RÉPUBLIQUE ALÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF -M'SILA-
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre : ....

T H È S E

Présentée pour l'obtention du diplôme
de Doctorat en sciences

Spécialité :

Mathématiques

Option :
Analyse fonctionnelle
Par :
FERAHTIA Nassim

Thème

Localisations sur les espaces de Lizorkin-Triebel et composition dans certains espaces de Besov localisés uniformes

Soutenue le 07/04/2021 devant le jury composé de :

Benyattou Benabderrahmane,	**Prof,**	**Univ. Med Boudiaf-M'Sila**	**Président**
Salah Eddine Allaoui,	**Prof,**	**Univ. Amar Telidji-Laghouat**	**Rapporteur**
Abdelkrim Merzougui,	**Prof,**	**Univ. Med Boudiaf-M'Sila**	**Examinateur**
Khalil Saadi,	**Prof,**	**Univ. Med Boudiaf-M'Sila**	**Examinateur**
Mokhtar Hafayed,	**Prof,**	**Univ. Med Khider-Biskra**	**Examinateur**
Elhadj Dahia,	**MCA,**	**École Normale Supérieure-Bou Saâda**	**Examinateur**

Année Universitaire : 2020/ 2021

Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à **Allah** le tout puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à terminer ce projet et qui m'a ouvert les portes du savoir.

En particulier, je voudrais exprimer mes sincères remerciements à mon directeur de ma thèse Monsieur le professeur **Salah Eddine Allaoui**, sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour. Pour m'avoir assuré la direction de ce travail, et pour m'avoir apporté la rigueur scientifique nécessaire à son bon déroulement. Je tiens également à le remercier pour sa gentillesse, sa patience, sa grande disponibilité et ses encouragements tout long de ce travail, et je le prie de croire en ma profonde reconnaissance.

Je tiens à exprimer mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer ma thèse.

J'exprime mes remerciements à Monsieur le professeur **Benyattou Benabderrahmane** pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

Je remercie tout autant Messieurs les professeurs **Abdelkrim Merzougui**, **Khalil Saadi**, **Mokhtar Hafayed** et **Elhadj Dahia** qui ont bien voulu accepter d'être membres du jury.

J'adresse aussi mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à élaborer ce travail dans les meilleures conditions. En particulier, Messieurs les professeurs **Soheyb Milles**, **Lemnaouar Zedam** et **Brahim Nouiri**.

Enfin, j'aurai une pensé particulière pour ma famille pour son soutien et les encouragements dont elle m'a fait bénéficier pendant cette période.

..

Table des matières

Introduction

Le calcul fonctionnel est l'une des théories de base en analyse fonctionnelle [29]. Il a permis d'étudier la fonction analytique dans des espaces des fonctions topologiques (en particulier normés). Depuis les années 1970, plusieurs auteurs tels Peetre [36], Dahlberg [24], Marcus et Mizel [34] ont étudié le calcul fonctionnel dans certains espaces de Sobolev et espaces de Besov. En particulier, Bourdaud [7, 10] a ouvert la voie en établissant le calcul fonctionnel dans les espaces de Besov localisés. Plus précisément, dans [10] il a prouvé le résultat suivant :

Théorème 1 [10]
Soient $p, q \in [1, +\infty]$, $s \in \mathbb{R}$, $B^s_{p,q}$ et $(B^s_{p,q})_{\ell^p}$ sont respectivement les espaces de Besov et les espaces de Besov localisés. Alors

(i) $B^s_{p,q} \hookrightarrow (B^s_{p,q})_{\ell^p}$, pour $p \geq q$,

(ii) $(B^s_{p,q})_{\ell^p} \hookrightarrow B^s_{p,q}$, pour $p \leq q$.

i.e., les espaces de Besov $B^s_{p,q}$ ne sont pas localisables en norme ℓ^p pour $p \neq q$. En particulier, Peetre [36] a démontré que l'espace de Besov $B^s_{p,p}$ est localisable en norme ℓ^p, i.e., $B^s_{p,p}$=$(B^s_{p,p})_{\ell^p}$, où ℓ^p est l'espace des suites $(a_k)_k$ telles que $\|(a_k)\|_{\ell^p} = (\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$.
Le problème de composition sur certains espaces fonctionnels s'est intéressé par plusieurs mathématiciens, Igari [30] en 1965 a étudié les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ pour $0 < s < 1$, où il a trouvé que cette fonctions qui opèrent sur cet espace, c'est les fonctions localement lipschitziennes et s'annulant à l'origine ou globalement lipschitziennes et s'annulant à l'origine, selon que cet espace si s'injecte dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R})$ ou non respectivement, Marcus et Mizel [33] en 1979 ont caractérisé celles qui agissant sur l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par une condition de Lipschitz locale ou globale, Dahlberg [24] puis Bourdaud [9] ont montré que les seules fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev $H^s_p(\mathbb{R}^n)$, ou les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, avec la condition $1 + \frac{1}{p} \leq s < \frac{n}{p}$, sont les fonctions linéaires. En 1986, Janson [31] a intéressé à l'espace de Hardy-Sobolev $F^1_{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et a prouvé une condition de Lipschitz.

Comme il est connu précédemment que tout espace normé de fonctions sur $\mathbb{R}^n$, on peut associer sur cet espace sa version localisée uniforme et on note par E_{lu}. i.e., on a la relation suivante

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi)f\|_E < \infty,$$

avec τ_a désigne l'opérateur de translation, et φ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, positive et non identiquement nulle. On peut montrer que E_{lu} ne dépend pas du choix de la fonction auxiliaire φ, (voir Proposition 4.5). Les espaces localisés uniformes jouent un rôle très important dans l'analyse fonctionnelle [4], comme il est connu si nous avons un espace E d'algèbre de Banach, alors on a $M(E) = E_{lu}$. On peut utiliser aussi la localisation uniforme d'un espace fonctionnel pour caractériser les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur cet espace, par exemple Allaoui et Bourdaud [3] ont démontré si une fonction opère sur l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, avec $s = \frac{n}{p} > 1$ et $q > 1$, alors sa dérivée appartient localement-uniformément à $B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R})$. Plus précisément, ils ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 2 [3]

On suppose $s = \frac{n}{p} > 1$ et $q > 1$ dans le cas des espaces de Besov, $p > 1$ dans le cas des espaces de Lizorkin-Triebel. On suppose de plus que les entiers m, n vérifient $1 \leq m \leq n$. Si la fonction $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ opère sur $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, alors ∇f appartient à $E^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ localement uniformément.

Où $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ désigne l'espace de Besov ou l'espace de Lizorkin-Triebel à valeurs vectorielles.

Allaoui et Bourdaud [4] ont exploité le résultat précédent pour obtenir une caractérisation concrète dans les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel localisés uniformes. Où ils ont trouvé que ces espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel localisés uniformes, sont décrits sans utiliser une fonction auxiliaire φ pour $0 < s \leq 1$.

Dans cette thèse, nous donnons une généralisation du théorème de Bourdaud [10] de la propriété de localisations des espaces de Besov sur l'espace ℓ^r, où $r \in [1, +\infty]$.

Aussi, on étudie la caractérisation des fonctions qui opèrent sur certains espaces fonctionnels, où on donne des conditions suffisantes pour les fonctions qui opèrent par composition à gauche, sur les espaces de Besov à valeurs vectorielles $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, avec $p, q \in]1, +\infty]$. De plus, on montre que les conditions de T_f opèrent sur les espaces $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, sont suffisantes pour $1 + \dfrac{1}{p} < s < 2$, $1 < p \leq q \leq \infty$, $1 \leq m \leq n$, tels que m et $n \in \mathbb{N}^\star$. Plus précisément, nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 3

Soit $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction telle que $f(0) = 0$, $1 < p \leq q \leq \infty$, $m, n \in \mathbb{N}^\star$ avec $1 \leq m \leq n$ et $n \geq 2$, $max(\dfrac{n}{p}, 1 + \dfrac{1}{p}) < s < 2$. Si $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ et $g \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, alors

$T_f(g) = f \circ g \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. De plus, il existe $c = c(s,p,q,m,n) > 0$ tel que

$$\|T_f(g)\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\nabla f\|_{B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)}(1+\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)})^{s-(1/p)}.$$

Notons que ce résultat obtenu par Bourdaud [15] pour $m = n = 1$.
Il est bien connu que la condition de Lipschitz, locale ou globale suivant que l'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ se plonge ou non dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour $s > 0$, et l'ensemble des fonctions dont les dérivées premières appartiennent localement uniformément à $B^{\frac{n}{p}-1}_{p,q}(\mathbb{R})$ sont nécessaires, (voir aussi, [3, 14]), et la condition d'appartenance locale au même espace l'est aussi pour $m \leq n$, (voir [2, 14, 17, 18, 21]). On sait que le calcul fonctionnel est trivial dans la zone $1 + \dfrac{1}{p} \leq s < \dfrac{n}{p}$, car les fonctions sont linéaires, (voir [2, 9, 12]). Comme l'existence des fonctions non triviales opérant sur $B^{1+(1/p)}_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ avec $\frac{n}{p} > 1 + \frac{1}{p}$ est une question ouverte, nous limitons notre preuve du Théorème 3 pour le cas $\dfrac{n}{p} < 1 + \dfrac{1}{p}$.
D'autre part, comme les espaces localisés-uniformes jouent un rôle dans diverses questions d'analyse mathématiques. On étudie la localisation uniforme dans l'espace de type de Lebesgue, où nous donnons une description de l'espace $L^\tau_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ avec $p \in [1,+\infty[$ et $\tau \geq 0$. Plus précisément, nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 4

Soient $p \in [1,+\infty[$ et $0 \leq \tau < \infty$. Alors une fonction mesurable f sur $\mathbb{R}^n$ appartient à $L^\tau_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ si et seulement si

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}\Big(\int_{P+a}|f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) < \infty, \tag{1}$$

où P est un cube dyadique de longueur de côté $\ell(P) \geq 1$. De plus, l'expression ci-dessus est équivalente à la norme $\|f\|_{L^\tau_p(\mathbb{R}^n)_{lu}}$.
Aussi, on étudie la version localisée uniforme sur l'espace $L^\tau_\infty(\mathbb{R}^n)$, où nous donnons le résultat suivant :

Théorème 5

Soit $0 \leq \tau < +\infty$. Alors on a

$$L^\tau_\infty(\mathbb{R}^n)_{lu} = L^\tau_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Toujours dans l'espace de type de Lebesgue, on étudie aussi le plongement dans l'espace $L^\tau_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ selon la croissance du paramètre τ, i.e., nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 6

Soient $p \in [1,+\infty[$ et $0 \leq \tau < +\infty$, alors on a

(i) $L^0_p(\mathbb{R}^n)_{lu} = L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$

(ii) Si $\tau_0 \leq \tau_1$ on a $L^{\tau_0}_p(\mathbb{R}^n)_{lu} \hookrightarrow L^{\tau_1}_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$

Comme les espaces de type de Besov $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ jouent un rôle dans diverses questions mathématiques, on étudie sa version localisée uniforme, où nous donnons la caractérisation concrète de l'espace de type de Besov localisé uniforme $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$, où $p,q \in [1,+\infty]$, $\tau \in \mathbb{R}$, et $0 < s < 1$. Plus précisément, nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 7

Soient $1 \leq p,q \leq +\infty$, $0 \leq \tau \leq \frac{1}{p}$, $0 < s < 1$. Alors $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^\tau_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ vérifiant de plus la condition suivante

(i) dans le cas $0 < s < 1$,

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}\Big(\int_0^2 (t^{-s}\omega_{p,P+a}(f,t))^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big) < +\infty.$$

De plus l'expression

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}\Big(\int_0^2 (t^{-s}\omega_{p,P+a}(f,t))^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big) + \|f\|_{L^\tau_p(\mathbb{R}^n)_{lu}},$$

est une norme équivalente sur $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

Notre thèse est organisée en quatre chapitres

• Dans le premier chapitre, nous donnons une introduction de base aux séries de Littlewood-Paley et opérateurs de différences. Ensuite, nous rappelons quelques notions essentielles sur les espaces de Besov, les espaces de Lizorkin-Triebel, les espaces de type de Besov, quelques inégalités classiques. Beaucoup des propriétés de ces concepts seront utilisées dans les prochains chapitres.

• Dans le deuxième chapitre, nous généralisons le théorème de Bourdaud de la propriété de localisations des espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sur l'espace ℓ^r, où $r \in [1,+\infty]$. Plus précisément, on démontre que l'espace de Besov $B^s_{p,q}$ est s'injecte dans l'espace de Besov localisé $(B^s_{p,q})_{\ell^r}$ (i.e., $B^s_{p,q} \hookrightarrow (B^s_{p,q})_{\ell^r}$, pour $r \geq \max(p,q)$). Aussi, on démontre que l'espace de Besov localisé $(B^s_{p,q})_{\ell^r}$ est s'injecte dans l'espace de Besov $B^s_{p,q}$ (i.e., $(B^s_{p,q})_{\ell^r} \hookrightarrow B^s_{p,q}$, pour $r \leq \min(p,q)$). Finalement, on démontre que l'espace de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, où $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1,+\infty[$ et $q \in [1,+\infty]$, est localisable en norme ℓ^p (i.e., $F^s_{p,q} = (F^s_{p,q})_{\ell^p}$).

• Dans le troisième chapitre, on étudie les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur certains espaces fonctionnels $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ avec $s > 0$, $m,n \in \mathbb{N}^\star$ et $p,q \in [1,+\infty]$.
Où nous donnons des conditions suffisantes pour les fonctions qui opèrent par composition à gauche, sur les espaces de Besov à valeurs vectorielles $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, avec $p,q \in]1,+\infty]$ et $1 \leq m \leq n$, m et n entiers. Nous montrons que les conditions de T_f opèrent sur les espaces $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, sont suffisantes pour $1+\frac{1}{p} < s < 2$, $1 < p \leq q \leq \infty$, et $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction s'annulant à l'origine.

• Dans le quatrième chapitre, nous donnons une description de l'espace de type de Lebesgue localisé uniforme $L^{\tau}_{p}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ pour $p \in [1, +\infty[$ et $\tau \geq 0$, on démontre aussi que $L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)_{lu} = L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Aussi, on démontre que l'espace $L^{\tau_0}_{p}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ s'injecte dans l'espace $L^{\tau_1}_{p}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ (i.e., $L^{\tau_0}_{p}(\mathbb{R}^n)_{lu} \hookrightarrow L^{\tau_1}_{p}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ si $\tau_0 \leq \tau_1$). Finalement, nous caractérisons concrètement les espaces de type de Besov localisés uniformes $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$, avec $p, q \in [1, +\infty]$ et $0 \leq \tau \leq \frac{1}{p}$, on établit que les espaces $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ sont décrits sans utiliser une fonction auxiliaire pour $0 < s < 1$.

• Finalement, des conclusions générales et des perspectives sont tirées.

La plupart des résultats présentés dans cette thèse ont été publiés ou soumis pour publication dans des revues internationales de renommé établie.
Les résultats présentés dans le chapitre deux ont été décrits dans [26], et ceux du chapitre trois a été soumis. Chapitre quatre contient des résultats intéressant seront soumis prochainement en collaboration avec le directeur de la thèse.

Notations

• $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Besov, et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Lizorkin-Triebel.

• $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Besov ou l'espace de Lizorkin-Triebel, quand il n'y a pas besoin de distinguer les espaces B et F.

• $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ désigne l'espace de Besov ou l'espace de Lizorkin-Triebel à valeurs vectorielles.

• $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ sont respectivement les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel localisés uniformes.

• $(E)_{\ell^p}$ désigne l'espace localisé en norme ℓ^p, $1 \leq p \leq +\infty$.

• Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. La dérivée partielle de f $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée $\partial^\alpha f$.

• $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est la base canonique dans $\mathbb{R}^n$.

