b f(x) v(x) \frac{dx}{x}.$$

Réciproquement, soit $u \in K$ tel que pour tout $\varphi \in C_c^{\infty}(a,b)$:

$$\int_a^b \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} u\right)(x) \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} \varphi\right)(x) \frac{dx}{x} + \int_a^b \lambda(x) u(x) \varphi(x) \frac{dx}{x} = \int_a^b f(x) \varphi(x) \frac{dx}{x}.$$

Alors :

$$\int_a^b \left({}^H D_{b^-}^{\alpha H} D_{a^+}^{\alpha} u\right)(x) \varphi(x) \frac{dx}{x} + \int_a^b \lambda(x) u(x) \varphi(x) \frac{dx}{x} = \int_a^b f(x) \varphi(x) \frac{dx}{x}.$$

ainsi :

$$\int_a^b \left[\frac{\left({}^H D_{b^-}^{\alpha H} D_{a^+}^{\alpha} u\right)(x) + \lambda(x) u(x) - f(x)}{x}\right] \varphi(x)\, dx = 0,\ \forall \varphi \in C_c^{\infty}(a,b).$$

On déduit que :

$$\left({}^H D_{b^-}^{\alpha H} D_{a^+}^{\alpha} u\right)(x) + \lambda(x).u(x) = f(x) \ \text{ p.p. dans } (a,b).$$

Les théorèmes suivants l'existence et l'unicité de problème (PV).

Théorème 4.1 *Supposons qu'il existe : $\lambda_0 > 0$ tel que :*

$$\lambda(x) \geq \lambda_0 \ \textit{dans}\ (a,b). \tag{4.1}$$

Alors, le problème (PV) admit une solution unique $u \in K$.

Preuve. On pose :

$$A(u,v) = \int_a^b \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} u\right)(x) \left({}^H D_{a^+}^{\alpha} v\right)(x) \frac{dx}{x} + \int_a^b \lambda(x) u(x) v(x) \frac{dx}{x},\ \ (u,v) \in K\ ,$$

$$L(v)=\int_a^b f(x)\, v(x)\, \frac{dx}{x},\ \ v\in K.$$

Il est facile de voir que A est une forme bilinéaire et L est une forme linéaire.

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned}
|A(u,v)| &\leq \int_a^b \left|\left({}^H D_{a^+}^{\alpha}u\right)(x)\left({}^H D_{a^+}^{\alpha}v\right)(x)\right| \frac{dx}{x}+\int_a^b |\lambda(x)u(x)\,v(x)|\,\frac{dx}{x} \\
&\leq \frac{1}{a}\left\|{}^H D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^2(a,b)}\left\|{}^H D_{a^+}^{\alpha}v\right\|_{L^2(a,b)}+\frac{\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}}{a}\|u\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)} \\
&\leq \frac{\max\left\{1,\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}\right\}}{a}\left(\|u\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)}+\left\|{}^H D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^2(a,b)}\left\|{}^H D_{a^+}^{\alpha}v\right\|_{L^2(a,b)}\right) \\
&\leq \frac{2\max\left\{1,\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}\right\}}{a}\|u\|_{{}^H W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)}\|v\|_{{}^H W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)},
\end{aligned}$$

et

$$|L(v)|\leq \frac{\|f\|_{L^2(a,b)}}{a}\|v\|_{L^2(a,b)}\leq \frac{\|f\|_{L^2(a,b)}}{a}\|v\|_{{}^H W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)}.$$

Alors : A et L sont continues.

Maintenant, on prouve que A est coercive. On a :

$$\begin{aligned}
A(u,u) &= \int_a^b \left({}^H D_{a^+}^{\alpha}u\right)^2(x)\,.\left({}^H D_{a^+}^{\alpha}v\right)\frac{dx}{x}+\int_a^b \lambda(x)u^2(x)\,\frac{dx}{x} \\
&\geq \frac{1}{b}\left\|{}^H D_{a^+}^{\alpha}u\right\|_{L^2(a,b)}^2+\frac{\lambda_0}{b}\|u\|_{L^2(a,b)}^2 \\
&\geq \frac{\min\{1,\lambda_0\}}{b}\|u\|_{{}^H W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, A est coercive.

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (PV) admet une solution unique $u\in K$.

■

Théorème 4.2 *Supposons que :*

$$\frac{b}{a}<e, \tag{4.2}$$

$$\frac{(b-a)^{\alpha}\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}}{a^5 b^{4(\alpha-1)}\Gamma^2(\alpha+1)\left[1-\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}\right]}<\frac{1}{b}. \tag{4.3}$$

Alors, le problème (PV) admet une solution unique $u \in K$.

Preuve. Nous avons prouvé la continuité de A et L. Il reste à prouver la coercivité de A. Pour cela on a :

$$A(u,u) = \frac{1}{b}\left\| {}^{H}D_{a^+}^{\alpha} u \right\|_{L^2(a,b)}^2 - \frac{\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}}{a}\|u\|_{L^2(a,b)}^2 .$$

En appliquant la relation (22) dans [2], on obtient :

$$\left\| u - \frac{\left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right\|_{L^2(a,b)}^2 \leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{a^4 b^{4(\alpha-1)}\Gamma^2(\alpha+1)}\left\| {}^{H}D_{a^+}^{\alpha} u \right\|_{L^2(a,b)}^2 .$$

Notons que :

$$\begin{aligned}\left\| u - \frac{\left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right\|_{L^2(a,b)}^2 &= \|u\|_{L^2(a,b)}^2 + \left\| \frac{\left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right\|_{L^2(a,b)}^2 \\ &\quad - \frac{2\left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b u(x)\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\int_a^b u(x)\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\frac{dx}{x} \leq \sqrt{\frac{b}{2\alpha-1}}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(a,b)} ,$$

Alors :

$$\begin{aligned}-\frac{2\left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b u(x)\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\frac{dx}{x} &\geq -\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\left|\left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)\right|\|u\|_{L^2(a,b)} \\ &= -2\left[\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\left|\left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)\right|\right]\left[\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(a,b)}\right] \\ &\geq -\frac{b}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}\left|\left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)\right|^2 - \left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}\|u\|_{L^2(a,b)}^2 ,\end{aligned}$$

et comme

$$\left\| \frac{\left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right\|_{L^2(a,b)}^2 \geq \frac{a}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}\left|\left({}^{H}I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)\right|^2 ,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{a\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}-b}{(2\alpha-1)\Gamma^{2}\left(\alpha\right)}\left|\left({}^{H}I_{a^{+}}^{1-\alpha}u\right)(a)\right|^{2}+\left[1-\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}\right]\|u\|_{L^{2}(a,b)}^{2}\\
\leq\ &\frac{(b-a)^{2\alpha}}{a^{4}b^{4(\alpha-1)}\Gamma^{2}\left(\alpha+1\right)}\left\|{}^{H}D_{a^{+}}^{\alpha}u\right\|_{L^{2}(a,b)}^{2}.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\left[1-\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}\right]\|u\|_{L^{2}(a,b)}^{2}\ \leq\ &\frac{(b-a)\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^{2}\left(\alpha\right)}\left|\left({}^{H}I_{a^{+}}^{1-\alpha}u\right)(a)\right|^{2}\\
&+\frac{(b-a)^{2\alpha}}{a^{4}b^{4(\alpha-1)}\Gamma^{2}\left(\alpha+1\right)}\left\|{}^{H}D_{a^{+}}^{\alpha}u\right\|_{L^{2}(a,b)}.,
\end{aligned}$$