• $x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

• Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $a_+ = \max(a, 0)$.

• Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

• Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $|\Omega|$ désigne la mesure de Lebesgue de Ω.

• $\mathcal{Q}$ désigne l'ensemble de tous les cubes dyadiques.

• $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$ est le produit du convolution des fonctions f et g.

• Q est le cube unité $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ et Q^+ le cube $[0, \frac{1}{2}]^n$.

• Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, le support de f est noté par $supp f$.

• $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, est appelé aussi l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

• $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz, de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$, le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.

• Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors sa transformée de Fourier est :

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix.\xi) f(x) dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est :

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\xi))(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix.\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi$$

• p' est l'exposant conjugué de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ où $p \in [1, +\infty]$.

• Soit $a \in \mathbb{R}^n$, τ_a est l'opérateur de translation définit par $\tau_a f(\cdot) = f(\cdot - a)$.

• $L^p(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables f sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

• ℓ^q est l'espace des suites $(a_k)_k$ telles que $\|(a_k)\|_{\ell^q} = (\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$.

• Soit $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, alors

$$\|f_k\|_{\ell^q(L^p)} = (\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k(x)\|_p^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

$$\|f_k\|_{L^p(\ell^q)} = \|(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|^q)^{\frac{1}{q}}\|_p < \infty$$

• Si f de classe $C^1(\mathbb{R}^m)$, nous notons ∇f l'opérateur de dérivation défini par $\nabla f = (\partial_1 f, ..., \partial_m f)$.

• Nous introduisons l'opérateur de composition T_f et l'opérateur de différence finie Δ_h, définis sur les fonctions via les formules $T_f(g) = f \circ g$ et $\Delta_h f = f(. + h) - f(.)$.

• Nous notons $\mathbb{B}(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r.

• Comme d'habitude $c, c_1, ...$ désignera une constante positive pouvant dépendre de m, n, s, p, q et de la fonction φ, sa valeur pourra changer d'une occurrence à l'autre.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES DE BESOV ET DE LIZORKIN-TRIEBEL

Le but de ce premier chapitre est de donner une introduction de base aux séries de Littlewood-Paley et opérateurs de différences. Ensuite, nous rappelons quelques notions essentielles sur les espaces de Besov, les espaces de Lizorkin-Triebel, les espaces de type de Besov, quelques inégalités classiques. Beaucoup des propriétés de ces concepts seront utilisées dans les prochains chapitres.

1.1 Séries de Littlewood-Paley

Dans cette section, on va rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée.
Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que

(i) $supp\ \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 3\}$,

(ii) $\varphi(\xi) > 0$ pour $1 \leq |\xi| \leq 3$,

(iii) $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

La construction de φ ne pose aucune difficulté, voir par exemple [6].
On pose $\phi(\xi) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi)$, on obtient une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$supp\ \phi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 3\}.$$

Dans tout ce qui suit, on fixe la partition de l'unité qui résulte

$$\phi(\xi) + \Sigma_{j=1}^{\infty}\varphi(2^{-j}\xi) = 1 \qquad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n).$$

A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolutions
$\Delta_j : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{C}^\infty$, définie par $\mathcal{F}(\Delta_j f)(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi)$ pour $j = 1, 2, ...$ et
$\mathcal{F}(\Delta_0 f)(\xi) = \varphi(\xi)\widehat{f}(\xi)$. On définit de même les opérateurs Q_k par

$$\mathcal{F}(Q_k f)(\xi) = \phi(2^{-k}\xi)\widehat{f}(\xi)\ pour\ k = 1, 2, ...$$

pout toute $f \in \mathcal{S}'$, la décomposition de f du type de Littlewood-Paley est

$$f = \sum_{j\geq 0} \Delta_j f. \tag{1.1}$$

La série (1.1) converge au sens des distributions tempérées. La relation (1.1) peut s'écrire aussi sous la forme

$$f = Q_k f + \sum_{j\geq k+1} \Delta_j f,$$

valable pour toute $f \in \mathcal{S}'$ et $k \in \mathbb{N}$, tel que $Q_k f = \sum_{j\leq k} \Delta_j f$.

Définition 1.1. [42] *Soit $f \in \mathcal{S}'$ et $a > 0$. On définit les opérateurs maximaux associés aux Δ_k et Q_k par*

$$\Delta_k^{*,a} f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_k f(x-y)|}{(1+2^k|y|)^a} \quad et \quad Q_k^{*,a} f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|Q_k f(x-y)|}{(1+2^k|y|)^a}.$$

Définition 1.2. [2] *Soient f et g dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si la limite de $(Q_j f)\cdot(Q_j g)$ quand $j \longrightarrow +\infty$ existe dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on l'appelle produit de f par g, noté $f \cdot g$.*

1.2 Espaces de Besov et espaces de Lizorkin-Triebel

Dans cette section, nous allons rappeler la définition des espaces de $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, ainsi que certaines propriétés, comme la coïncidence avec d'autres espaces, les inclusions des uns dans les autres,..., ext, et dont toutes les démonstrations se trouvent dans les livres de H. Triebel [42, 43], on pourra aussi voir le livre de T. Runst et W. Sickel [38].

Définition 1.3. [38] *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$. L'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} (\sum_{j\geq 0}(2^{sj}\|\Delta_j f\|_p)^q)^{\frac{1}{q}} < +\infty \quad pour \quad q \neq \infty \\ \sup_{j\geq 0}(2^{sj}\|\Delta_j f\|_p) < +\infty \quad pour \quad q = \infty \end{cases} \tag{1.2}$$

Définition 1.4. [38] *Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. L'espace de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \|(\sum_{j\geq 0}(2^{sj}|\Delta_j f|)^q)^{\frac{1}{q}}\|_p < +\infty \quad pour \quad q \neq \infty \\ \|\sup_{j\geq 0}(2^{sj}|\Delta j f|)\|_p < +\infty \quad pour \quad q = \infty \end{cases} \tag{1.3}$$

Remarque 1.1. *Dans la formule* (1.2) *(resp.* (1.3)*) on peut remplacer Δ_j par $\Delta_j^{*,a}$ avec $a > \frac{n}{p}$ (resp. $a > \frac{n}{\min(p,q)}$), et on obtient ainsi une norme équivalente dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$).*

Voir Peetre [36] ou Triebel [42] pour plus de détails.

Définition 1.5. *Un espace vectoriel X est dit quasi-Banach s'il est complet pour la métrique $d(x, y) = \|x - y\|$ avec l'application $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ est une quasi-norme, c'est-à-dire elle vérifie les propriétés suivantes*

(i) $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K} = (\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}), \forall x \in X;\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

(iii) $\exists k \geq 1$, *telle que* $\forall x, y \in X;\ \|x + y\| \leq k(\|x\| + \|y\|)$.

Remarque 1.2. *Si $k = 1$, la quasi-norme $\|\cdot\|$ soit une norme et l'espace X devient un espace de Banach.*

Définition 1.6. [38] *Soient A_1 et A_2 deux espaces de Banach. On dit que A_1 est s'injecte dans A_2 et on écrit $A_1 \hookrightarrow A_2$, si pour toute fonction f appartenant à A_1, on a f appartenant à A_2. De plus il existe $c > 0$ telle que*

$$\|f\|_{A_2} \leq c\|f\|_{A_1}.$$

1.2.1 Opérateurs de différences

Pour toute distribution f sur $\mathbb{R}^n$, et tout $h \in \mathbb{R}^n$, on pose $\Delta_h = \tau_{-h}f - f$. On considère aussi les puissances successives de l'opérateur Δ_h, définie inductivement par

$$\Delta_h^1 = \Delta_h \quad et \quad \Delta_h^{m+1} = \Delta_h \circ \Delta_h^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}^\star.$$

On vérifie aisément la formule suivante

$$\Delta_h^m f = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{j+1} \begin{pmatrix} j \\ m \end{pmatrix} \tau_{-jh} f.$$

Nous utiliserons par la suite la notation suivante : pour $\ell \in \mathbb{N}^\star,\ p \in [1, +\infty],\ t > 0$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ on pose

$$\omega_{p,\ell}(f, t) = \sup_{|h| \leq t} (\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^\ell f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Les propositions suivantes présentent des normes équivalentes dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.
Pour la preuve, voir par exemple [38, p. 19], [42] et [43, p. 140].

Proposition 1.1. *Soient ℓ un entier, $0 < s < \ell$, $q \in [1, +\infty]$ et $1 \leq p \leq \infty$. Alors l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + (\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} (\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^\ell f(x)|^p dx)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{|h|^n})^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

pour $1 \leq p < \infty$, alors l'espace de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \|(\int_0^1 (t^{-s-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta^\ell_h f(\cdot)|^q dh)^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}\|_p < +\infty.$$

Preuve. Voir [38, p. 41]. □

Proposition 1.2. *Soit $s > 0$, alors une distribution f appartient à $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\partial_j f \in B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $j = 1, ..., n$. De plus l'expression*

$$\|f\|_p + \sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_{B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)},$$

est une norme équivalente dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.3. *Soit ℓ un entier et $0 < s < \ell$, alors l'expression*

$$\|f\|_p + (\int_0^1 (\frac{\omega_{p,\ell}(f,t)}{t^s})^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}},$$

est une norme équivalente dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

1.2.2 Plongements dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Nous rappelons quelques inclusions et égalités au sens des normes entre les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel. La plupart sont démontrées dans [36] , [42] et [43].

Proposition 1.4. *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, *si* $s \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$.

(ii) $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est un espace quasi-Banach (espace de Banach si* $\min(p,q) \geq 1$*).*

(iii) $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est un espace quasi-Banach (espace de Banach si* $\min(p,q) \geq 1$*).*

(iv) $F^0_{p,2}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$, *si* $1 < p < \infty$.

(v) $F^m_{p,2}(\mathbb{R}^n) = W^m_p(\mathbb{R}^n)$, *si* $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}^\star$.

(vi) $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$, *si* $1 \leq p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$.

(vii) $F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n) = H^s_p(\mathbb{R}^n)$, *si* $1 < p < \infty$,
où $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace des potentiels de Bessel de toutes* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *telles que*

$$\|f\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(\xi))\|_p < +\infty.$$

(viii) $F^0_{p,2}(\mathbb{R}^n) = h_p(\mathbb{R}^n)$, *si* $0 < p < \infty$,
où $h_p(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace de Hardy de toutes* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *telles que*

$$\|f\|_{h_p(\mathbb{R}^n)} = \| \sup_{0<t<1} |\mathcal{F}^{-1}(\phi(t\xi)\widehat{f}(\xi))(\cdot)|\|_p < +\infty,$$

avec ϕ *est la fonction définie dans la section 1.1.*

Définition 1.7. [25] *Soit* $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace de Besov ou l'espace de Lizorkin-Triebel. On dit que* $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est un algèbre si* $E^s_{p,q} \cdot E^s_{p,q} \hookrightarrow E^s_{p,q}$. *De plus, il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour toute* f *et* g *appartenant à* $E^s_{p,q}$ *on a*

$$\|f \cdot g\|_{E^s_{p,q}} \leq c\|f\|_{E^s_{p,q}}\|g\|_{E^s_{p,q}}.$$

Proposition 1.5. [25] *Soient* $s \in \mathbb{R}$ *et* $0 < p, q \leq \infty$. *Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est un algèbre.*

(ii) $\begin{cases} 0 < p \leq \infty,\ 0 < q \leq \infty \textit{ et } s > \frac{n}{p}, \\ \textit{ou} \\ 0 < p \leq \infty,\ 0 < q \leq 1 \textit{ et } s = \frac{n}{p}. \end{cases}$

Proposition 1.6. [25] *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ *et* $0 < q \leq \infty$. *Alors* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est un algèbre si et seulement si*

$$\begin{cases} 0 < p < q \leq \infty \textit{ et } s > \frac{n}{p}, \\ \textit{ou} \\ 0 < q \leq p < \infty \textit{ et } s > \frac{n(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}{2}. \end{cases}$$

Proposition 1.7. [38] *Soit* $s \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Où $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *désigne l'espace de Besov ou l'espace de Lizorkin-Triebel.*

Proposition 1.8. *(i) Soient* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ *et* $1 \leq q \leq \infty$, *alors*

$$B^s_{p,\min(p,q)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,\max(p,q)}(\mathbb{R}^n),$$

(ii) Soient $-\infty < \sigma < s < \infty$ *et* $1 \leq p, r, t \leq \infty$, *alors*

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^\sigma_{p,t}(\mathbb{R}^n),$$

(iii) *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq r \leq t \leq \infty$ *et* $1 \leq p \leq \infty$, *alors*

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,t}(\mathbb{R}^n),$$

(iv) *Soient* $1 \leq p_0 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $s - \frac{n}{p} \geq s_0 - \frac{n}{p_0}$, *alors*

$$B^{s_0}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n),$$

(v) *Soient* $s \geq \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $1 \leq p < r < \infty$, *alors*

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\mathbb{R}^n),$$

(vi) *Soient* $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $1 \leq p < \infty$ *ou* $s = \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ *et* $q \leq r$, *alors*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [38, Coro 2, p. 36]. □

Définition 1.8. [3] *Un espace de Banach de distributions (en abrégé : E.B.D.) dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, *est un sous-espace vectoriel* E *de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *muni d'une norme complète* $\|\cdot\|_E$, *telle que l'injection canonique* $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *soit continue.*

Définition 1.9. [2] *Soit* E *un* $E.B.D.$ *On dit qu'une distribution* g *est une multiplicateur de* E (*on note* $g \in M(E)$), *s'il existe* $c > 0$, *tel que pour tout* $f \in \mathcal{C}^\infty \cap E$, *on ait* $gf \in E$ *et* $\|gf\|_E \leq c\|f\|_E$. *On munit* $M(E)$ *de la norme*

$$\|g\|_{M(E)} = \sup\{\|gf\|_E : f \in \mathcal{C}^\infty \cap E, \|f\|_E \leq 1\}.$$

Proposition 1.9.

(i) *Soit* $s > 0$, *alors*

$$B^s_{\infty,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)),$$

si $s < 0$, *alors*

$$B^{-s}_{\infty,q'}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)),$$

(ii) *Soit* $t > 0$, *alors*

$$B^{t+\frac{n}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(B^0_{p,q}(\mathbb{R}^n)).$$

Preuve. Voir [38, 4.7.1, p. 229]. □

Définition 1.10. [25] *Soit* $\gamma > 0$. *On note par* $L^p_\gamma(\ell^{s,q})$ *(resp.* $\ell^{s,q}(L^p_\gamma)$*) l'espace des suites* $\{f_k\}$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *telles que supp*$\widehat{f_k} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \gamma 2^k\}$ *et*

$$\|\{f_k\}\|_{L^p_\gamma(\ell^{s,q})} = \|(\sum_{k\geq 0} 2^{skq}|f_k|^q)^{\frac{1}{q}}\|_p < +\infty,$$

$$(\ resp.\ \|\{f_k\}\|_{\ell^{s,q}(L^p_\gamma)} = (\sum_{k\geq 0} 2^{skq}\|f_k\|_p^q)^{\frac{1}{q}} < +\infty\ ).$$

1.3 Estimations élémentaires

Dans cette section, on va donner quelques estimations (Young, Hölder, Minkowski, Bernstein) comme outils de la suite de notre travail.