D'après (4.2), on déduit que $\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}<1$, alors :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{2}(a,b)}^{2}\ \leq\ &\frac{(b-a)\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}}{\left[1-\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}\right](2\alpha-1)\Gamma^{2}\left(\alpha\right)}\left|\left({}^{H}I_{a^{+}}^{1-\alpha}u\right)(a)\right|^{2}\\
&+\frac{(b-a)^{2\alpha}}{a^{4}b^{4(\alpha-1)}\Gamma^{2}\left(\alpha+1\right)\left[1-\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}\right]}\left\|{}^{H}D_{a^{+}}^{\alpha}u\right\|_{L^{2}(a,b)}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
-\frac{\|\lambda\|_{L^{\infty}(a,b)}}{a}\|u\|_{L^{2}(a,b)}^{2}\ \geq\ &\left[\frac{(b-a)\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}}{1-\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}}\right]\frac{\|\lambda\|_{L^{\infty}(a,b)}}{a(2\alpha-1)\Gamma^{2}\left(\alpha\right)}\left|\left({}^{H}I_{a^{+}}^{1-\alpha}u\right)(a)\right|^{2}\\
&-\frac{(b-a)^{2\alpha}\|\lambda\|_{L^{\infty}(a,b)}}{a^{5}b^{4(\alpha-1)}\Gamma^{2}\left(\alpha+1\right)\left[1-\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}\right]}\left\|{}^{H}D_{a^{+}}^{\alpha}u\right\|_{L^{2}(a,b)}^{2}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
A(u,u)\ \geq\ &\left[\frac{(b-a)\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}}{1-\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}}\right]\frac{\|\lambda\|_{L^{\infty}(a,b)}}{a(2\alpha-1)\Gamma^{2}\left(\alpha\right)}\left|\left({}^{H}I_{a^{+}}^{1-\alpha}u\right)(a)\right|^{2}\\
&+\left[\frac{1}{b}-\frac{(b-a)^{\alpha}\|\lambda\|_{L^{\infty}(a,b)}}{a^{5}b^{4(\alpha-1)}\Gamma^{2}\left(\alpha+1\right)\left[1-\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}\right]}\right]\left\|{}^{H}D_{a^{+}}^{\alpha}u\right\|_{L^{2}(a,b)}^{2}\\
\geq\ &M\|u\|_{{}^{H}W_{a^{+}}^{\alpha,p}(a,b)}^{2}.
\end{aligned}$$

Comme $\left(\ln \dfrac{b}{a}\right)^{2\alpha-1} < \dfrac{b}{a}$ on a : $(b-a)\left(\ln \dfrac{b}{a}\right)^{2\alpha-1} > 0$,

on déduit que : $\dfrac{(b-a)\left(\ln \frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}}{1-\left(\ln \frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}} > 0.$

D'après (4.3), on déduit que $1 - \dfrac{(b-a)^{\alpha}\left\|\lambda\right\|_{L^{\infty}(a,b)}}{a^5 b^{4\alpha-3}\Gamma^2(\alpha+1)\left[1-\left(\ln \frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}\right]} > 0$, alors :

$$A(u,u) \geq M \left\|u\right\|^2_{{}^{H}W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)},$$

où

$$M = \min\left\{\left(\frac{b-a\left(\ln \frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}}{1-\left(\ln \frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}}\right)\frac{\left\|\lambda\right\|_{L^{\infty}(a,b)}}{a(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}, \frac{1}{b} - \frac{(b-a)^{\alpha}\left\|\lambda\right\|_{L^{\infty}(a,b)}}{a^5 b^{4(\alpha-1)}\Gamma^2(\alpha+1)\left[1-\left(\ln \frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}\right]}\right\}.$$

Ainsi, A est coercive. Donc, on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram, il s'ensuit que le problème (PV) admet une solution unique $u \in K$. ■

Remarque 4.1 *Dans les même conditions de f et λ nous pouvons prouver l'existence et l'unicité des problèmes suivants :*

$$(P') \quad \begin{cases} \left({}^{H}D^{\alpha}_{b^-}\left({}^{H}D^{\alpha}_{a^+}u\right)\right)(x) + \lambda(x)u(x) = f(x), \ \textit{Dans } (a,b), \\ \left({}^{H}I^{1-\alpha}_{a^+}u\right)(a) = 0, \ u(b) = 0. \end{cases}$$

La solution unique du problème (P') appartient à :

$$K' = \left\{v \in {}^{H}W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b), \ \left({}^{H}I^{1-\alpha}_{a^+}v\right)(a) = 0, \ v(b) = 0\right\}.$$

Remarque 4.2 *Comme A est une forme bilinéaire symétrique, nous déduisons de la théorème de Lax-Milgram [7] et que la solutions unique du problème (P) est aussi la solution du problème de minimisation :* $\min\limits_{v\in K}\left\{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b \left(\left({}^{H}D^{\alpha}_{a^+}v\right)^2(x) + \lambda(x)v^2(x)\right)dx - \int_a^b f(x)v(x)dx\right\}$.
La solution unique du problème (P') est aussi la solution du problème de minimisation :

$$\min_{v\in K'}\left\{\frac{1}{2}\int_a^b \left(\left({}^{H}D^{\alpha}_{a^+}v\right)^2(x) + \lambda(x)v^2(x)\right)dx - \int_a^b f(x)v(x)dx\right\}.$$

4.2 Un problème de Sturm-Liouville de type de Katugampola

En considérant le problème à deux points de type de Sturm-Liouville suivant :

$$(P_{SL})\quad \begin{cases} \left(D_{b^-}^{\alpha,\rho}(\mu(x)D_{a^+}^{\alpha,\rho}u)\right)(x)+\lambda(x)u\,(x)=f\,(x)\,,\ \text{dans }]a,b[,\\ \left(I_{a^+}^{1-\alpha,\rho}u\right)(a)=0,\ u(b)=0,\end{cases}$$

où $a>0, \mu, \lambda \in L^{\infty}(a,b)$ et soit $f\in L^2(a,b)$.
En remarquant qu'on peut écrire

$$m_\rho \leq x^{\rho-1} \leq M_\rho \qquad \text{sur } (a,b), \tag{4.4}$$

où

$$m_\rho = a^{\rho-1}, M_\rho = b^{\rho-1}\,\text{si}\,\rho\geq 1, \qquad m_\rho = b^{\rho-1}, M_\rho = a^{\rho-1}\,\text{si}\,\rho<1.$$