Proposition 1.10. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq p, q \leq +\infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors*

$$f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad et \quad \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Proposition 1.11. ***(Inégalité de Minkowski)*** *Pour tout* $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, *et* X *un élément dans* $\ell^p(\ell^q)$, *alors on a*

$$\|X\|_{\ell^q(\ell^p)} \leq \|X\|_{\ell^p(\ell^q)}.$$

Proposition 1.12. ***(Inégalité de Young)*** *Soient* p, q *et* $r \in [1, +\infty]$ *tels que* $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. *Alors,* $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $\forall g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *on a*

$$f \star g \in L^r(\mathbb{R}^n) \quad et \quad \|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Théorème 1.1. [6]***(Riesz-Thorin)*** *Soient* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *et* $(Y, \mathcal{M}', \nu)$ *deux espaces mesurés.* $p_0,\ p_1,\ q_0,\ q_1 \in [1, +\infty]$ *avec* $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$. *On suppose que* T *est un opérateur qui envoie de* $L^{p_0}(X, \mu)$ *dans* $L^{q_0}(Y, \nu)$ *et de* $L^{p_1}(X, \mu)$ *dans* $L^{q_1}(Y, \nu)$ *tel que, pour toute fonction simple* f *on a*

$$\|T_f\|_{q_0} \leq c_0 \|f\|_{p_0} \quad et \quad \|T_f\|_{q_1} \leq c_1 \|f\|_{p_1}.$$

Alors T *envoie de* $L^p = (L^{p_0}, L^{p_1})_\theta$ *dans* $L^q = (L^{q_0}, L^{q_1})_\theta$ *tels que* $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ *et* $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1}$, $(0 < \theta < 1)$. *De plus*

$$\|T_f\|_q \leq c_0^\theta c_1^{1-\theta} \|f\|_p.$$

Proposition 1.13. ***(Inégalité de Bernstein)*** *Soient* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *il existe une constante*

$c = c(\alpha, p, q, n) > 0$ *telle que pour* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *avec supp* $\widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$, *on a*

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cR^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_p.$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$.
On pose $\varphi_R(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{R})$ telle que $\varphi_R(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq R$, alors on a

$$\widehat{f}(\xi) = \varphi_R(\xi)\widehat{f}(\xi), \quad et \quad f^{(\alpha)} = (\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)^{(\alpha)} \star f.$$

D'après l'inégalité de Young, on obtient

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq \|(\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)^{(\alpha)}\|_r\|f\|_p, \ avec \ 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)^{(\alpha)}(x) = R^n(\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)}(Rx),$$

donc

$$\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)^{(\alpha)}\|_r = R^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}}\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)}\|_r,$$

i.e.,

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cR^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_p, \ avec\, c = \|(\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)}\|_r.$$

□

Proposition 1.14. *Soient* $0 < a < 1$ *et* $0 < q \leq \infty$. *Pour toute suite réelle à terme positif* $\{\epsilon_j\}$ *dans* ℓ^q, *les suites* $\eta_k = a^k \sum_{j=0}^k a^{-j}\epsilon_j$ *et* $\gamma_k = a^{-k}\sum_{j\geq k} a^j\epsilon_j$ *appartiennent à* ℓ^q. *De plus, il existe* $c = c(a, q) > 0$ *tel que*

$$\|\eta_k\|_{\ell^q} + \|\gamma_k\|_{\ell^q} \leq c\|\{\epsilon_j\}\|_{\ell^q}.$$

Preuve. Pour $1 < q < \infty$, on peut écrire $\{\eta_k\}$ sous la forme

$$\eta_k = \sum_{j=0}^{k} a^{\frac{(k-j)}{q}} a^{\frac{(k-j)}{q'}} \epsilon_j, \ \text{où} \ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\eta_k^q \leq (\sum_{j=0}^{k} a^{(k-j)}\epsilon_j^q)(\sum_{j=0}^{k} a^{(k-j)})^{\frac{q}{q'}},$$

il vient que la somme de η_k^q pour $k = 0, 1, 2, ...$ est majorée par $(\sum_{i\geq 0} a^i)^q (\sum_{j\geq 0} \epsilon_j^q)$, ce qui donne

$$\|\{\eta_k\}\|_{\ell^q} \leq \frac{1}{1-a} \|\{\epsilon_j\}\|_{\ell^q}.$$

De même pour $\{\gamma_k\}$.
Pour $0 < q \leq 1$, on a

$$\eta_k^q \leq \sum_{j=0}^{k} a^{(k-j)q} \epsilon_j^q,$$

ce qui permet de majorer la somme de η_k^q pour $k = 0, 1, 2, ...$ par $(\sum_{i\geq 0} a^{iq})(\sum_{j\geq 0} \epsilon_j^q)$,
i.e.,

$$\|\{\eta_k\}\|_{\ell^q} \leq (\frac{1}{1-a^q})^{\frac{1}{q}} \|\{\epsilon_j\}\|_{\ell^q}.$$

De même pour $\{\gamma_k\}$. Par les mêmes raisonnements, on peut démontrer le cas $q = +\infty$. □

1.4 Séries convergentes dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Cette section est consacré à des estimations du type de Yamazaki [47].

Proposition 1.15. *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 1$.*

(i) Il existe $c > 0$, telle que

$$(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq} \|f_j\|_p^q)^{\frac{1}{q}} \leq c \sup_{|\alpha|\leq [\frac{n}{2}]+1} \|\theta^{(\alpha)}\|_\infty \|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.4}$$

pour toute fonction $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\gamma^{-1} \leq |\xi| \leq \gamma$ et toute suite de distributions $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par $\widehat{f_j}(\xi) = \theta(2^{-j}\xi)\widehat{f}(\xi)$ avec $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Il existe $c > 0$, telle que

$$\|\sum_{j\geq 0} f_j\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq} \|f_j\|_p^q)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.5}$$

pour toute suite de fonctions $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que supp $\mathcal{F}f_j \subset \{\xi : \gamma^{-1}2^j \leq |\xi| \leq \gamma 2^j\}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.

(iii) Pour tout $a > 1$, il existe $c > 0$, telle que

$$\|\sum_{j\geq 0} f_j\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq}|f_j|^q)^{\frac{1}{q}}\|_p \tag{1.6}$$

pour toute suite de fonctions $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que supp $\mathcal{F}f_j \subset \{\xi : a^{-1}2^j \leq |\xi| \leq a2^j\}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Preuve. *(i)* Preuve de (1.4). On part de la série

$$f_j = \sum_{k\geq 0} \Delta_k f_j, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

nous obtenons

$$f_j = \sum_{k\geq 0} (2^{kn}\mathcal{F}^{-1}\theta(2^k\cdot)) \star \Delta_k f_j,$$

avec $supp\ \theta(2^{-k}\cdot) \cap supp\ \widehat{f_j} \neq \emptyset$ pout tout $|j-k| \leq N$, où $N = 2 + [\frac{\ln\gamma}{\ln 2}]$.
Nous avons

$$(1+|y|^2)^m \mathcal{F}^{-1}\theta(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y}(I-\Delta_x)^m \theta(x)dx,$$

alors par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'égalité de Bessel-Parseval on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1}\theta\|_1 &\leq (\int_{supp\ \theta} |(I-\Delta_x)^{\frac{m}{2}}\theta(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{-m} dy)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \sup_{|\alpha|\leq m} \|\theta^{(\alpha)}\|_\infty, \ avec\ m = [\frac{n}{2}] + 1. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young on en déduit

$$\begin{aligned} \|f_j\|_p &\leq c(\theta) \sum_{j-N\leq k\leq j+N} \|\Delta_k f\|_p \\ &\leq c(\theta) \sum_{k=j}^{+\infty} \|\Delta_{k-N} f\|_p. \end{aligned}$$

On distingue alors trois cas :
Le cas n° 1 : $s > 0$. La Proposition 1.14 donne l'inégalité

$$\begin{aligned} (\sum_{j\geq 0} 2^{sjq}\|f_j\|_p^q)^{\frac{1}{q}} &\leq c_1(\theta)(\sum_{k\geq 0} 2^{skq}\|\Delta_{k+N} f\|_p^q)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq 2^{-sN} c_1(\theta)\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}, \quad (N = 2 + [\frac{\ln\gamma}{\ln 2}]). \end{aligned}$$

Le cas n° 2 : $s < 0$. De manière analogue on a

$$\begin{aligned} 2^{sj}\|f_j\|_p &\leq c(\theta)2^{sj} \sum_{j-N\leq k\leq j+N} \|\Delta_k f\|_p \\ &\leq c(\theta)2^{-sN}2^{s(j+N)} \sum_{0\leq k\leq j+N} 2^{-sk}(2^{sk}\|\Delta_k f\|_p). \end{aligned}$$

La Proposition 1.14, permet de conclure.
Le cas n° 3 : $s = 0$. En utilisant l'inégalité de Hölder, il vient

$$\|f_j\|_p \leq c(\theta)(\sum_{j-N\leq k\leq j+N} 1)^{\frac{1}{q'}}(\sum_{j-N\leq k\leq j+N} \|\Delta_k f\|_p^q)^{\frac{1}{q}}, \quad (N = 2 + [\frac{\ln\gamma}{\ln 2}]),$$

d'où on en déduit

$$\begin{aligned}(\sum_{j\geq 0}\|f_j\|_p^q)^{\frac{1}{q}} &\leq c(\theta)(2N+1)^{\frac{1}{q'}}(\sum_{j\geq 0}\sum_{j-N\leq k\leq j+N}\|\Delta_k f\|_p^q)^{\frac{1}{q}} \\ &= c(\theta)(2N+1)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}}(\sum_{k\geq 0}\|\Delta_k f\|_p^q)^{\frac{1}{q}} \\ &= c_1(\theta)\|f\|_{B^0_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

(ii) Preuve de (1.5). On pose

$$f_j = \sum_{k\geq 0}\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-k}\cdot))\star\Delta_k f_j,$$

où *supp* $\psi(2^{-k}\cdot)\cap$ *supp* $\widehat{f_j}\neq\emptyset$ pour tout $|j-k|\leq N$, avec $N = 2+[\frac{\ln\gamma}{\ln 2}]$, ce qui donne

$$\begin{aligned}2^{ks}\|\Delta_k(\sum_{j\geq 0} f_j)\|_p &\leq \sum_{-N\leq\ell\leq N} 2^{ks}\|\Delta_k f_{k+\ell}\|_p \\ &\leq c(\psi)\sum_{-N\leq\ell\leq N} 2^{ks}\|f_{k+\ell}\|_p.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}(\sum_{k\geq 0}(2^{ks}\|\Delta_k(\sum_{j\geq 0} f_j)\|_p)^q)^{\frac{1}{q}} &\leq c\sum_{-N\leq\ell\leq N}(\sum_{k\geq 0}(2^{ks}\|f_{k+\ell}\|_p)^q)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c'(\sum_{k'\geq 0}(2^{k's}\|f_{k'}\|_p)^q)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

(iii) On utilisons la même méthode comme *(ii)* pour prouver la relation (1.6). □

Proposition 1.16. *Si $s > 0$, on peut remplacer les couronnes $\gamma^{-1}2^j \leq |\xi| \leq \gamma 2^j$, par les boules $|\xi| \leq \gamma 2^j$, dans la Proposition 1.15.*

Preuve. Voir [35]. □

Proposition 1.17. *Soit $a > \frac{n}{\min(p,q)}$. Alors il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\|(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} |\Delta_k^{\star,a} f|^q)^{\frac{1}{q}}\|_p \leq c\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)},$$

pour toute $f \in F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [38, Prop. 2, p. 22]. □

Proposition 1.18. *Soit $s > 0$, alors*

$$M(F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)) \hookrightarrow M(F^{s-[s]}_{p,q}(\mathbb{R}^n)) \hookrightarrow L^\infty.$$

Preuve. Si $\phi \in M(F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))$, par la propriété $L^2 = (F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), F^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n))_{\frac{1}{2},2}$ (voir [38, 2.5.2]) on a $\phi \in M(L^2) = L^\infty$. Dans l'autre plongement, on suppose que $\phi \in M(F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Par la propriété $F^{s-[s]}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un espace d'interpolation entre L^p et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ (voir [38, Prop. 2.5.1, p. 86]) suivant la Proposition 1.4 *(iv)* , on conclut que $\phi \in M(F^{s-[s]}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$, pour tout $s > 0$. □

Proposition 1.19. *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors l'opérateur de dérivation ∂^α envoie continument $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.*
Autrement dit, si $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ alors $\partial^\alpha f \in B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.
En particulier, si $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R})$ alors $f' \in B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Preuve. On a $\|\Delta_j(\partial^\alpha f)\|_p = \|\partial^\alpha(\Delta_j f)\|_p$.
D'après l'inégalité de Bernstein (pour $p = q$), on a

$$\|\Delta_j(\partial^\alpha f)\|_p \leq c2^{j|\alpha|}\|\Delta_j f\|_p,$$

d'où

$$\|2^{j(s-|\alpha|)}\|\Delta_j(\partial^\alpha f)\|_p\|_{\ell^q} \leq c\|2^{js}\|\Delta_j f\|_p\|_{\ell^q}.$$

i.e.,

$$\|\partial^\alpha f\|_{B^{s-|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Proposition 1.20. *Soient $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ $(|\alpha| \leq [s])$ et $\phi \in M(F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))$. Alors $\partial^\alpha \phi$ est un multiplicateur de $F^{s-[s]+|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $F^{s-[s]}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit*

$$\|(\partial^\alpha \phi) f\|_{F^{s-[s]}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\phi\|_{M(F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\|f\|_{F^{s-[s]+|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [38]. □

1.5 Les espaces de type de Besov $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Dans cette section, on va étudier des espaces, nommés de type de Besov $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, où $s,\tau \in \mathbb{R}$ et $p,q \in]0,+\infty]$.

1.5.1 Cubes dyadiques

Pour définir les espaces de type de Besov, on a besoin de définir les cubes dyadiques.

Définition 1.11. [40] *Pour certains $k = (k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ et certains $j \in \mathbb{Z}$, le cube dyadique de longueur du côté 2^{-j} est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par*

$$P_{j,k} = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{-j}k_i \leq x_i < 2^{-j}(k_i+1), i = 1, ..., n\}.$$

• La collection de tous les cubes dyadiques sera désignée par

$$\mathcal{Q} = \{P_{j,k} : j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^n\}.$$

• Pour un cube dyadique donné P, le nombre $\ell(P)$ est sa longueur de côté, et on pose
$j_P = -\log_2 \ell(P), \quad P \in \mathcal{Q}$.

Proposition 1.21. *Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{R}^n = \cup_{k\in\mathbb{Z}^n} P_{j,k}$.*

Preuve. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $j \in \mathbb{Z}$, on a

$$2^{-j}[x_i] \leq x_i \leq 2^{-j}([x_i]+1),\ i = 1, ..., n. \tag{1.7}$$

Pour j fixé, $[x_i]$ est le seul entier vérifiant (1.7), autrement dit chaque point $x \in \mathbb{R}^n$ est contenu dans un et un seul cube dyadique de longueur de côté 2^{-j}. □

1.5.2 La définition de $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et quelques propriétés élémentaires

Définition 1.12. [40] *Soient $0 < p,q \leq \infty$ et $s,\tau \in \mathbb{R}$. L'espace de type de Besov $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toute $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{P\in\mathcal{Q}} \frac{1}{|P|^\tau}\Big(\sum_{j=\max(j_P,0)}^{\infty} [\int_P (2^{sj}|\Delta_j f(x)|)^p dx]^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Définition 1.13. [40] *Soient* $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ *et* $s, \tau \in \mathbb{R}$. *L'espace de type de Lizorkin-Triebel* $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble de toute* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$\|f\|_{F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{P\in\mathcal{Q}} \frac{1}{|P|^\tau} (\int_P [\sum_{j=\max(j_P,0)}^{\infty} 2^{sjq} |\Delta_j f(x)|^q]^{\frac{p}{q}} dx)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Remarque 1.3. *Les espaces* $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et* $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *sont des espaces quasi-Banach pour* $0 < p, q < 1$ *et de Banach pour* $\min(p,q) \geq 1$.

Proposition 1.22. *Soient* $0 < p, q \leq \infty$ *et* $s, \tau \in \mathbb{R}$ *(* $0 < p < \infty$ *pour le cas de l'espace de type de Lizorkin-Triebel).*

(i) Dans le cas $\tau < 0$, *en considérant* $|P| \longrightarrow \infty$, *nous obtenons évidemment* $E^{s,\tau}_{p,q} = \{0\}$, $E \in \{B,\ F\}$.

(ii) Pour $\tau = 0$ *on a* $E^{s,0}_{p,q} = E^s_{p,q},\ E \in \{B,\ F\}$.

(iii) Nous avons toujours $B^{s,\tau}_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^{s,\tau}_{p,p}(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty,\ et\ s,\ \tau \in \mathbb{R}$.

(iv) Si ($\tau > \frac{1}{p}$ *et* $0 < q < \infty$) *ou* ($\tau = \frac{1}{p}$ *et* $q = \infty$), *alors on a*

$$B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = B^{s+n\tau-\frac{n}{p}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n),$$

où $B^{s+n\tau-\frac{n}{p}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace de Hölder.*

Preuve. Voir [49], [48]. ☐

Proposition 1.23. *Soient* $s \in \mathbb{R},\ \tau \in [0, +\infty[$ *et* $0 < p, q \leq \infty$. *Alors on a*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [49]. ☐

Maintenant, on rappelle la définition de l'espace de type de Lebesgue $L^\tau_p(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.14. [40] *Soient* $0 < p \leq \infty$ *et* $0 \leq \tau < \infty$. *L'espace* $L^\tau_p(\mathbb{R}^n)$ *est lensemble de toutes les fonctions* $f \in L^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$\|f\|_{L^\tau_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{P\in\mathcal{Q}:\ell(P)\geq 1} \frac{1}{|P|^\tau} (\int_P |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Remarque 1.4. *(i)* $L^0_p = L_p$

(ii) Si $\tau_0 \leq \tau_1$, *alors on a* $L^{\tau_0}_p \hookrightarrow L^{\tau_1}_p$

(iii) $L^\tau_p \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$.

1.6 Plongements

Dans cette section, on va étudier quelques plongements concernant l'espace de type de Besov $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, où $s,\tau \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$.

Proposition 1.24. *Soient $s,\tau \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$, alors on a*

(i) $B^{s,\tau}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n)$*, avec* $q_1 \leq q_2$.

(ii) $B^{s+\epsilon,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$*, avec* $\epsilon > 0$.

(iii) $B^{s,\tau}_{p,\min(p,q)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,\max(p,q)}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. (i) On a $q_1 \leq q_2 \Longrightarrow \ell^{q_1} \hookrightarrow \ell^{q_2}$

i.e.,

$$\exists\, c > 0 : \|(2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^p(P)})_j\|_{\ell^{q_2}} \leq c\|(2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^p(P)})_j\|_{\ell^{q_1}},$$

alors, on a

$$(\sum_{j=\max(j_P,0)}^{\infty} (2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^p(P)})^{q_2})^{\frac{1}{q_2}} \leq c(\sum_{j=\max(j_P,0)}^{\infty} (2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^p(P)})^{q_1})^{\frac{1}{q_1}},$$

en multipliant les deux membres par $\frac{1}{|P|^\tau}$, et en passant à la borne supérieure on obtient

$$\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q_2}} \leq c\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q_1}}$$

i.e.,

$$B^{s,\tau}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n)$$

(ii) On a $\forall\, \epsilon > 0$;

$$\begin{aligned} \|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}} &= \sup_{P\in\mathcal{Q}} \frac{1}{|P|^\tau}(\sum_{j=\max(j_P,0)}^{\infty} (2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^p(P)})^q)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{P\in\mathcal{Q}} \frac{1}{|P|^\tau}(\sum_{j=\max(j_P,0)}^{\infty} (2^{(s+\epsilon)j}\|\Delta_j f\|_{L^p(P)})^q)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{B^{s+\epsilon,\tau}_{p,q}}. \end{aligned}$$

i.e.,

$$B^{s+\epsilon,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

(iii) Il suffit d'appliquer l'inégalité suivante

$$(\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_p^v)^{\frac{1}{v}} \leq \|(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^q)^{\frac{1}{q}}\|_p \leq (\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_p^u)^{\frac{1}{u}},$$

avec $u = \min(p,q)$ et $v = \max(p,q)$, et valable pour toutes les suites $(f_j)_j$ de fonctions mesurables.

□

Proposition 1.25. *Soient $s \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0,+\infty[$ et $0 < p, q \leq \infty$.*

(i) Si $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors
$$B^{s,\tau+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Si $\tau \in [0, \frac{1}{p}]$, alors
$$B^{s}_{\frac{p}{1-\tau p},q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. (i) On a
$$\|\|_{B^{s,\tau}_{p_1,q}} = \sup_{P\in\mathcal{Q}} \frac{1}{|P|^\tau}\Big(\sum_{j=\max(j_P,0)}^{\infty} (2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^{p_1}(P)})^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Daprès l'inégalité de Hölder, on a

$$\|\Delta_j f\|_{L^{p_1}(P)} \leq |P|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\|\Delta_j f\|_{L^{p_2}(P)},$$

alors, on a

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^{s,\tau}_{p_1,q}} &\leq \sup_{P\in\mathcal{Q}} \frac{1}{|P|^\tau}|P|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\Big(\sum_{j=\max(j_P,0)}^{\infty} (2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^{p_2}(P)})^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sup_{P\in\mathcal{Q}} \frac{1}{|P|^{\tau+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}}\Big(\sum_{j=\max(j_P,0)}^{\infty} (2^{sj}\|\Delta_j f\|_{L^{p_2}(P)})^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|f\|_{B^{s,\tau+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}_{p_2,q}},
\end{aligned}$$

i.e.,
$$B^{s,\tau+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Nous avons $B^{s,0}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = B^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors
pour $\tau + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = 0 \Longrightarrow p_2 = \frac{p_1}{1-\tau p_1}$, on a

$$B^{s,\tau+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n) = B^{s}_{p_2,q}(\mathbb{R}^n)$$

i.e.,
$$B^{s}_{\frac{p}{1-\tau p},q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

□

Proposition 1.26. *Soient $\tau \geq 0,\ 0 < q \leq \infty$, et $-\infty < s_1 < s_0 < \infty$, $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$. Alors*

$$B^{s_0,\tau}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s_1,\tau}_{p_1,q}(\mathbb{R}^n) \ \ si \ \ s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}.$$

Preuve. Voir [49]. □

1.7 Exemples des fonctions dans l'espace de Besov

Dans cette section, on va donner des exemples des fonctions dans l'espace de Besov.

Exemple 1.1. *Soit $f = \delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (la masse de Dirac), on a*

$$\begin{aligned} \Delta_j f(x) &= 2^j \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\varphi(2^j(x-y))f(y)dy \\ &= < f, 2^j\mathcal{F}^{-1}\varphi(2^j(x-\cdot)) >, \end{aligned}$$

donc, on a

$$\begin{aligned} \Delta_j \delta(x) &= < \delta, 2^j\mathcal{F}^{-1}\varphi(2^j(x-\cdot)) > \\ &= 2^j\mathcal{F}^{-1}\varphi(2^j x), \end{aligned}$$

alors

$$\|\Delta_j\delta\|_p = c2^{nj\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Ce qui implique que

$$2^{js}\|\Delta_j\delta\|_p = c2^{nj(1-\frac{1}{p})+js},$$

pour $1 \leq q \leq \infty$, on a

$$(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq}\|\Delta_j\delta\|_p^q)^{\frac{1}{q}} = c(\sum_{j\geq 0} 2^{j(n-\frac{n}{p}+s)q})^{\frac{1}{q}}.$$

Alors la série $(\sum_{j\geq 0} 2^{j(n-\frac{n}{p}+s)q})^{\frac{1}{q}}$ converge si

- *$n - \frac{n}{p} + s < 0$ implique $s < \frac{n}{p} - n$, alors $\delta \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.*
- *$n - \frac{n}{p} + s = 0$ implique $s = \frac{n}{p} - n$, alors*

$$\begin{aligned} 2^{sj}\|\Delta_j\delta\|_p &= c \ \ pour \ \ j \in \mathbb{N} \\ \Longrightarrow \sup_{j\in\mathbb{N}}(2^{sj}\|\Delta_j\delta\|_p) &= c \\ &= \|\delta\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \delta \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) & si \quad s < \frac{n}{p} - n, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty. \\ \delta \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) & si \quad s = \frac{n}{p} - n, 1 \leqslant p \leqslant \infty, q = \infty. \end{cases}$$

Exemple 1.2. $f(x) = vp(\frac{1}{x})$ *(la valeur principal de* $\frac{1}{x}$*).*
On a

$$\widehat{f}(\xi) = -i\pi sgn\xi$$

et

$$supp\, \widehat{\Delta_j f} \subset \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq 2^{j+1}\}.$$

D'après l'inégalité de Bernstein, on obtient

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c_1 2^{j(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|\Delta_j f\|_2, \quad (p \geq 2). \tag{1.8}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|\Delta_j f\|_2 &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|\widehat{\Delta_j f}\|_2, \quad (Plancherel) \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|\varphi(2^{-j}\cdot)\widehat{f}\|_2 \\ &= c_2 2^{\frac{j}{2}}, \end{aligned}$$

car $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$*.*
Alors l'équation (1.8) *devient*

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(1-\frac{1}{p})}, \quad c = c_1 c_2,$$

d'où

$$2^{sj}\|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(s+\frac{1}{p'})}.$$

La série $\sum_{j\geq 0} 2^{j(s+\frac{1}{p'})q},\ 1 \leq q \leq +\infty$ *converge si* $s < -\frac{1}{p'}$*, ce qui donne* $f(x) = vp(\frac{1}{x}) \in B^s_{p,q}(\mathbb{R})$ *dans les deux cas suivants*

$$\begin{cases} s = -\frac{1}{p'},\ 2 \leq p \leq +\infty,\ q = +\infty. \\ s < -\frac{1}{p'},\ 2 \leq p \leq +\infty,\ 1 \leq q \leq +\infty. \end{cases}$$

CHAPITRE 2

GÉNÉRALISATION DE LA PROPRIÉTÉ DE LOCALISATION DES ESPACES DE BESOV

La notion de la propriété de localisation des espaces de Besov, est introduite par G. Bourdaud [10], où il a démontré que les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, avec $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p \neq q$, ne sont pas localisables en norme ℓ^p. Plus précisément, il a démontré que les espaces de Besov $B^s_{p,q}$ sont s'injectes dans les espaces de Besov localisés $(B^s_{p,q})_{\ell^p}$ (i.e., $B^s_{p,q} \hookrightarrow (B^s_{p,q})_{\ell^p}$, pour $p \geq q$). Aussi, il a démontré que les espaces de Besov localisés $(B^s_{p,q})_{\ell^p}$ sont s'injectes dans les espaces de Besov $B^s_{p,q}$ (i.e., $(B^s_{p,q})_{\ell^p} \hookrightarrow B^s_{p,q}$, pour $p \leq q$). En particulier, J. Peetre [36, p. 149-150] a démontré que l'espace de Besov $B^s_{p,p}$ est localisable en norme ℓ^p, où ℓ^p est l'espace des suites $(a_k)_k$ telles que $\|(a_k)\|_{\ell^p} < \infty$. Dans ce chapitre, nous donnons une généralisation du théorème de Bourdaud de la propriété de localisation des espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sur l'espace ℓ^r, où $r \in [1, +\infty]$. Plus précisément, on démontre que l'espace de Besov $B^s_{p,q}$ est s'injecte dans l'espace de Besov localisé $(B^s_{p,q})_{\ell^r}$ (i.e., $B^s_{p,q} \hookrightarrow (B^s_{p,q})_{\ell^r}$, pour $r \geq \max(p, q)$). Aussi, on démontre que l'espace de Besov localisé $(B^s_{p,q})_{\ell^r}$ est s'injecte dans l'espace de Besov $B^s_{p,q}$ (i.e., $(B^s_{p,q})_{\ell^r} \hookrightarrow B^s_{p,q}$, pour $r \leq \min(p, q)$). Finalement, on démontre que l'espace de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, où $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty[$ et $q \in [1, +\infty]$, est localisable en norme ℓ^p (i.e., $F^s_{p,q} = (F^s_{p,q})_{\ell^p}$).

2.1 Généralités sur les espaces invariants par translations

Définition 2.1. [10] *Soit E un espace de Banach de distributions ($E.B.D.$).*
On dit que E est isométriquement invariant par translation si, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, l'opérateur de translation

$$\tau_a f(x) = f(x - a),$$

est une isométrie de E sur lui-même.

Pour $v \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{D}$, on pose

$$P_v(f) = \sum_{|\alpha| \leq v} \int_{\mathbb{R}^n} |f^{(\alpha)}(x)| dx.$$

La topologie de l'espace de Fréchet $\mathcal{D}(K)$, où K est un compact de $\mathbb{R}^n$, peut être définie à l'aide de la famille de normes $(P_v)_{v\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.1. *Si E est un $E.B.D.$ isométriquement invariant par translation, il existe $C > 0$ et $v \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $u \in E$ et tout $f \in \mathcal{D}$, on ait*

$$| < u, f > | \leq C\|u\|_E P_v(f).$$

En particulier, E est nécessairement un espace de distributions tempérées.

Preuve. Soit φ une fonction vérifiant

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(x-k) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

et K le support de φ.
Par hypothèse sur E, la forme bilinéaire $< u, f >$ est séparément continue-donc continue- sur $E \times \mathcal{D}(K)$, il existe donc C et v tels que

$$| < u, f > | \leq C\|u\|_E P_v(f) \quad (\forall u \in E,\ \forall f \in \mathcal{D}(K)). \tag{2.1}$$

L'invariance de E par translation entraîne aussitôt qu'on a encore (2.1).
Pour toute f portée par un translaté de K, pour n'importe quelle $f \in \mathcal{D}$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} | < u, f > | &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} | < u, \tau_k\varphi \cdot f > | \\ &\leq C\|u\|_E \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} P_v(\tau_k\varphi \cdot f) \\ &\leq C'\|u\|_E P_v(f). \end{aligned}$$

La dernière inégalité s'obtient en observant que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\varphi^{(\alpha)}(x-k)| < +\infty.$$

$\square$

Proposition 2.2. *Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module isométriquement invariant par translation, il existe $C > 0$ et $v \in \mathbb{N}$ tels que, pour tous $u \in E$ et $f \in \mathcal{D}$, on ait*

$$\|fu\|_E \leq C\|u\|_E P_v(f),$$

en particulier, E est aussi un $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-module.

Preuve. Il suffit de reprendre celle de la Proposition 2.1, en faisant jouer à l'application bilinéaire $(u, f) \mapsto fu$ le même rôle que la forme bilinéaire $< u, f >$. □

Si E est un $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$-module, toute $f \in \mathcal{S}$ admet une norme comme multiplicateur de E

$$\|f\|_{M(E)} = \sup\{\|fu\|_E : \|u\|_E \leq 1\}.$$

Sous les hypothèses de la Proposition 2.2, on a

$$\|f\|_{M(E)} \leq CP_v(f),$$

d'où l'on tire aussitôt

Proposition 2.3. *Soient $f \in \mathcal{S}$ et $g \in \mathcal{D}$, sous les hypothèses de la proposition, la fonction $x \mapsto \|\tau_x g \cdot f\|_{M(E)}$ est à décroissance rapide quand $|x| \to +\infty$.*

2.2 Localisation des espaces de distributions

Dans cette section, l'espace de Banach de distributions E sera un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module isométriquement invariant par translation.