Soit K_ρ le sous-espace fermé de type **i)** de corollaire 3.4, défini par :

$$K_\rho = \left\{v\in W_{a^+,\rho}^{\alpha,2}(a,b),\ \left(I_{a^+}^{\alpha,\rho}v\right)(a)=0,\ v(b)=0\right\}.$$

On multipliant les deux membres de la première équation de (P_{SL}) par une fonction $x^{\rho-1}v$ ou $v\in K_\rho$, et intégrant sur $]a,b[$, on obtient :

$$\int_a^b \left(D_{b^-}^{\alpha,\rho}\left(\mu(x)D_{a^+}^{\alpha,\rho}u\right)\right)(x)v(x)x^{\rho-1}dx+\int_a^b \lambda(x)u(x)v(x)x^{\rho-1}dx=\int_a^b f(x)v(x)x^{\rho-1}dx.$$

En utilisant la formule (2.25) de l'intégration par partie au premier terme, et tenant en compte $v\in K_\rho$ et les conditions aux limites, on obtient le problème variationnel suivant :

$$(PV_{SL})\quad \int_a^b \mu(x)\left(D_{a^+}^{\alpha,\rho}u\right)(x)\left(D_{a^+}^{\alpha,\rho}v\right)(x)x^{\rho-1}dx+\int_a^b \lambda(x)u\,(x)\,v\,(x)\,x^{\rho-1}dx=\int_a^b f\,(x)\,v\,(x)\,x^{\rho-1}dx.$$

Réciproquement, Soit $u\in K_\rho$ et $\forall\varphi\in C_c^\infty(a,b)$ tel que :

$$\int_a^b \mu(x)\left(D_{a^+}^{\alpha,\rho}u\right)(x)\left(D_{a^+}^{\alpha,\rho}\varphi\right)(x)x^{\rho-1}dx+\int_a^b \lambda(x)u(x)\varphi(x)x^{\rho-1}dx=\int_a^b f(x)\varphi(x)x^{\rho-1}dx,$$

On peut écrire :

$$\int_a^b \left[\left(D^{\alpha;\rho}_{b^-}(\mu(x)D^{\alpha;\rho}_{a^+}u)\right)(x)+\lambda(x)u(x)-f(x)\right]\varphi(x)x^{\rho-1}dx=0,\ \forall\varphi\in C^\infty_c(a,b).$$

On en déduit que :

$$\left(D^{\alpha;\rho}_{b^-}(\mu(x)D^{\alpha;\rho}_{a^+}u)\right)(x)+\lambda(x).u(x)=f(x),\text{ p.p. dans}\,]a,b[.$$

Les théorèmes suivants l'existence et l'unicité de problème (PV_{SL}).

Théorème 4.3 *Supposons qu'il existe :*$\mu_0>0,\lambda_0>0$ *tels que :*

$$\mu(x)\geq\mu_0,\quad \lambda(x)\geq\lambda_0 \textit{ p.p dans}\,]a,b[. \tag{4.5}$$

Alors, le problème (PV_{SL}) *admit une solution unique* $u\in K_\rho$.

Preuve. On pose :

$$A_\rho(u,v)=\int_a^b\mu(x)\left(D^{\alpha;\rho}_{a^+}u\right)(x)\left(D^{\alpha;\rho}_{a^+}v\right)(x)x^{\rho-1}dx+\int_a^b\lambda(x)u(x)v(x)x^{\rho-1}dx,\ (u,v)\in K_\rho,$$

$$L_\rho(v)=\int_a^b f(x)v(x)x^{\rho-1}dx,\ v\in K_\rho.$$

A_ρ est une forme bilinéaire et L_ρ est une forme linéaire, et on a :

$$\begin{aligned}
|A_\rho(u,v)| &\leq \int_a^b\mu(x)|\left(D^{\alpha;\rho}_{a^+}u\right)(x)\left(D^{\alpha;\rho}_{a^+}v\right)(x)|x^{\rho-1}dx+\int_a^b\lambda(x)|u(x)v(x)|x^{\rho-1}dx\\
&\leq M_\rho\left(\|\mu\|_{L^\infty(a,b)}\|D^{\alpha;\rho}_{a^+}u\|_{L^2(a,b)}\|D^{\alpha;\rho}_{a^+}v\|_{L^2(a,b)}+\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}\|u\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)}\right)\\
&\leq M_\rho.\max\{\|\mu\|_{L^\infty(a,b)},\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}\}\left(\|u\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)}+\|D^{\alpha;\rho}_{a^+}u\|_{L^2(a,b)}\|D^{\alpha;\rho}_{a^+}v\|_{L^2(a,b)}\right)\\
&\leq 2M_\rho.\max\{\|\mu\|_{L^\infty(a,b)},\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}\}\|u\|_{W^{\alpha,2}_{a^+,\rho}(a,b)}\|v\|_{W^{\alpha,2}_{a^+,\rho}(a,b)},
\end{aligned}$$

et

$$|L_\rho(v)|\leq M_\rho\|f\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)}\leq M_\rho\|f\|_{L^2(a,b)}\|v|_{W^{\alpha,2}_{a^+,\rho}(a,b)}.$$

Alors, A_ρ et L_ρ sont continues.

Soit $u \in K_\rho$, alors :

$$\begin{aligned} A(u,u) &= \int_a^b \mu(x)\left(D_{a^+}^{\alpha,\rho}u\right)^2(x).\left(D_{a^+}^{\alpha,\rho}v\right)(x)x^{\rho-1}dx + \int_a^b \lambda(x)u^2(x)x^{\rho-1}dx \\ &\geq m_\rho\left(\mu_0\|D_{a^+}^{\alpha,\rho}u\|^2_{L^2(a,b)} + \lambda_0\|u\|^2_{L^2(a,b)}\right) \\ &\geq m_\rho.\min\{\mu_0,\lambda_0\}\|u\|^2_{W^{\alpha,2}_{a^+,\rho}(a,b)}. \end{aligned}$$

Ainsi, A_ρ est coercive. D'après le théorème de Lax-Milgram , le problème (PV_{SL}) admet une solution unique $u \in K_\rho$. ■

4.3 Un problème $\sigma-$ généralisé linéaire non homogène

On considère le problème à deux points, avec des conditions aux limites mixte no homogène suivant :

$$(P_{NH}) \quad \begin{cases} \left({}^\sigma D_{b^-}^\alpha\left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\right)\right)(x) + \lambda(x)u(x) = f(x), \text{ dans } (a,b), \\ \left({}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a) = \mu_a, u(b) = \mu_b, \end{cases}$$

ou $\sigma \in C^\infty([a,b]), \mu_a, \mu_b \in \mathbb{R}, \lambda \in L^\infty(a,b)$ et $f \in L^2(a,b)$.

On pose :

$$K_\sigma = \left\{v \in {}^\sigma W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b)\,,\ \left({}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha}v\right)(a) = \mu_a,\ v(b) = \mu_b\right\}.$$

Il est clair que K_σ est convexe, et d'après théorème 3.9 K_σ est fermé.