Définition 2.2. [10] *Un réseau $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des $k_1v_1 + ... + k_nv_n$ où $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $(v_1, ..., v_n)$ est une base donnée de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $g \in \mathcal{D}$ est dite adaptée au réseau $\mathcal{R}$ si l'on a*

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} g(x - r) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 2.4. [10] *Soit $p \in [1, +\infty]$. Pour une distribution u les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe un réseau $\mathcal{R}_0$ et une fonction g_0 adaptée à $\mathcal{R}_0$ tels que

$$(\|\tau_r g_0.u\|_E)_{r \in \mathcal{R}_0} \in \ell^p.$$

(ii) Pour tout réseau $\mathcal{R}$ et toute $g \in \mathcal{S}$, on a

$$(\|\tau_r g.u\|_E)_{r \in \mathcal{R}} \in \ell^p.$$

Preuve. L'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soit $(u_r)_{r\in\mathcal{R}_0}$ une famille d'éléments de E, portés respectivement par les boules $|x-r|\leq\varrho$, où ϱ est un nombre positif donné. Alors $u=\sum_{r\in\mathcal{R}_0}u_r$ vérifie l'estimation*

$$\|(\|\tau_s g.u\|_E)_{s\in\mathcal{R}}\|_{\ell^p}\leq C\|(\|u_r\|_E)_{r\in\mathcal{R}_0}\|_{\ell^p},$$

où C ne dépend que de ϱ et de g.

Le lemme admis, il suffit d'écrire

$$u=\sum_{r\in\mathcal{R}_0}\tau_r g_0.u\ ,$$

pour obtenir la Proposition 2.4.

Preuve du Lemme 2.1 Soit $\chi\in\mathcal{D}$ telle que $\chi(x)=1$ pour $|x|\leq\varrho$, alors $u_r=\tau_r\chi.u_r$, de sorte que

$$\begin{aligned}\|\tau_s g\cdot u\|_E &\leq \sum_{r\in\mathcal{R}_0}\|\tau_s g\cdot\tau_r\chi\|_{M(E)}\|u_r\|_E\\ &= \sum_{r\in\mathcal{R}_0}\|g\cdot\tau_{r-s}\chi\|_{M(E)}\|u_r\|_E,\end{aligned}$$

et l'estimation ℓ^p s'obtient en combinant l'inégalité de Young et la Proposition 2.3. □

2.3 Localisation des espaces de Besov

Dans cette section, nous donnons une généralisation du théorème de Bourdaud de la propriété de localisation des espaces de Besov sur l'espace ℓ^r, où $r\in[1,+\infty]$. On démontre aussi que l'espace de Lizorkin-Triebel est localisable en norme ℓ^p.

Soit E un espace de Banach de distributions. Nous ferons sur l'espace E les hypothèses suivantes :

(1) Invariance par translation ; si on note τ_x l'opérateur donnée par $\tau_x f(t)=f(x-t)$, alors τ_x est une isométrie de E.

(2) Invariance par localisation ; pour tout $f\in E$ et tout $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $\varphi f\in E$.

Fixons $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et considérons les localisées $f_x=\tau_x\varphi\cdot f$, il résulte immédiatement des hypothèses 1 et 2 que la famille $(f_x)_{x\in\mathbb{R}^n}$ est bornée dans E.

Il se pose alors le problème inverse ; reconstituer la norme de f à partir des normes des f_x.

On considère pour cela la classe $\mathcal{A}$ des fonctions $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\varphi(x-k)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Définition 2.3. [10] *Soit E un espace de Banach de distributions, on dit que l'espace E est localisable en norme ℓ^p $(1 \leq p \leq \infty)$, s'il existe $\varphi \in \mathcal{A}$ et une constante $c \geq 1$ telle que*

$$c^{-1}\|f\|_E \leq (\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi.f\|_E^p)^{\frac{1}{p}} \leq c\|f\|_E.$$

i.e., $E = (E)_{\ell^p}$, désignons par $(E)_{\ell^p}$ l'espace des distributions u telles que

$$\|u\|_{(E)_{\ell^p}} = \|(\|\tau_k\varphi.u\|_E)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^p} < \infty. \tag{2.2}$$

Dans le cas où $p = +\infty$, l'expression (2.2) *s'écrit sous la forme*

$$\|u\|_{(E)_{\ell^\infty}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi.u\|_E < \infty.$$

$(E)_{\ell^p}$ est un espace de Banach de distributions, qui d'après la Proposition 2.4, ne dépend ni du choix du réseau particulier $\mathbb{Z}^n$, ni de la fonction φ adaptée au réseau.

On peut remplacer au besoin φ par une fonction $\theta \in \mathcal{S}$, convenablement choisie.

Proposition 2.5. [10] *Soit $\mathcal{S}$ est l'espace de Schwartz, si la fonction $\theta \in \mathcal{S}$ ne s'annule pas sur le support de φ, alors on a*

$$\|u\|_{(E)_{\ell^p}} \sim \|(\|\tau_k\theta.u\|_E)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^p}$$

***Preuve*.** La minoration de $\|u\|_{(E)_{\ell^p}}$ résulte de la Proposition 2.4 ($(i) \Longrightarrow (ii)$).
Dans l'autre sens, on observe que $\varphi = g\theta$, où $g \in \mathcal{D}$.
D'où

$$\begin{aligned} \|\tau_k\varphi.u\|_E &\leq \|\tau_k g.\tau_k\theta.u\|_E \\ &\leq \|g\|_{M(E)}\|\tau_k\theta.u\|_E \end{aligned}$$

□

Proposition 2.6. [10] *Soit N un entier naturel supérieur à s, et $\lambda, \mu \in \mathcal{S}$, telles que*

(i) $\mu(\xi) \neq 0$*, pour* $|\xi| \leq 3$*,*

(ii) $\lambda(\xi) \neq 0$*, pour* $1 \leq |\xi| \leq 3$ *et* $\lambda^{(\alpha)}(0) = 0$ *pour* $|\alpha| < N$*.*

En désignant par $L_j (j \geq 1)$ les opérateurs de symboles respectifs $\lambda(2^{-j}\xi)$ et par L_0 l'opérateur de symbole $\mu(\xi)$, alors on a

$$\|u\|_{B^s_{p,q}} \sim \|(2^{js}\|L_j u\|_p)_{j\in\mathbb{N}}\|_{\ell^q}.$$

***Preuve*.** Voir [10] . □

Théorème 2.1. [10] *Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors l'espace* L^p *est localisable en norme* ℓ^p.

Preuve. Il s'agit de montrer que l'opérateur $T_\varphi : f \longmapsto (\tau_k\varphi \cdot f)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ est un isomorphisme de $L^p(\mathbb{R}^n)$ sur un sous-espace fermé de $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)$.
On introduit pour cela l'opérateur

$$S_\psi((f_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau_k\psi \cdot f_k,$$

qui pour un choix convenable de $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sera un inverse à droite de T_φ.
Puisque φ est à support compact, il existe $c = c(\varphi) > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\varphi(x-k)| \leq c,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|T_f\|_{L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}^n)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_k\varphi(x)||f(x)|dx \\ &\leq c\|f\|_1. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|T_f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}^n)} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}^n, x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x-k)f(x)| \\ &\leq \|\varphi\|_\infty\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Riesz-Thorin, alors on a l'opérateur T_φ est continu de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)$.
i.e.,

$$(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi \cdot f\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq c\|f\|_p. \tag{2.3}$$

La continuité de S_ψ de $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'obtient de la même manière, on a

$$\begin{aligned} \|S_\psi((f_k)_{k\in\mathbb{Z}^n})\|_1 &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\psi \cdot f_k\|_1 \\ &\leq \|\psi\|_\infty \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|f_k\|_1 \\ &= \|\psi\|_\infty \|(f_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}^n)}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\|S_\psi((f_k)_{k\in\mathbb{Z}^n})\|_\infty \leq (\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\|f_k\|_\infty)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\psi(x-k)|).$$

Où φ et ψ sont des fonctions à support compact quelconques.
Maintenant, on suppose que $\varphi\in\mathcal{A}$ et on choisit ψ de façon que $\psi=1$ sur le support de φ, alors on a

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\tau_k\varphi\cdot f \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\tau_k\psi\cdot\tau_k\varphi\cdot f \\ &= S_\psi((\tau_k\varphi\cdot f)_{k\in\mathbb{Z}^n}), \end{aligned}$$

et la continuité de S_ψ de $L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ donne

$$\|f\|_p \leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\tau_k\varphi\cdot f\|_p^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.4}$$

De les deux inégalités (2.3) et (2.4), on obtient que l'espace L^p est localisable en norme ℓ^p. □

Théorème 2.2. [10] *Soient $p,q\in[1,+\infty]$, $s\in\mathbb{R}$. On a*

(i) $B^s_{p,q}\hookrightarrow(B^s_{p,q})_{\ell^p}$, *pour* $p\geq q$,

(ii) $(B^s_{p,q})_{\ell^p}\hookrightarrow B^s_{p,q}$, *pour* $p\leq q$.

En particulier, $B^s_{p,p}$ *est localisable en norme* ℓ^p.

Preuve. Voir [10] . □

Il reste à prouver que les inclusions sont strictes, ce qui sera fait dans les deux sous-sections suivants.

2.3.1 Contre-exemple : le cas $p>q$

Lemme 2.2. *Soient α,β deux réels positifs tels que $\alpha<\beta<2\alpha$, il existe une constante $c>0$ telle que, pour toute famille $(u_j)_{j\geq 0}$ de fonctions de L^p, à spectres respectifs dans les couronnes $\alpha 2^j\leq|\xi|\leq\beta 2^j$, on ait*

$$c^{-1}(\sum_{j\geq 0}2^{sjq}\|u_j\|_p^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|\sum_{j\geq 0}u_j\|_{B^s_{p,q}} \leq c(\sum_{j\geq 0}2^{sjq}\|u_j\|_p^q)^{\frac{1}{q}}$$

Preuve. L'inégalité de droite est une estimation classique dans les espaces de Besov, voir par exemple [7, chap. 6]. Soit $v\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction égale à 1 sur $\alpha\leq|\xi|\leq\beta$, portée par

$a \leq |\xi| \leq b$, où
$$\frac{\beta}{2} < a < \alpha < \beta < b < 2\alpha,$$
et V_j les opérateurs de symboles respectifs $v(2^{-j}\xi)$. On a $V_j(u_k) = 0$ pour $k \neq j$ et $V_j(u_j) = u_j$, d'où

$$\begin{aligned}(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq}\|u_j\|_p^q)^{\frac{1}{q}} &= (\sum_{j\geq 0} 2^{sjq}\|V_j(\sum_{k\geq 0} u_k)\|_p^q)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c\|\sum_{k\geq 0} u_k\|_{B^s_{p,q}}.\end{aligned}$$

(La dernière inégalité est encore une estimation classique [7]). □

Preuve. On suppose donc $p > q$ et l'on fait choix d'une famille de nombres positifs $(v_{j,k})_{j\geq 0, k\in\mathbb{Z}^n}$ telle que
$$(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\sum_{j\geq 0} v_{j,k}^q)^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}} < +\infty, \tag{2.5}$$
$$(\sum_{j\geq 0}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} v_{j,k}^p)^{\frac{q}{p}})^{\frac{1}{q}} = +\infty. \tag{2.6}$$
(Par exemple : $v_{j,k} = |k|^{-\frac{n}{p}-\frac{1}{q}}(\ln|k|)^{\frac{1}{q}}$ pour $j \leq |k|$, $v_{j,k} = 0$ sinon).
Soit $h \in \mathcal{S}$ une fonction positive à spectre dans la boule $|\xi| \leq \frac{1}{100}$ et

$$f_k(x) = (\sum_{j\geq 0} 2^{-js} v_{j,k}\exp(i2^j\pi x_1))h(x),$$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k(x-k)h(x-k).$$

Nous allons prouver :
$$(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|f_k\|^p_{B^s_{p,q}})^{\frac{1}{p}} < +\infty, \tag{2.7}$$
$$f \notin B^s_{p,q}. \tag{2.8}$$
La fonction $\exp(i2^j\pi x_1)h$ à son spectre dans la couronne $3.2^j \leq |\xi| \leq 4.2^j$, il résulte donc du Lemme 2.2
$$(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|f_k\|^p_{B^s_{p,q}})^{\frac{1}{p}} \leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\sum_{j\geq 0} v_{j,k}^q)^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}},$$
et (2.7) est la conséquence de (2.5).
On a
$$f(x) = \sum_{j\geq 0} 2^{-js}\exp(i2^j\pi x_1)h_j(x),$$

où $h_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} v_{j,k} h^2(x-k)$, une nouvelle application du Lemme 2.2 conduit à $\|f\|_{B^s_{p,q}} \geq c(\sum_{j\geq 0} \|h_j\|_p^q)^{\frac{1}{q}}$, avec

$$\begin{aligned} \|h_j\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} (\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} v_{j,k} h^2(x-k))^p dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} v_{j,k}^p h^{2p}(x-k) dx \\ &= \|h^2\|_p^p (\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} v_{j,k}^p), \end{aligned}$$

de sorte que (2.8) est la conséquence de (2.6).
En reprenant la preuve de la Proposition 2.4, on déduit facilement de (2.7) que $f \in (B^s_{p,q})_{\ell^p}$.
Finalement, nous venons de prouver que l'inclusion $B^s_{p,q} \subset (B^s_{p,q})_{\ell^p}$ est stricte. □

2.3.2 Contre-exemple : le cas $p < q$

Preuve. Nous reprenons intégralement les notations du sous-section **2.3.1**, en inversant les hypothèses sur $(v_{j,k})$:

$$(\sum_{j\geq 0} (\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} v_{j,k}^p)^{\frac{q}{p}})^{\frac{1}{q}} < +\infty, \tag{2.9}$$

$$(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (\sum_{j\geq 0} v_{j,k}^q)^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}} = +\infty. \tag{2.10}$$

Alors, $\|f\|_{B^s_{p,q}} \leq c(\sum_{j\geq 0} \|h_j\|_p^q)^{\frac{1}{q}}$, avec

$$\begin{aligned} \|h_j\|_p &= \|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} v_{j,k} \tau_k(h^2)\|_p \\ &\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} v_{j,k}^p)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

d'où $f \in B^s_{p,q}$.
Nous allons prouver :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k h \cdot f\|_{B^s_{p,q}}^p = +\infty, \tag{2.11}$$

il en résultera d'après la Proposition 2.4 que $f \notin (B^s_{p,q})_{\ell^p}$.
Le Lemme 2.2 fournit la minoration

$$\|\tau_k h \cdot f\|_{B^s_{p,q}} \geq c(\sum_{j\geq 0} \|h_j \cdot \tau_k h\|_p^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Or

$$\begin{aligned}\|\tau_k h\cdot h_j\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n}(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} v_{j,l}h^2(x-l)h(x-k))^p dx\\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} v_{j,l}^p h^{2p}(x-l)h^p(x-k)dx\\ &\geq v_{j,k}^p\int_{\mathbb{R}^n} h^{3p}(x)dx,\end{aligned}$$

ainsi (2.11) est la conséquence de (2.10). □

Dans le théorème suivant, on donne une généralisation du théorème de Bourdaud concernant la propriété de localisations des espaces de Besov sur les espaces ℓ^r, en utilisant la Proposition 2.5 et la Proposition 2.6.