Pour établir une formulation variationnelle de ce problème, on multipliera les deux membres de la première équation par $(v-u)$ ou v est une fonction dans K_σ. On obtient alors :

$$({}^\sigma D_{b^-}^\alpha({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u))(x)(v(x)-u(x)) + \lambda(x)u(v(x)-u(x)) = f(x)(v(x)-u(x)).$$

En 'intégrant sur l'intervalle (a,b), on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_a^b ({}^\sigma D_{b^-}^\alpha({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u))(x)(v(x)-u(x))\sigma'(x)dx \\ &+\int_a^b \lambda(x)u(x)(v(x)-u(x))\sigma'(x)dx = \int_a^b f(x)(v(x)-u(x))\sigma'(x)dx. \end{aligned}$$

En utilisant la formule (2.39) de l'intégration par partie au premier terme , on obtint :

$$\begin{aligned}\int_a^b ({}^\sigma D_{b^+}^\alpha ({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u))(x)(v(x)-u(x))\sigma'(x)dx &= \left({}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha}(v-u)\right)(a)\left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\right)(a) \\ &\quad -{}^\sigma I_{b^-}^{1-\alpha}\left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\right)(b)\left(v(b)-u(b)\right) \\ &\quad +\int_a^b \left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\right)(x)\left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha (v-u)\right)(x)\sigma'(x)dx\end{aligned}$$

En remarquant que :

${}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha}(v-u)(a) = {}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha}(v)(a) - ({}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha}(v)(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad v(b)-u(b) = 0.$

Donc :

$$\int_a^b ({}^\sigma D_{b^-}^\alpha ({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u))(x)(v(x)-u(x))\sigma'(x)dx = \int_a^b ({}^\sigma D_{b^+}^\alpha ({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u))(x)(v(x)-u(x))\sigma'(x)dx$$

On arrive au problème variationnel suivant :

$$(PV_{NH}) \quad \int_a^b \left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\right)(x)\left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha v\right)(x)\,\sigma'(x)dx + \int_a^b \lambda(x)u\,(x)\,v\,(x)\,\sigma'(x)dx = \int_a^b f\,(x)\,v\,(x)\,\sigma'(x)dx.$$

Les théorèmes suivants l'existence et l'unicité de problème (PV_{NH}).

Théorème 4.4 *Supposons qu'il existe :* $\lambda_0 > 0$ *tel que :*

$$\lambda(x) \geq \lambda_0 \quad p.p \ dans \ \ (a,b). \tag{4.6}$$

Alors, le problème (PV_{NH}) *admit une solution unique* $u \in K_\sigma$.

Preuve. On pose :

$$A_\sigma(u,v) = \int_a^b \left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\right)(x)\left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha v\right)(x)\sigma'(x)dx + \int_a^b \lambda(x)u(x)v(x)\sigma'(x)dx, (u,v) \in K_\sigma,$$

$$L_\sigma(v) = \int_a^b f(x)v(x)\sigma'(x), \ v \in K_\sigma.$$

A_σ est une forme bilinéaire et L est une forme linéaire. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
|A_\sigma(u,v)| &\leq \int_a^b \left|\left({}^\sigma D^\alpha_{a^+}u\right)(x)\left({}^\sigma D^\alpha_{a^+}v\right)(x)\right|\sigma'(x)dx + \int_a^b |\lambda(x)u(x)v(x)|\,\sigma'(x)dx \\
&\leq M_\sigma.\left(\|{}^\sigma D^\alpha_{a^+}u\|_{L^2(a,b)}.\|{}^\sigma D^\alpha_{a^+}v\|_{L^2(a,b)} + \|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}\|u\|_{L^2(a,b)}\|v\|_{L^2(a,b)}\right) \\
&\leq M_\sigma.\max\{1,\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}\}\left(\|u\|_{L^2(a,b)}.\|v\|_{L^2(a,b)} + \|{}^\sigma D^\alpha_{a^+}u\|_{L^2(a,b)}\,\|{}^\sigma D^\alpha_{a^+}v\|_{L^2(a,b)}\right) \\
&\leq 2M_\sigma.\max\{1,\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}\}\|u\|_{{}^\sigma W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)}\|v\|_{{}^\sigma W^{\alpha,2}_{a^+}(a,b)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|L_\sigma(v)| &\leq M_\sigma.\|f\|_{L^2(a,b)}.\,\|v\|_{L^2(a,b)} \\
&\leq M_\sigma.\|f\|_{L^2(a,b)}.\,\|v\|_{{}^\sigma W^{\alpha,2}_{a^+}(a,b)}
\end{aligned}$$

Alors, A_σ et L_σ sont continues.

Maintenant, on va prouver que A_σ est coercive.

On a :

$$\begin{aligned}
A(u,u) &= \int_a^b \left({}^\sigma D^\alpha_{a^+}u\right)^2(x)\,.\left({}^H D^\alpha_{a^+}v\right)\sigma'(x)dx + \int_a^b \lambda(x)u^2(x)\,\sigma'(x)dx \\
&\geq m_\sigma\,\|{}^\sigma D^\alpha_{a^+}u\|^2_{L^2(a,b)} + \lambda_0.m_\sigma\,\|u\|^2_{L^2(a,b)} \\
&\geq m_\sigma.\min\{1,\lambda_0\}\,\|u\|^2_{{}^\sigma W^{\alpha,2}_{a^+}(a,b)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, A_σ est coercive.

D'après le théorème de Stampacchia, il existe $u \in K_\sigma$ unique telle que

$$A_\sigma(u, v-u) \geq L_\sigma(v-u), \qquad \forall v \in K_1.$$

Soit maintenant $\varphi \in C^\infty_c(a,b)$. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ on a : $\varphi \equiv 0$ sur $]a, a+\varepsilon[\cup]b-\varepsilon, b[$. Donc :

i) $\varphi(b) = 0$,

ii) ${}^\sigma I^{1-\alpha}_{a^+}\varphi(x) = 0$, pour tout $x \in]a, a+\varepsilon[$.

Faisons ε tend vers 0, on obtient ${}^\sigma I^{1-\alpha}_{a^+}\varphi(a) = 0$.