Théorème 2.3. [26] *Soient $p,q,r\in[1,+\infty]$, $s\in\mathbb{R}$. $B^s_{p,q}$ et $(B^s_{p,q})_{\ell^r}$ sont respectivement les espaces de Besov et les espaces de Besov localisés. Alors*

(i) $B^s_{p,q}\hookrightarrow(B^s_{p,q})_{\ell^r}$*, pour* $r\geq\max(p,q)$*,*

(ii) $(B^s_{p,q})_{\ell^r}\hookrightarrow B^s_{p,q}$*, pour* $r\leq\min(p,q)$*.*

En particulier, $B^s_{p,p}$ *est localisable en norme* ℓ^p*.*

Preuve. *(i)* On montre que

$$\|u\|_{(B^s_{p,q})_{\ell^r}}\leq c\|u\|_{B^s_{p,q}}\quad pour\quad c>0.$$

Nous avons d'après Proposition 1.15

$$\|\sum_{j\geq0}\tau_k\theta.\Delta_j u\|_{B^s_{p,q}}\leq c(\sum_{j\geq0}2^{sjq}\|\tau_k\theta.\Delta_j u\|_p^q)^{\frac{1}{q}}.$$

D'où, $\|\tau_k\theta.u\|^r_{B^s_{p,q}}\leq c(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sjq}\|\tau_k\theta.\Delta_j u\|_p^q)^{\frac{r}{q}}$. Donc on a

$$(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\tau_k\theta.u\|^r_{B^s_{p,q}})^{\frac{1}{r}}\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sjq}\|\tau_k\theta.\Delta_j u\|_p^q)^{\frac{r}{q}})^{\frac{1}{r}}.$$

i.e.,

$$(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\tau_k\theta.u\|^r_{B^s_{p,q}})^{\frac{1}{r}}\leq c(\|(2^{sj}\|\tau_k\theta.\Delta_j u\|_p)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^r(\ell^q)}).\tag{2.12}$$

Puisque, $r\geq\max(p,q)$, implique que $q\leq r$. Alors d'après l'inégalité de Minkowski on a

$$\|(2^{sj}\|\tau_k\theta.\Delta_j u\|_p)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^r(\ell^q)}\leq\|(2^{sj}\|\tau_k\theta.\Delta_j u\|_p)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q(\ell^r)}.$$

Donc, nous pouvons voir que l'inégalité (2.12) devient comme suit

$$(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\tau_k\theta.u\|^r_{B^s_{p,q}})^{\frac{1}{r}}\leq c(\|(2^{sj}\|\tau_k\theta.\Delta_j u\|_p)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q(\ell^r)}).$$

i.e.,

$$(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\tau_k\theta.u\|^r_{B^s_{p,q}})^{\frac{1}{r}}\leq c(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sjq}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\tau_k\theta.\Delta_j u\|^r_p)^{\frac{q}{r}})^{\frac{1}{q}}.$$

Donc,

$$(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\tau_k\theta.u\|^r_{B^s_{p,q}})^{\frac{1}{r}}\leq c(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sjq}(\|\tau_k\theta.\Delta_j u\|_{\ell^r(L^p)})^q)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.13}$$

Nous avons aussi, $r\geq\max(p,q)$ implique que $p\leq r$ i.e., $\ell^p\hookrightarrow\ell^r$, alors on a $\ell^p(L^p)\hookrightarrow\ell^r(L^p)$ i.e.,

$$\|(\tau_k\theta.\Delta_j u)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^r(L^p)}\leq c\|(\tau_k\theta.\Delta_j u)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^p(L^p)}.$$

Donc, nous pouvons voir que l'inégalité (2.13) devient comme suit

$$(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\tau_k\theta.u\|^r_{B^s_{p,q}})^{\frac{1}{r}}\leq c(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sjq}(\|\tau_k\theta.\Delta_j u\|_{\ell^p(L^p)})^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Puisque L^p est localisable en norme ℓ^p, alors on a $\|\tau_k\theta.\Delta_j u\|_{\ell^p(L^p)}\backsim\|\Delta_j u\|_p$. Donc,

$$\begin{aligned}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\tau_k\theta.u\|^r_{B^s_{p,q}})^{\frac{1}{r}} &\leq c(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sjq}\|\Delta_j u\|^q_p)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq c\|u\|_{B^s_{p,q}}\end{aligned}$$

D'où, $B^s_{p,q}\hookrightarrow(B^s_{p,q})_{\ell^r}$.
(ii) On montre que

$$\|u\|_{B^s_{p,q}}\leq c\|u\|_{(B^s_{p,q})_{\ell^r}}\quad pour\quad c>0.$$

Soit $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|L_j(u)\|_p &= \|L_j(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\tau_k\varphi.u)\|_p\\ &= \|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}L_j(\tau_k\varphi.u)\|_p\\ &\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|L_j(\tau_k\varphi.u)\|^p_p)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Puisque, $r\leq\min(p,q)$, alors on a $\ell^r\hookrightarrow\ell^p$ i.e.,

$$\|(\|L_j(\tau_k\varphi.u)\|_p)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^p} \leq c\|(\|L_j(\tau_k\varphi.u)\|_p)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^r}.$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}\|L_j(u)\|_p &\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|L_j(\tau_k\varphi.u)\|_p^p)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|L_j(\tau_k\varphi.u)\|_p^r)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Cela implique que

$$(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sjq}\|L_ju\|_p^q)^{\frac{1}{q}} \leq c(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sjq}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|L_j(\tau_k\varphi.u)\|_p^r)^{\frac{q}{r}})^{\frac{1}{q}}.$$

i.e.,

$$(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sjq}\|L_ju\|_p^q)^{\frac{1}{q}} \leq c(\|(2^{sj}\|L_j(\tau_k\varphi.u)\|_p)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q(\ell^r)}). \tag{2.14}$$

Puisque, $r \leq \min(p,q)$, implique que $r \leq q$, Alors d'après l'inégalité de Minkowski on a

$$\|(2^{sj}\|L_j(\tau_k\varphi.u)\|_p)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q(\ell^r)} \leq \|(2^{sj}\|L_j(\tau_k\varphi.u)\|_p)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^r(\ell^q)}.$$

Donc, nous pouvons voir que l'inégalité (2.14) devient comme suit

$$(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sjq}\|L_ju\|_p^q)^{\frac{1}{q}} \leq c(\|(2^{sj}\|L_j(\tau_k\varphi.u)\|_p)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^r(\ell^q)}).$$

i.e.,

$$\begin{aligned}(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sjq}\|L_ju\|_p^q)^{\frac{1}{q}} &\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\sum_{j=0}^{\infty}2^{sjq}\|L_j(\tau_k\varphi.u)\|_p^q)^{\frac{r}{q}})^{\frac{1}{r}}\\ &\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\tau_k\varphi.u\|_{B^s_{p,q}}^r)^{\frac{1}{r}}\\ &\leq c\|u\|_{(B^s_{p,q})_{\ell^r}}.\end{aligned}$$

D'où, $(B^s_{p,q})_{\ell^r} \hookrightarrow B^s_{p,q}$. □

Remarque 2.1. *La généralisation du théorème de Bourdaud donnée par Sickel et Smirnov en 1999* [39] *en utilisant la méthode des ondelettes, le but de ce travail est de généraliser le même théorème de la propriété de localisation en utilisant une méthode différente.*

Théorème 2.4. [26] *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty[$ *et* $q \in [1, +\infty]$. $F^s_{p,q}$ *et* $(F^s_{p,q})_{\ell^p}$ *sont respectivement les espaces de Lizorkin-Triebel et les espaces de Lizorkin-Triebel localisés. Alors l'espace* $F^s_{p,q}$ *est localisable en norme* ℓ^p*. i.e.,* $F^s_{p,q} = (F^s_{p,q})_{\ell^p}$.

Preuve. (i) $(F^s_{p,q})_{\ell^p} \hookrightarrow F^s_{p,q}$
On montre que

$$\|f\|_{F^s_{p,q}} \leq c\|f\|_{(F^s_{p,q})_{\ell^p}} \quad pour \quad c > 0.$$

De la Définition 1.4, $\|f\|_{F^s_{p,q}} = \|(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq}|\Delta_j f|^q)^{\frac{1}{q}}\|_p$. On pose $\Delta_j f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau_k\varphi.\Delta_j f$, cela implique que

$$\|f\|_{F^s_{p,q}} = \|(\sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} 2^{sj}|\tau_k\varphi\Delta_j f|)^q)^{\frac{1}{q}}\|_p.$$

i.e.,

$$\|f\|_{F^s_{p,q}} = \|\|2^{sj}(\tau_k\varphi\Delta_j f)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q(\ell^1)}\|_p.$$

Puisque, $1 \leq q$. Alors d'après l'inégalité de Minkowski on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{F^s_{p,q}} &= \|\|2^{sj}(\tau_k\varphi\Delta_j f)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q(\ell^1)}\|_p \\ &\leq \|\|2^{sj}(\tau_k\varphi\Delta_j f)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^1(\ell^q)}\|_p. \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \|f\|_{F^s_{p,q}} &\leq c\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq}|\tau_k\varphi\Delta_j f|^q)^{\frac{1}{q}}\|_p \\ &\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq}|\tau_k\varphi\Delta_j f|^q)^{\frac{1}{q}}\|_p^p)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|f\|_{F^s_{p,q}} \leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\tau_k\varphi.f\|^p_{F^s_{p,q}})^{\frac{1}{p}}.$$

D'où, $(F^s_{p,q})_{\ell^p} \hookrightarrow F^s_{p,q}$.
(ii) $F^s_{p,q} \hookrightarrow (F^s_{p,q})_{\ell^p}$.
Maintenant, on montre que

$$\|f\|_{(F^s_{p,q})_{\ell^p}} \leq c\|f\|_{F^s_{p,q}} \quad pour \quad c > 0.$$

Soient $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty[$ et $q \in [1, +\infty]$. Alors on a

$$\begin{aligned}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi.f\|^p_{F^s_{p,q}})^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f\|^p_{F^s_{p,q}})^{\frac{1}{p}} \\ &= (\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f \tau_k\varphi\|^p_{F^s_{p,q}})^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

De la Proposition 1.15, on obtient

$$\begin{aligned}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi.f\|^p_{F^s_{p,q}})^{\frac{1}{p}} &\le c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq}|\Delta_j f \tau_k\varphi|^q)^{\frac{1}{q}}\|^p_p)^{\frac{1}{p}} \\ &\le c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq}|\Delta_j f|^q)^{\frac{1}{q}}\|^p_p)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Puisque L^p est localisable en norme ℓ^p, alors on a

$$\begin{aligned}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi.f\|^p_{F^s_{p,q}})^{\frac{1}{p}} &\le c\|(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq}|\Delta_j f|^q)^{\frac{1}{q}}\|_p \\ &\le c\|f\|_{F^s_{p,q}}.\end{aligned}$$

D'où, $F^s_{p,q} \hookrightarrow (F^s_{p,q})_{\ell^p}$. □

2.4 Le problème des multiplicateurs

Soit E un espace de Banach de distributions, E aussi est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module isométriquement invariant par translations. On supposera de plus que E contient $\mathcal{D}$ comme sous-espace dense. L'espace des multiplicateurs de E (noté $M(E)$) est l'ensemble des distributions m pour lesquelles il existe $c > 0$ tel que

$$\|mf\|_E \le c\|f\|_E \quad (\forall f \in \mathcal{D}).$$

$M(E)$ est un $E.B.D.$ pour la norme

$$\|m\|_{M(E)} = \sup\{\|mf\|_E : f \in \mathcal{D}, \|f\|_E \le 1\}.$$

Si on a $E \subset M(E)$, la multiplication, définie initialement sur $\mathcal{D} \times E$, se prolonge par continuité à $E \times E$ et E devient une algèbre de distributions.

Proposition 2.7. *Si E est localisable en norme ℓ^p alors $M(E)$ est localisable en norme ℓ^∞, si on a de* *plus $E \subset M(E)$ alors $M(E)$ coïncide avec $(E)_{\ell^\infty}$.*

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}\|\tau_k\varphi.m\|_{M(E)} &\leq \|\tau_k\varphi\|_E\|m\|_{M(E)}\\ &\leq \|\varphi\|_{M(E)}\|m\|_{M(E)}, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}^n.\end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi.m\|_{M(E)} \leq \|\varphi\|_{M(E)}\|m\|_{M(E)},$$

d'où, $M(E) \subset (M(E))_{\ell^\infty}$.
Inversement, soit $\psi \in \mathcal{D}$ telle que $\psi(x) = 1$ sur le support de φ, on a $\forall \phi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}\|m\phi\|_E &\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi m\phi\|_E^p)^{\frac{1}{p}}, \ car\ E = (E)_{\ell^p}\\ &\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k(\varphi\psi)m\phi\|_E^p)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi m\|_{M(E)}^p.\|\tau_k\psi\phi\|_E^p)^{\frac{1}{p}}\ , \ \forall k \in \mathbb{Z}^n.\end{aligned}$$

Alors

$$\|m\phi\|_E \leq c\|\phi\|_E(\sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi m\|_{M(E)}).$$

Donc on a $\frac{\|m\phi\|_E}{\|\phi\|_E} \leq c\sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi m\|_{M(E)}$, cela donne

$$\sup_{\phi\neq 0} \frac{\|m\phi\|_E}{\|\phi\|_E} \leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi m\|_{M(E)}.$$

D'où $(M(E))_{\ell^\infty} \subset M(E)$. On suppose maintenant que $E \subset M(E)$ et on démontre que $M(E) = (E)_{\ell^\infty}$.
Soit $m \in E$, d'où $\|m\|_{M(E)} \leq c\|m\|_E$, donc

$$\|\tau_k\varphi.m\|_{M(E)} \leq c\|\tau_k\varphi.m\|_E, \ \forall k \in \mathbb{Z}^n.$$

D'où

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi.m\|_{M(E)} \leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k\varphi.m\|_E,$$

i.e., $(E)_{\ell^\infty} \subset (M(E))_{\ell^\infty}$.

Inversement, si $m \in M(E)$ on a

$$\|m\|_{(E)_{\ell^\infty}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi . m\|_E,$$

donc on a

$$\begin{aligned} \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi . m\|_E &\leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_k \varphi\|_E \|m\|_{M(E)} \\ &\leq c\|m\|_{M(E)}, \end{aligned}$$

i.e., $M(E) \subset (E)_{\ell^\infty}$. Et nous avons $M(E) = (M(E))_{\ell^\infty}$, alors on a

$$(M(E))_{\ell^\infty} \subset (E)_{\ell^\infty}.$$

□

Proposition 2.8. *Pour* $1 \leq q < p \leq +\infty$ *et* $s > 0$, $M(B^s_{p,q})$ *est strictement inclus dans* $(M(B^s_{p,q}))_{\ell^\infty}$.

Preuve. Voir [10]. □

CHAPITRE 3

FONCTIONS QUI OPÈRENT SUR CERTAINS ESPACES FONCTIONNELS

La composition sur certains espaces fonctionnels est un problème qui intéresse par les mathématiciens depuis les années 1960. Où S. Igari [30] en 1965, a étudié les fonctions qui opèrent sur l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ pour $0 < s < 1$, où il a trouvé que ce sont les fonctions localement lipschitziennes et s'annulant à l'origine, si $H^s(\mathbb{R})$ s'injecte dans $L^\infty(\mathbb{R})$, les fonctions globalement lipschitziennes et s'annulant à l'origine, si $H^s(\mathbb{R})$ ne s'injecte pas dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Dans ce chapitre, on va étudier les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur certains espaces fonctionnels $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ avec $s > 0, m, n \in \mathbb{N}^\star$ et $p, q \in [1, +\infty]$. Où $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ désigne les espaces de Besov ou les espaces de Lizorkin-Triebel, et $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ désigne les espaces de Besov ou les espaces de Lizorkin-Triebel à valeurs vectorielles. La condition nécessaire a été étudié par G. Bourdaud et D. Kateb [20], [13] et [14], en 2009 S.E. Allaoui [1] a étudié la cas vectoriel. Pour la condition suffisante W. Sickel, G. Bourdaud et M. Moussai [23] avec une série des articles ont étudié la condition suffisante, nous sommes généraliser ce résultat dans le cas vectoriel, et avec une large classe des paramètres.

3.1 Interpolation

L'interpolation est un outil trés important pour l'étude de la continuité d'un opérateur linéaire. Nous rappelons les résultats connus sur l'interpolation des espaces de Besov d'après les livres de Berg [6], Peetre [36] et Triebel [42,43].