Alors : $u+\varphi, u-\varphi \in K_\sigma$, et on a :

pour $v = u+\varphi$: $A_\sigma(u,\varphi) \geq L_\sigma(\varphi)$, pour $v = u-\varphi$: $A_\sigma(u,-\varphi) \geq L_\sigma(-\varphi)$.

i.e. $A_\sigma(u,\varphi) \geq L_\sigma(\varphi), \qquad A_\sigma(u,\varphi) \leq L_\sigma(\varphi),$

Alors : $A_\sigma(u,\varphi) = L_\sigma(\varphi)$, ce qui nous donne :

$$\int_a^b \left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\right) t(x) \left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha \varphi\right)(x)\sigma'(x)dx + \int_a^b \lambda(x)u(x)\varphi(x)(x)\sigma'(x)dx = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\sigma'(x)dx.$$

Alors :

$$\int_a^b \left[\left({}^\sigma D_{b^-}^\alpha \left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\right)\right)(x) + \lambda(x)u(x) - f(x)\right]\sigma'(x)\varphi(x)\,dx = 0,\ \forall\varphi \in C_c^\infty(a,b).$$

On en déduit que :

$$\left({}^\sigma D_{b^-}^\alpha \left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\right)\right)(x) + \lambda(x).u(x) = f(x) \text{ p.p. dans } (a,b).$$

Alors : le problème (P_{NH}) admet une solution unique $u \in K_\sigma$. ■

Théorème 4.5 *Supposons que :*

$$\frac{M_\sigma^{\alpha+2}(b-a)^\alpha}{m_\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)} < 1. \tag{4.7}$$

Alors, le problème (PV_{NH}) admet une solution unique $u \in K_\sigma$.

Preuve. On a prouvé la continuité de A_σ et L_σ. Il reste de prouver la coercivité de A_σ.

On a :

$$A_\sigma(u,u) \geq m_\sigma \|{}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\|^2_{L^2(a,b)} - M_\sigma.\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}\|u\|^2_{L^2(a,b)}.$$

Comme $\left({}^\sigma I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a) = 0$, on a : $\|{}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\|_{L^2(a,b)} = \|u\|_{{}^\sigma W_{a^+}^\alpha(a,b)}$.

En remarquant que $u(x) = {}^\sigma I_{a^+}^\alpha \left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\right)(x)$. D'après (2.22), on a :

$$\|u\|_{L^2(a,b)} = \|{}^\sigma I_{a^+}^\alpha \left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha u\right)\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{M_\sigma^{\alpha+1}(b-a)^\alpha}{m_\sigma\Gamma(\alpha+1)}\|{}^\sigma D_{a^+}^\alpha\|_{L^2(a,b)}.$$

Alors :

$$A_\sigma(u,u) \geq m_\sigma\left(1 - \frac{M_\sigma^{\alpha+2}(b-a)^\alpha}{m_\sigma^2\Gamma(\alpha+1)}\|\lambda\|_{L^\infty(a,b)}\right)\|u\|^2_{{}^\sigma W_{a^+}^\alpha(a,b)} > 0.$$

Alors : A_σ est coercive. Suivant les étapes de la preuve du théorème 4.4, on montre le problème (PV_{NH}) admet une solution unique $u \in K_\sigma$. ■

Remarque 4.3 *Puisque A_σ est une forme bilinéaire symétrique, On en déduit que la solutions unique du problème (PV_{NH}) est aussi la solution du problème de minimisation :*

$$\min_{v\in K_\sigma}\left\{\frac{1}{2}\int_a^b \left(\left({}^\sigma D_{a^+}^\alpha v\right)^2(x)+\lambda(x)v^2(x)\right)dx-\int_a^b f(x)v(x)dx\right\}.$$

4.4 Un problème $p-$Laplacien de type de Riemann-Liouville

Dans cette section, on suppose que $p>2$. Considérons le problème suivant :

$$(pL)\qquad \begin{cases} D_{b^-}^\alpha(|D_{a^+}^\alpha u|^{p-2}D_{a^+}^\alpha u)(x)+\lambda(x)|u(x)|^{p-2}u(x)=f(x,u(x)),\ \text{dans } (a,b),\\ D_{a^+}^\alpha u(a)=0,\ u(b)=0. \end{cases}$$

avec $\lambda\in L^\infty(a,b)$ et $f:[a,b]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.
Soit K_p le sous-espace fermé de type **ii)** de corollaire 3.4, défini par :

$$K_p=\{v\in W_{a^+}^{\alpha,p}(a,b),v(b)=0\}.$$

Pour établir la formulation variationnelle de ce problème, supposons que f est suffisamment régulière, on multiple les deux termes de la première équation par une fonction suffisamment régulière v, on utilisant l'intégration par partie (34) dans [14], on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_a^b |D_{a^+}^\alpha u|^{p-2}D_{a^+}^\alpha u.D_{a^+}^\alpha v dx+\int_a^b\lambda(x)|u|^{p-2}udx=\int_a^b f(x,u)vdx\\&+v(b).I_{b^-}^{1-\alpha}(|D_{a^+}^\alpha u|^{p-2}D_{a^+}^\alpha u)(b)-I_{a^+}^{1-\alpha}v(a).|D_{a^+}^\alpha u(a)|^{p-2}D_{a^+}^\alpha u(a).\end{aligned}$$

Supposons que $v\in K_p$, et tenant en compte les l'hypothèses ci-dessus et les conditions aux limites, on arrive au problème variationnel :

$$(pLV)\int_a^b |D_{a^+}^\alpha u|^{p-2}D_{a^+}^\alpha u.D_{a^+}^\alpha v dx+\int_a^b\lambda(x)|u|^{p-2}uvdx=\int_a^b f(x,u)vdx$$

Réciproquement, Soit $u \in K$ tel que

$$\int_a^b |D^\alpha_{a^+}u|^{p-2}D^\alpha_{a^+}u.D^\alpha_{a^+}\varphi dx + \int_a^b \lambda(x)|u|^{p-2}u.\varphi dx = \int_a^b f(x,u)\varphi dx, \forall\varphi \in C_c^\infty(a,b),$$

alors :

$$\int_a^b (|D^\alpha_{a^+}u|^{p-2}D^\alpha_{a^+}u.\varphi dx + \lambda(x)|u|^{p-2}u - f(x,u)).\varphi dx = 0, \forall\varphi \in C_c^\infty(a,b),$$

on en déduit que

$$|D^\alpha_{a^+}u|^{p-2}D^\alpha_{a^+}u + \lambda(x)|u|^{p-2}u = f(x,u) \quad \text{p.p in } (a,b).$$

Le théorème suivant donne des conditions pour que le problème (pLV) soit bien défini.