Définition 3.1. [36] *Soient A_0, A_1 deux espaces de Banach, $0 < \theta < 1$. On dit que $a \in A_{[\theta]} = (A_0, A_1)_\theta$ si et seulement si, il existe $f = f(z),\ z \in \mathbb{C}$, tel que*

(i) $f(z)$ est analytique sur la bonde $\{z \in \mathbb{C} : 0 < Re(z) < 1\}$ et à valeur dans $A_0 + A_1$, continue et bornée sur la bonde $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(z) \leq 1\}$,

(ii) $f(j + it)$ (où $j = 0, 1$) continue sur A_j tel que tend vers 0 si $|t| \longrightarrow \infty$,

(iii) $a = f(\theta)$.

On munit $A_{[\theta]}$ par la norme

$$\|a\|_{A_{[\theta]}} = \inf_f \max(\|f(iy)\|_{A_0}, \|f(1+iy)\|_{A_1}).$$

Remarque 3.1. *L'espace $A_{[\theta]}$ est appelé un espace d'interpolation de l'exposent θ.*

Proposition 3.1. *$A_{[\theta]}$ est un espace de Banach.*

Proposition 3.2. *Soient $A_j,\ B_j\ (j=0,1)$ quatre espaces de Banach, et T un opérateur envoie de A_0 dans B_0 et de A_1 dans B_1. Alors T envoie de $A_{[\theta]}$ dans $B_{[\theta]}$ et*

$$\|T\|_{A_{[\theta]},B_{[\theta]}} \leq \|T\|^{1-\theta}_{A_0,B_0}\|T\|^{\theta}_{A_1,B_1},$$

où

$$\|T\|_{A_j,B_j} = \sup_{\|f\|_{A_j}=1} \|T(f)\|_{B_j}.$$

3.1.1 Quelques inégalités d'interpolation

On va donner maintenant quelques inégalités d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg dans l'espce de Besov.

Proposition 3.3. *Soient $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty, 0 < \theta < 1$, alors*

$$L^{\theta p} \cap L^{\infty} \hookrightarrow L^p,$$

avec

$$\|f\|_p \leq \|f\|^{1-\theta}_{\infty}\|f\|^{\theta}_{p\theta}.$$

Preuve. Soit $f \in L^{\theta p} \cap L^{\infty}$, alors on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p |f(x)|^{-\theta p}|f(x)|^{\theta p} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

i.e.,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(1-\theta)}|f(x)|^{\theta p} dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Puisque $f \in L^{\infty}$, donc on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|^{1-\theta}_{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p\theta} dx\right)^{\frac{\theta}{p\theta}},$$

par conséquent

$$\|f\|_p \leq \|f\|^{1-\theta}_{\infty}\|f\|^{\theta}_{p\theta} \tag{3.1}$$

□

Théorème 3.1. *Soient $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, q \leq \infty$ et $0 < \theta < 1$, alors*

$$B^{\frac{s}{\theta}}_{p\theta,q\theta}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n),$$

avec

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|^{1-\theta}_\infty \|f\|^\theta_{B^{\frac{s}{\theta}}_{p\theta,q\theta}(\mathbb{R}^n)}$$

Preuve. Soit $f \in B^{\frac{s}{\theta}}_{p\theta,q\theta}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors on a

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|\Delta_j f\|^q_p\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.2}$$

D'après la Proposition 3.3, on a

$$\|\Delta_j f\|_p \leq \|\Delta_j f\|^{1-\theta}_\infty \|\Delta_j f\|^\theta_{p\theta},$$

par l'hypothese $\|\Delta_j f\|_\infty \leq c\|f\|_\infty$, on obtient

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c\|f\|^{1-\theta}_\infty \|\Delta_j f\|^\theta_{p\theta}. \tag{3.3}$$

En remplacement $\|\Delta_j f\|_p$ par $c\|f\|^{1-\theta}_\infty \|\Delta_j f\|^\theta_{p\theta}$ dans l'équation (3.2), alors

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\sum_{j\geq 0} c2^{jsq}\|f\|^{q(1-\theta)}_\infty \|\Delta_j f\|^{q\theta}_{p\theta}\right)^{\frac{1}{q}},$$

i.e.,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j\geq 0} c2^{jsq}\|f\|^{q(1-\theta)}_\infty \|\Delta_j f\|^{q\theta}_{p\theta}\right)^{\frac{1}{q}} &\leq c\|f\|^{1-\theta}_\infty \left(\sum_{j\geq 0} 2^{jsq}\|\Delta_j f\|^{q\theta}_{p\theta}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c\|f\|^{1-\theta}_\infty \left(\sum_{j\geq 0} \left(2^{j\frac{s}{\theta}}\|\Delta_j f\|_{p\theta}\right)^{q\theta}\right)^{\frac{\theta}{q\theta}}.\end{aligned}$$

i.e., $\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|^{1-\theta}_\infty \|f\|^\theta_{B^{\frac{s}{\theta}}_{\theta p,\theta q}(\mathbb{R}^n)}$. □

Proposition 3.4. *Pour $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, q \leq \infty$ et $0 < \theta < 1$, on a*

$$B^{\frac{s}{\theta}}_{p\theta,q\theta}(\mathbb{R}^n) \cap B^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n),$$

avec

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|^{1-\theta}_{B^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)}\|f\|^{\theta}_{B^{\frac{s}{\theta}}_{\theta p,\theta q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve. La même démonstration que celle du Théorème 3.1. □

3.2 Les fonctions à p-variations bornées

Dans cette section, nous rappelons quelques Définitions et propriétés concernant les fonctions à p-variations bornées.

Définition 3.2. [46] *Soit $p \in [1, +\infty[$, alors une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite à $p-$variation bornée, s'il existe $c > 0$ telle que*

$$\sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p \leqslant c^p,$$

pour toutes les suites réelles finies $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ de I, le minimum de ces constantes c est noté par $\nu_p(f, I)$. Nous désignons par $\mathcal{V}_p(I)$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ à p-variations bornées.

• Nous utiliserons les abréviations $\mathcal{V}_p = \mathcal{V}_p(\mathbb{R})$ et $\nu_p(f) = \nu_p(f, \mathbb{R})$. En considérant une suite avec deux termes, on obtient

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \nu_p(f, I), \quad \forall x, y \in I. \tag{3.4}$$

Par conséquent, toute fonction de $\mathcal{V}_p(I)$ est bornée.
• On peut facilement prouver que $\mathcal{V}_p(I)$ devient un espace Banach, s'il est muni de la norme suivante

$$\|f\|_{\mathcal{V}_p(I)} = \sup_{x\in I} |f(x)| + \nu_p(f, I), \quad \forall f \in \mathcal{V}_p(I).$$

Proposition 3.5. *Soient $a \in I^\circ$ et $I_1 =]-\infty, a[\cap I, I_2 = [a, \infty[\cap I$.*

1. *Si $f \in \mathcal{V}_p(I)$, alors*

$$\nu_p^p(f, I_1) + \nu_p^p(f, I_2) \leq \nu_p^p(f, I). \tag{3.5}$$

2. *Si $f_j \in \mathcal{V}_p(I_j)$ pour $j = 1, 2$, alors la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f|_{I_j} = f_j$ pour $j = 1, 2$, appartient à $\mathcal{V}_p(I)$, de plus*

$$\nu_p(f, I) \leq \nu_p(f_1, I_1) + \nu_p(f_2, I_2) + \sup_{I_1} |f_1| + \sup_{I_2} |f_2|. \tag{3.6}$$

Preuve. La première inégalité est évidente.
Pour établir la second, nous prenons une suite finie $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ de I avec $x_0 < a < x_N$,

et définir M par l'inégalité $x_{M-1} < a \leq x_M$. Alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} |f(x_j) - f(x_{j-1})|^p \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{M-1} |f(x_j) - f(x_{j-1})|^p + |f(x_M) - f(x_{M-1})|^p + \sum_{j=M+1}^{N} |f(x_j) - f(x_{j-1})|^p \\
&\leqslant \nu_p(f_1, I_1)^p + \nu_p(f_2, I_2)^p + \left(\sup_{I_1} |f_1| + \sup_{I_2} |f_2|\right)^p.
\end{aligned}$$

i.e., on a l'inégalité (3.6). □

3.2.1 Une propriété de multiplication

Proposition 3.6. *L'espace de Banach $\mathcal{V}_p(I)$ est un algèbre pour la multiplication ponctuelle des fonctions. De plus*

$$\|fg\|_{\mathcal{V}_p(I)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{V}_p(I)} \|g\|_{\mathcal{V}_p(I)}, \quad \forall f, g \in \mathcal{V}_p(I). \tag{3.7}$$

Preuve. Soit $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ une suite finie dans I et f, g appartient à $\mathcal{V}_p(I)$. Alors on a

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{N} |fg(x_j) - fg(x_{j-1})|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{N} |f(x_j)g(x_j) - g(x_{j-1})|^p\right)^{1/p} \\
&+ \left(\sum_{j=1}^{N} |g(x_{j-1})f(x_j) - f(x_{j-1})|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sup_I |f|\right) \nu_p(g, I) + \left(\sup_I |g|\right) \nu_p(f, I).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\|fg\|_{\mathcal{V}_p(I)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{V}_p(I)} \|g\|_{\mathcal{V}_p(I)}$. □

3.3 Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov ou Lizorkin-Triebel pour $s > 0$

Dans cette section, on va donner la caractérisation des fonctions qui opèrent, par composition à gauche sur l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et sur l'espace de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, pour $s > 0$, $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty]$, ($p < +\infty$, dans le cas des espaces de Lizorkin-Triebel).

Définition 3.3. [20] *Si f est une fonction de la variable réelle à valeurs réelle, et si E est un espace fonctionnel, nous dirons que f opère par composition sur E, si pour toute fonction g de E, $f \circ g$ appartient à E.*

• Soit $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Besov ou de Lizorkin-Triebel. $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est qualifié de sur-critique s'il s'injecte dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, de sous-critique dans le cas contraire [14].

Voici la liste exhaustive des espaces sur-critiques [14]

(i) $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, pour $s > \frac{n}{p}$,

(ii) $B^{\frac{n}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, pour $p \in [1, +\infty]$ (voir [42]),

(iii) $F^n_{1,q}(\mathbb{R}^n)$, pour $q \in [1, +\infty]$ (voir [32]),

(iv) $W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$.

En fait tous ces espaces s'injectent dans $B^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^n)$, lui-même sous-espace de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 3.2. [14] *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction opérant par composition à gauche sur l'espace $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Alors*

(i) f est lipschitzienne, si $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est sous-critique,

(ii) f est localement lipschitzienne, si $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est sur-critique.

En combinant le théorème avec les caractérisations de $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ au moyen de l'opérateur de différence finie (voir [45]), on obtient ce corollaire.

Corollaire 3.1. [14] *Soit $s \in]0, 1[$ ($s = 1$, dans le cas où $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev $W^{1,p}$) et $p < +\infty$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que f opère sur $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est*

(i) f lipschitzienne et $f(0) = 0$, dans le cas sous-critique,

(ii) f localement lipschitzienne et $f(0) = 0$, dans le cas sur-critique.

Le corollaire s'étend évidemment au cas $p = +\infty$, il suffit d'ignorer la condition $f(0) = 0$.

3.4 Définitions et propriétés des espaces de Besov

Dans cette section, on va donner maintenant des Définitions et des propriétés concernant l'espace de Besov à valeurs vectorielles.

Soient $j \in \{1, ..., n\}$, $x' = (x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, la fonction $f_{(x'),j}(y)$ est donnée par

$$f_{(x'),j}(y) = f(x_1, ..., x_{j-1}, y, x_{j+1}, ..., x_n), \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Définition 3.4. [5] *Pour $p \in [1,+\infty[$, on définit l'espace $\mathfrak{L}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, qui vérifient*

$$\|f\|_{\infty,p} = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} \|f_{(.),j}(y)\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})} dy \right)^{1/p} < +\infty\,,$$

pour tout $j = 1, ..., n$.

Définition 3.5. *Soit la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et soit $h > 0$. Alors*

(i) On note $\nu_{p,m}(g,h)$ la borne supérieure des nombres

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \|g_{(.),j}(t_k) - g_{(.),j}(t_{k-1})\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R}^m)} \right)^{1/p},$$

pour toute les suites $t_0 < t_1 < ... < t_N$, telles que $t_k - t_{k-1} \leq h$ et pour tout $k = 1, ..., N$.

(ii) La fonction g, est appelée une fonction à p-variation bornée si

$$\|g\|_{\mathfrak{BV}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} = \sup_{h>0} \nu_{p,m}(g,h) < \infty.$$

(iii) L'espace $\mathfrak{BV}^1_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ est l'ensemble des fonctions boréliennes $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, telles que $\partial_j u \in \mathfrak{BV}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, pour tout $j = 1, ..., n$. On munit l'espace $\mathfrak{BV}^1_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ de la semi-norme suivante

$$\|u\|_{\mathfrak{BV}^1_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} = \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{\mathfrak{BV}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}.$$

(iv) Si f est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^m$, on définit le module de continuité par

$$\Omega_p(f,t)_j = \left(\int_{\mathbb{R}} \sup_{0<|h|\leq t} \|\Delta_h f_{(.),j}(y)\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{m-1})} dy \right)^{1/p}.$$

Proposition 3.7. *Pour tous $p > 1$, $1/p < s < 1$ et $q \in [1,\infty]$, alors une fonction f appartient à $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$, si et seulement si*

$$\|f\|_p + \sum_{j=1}^{m} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\Omega_p(f,t)_j}{t^s} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} < \infty\,.$$

Proposition 3.8. *Pour tous $p > 1$, $1/p < s < 1$ et $q \in [1,\infty]$, il existe $c = c(s,p,q,m,n) > 0$ telle que*

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{\nu_{p,m}(g,h)}{h^{s-(1/p)}} \right)^q \frac{\mathrm{d}h}{h} \right)^{1/q} \leq c\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}, \quad g \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\,.$$

Preuve. Par le théorème de plongement de Peetre [22, th. 5] et la Définition 3.4, il existe $c = c(p) > 0$, telle que

$$\nu_{p,m}(g,h) \leq c\,\|g\|_{B^{1/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)},\ \forall g \in B^{1/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\,. \tag{3.8}$$

En raisonnant comme dans la preuve du Proposition 2.2 de [15], nous obtenons

$$\nu_{p,m}(g,h) \leq h^{1-(1/p)}\,\|g\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)},\ \forall h > 0,\ \forall g \in W^1_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\,. \tag{3.9}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on obtient
$\|g_{(.)}(t_k) - g_{(.)}(t_{k-1})\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R}^m)} \leq (t_k - t_{k-1})^{1-(1/p)} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|g'_{(.)}(x)\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R}^m)} dx\right)^{1/p}$,
pour tout $g \in W^1_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.
Si on définit $\theta \in]0,1[$ par l'égalité $\theta(1-(1/p)) = s-(1/p)$, suivant la Définition 3.5 et [6, 3.1], on a

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) = \left(B^{1/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m), W^1_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\right)_{\theta,q}\,,$$

par définition, il existe des familles des fonctions $(u_t)_{t>0}$ et $(v_t)_{t>0}$, telles que

$$g = u_t + v_t \qquad \text{et} \qquad \|\, u_t \,\|_{B^{1/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} + t\,\|\, v_t \,\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq 2\,K(t,g),\ \forall t > 0.$$

Où, $t \mapsto K(t,g)$ est la K-fonctionnelle de g relative au couple $(B^{1/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m), W^1_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$ (voir [6, 3.1] suivant la Définition 3.4). Les inégalités (3.8) et (3.9) donnent aussitôt

$$h^{(1/p)-s}\,\nu_{p,m}(g,h) \leq c_2\,K(t,g)\,\left(h^{(1/p)-s} + h^{1-s}t^{-1}\right),\ \forall h,t > 0\,.$$

Grâce au choix $t = h^{1-(1/p)}$, on conclut que

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty \left(\frac{\nu_{p,m}(g,h)}{h^{s-(1/p)}}\right)^q \frac{dh}{h}\right)^{1/q} &\leq c_3 \left(\int_0^\infty \left(\frac{K(h^{1-(1/p)},g)}{h^{s-(1/p)}}\right)^q \frac{dh}{h}\right)^{1/q} \\ &= c_4 \left(\int_0^\infty \left(\frac{K(t,g)}{t^\theta}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

□

3.5 Une propriété de composition dans l'espace de Besov

Dans cette section, on s'intéresse aux opérateurs de composition $T_f(g) = f \circ g$ sur certains espaces de Besov à valeurs vectorielles. Nous donnons des conditions suffisantes pour que l'opérateur T_f opère sur $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.