Théorème 4.6 *Supposons que*

H1) $x \longmapsto f(x,.)$ *est mesurable et* $t \longmapsto f(.,t)$ *est continue,*

H2) *Il existe* $\mu \in L^\infty(a,b), \nu \in L^{\frac{p}{p-\theta}}(a,b)$ *et* $\theta \in]1,p]$ *tels que*

$$|f(x,t)| \leq \mu(x) + \nu(x)|t|^{\theta-1}, \forall t \in \mathbb{R},\ p.p\, x \in (a,b).$$

Alors, le problème variationnel (pLV) *est bien défini.*

Preuve. Soit $u, v \in W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$. Alors,on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b |D^\alpha_{a^+}u|^{p-2}D^\alpha_{a^+}u.D^\alpha_{a^+}v dx + \int_a^b \lambda(x)|u|^{p-2}udx\right| \\
\leq\ & \int_a^b |D^\alpha_{a^+}u|^{p-1}.|D^\alpha_{a^+}v|dx + \|\lambda(x)\|_{L^\infty(a,b)}\int_a^b |u|^{p-1}|v|dx \\
\leq\ & \|D^\alpha_{a^+}u\|^{p-1}_{L^p(a,b)}.\|D^\alpha_{a^+}v\|_{L^p(a,b)} + \|u\|^{p-1}_{L^p(a,b)}.\|v\|_{L^p(a,b)} < \infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x,u)vdx\right| &\leq \int_a^b (\mu(x)+\nu(x)|u|^{\theta-1})|v|dx \\
&\leq \|\mu\|_{L^\infty(a,b)}\int_a^b |v|dx + \left(\int_a^b (\nu(x)|u|^{\theta-1})^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_a^b |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\mu\|_{L^\infty(a,b)}\|v\|_{L^p(a,b)} + \left(\int_a^b (\nu(x))^{\frac{p}{p-\theta}}dx\right)^{\frac{p-\theta}{p}}.\left(\int_a^b |u|^p dx\right)^{\frac{\theta-1}{p}}.\|v\|_{L^p(a,b)} \\
&= \|\mu\|_{L^\infty(a,b)}\|v\|_{L^p(a,b)} + \|\nu\|_{L^{\frac{p}{p-\theta}}(a,b)}\|u\|^{\theta-1}_{L^p(a,b)}\|v\|_{L^p(a,b)} < \infty.
\end{aligned}$$

■

Maintenant, on suppose que :

H3) $2 < p < \dfrac{1}{1-\alpha}$,

H4) il existe λ_0 tel que $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$, p.p $x \in]a,b[$.

Alors, on a le théorème suivant :

Théorème 4.7 *Sous les hypothèses* $(H1),(H2),(H3)$ *et* $(H4)$ *le problème variationnel* (pLV) *admet au moins une solution.*

Soit J la fonctionnelle définie de $W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$J(u) = \frac{1}{p}\|D^\alpha_{a^+}u\|^p_{L^p(a,b)} + \frac{1}{p}\int_a^b \lambda(x)|u|^p dx - \int_a^b F(x,u)\varphi dx,$$

où F est la fonction définie par : $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,t)dt$.

Pour prouver ce théorème, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 4.1 *La fonctionnelle J est coercive.*

Preuve. Soit $u \in W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$.
Comme $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,t)dt$, on a :

$$|F(x,u)| \leq \mu(x)|u| + \frac{1}{\theta}\nu(x)|u|^\theta.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^b F(x,u)dx\right| &\leq \int_a^b \mu(x)|u| + \frac{1}{\theta}\int_a^b \nu(x)|u|^\theta dx \\
&\leq \|\mu\|_{L^\infty(a,b)}(b-a)^{\frac{p-1}{p}}\|u\|_{L^p(a,b)} + \frac{1}{\theta}\|\nu\|_{L^{\frac{p}{p-\theta}}(a,b)}.\|u\|^\theta_{L^p(a,b)} \\
&\leq c_1\|u\|_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)} + c_2\|u\|^\theta_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p}\|D^{\alpha}_{a^+}u\|^p_{L^p(a,b)} + \frac{\lambda_0}{p}\|u\|^p_{L^p_{a^+}(a,b)} - c_1\|u\|_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)} - c_2\|u\|^{\theta}_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)} \\ &\geq \frac{1}{p}\min(1,\lambda_0)(\|D^{\alpha}_{a^+}u\|^p_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)} + \|u\|^p_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)}) - c_1\|u\|_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)} - c_2\|u\|^{\theta}_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)} \\ &\geq C(\|u\|^p_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)} - \|u\|_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)} - \|u\|^{\theta}_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)}). \end{aligned}$$

Alors :

$\lim_{\|u\|^p_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)}\to+\infty} J(u) = +\infty$, par conséquent : J est coercive. ■

Lemme 4.2 *La fonctionnelle J est différentiable.*

Preuve. On a besoin de prouver que J est Gâteaux différentiable et J'_G est continue.
D'abord, la quantité $\frac{1}{p}\|D^{\alpha}_{a^+}u\|^p_{L^p(a,b)} + \frac{1}{p}\int_a^b \lambda(x)|u|^p dx$ est différentiable et sa différentielle est $\int_a^b |D^{\alpha}_{a^+}u|^{p-1}D^{\alpha}_{a^+}u.D^{\alpha}_{a^+}v dx + \int_a^b \lambda(x)|u|^{p-1}uv dx.$
il reste à montrer que $\int_a^b F(x,u)dx$ est différentiable.
Soit $t \in \mathbb{R}$ assez petit et $v \in W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$.
Puisque F est de classe C^1 par rapport à la deuxième variable, il existe $\tau \in (0, \min(1,|t|)]$ tel que :
$\left|\frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}\right| \leq |f(x,u+\tau v).v|$, $p.p\, x \in]a,b[$.
Alors : $\left|\frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}\right| \leq \mu(x)|v| + \nu(x)|u+\tau v|^{\theta-1}.|v|$, $p.p\, x \in]a,b[$,
on en déduit que :

$$\left|\frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}\right| \leq \mu(x)|v| + c_1\nu(x)|u|^{\theta-1}.|v| + c_2\nu(x)|v|^{\theta},\ p.p\, x \in]a,b[.$$

Notons que :

$$\int_a^b (\mu(x)|v| + c_1\nu(x)|u|^{\theta-1}.|v| + c_2\nu(x)|v|^{\theta}) \leq$$
$$\|\mu\|_{L^\infty(a,b)}(b-a)^{\frac{p-1}{p}}\|v\|_{L^p(a,b)} + c_1\|\nu\|^{\frac{p}{p-1}}_{L^{\frac{p}{p-\theta}}(a,b)}.\|u\|^{\theta-1}_{L^p(a,b)}\|v\|_{L^p(a,b)} + c_2\|\nu\|_{L^{\frac{p}{p-\theta}}(a,b)}\|v\|^{\theta}_{L^p(a,b)}.$$

Ainsi, $\mu(x)|v| + c_1\nu(x)|u|^{\theta-1}.|v| + c_2\nu(x)|v|^{\theta} \in L^1(a,b)$.

On en déduit d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue que :

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b \frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}dx = \int_a^b f(x,u)v dx.$$

Maintenant, soit $(u_n) \subset W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)} = 0$,

on va montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b (f(x,u_n) - f(x,u))v dx = 0, \forall v \in W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$.

Comme $u_n \to u$ dans $W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$, on en déduit que $u_n \to u$ dans $L^p(a,b)$.

Ainsi, il existe une sous-suite (u_{nk}) de la suite (u_n) telle que $u_n \to u$, p.p dans$]a,b[$, qui est vrai pour toute sous-suite de (u_n).

Alors : (u_n) est bornée, i.e il existe $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M$, pour tout n.

Donc : $|(f(x,u_n) - f(x,u))v| \leq (2\mu(x) + \nu(x)(M^{\theta-1} + |u|^{\theta-1}))|v| \in L^1(a,b)$.

On en déduit d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue que :

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b (F(x,u_n) - F(x,u))v dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} (F(x,u_n) - F(x,u))v dx = 0.$ ■

Preuve. du théorème 4.7 :

Il reste à montrer que J est semi - continue inférieurement.

Comme $\frac{1}{p}\|D^{\alpha}_{a^+}u\|^p_{L^p(a,b)} + \frac{1}{p}\int_a^b \lambda(x)|u|^p dx$ est semi - continue inférieurement, il suffit de montrer que $\int_a^b F(x,u)$ est semi - continue inférieurement.

En raisonnant comme précédemment, on peut montrer que pour toute $(u_n) \subset W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u_n\|_{W^{\alpha,p}_{a^+}(a,b)} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b F(x,u_n)dx = \int_a^b F(x,u)dx$.

Donc : $J(u) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} J(u_n)$.

Alors, J a un point minimum global vérifiant $J'(u) = 0$. ■

4.5 Décomposition spectrale de l'opérateur de Sturm-Liouville de type fractionnaire

Dans cette section, on introduit une décomposition d'un opérateur de Sturm-Liouville de type de Katugampola. On a le théorème suivant :

Théorème 4.8 *Soit $\frac{1}{2} < \alpha < 1, \mu, \lambda \in L^{\infty}(a,b)$ telles que $\mu_0 < \mu(x), \lambda_0 < \lambda(x)$, p.p. dans $]a,b[$. Alors : il existe une suite réelle $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ et une base hilbertienne $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $L^2(a,b)$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n = +\infty$ et on a :*

$$\begin{cases} (D^{\alpha}_{b^-}(\mu(x)D^{\alpha}_{a^+}w_n))(x) + \lambda(x)w_n(x) = \eta_n w_n(x), \ \ dans]a,b[, \\ \left(I^{1-\alpha}_{a^+}w_n\right)(a) = 0, \ w_n(b) = 0, \end{cases}$$

$\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *est une suite des valeurs propres de l'opérateur de type de Sturm-Liouville* $(D_{b^-}^{\alpha}(\mu D_{a^+}^{\alpha}u))+$ λu, *et* $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ *suite des vecteurs propres associés.*

Preuve. On considère le problème aux limites :

$$\begin{cases} (D_{b^-}^{\alpha}(\mu(x)D_{a^+}^{\alpha}u))(x)+\lambda(x)u(x)=f\left(x\right), \text{ dans }]a,b[, \\ \left(I_{a^+}^{1-\alpha}u\right)(a)=0,\ u(b)=0, \end{cases}$$

où μ,λ vérifiant la condition (4.5) et $f\in L^2(a,b)$.

On sais d'après théorème 4.3 que le problème admet une solution unique u, appartient à :

$$H=\left\{v\in W_{a^+}^{\alpha,2}(a,b),\ \left(I_{a^+}^{1-\alpha}v\right)(a)=0,\ v(b)=0\right\},$$

qui est un sous-espace fermé de $W_{a^+}^{\alpha,2}(a,b)$, donc dans $L^2(a,b)$. (voir corollaire 3.4 **i)**)

Soit T l'opérateur de $L^2(a,b)$ dans $L^2(a,b)$, associé toute $f\in L^2(a,b)$ la solution u du problème P_{SL}. On a :

i) T **est continue de** $L^2(a,b)$ **dans** $W_{a^+}^{\alpha,2}(a,b)$:

On peur considérer $\|^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}u\|_{^{\rho}W_{a^+}^{\alpha,2}(a,b)}$ comme une norme dans H. Alors :

$$\begin{aligned} \min\{\mu_0,\lambda_0\}.\|u\|^2_{W_{a^+}^{\alpha,2}(a,b)} &\leq \int_a^b \mu(x)\left(D_{a^+}^{\alpha}u\right)^2(x)dx+\int_a^b\lambda(x)u^2(x)dx. \\ &= \int_a^b f(x)u(x)dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|u\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,2}(a,b)} \end{aligned}$$

Donc : $\|u\|_{W_{a^+}^{\alpha,2}(a,b)}\leq \dfrac{1}{\min\{\mu_0,\lambda_0\}}\|f\|_{L^2(a,b)}$, d'où la continuité de T.

ii) T **est compact :**

Comme T est continue de $L^2(a,b)$ dans $W_{a^+}^{\alpha,2}(a,b)$ et $W_{a^+}^{\alpha,2}(a,b)\hookrightarrow L^2(a,b)$ avec compacité, l'opérateur T est alors compact de $L^2(a,b)$ dans $L^2(a,b)$.

iii) T **est autoadjoint :**

Soit $f,g\in L^2(a,b)$ et $u=Tf, v=Tg$ les solutions du problème (P_{SL}) associées aux f,g respectivement.

Comme $u, v \in H$, on peut écrire :

$$\int_a^b \mu(x) \left(D_{a^+}^{\alpha,\rho} u\right)(x) \left(D_{a^+}^{\alpha,\rho} v\right)(x) dx + \int_a^b \lambda(x) u(x) v(x) dx = \int_a^b f(x) v(x) dx,$$

$$\int_a^b \mu(x) \left(D_{a^+}^{\alpha,\rho} v\right)(x) \left(D_{a^+}^{\alpha,\rho} u\right)(x) dx + \int_a^b \lambda(x) v(x) u(x) dx = \int_a^b g(x) v(x) dx.$$

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)v(x)dx = \int_a^b g(x)u(x)dx$, i.e $(Tf, g)_{L^2(a,b)} = (f, Tg)_{L^2(a,b)}$.
Alors : T est autoadjoint.

iv) f est nulle si et seulement u est nulle, alors $T(f)$ est nulle. Donc : $\ker(T) = \{0\}$.

D'aprèe théorème 1.7, il existe une suite des valeurs propres distincts, strictement positives $\{\kappa_n\}_{n=1}^{\infty}$, et une base hilbertienne $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(a,b)$ telles qu'on a :

$$\begin{cases} (D_{b^-}^{\alpha}(\mu(x) D_{a^+}^{\alpha} \kappa_n w_n))(x) + \lambda(x) \kappa_n w_n(x) = w_n(x), \text{ dans }]a,b[, \\ \left(I_{a^+}^{1-\alpha} \kappa_n w_n\right)(a) = 0, \; \kappa_n w_n(b) = 0, \end{cases}$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \kappa_n = 0$.
On pose $\eta_n = \dfrac{1}{\kappa_n}$, on arriva à :

$$\begin{cases} (D_{b^-}^{\alpha}(\mu(x) D_{a^+}^{\alpha} w_n))(x) + \lambda(x) w_n(x) = \eta_n w_n(x), \text{ dans }]a,b[, \\ \left(I_{a^+}^{1-\alpha} w_n\right)(a) = 0, \; w_n(b) = 0, \end{cases}$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \eta_n = +\infty$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic press, London, 1975.

[2] M.O. Benmeddour, A. Saadi and Y. Arioua, Fractional Sobolev spaces and boundary value problems via Hadamard derivative, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica (New Series), **18** N°1 (2023), pp. 61-83.

[3] M. Badiale and E. Serra, Semilinear elliptic equations for beginners, Springer-Verlag, London, 2011.

[4] L. Bourdin, Existence of a weak solution for fractional Euler- Lagrange equations, *Journal of mathematical analysis and applications.*, **399** (2013), 239-251.

[5] M. Bergounioux, A. Leaci, G. Nardi and F. Tomarelli, Fractional Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation of one Variable, *Fractional Calculus and Applied Analysis.*, (2017), (24 pages).

[6] L. Bourdin, D. Idczak, A fractional fundamental lemma and a fractional integration by parts formula Applications to critical points of Bolza functionals and to linear boundary value problems, *Advances in Differential Equations.*, **20** (3-4) (2015), 213-232.

[7] H. Brezis, Functional Analysis, *Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 2010.

[8] T. Chen and W. Li, Solvability of fractional boundary value problem with p-Laplacian via critical point theory, *Boundary Value Problems.*, **75** (2016), 1-12.

[9] R. Goreno, A. A. Kilbas, F. Mainardi and S. V. Rogosin, *Mittag-Lefter Functions, Related Topics and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, GER, 2014.

[10] M. Hallaci, H. Boulares, A. Arjouni and A. Chaoui, New existence results for fractional differential equations in a weighted Sobolev space, *Rendiconti di Matematica e delle Sue Applicazioni.*, **42**(1), (2020), 35-48.

[11] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics.*, World Scientific, 2000.

[12] D. Idczak and S. Walczak, A fractional embedding theorem, *Fractional calculus and applied analysis.*,**6**(3) (2012), 418-426.

[13] D. Idczak and M. Majewski, Fractional fundamental lemma of order $\alpha \in \left(n - \frac{1}{2}, n\right)$ with $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, *Dynamic Systems and Applications*, **21** (2012), 251-268.

[14] D. Idczak and S. Walczak, Fractionnal Sobolev spaces via Riemann-Liouville derivatives, *Journal of Function Spaces and Applications,*, (2013), 1-15.

[15] F. Jarad and T. Abdeljawad, Variational principles in the frame of certain generalized fractional derivatives, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S.*, **13**(3) (2020), 695-708.

[16] F. Kamache, R. Guefaifia, S. Boulaaras and A. Alharbi, Existence of Weak Solutions for a New Class of Fractional p-Laplacian Boundary Value Systems, *Mathematics.*, **8** (2020), 475.

[17] U. N. Katugampola, A new approach to generalized fractional derivatives, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, **6** (4) (2014), pp. 1-15.

[18] A.A. Kilbas, Hadamard type fractional calculus, *Journal of Korean Mathematical society.*, 6 (2001), 1191-1204.

[19] A.A. Kilbas, H.H. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[20] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and applications*,Academic press, London, 1980.

[21] C. T. Ledesma and J. V. C. Sousa, Fractional integral by parts and Sobolev type inequalities for $\psi-$fractional operators, Mathematical Methods in the Applied Sciences **45**(2) (2022), 9945-9966.

[22] A.Lesfari, Distribution, analyse de FOURIER et transformation de Laplace, *ellipse*, 2012.

[23] P. Li, H. Wang and Z. Li, Solutions for Impulsive Fractional Differential Equations via Variational Methods, *Journal of Function Spaces.*, (2016), ID 2941368, 9 pages.

[24] P. Li, C. Xi and H. Wang, Weak solutions to boundary value problems for fractional differential equations via variational methods, *Journal of nonlinear Science and application.*, **9** (2016), 2971-2981.

[25] D. Li, F. Chen and Y. An, Existence of solutions for fractional differential equation with p-Laplacian through variational method, *Journal of Applied Analysis and Computation.*, **8** (2018), 1778-1795.

[26] L. Ma and C. P. Li, *On Hadamard fractional calculus*, Fractals **25** (2017) 1750033.

[27] L. Ma and C. P. Li, On finite part integrals and Hadamard-type fractional derivatives, *J. Comput. Nonlin. Dyn.*, **13** (2018) 090905.

[28] L. Ma, Blow-up phenomena problem for Hadamard fractional differential systems infinite time, *Fractals* **27** (2019) 1950093.

[29] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, USA, 1993.

[30] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, USA, 1999.

ملخص

هذا العمل مكرس لدراسة الوجود والوحدانية لحلول صنف من المعادلات التفاضلية كسرية الرتبة من أنماط مختلفة (ريمان-ليوفيل، هادامارد، كاتيغامبولا، $\sigma-$ المعممة)، وذلك في إطار فضاءات سوبولاف كسرية الرتبة. لقد قمنا بإعطاء مفاهيم جديدة تتعلق بهذه الفضاءات مع تقديم وإثبات مجموعة من الخصائص. بالإضافة إلى ذلك، قمنا بإثبات الوجود والوحدانية لمجموعة من الصيغ التغايرية كسرية الرتبة باستعمال نظريات لاكس-ميلغرام، ستامباخيا، الطريقة التغايرية، وفي الأخير قدمنا تحليلا طيفيا لمؤثر شتورم-ليوفيل من نمط ريمان-ليوفيل.

كلمات مفتاحية: مسائل ذات قيم حدية، فضاءات سوبولاف كسرية الرتبة، لاكس ميلغرام، ستامباخيا، تحليل طيفي.

Résumé

Ce travail est consacré à l'existence et à l'unicité de solution à un classe de différents types d'équations différentielles fractionnaires (Riemann - Liouville, Hadamard, Katugampola, $\sigma-$généralisée) sous l'espace de Sobolev fractionnaire. Une nouvelle forme d'espace de Sobolev fractionnaire via fractionnaire l'opérateur est bien proposé et les propriétés associées sont également prouvées. De plus, certaines formulations variationnelles des systèmes considérés sont établies et ainsi la Le théorème de Lax-Milgram, Stampacchia et la méthode variationnelle sont également utilisés pour démontrer l'existence et l'unicité. Enfin nous donnons une décomposition spectrale d'un opérateur de Sturm-Liouville de type Riemann-Liouville.

Mots clés : Problème aux limites, Espace de Sobolev fractionnaire, Lax-Milgram, Stampacchia, décomposition spectrale.

Abstract

This work is devoted to the existence and uniqueness of solution to a class of different type of fractional differential equation (Riemann - Liouville, Hadamard, Katugampola, $\sigma-$generalised) under fractional Sobolev space. A novel form of fractional Sobolev space via fractional operator is well proposed and related properties are also proved. Furthermore, Some variational formulations of considered systems are established and thereby the Lax-Milgram theorem, Stampacchia and variational method are also employed to demonstrate the existence and uniqueness. Finally we give a spectral decomposition of a Sturm-Liouville operator with Riemann-Liouville type.

Keywords: Boundary value problem, Fractional Sobilev spaces, Lax-Milgram, Stampacchia, spectral decomposition.