Définition 3.6. [3] *L'espace de Besov à valeurs vectorielles $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est l'ensemble des fonctions*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \longmapsto (f_1(x), ..., f_m(x))$$

pour lesquelles les fonctions coordonnées $f_1, ..., f_m$ appartiennent à $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$,
la norme de f dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ étant définie par $(\sum_{j=1}^m \|f_j\|^2_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)})^{\frac{1}{2}}$.

Lemme 3.1. *Soient $p \in [1, \infty]$, $h > 0$, $a' = (a_1, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, et $y \longmapsto g_{(a'),j,k}(y)$ ($j = 1, ..., n$ et $k = 1, ..., m$) une fonction analytique réelle. Alors*

$$\left(\int_{I_{l,a'}\setminus[\sup I_{l,a'}-h, \sup I_{l,a'}]} \|\Delta_h(\partial_k f \circ g)_{(.)}(y)\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \|\partial_k g_{(.),j,k}(y)\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})} dy\right)^{1/p}$$

$$\leq (a_{jkl})^{1-(1/p)} \Omega_p(\partial_k f, a_{jkl} h),$$

où le complémentaire de l'ensemble des zéros de $\partial_k g_{(a'),j,k}$ est la réunion d'une famille $\{I_{l,a'}\}_{l\in\mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts disjoints et $a_{jkl} = \sup_{y\in I_{l,a'}} \|\partial_k g_{(.),j,k}(y)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})}$.

Preuve. On a $g_{l(a'),j,k} = g_{(a'),j,k}|I_{l,a'}$ est un difféomorphisme de $I_{l,a'}$ dans $g_{l(a'),j,k}(I_{l,a'})$.
Posons $I'_l := I_{l,a'}\setminus[\sup I_{l,a'} - h, \sup I_{l,a'}] \neq \emptyset$, il vient alors

$$|g_{(a'),j,k}(g^{-1}_{l(a'),j,k}(y) + h) - y| \leq a_{jkl} h, \ \text{pour } y \in g_{(a'),j,k}(I'_l).$$

Où, $g^{-1}_{l(a'),j,k}$ est la fonction réciproque de $g_{l(a'),j,k}$, ce qui donne

$$\left(\int_{I'_l} \|\Delta_h(\partial_k f \circ g)_{(.)}(y)\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \|\partial_k g_{(.),j,k}(y)\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})} dy\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_{I'_l} \|\partial_k f(g_{(.)}(y+h)) - \partial_k f(g_{(.)}(y))\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \|\partial_k g_{(.),j,k}(y)\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})} dy\right)^{1/p}$$
$$\leq a_{jkl}^{1-(1/p)} \left(\int_{\mathbb{R}} \sup_{0<|t|\leq a_{jkl}h} \|\partial_k f_{(.)}(y+t)) - \partial_k f_{(.)}(y)\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{m-1})} dy\right)^{1/p}.$$

□

Théorème 3.3. *Soient $max(\dfrac{n}{p}, 1 + \dfrac{1}{p}) < s < 2$, $1 < p \leq q \leq \infty$, $1 \leq m \leq n$ avec $n \geq 2$, m et n entiers, et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, une fonction s'annulant à l'origine. Si $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ et $g \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, alors*

$T_f(g) \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. *De plus il existe* $c = c(s,p,q,m,n) > 0$ *tel que*

$$\|T_f(g)\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\nabla f\|_{B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)}(1+\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)})^{s-(1/p)}.$$

Preuve. *Étape 1 :* Par l'hypothèse sur f, nous obtenons

$$\|f\circ g\|_p \leq \|\nabla f\|_\infty \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\,.$$

Puisque, $\Delta_h(\partial_j(f\circ g))(x) = \nabla f\circ g(x+h).\Delta_h(\partial_j g)(x) + \Delta_h(\nabla f\circ g)(x).\partial_j g(x)$,
pour tout $j = 1,...,n$, donc on obtient

$$\nu_{p,1}(\partial_j(f\circ g),h) \leq \|\nabla f\|_\infty \nu_{p,m}(\partial_j g,h) + U_j(h),$$

où,

$$U_j(h) = \|\Delta_h(\nabla f\circ g).\partial_j g\|_{\infty,p}\,.$$

Étape 2 : Nous définissons les intervalles $(I'_l)_{l>0}$ suivant le Lemme 3.1. La condition $q\geq p$ permettant d'utiliser l'inégalité de Minkowski, et par le Lemme 3.1, on a

$$\Big(\int_0^\infty \Big(\frac{1}{h^{(s-1)p}}\sum_l \int_{I'_l} \|\Delta_h(\partial_k f\circ g)_{(.)}(y)\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})}\|\partial_k g_{(.),j,k}(y)\|^p_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})}dy\Big)^{q/p}\frac{dh}{h}\Big)^{1/q}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \Big(\int_0^\infty \Big(\frac{1}{h^{(s-1)p}}\sum_l a^{p-1}_{jkl}\,\Omega^p_p(\partial_k f, a_{jkl}\,h)\Big)^{q/p}\frac{dh}{h}\Big)^{1/q}\\
&\leq \left(\sum_l \left(\int_0^\infty \Big(\frac{1}{h^{(s-1)p}}\;a^{p-1}_{jkl}\,\Omega^p_p(\partial_k f, a_{jkl}\,h)\Big)^{q/p}\frac{dh}{h}\right)^{p/q}\right)^{1/p}\\
&= \Big(\sum_l a^{p-1+(s-1)p}_{jkl}\Big)^{1/p}\;\Big(\int_0^\infty\Big(\frac{\Omega_p(\partial_k f,t)}{t^{s-1}}\Big)^q\frac{dt}{t}\Big)^{1/q}\\
&\leq c\,\|\,\partial_k f\,\|_{B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)}\;\sum_l(\sup_{y\in I_{l,a'}}\|\partial_k g_{(.),j,k}(y)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})})^{s-(1/p)}\,.
\end{aligned}$$

Le fait que $\partial_k g_{(a'),j,k}$ s'annule aux extrémités de $I_{l,a'}$, donc il existe $x_l\in I_{l,a'}\cap[\sup I_{l,a'}-h,\sup I_{l,a'}]$

tel que $\partial_k g_{(a'),j,k}(x_l) = 0$, et par l'inégalité 3.8 on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_l \sup_{y\in I_l} \|\partial_k g_{(.),j,k}(y)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})}^{s-(1/p)} &= \sum_l \|\partial_k g_{(.),j,k}(y_l) - \partial_k g_{(.),j,k}(x_l)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})}^{s-(1/p)} \\
&\leq \|\partial_k g\|_{\mathfrak{BV}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}^{s-(1/p)} \\
&\leq \|g\|_{B_{p,1}^{1+(1/p)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}^{s-(1/p)} .
\end{aligned}$$

Maintenant par la condition $sp - n > p$, on a le plongement

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \hookrightarrow B_{sp-1,1}^{1+\frac{n}{sp-1}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathfrak{BV}_{sp-1}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) . \tag{3.10}$$

Donc, on conclut que

$$\sum_l \sup_{y\in I_l} \|\partial_k g_{(.),j,k}(y)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})}^{s-(1/p)} \leq c\|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}^{s-(1/p)} .$$

Étape 3 : Puisque, $|I_{l,a'} \cap [\sup I_{l,a'} - h, \sup I_{l,a'}]| > h$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, on peut appliquer la Proposition 3.8, on obtient

$$\Big(\int_0^\infty \Big(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_l \int_{I_{l,a'}\setminus I_l'} \|\Delta_h(\partial_k f \circ g)_{(.)}(y)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})}^p \|\partial_k g_{(.),j,k}(y)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-1})}^p dy\Big)^{q/p} \frac{dh}{h}\Big)^{1/q}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c\|\partial_k f\|_\infty \Big(\int_0^\infty \Big(\frac{1}{h^{s-1-(1/p)}} \nu_{p,m}(\partial_k g, h)\Big)^q \frac{dh}{h}\Big)^{1/q} \\
&\leq c\|\nabla f\|_\infty \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} .
\end{aligned}$$

Par les étapes 1, 2 et 3, et les Propositions 3.7 et 3.8, la preuve du Théorème 3.3 en découle aussitôt. □

Chapitre 4

Caractérisation concrète des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel localisés uniformes

Puisque la notion de la localisation uniforme jouent un rôle dans l'analyse fonctionnelle, il y a plusieurs chercheurs qui sont intéresse l'étude dans ce point, et puisque depuis quelques années la version localisée uniforme d'un espace normé sur $\mathbb{R}^n$ est connue par une fonction auxiliaire $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, i.e., on a la relation suivante

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi) f\|_E < +\infty,$$

où τ_a désigne l'opérateur de translation, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, positive, non identiquement nulle. D'après la Proposition 4.5 cité dans ce chapitre, on peut montrer que l'espace localisé uniforme noté E_{lu}, ne dépend pas du choix de la fonction auxiliaire φ. S.E. Allaoui et G. Bourdaud [4], ont ouvert la voie de la caractérisation concrète dans les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel localisés uniformes. i.e., ils ont montré que ces espaces sont décrits sans utiliser une fonction auxiliaire φ pour $0 < s \leq 1$. Dans ce chapitre, on va étudier la localisation uniforme sur l'espace de type de Lebesgue $L_p^\tau(\mathbb{R}^n)$ et l'espace de type de Besov $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$, où nous donnons une caractérisation concrète des espaces $L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}$ avec $p \in [1, +\infty]$ et $\tau \geq 0$ et les espaces de type de Besov $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ avec $p, q \in [1, +\infty]$, $\tau \in \mathbb{R}$, et $0 < s < 1$. i.e., nous montrons que ces espaces, sont décrits sans utiliser une fonction auxiliaire.

4.1 Espace des multiplicateurs $M(E)$

Dans cette section, on va étudier le produit de la forme $A_1 \cdot A_1$, où A_1 et A_2 sont des espaces de Banach.

Proposition 4.1. *On a*

(i) $(M(E), \|\cdot\|_{M(E)})$ *est un espace de Banach.*

(ii) Si $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset M(E)$, alors $M(E)$ est une algèbre

$$(i.e.,\ si\ g_1,\ g_2 \in M(E) \Longrightarrow g_1 \cdot g_2 \in M(E)).$$

Preuve. (i) On montre que $\|\cdot\|_{M(E)}$ définie une norme sur $M(E)$.
On a si $\|g\|_{M(E)} = 0$, alors $\|gf\|_E = 0$, $f \in \mathcal{C}^\infty \cap E$, ce qui donne $gf = 0$.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty \cap E$ telle que $f\varphi = f$ $\quad (i.e.,\ \varphi(x) = 1\ sur\ le\ supp f)$, alors
$< g, f >=< g, f\varphi >=< gf, \varphi >= 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty \cap E.$
D'où, $g = 0$.

$$\bullet\ On\ a\ \forall\alpha \in \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C};\ \|\alpha g\|_{M(E)} = \sup\{\|\alpha gf\|_E : f \in \mathcal{C}^\infty \cap E, \|f\|_E \leq 1\}$$
$$= |\alpha| \sup\{\|gf\|_E : f \in \mathcal{C}^\infty \cap E, \|f\|_E \leq 1\}$$
$$= |\alpha| \|g\|_{M(E)}.$$

• Pour l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
\|g_1 + g_2\|_{M(E)} &= \sup\{\|(g_1 + g_2)f\|_E : f \in \mathcal{C}^\infty \cap E, \|f\|_E \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|g_1 f\|_E : f \in \mathcal{C}^\infty \cap E, \|f\|_E \leq 1\} + \sup\{\|g_2 f\|_E : f \in \mathcal{C}^\infty \cap E, \|f\|_E \leq 1\} \\
&\leq \|g_1\|_{M(E)} + \|g_2\|_{M(E)}.
\end{aligned}$$

• On montre que $M(E)$ est un espace complet.
Soient $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $M(E)$, alors on a

$$\lim_{n,m \longrightarrow \infty} \|(g_n - g_m)f\|_E = 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty \cap E.$$

Donc, $(g_n f)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet E, alors elle est convergente.
Choisissons $f\ et\ \varphi \in \mathcal{C}^\infty \cap E$ telles que $f\varphi = f$, on a

$$< g_n, f >=< g_n f, \varphi > \longrightarrow < T_f, \varphi >,$$

donc la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ converge vers une distribution g, de plus

$$< gf, \varphi >= \lim_{n \longrightarrow \infty} < g_n f, \varphi >=< T_f, \varphi > .$$

D'où, $T_f = gf$.

(ii) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (fixé) qui vaut 1 pour $|x| \leq 1$, on pose $\varphi_k(x) = \varphi(\frac{x}{k})$, $k \in \mathbb{N}^\star$.
Nous avons la suite (A_k) définie par $A_k = g_1(\varphi_k g_2)$ a une limite A dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

En effet, Soient $\theta,\ \psi \in \mathcal{D}$ lel que $\theta\psi = \psi$, alors on a

$$< A_k, \psi >=< g_1(\varphi_k g_2), \theta\psi >=< g_1(\varphi_k g_2 \theta), \psi > .$$

Mais pour k asssez grand $\varphi_k\theta = \theta$, donc à partir de certain rang ($i.e.,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq n_0$); $< A_k, \psi >$ est constante, d'où l'existence de A tel que $< A, \psi >= \lim_{k\longrightarrow\infty} < A_k, \psi >$.
Donnons nous $\phi \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} < A\phi, \psi > &= \lim_{k\longrightarrow\infty} < g_1(\varphi_k g_2)\phi, \theta\psi > \\ &= \lim_{k\longrightarrow\infty} < g_1(\varphi_k g_2 \phi\theta), \psi >, \qquad (\varphi_k\phi\theta = \phi\theta \textit{ pour } k >> 1) \\ &= < g_1(g_2\phi\theta), \psi > \\ &= < g_1(g_2\phi), \theta\psi > \\ &= < g_1 g_2 \phi, \psi > . \end{aligned}$$

$i.e.,\ A = g_1 g_2.$

□

Définition 4.1. [7] *On dit que f appartient localement uniformément à l'espace E, et on écrit $f \in E_{lu}$, si $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a*

(a) $(\tau_a\varphi) \cdot f \in E \qquad (\forall a \in \mathbb{R}^n)$,

(b) $\exists C_\varphi > 0$ *tel que* $\|(\tau_a\varphi) \cdot f\|_E \leq C_\varphi \qquad (\forall a \in \mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.2. *Si E est un algèbre, alors*

$$M(E) = E_{lu}$$

Preuve. Soit $g \in M(E)$, on a

$$\begin{aligned} \|(\tau_a\varphi) \cdot g\|_E &\leq \|g\|_{M(E)}\|\tau_a\varphi\|_E \\ &= \|g\|_{M(E)}\|\varphi\|_E = C_\varphi. \end{aligned}$$

D'où, $g \in E_{lu}$.
Inversement, soient $f \in E_{lu}$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi\psi = \varphi$, alors

$$\begin{aligned} \|f\varphi\|_E &= \|(f\psi)\varphi\|_E \\ &\leq \|f\psi\|_E\|\varphi\|_E. \end{aligned}$$

Car, $f\psi = f\tau_0\psi \in E$ et E est une algèbre, de plus
$\|f\psi\|_E = \|f\tau_0\psi\|_E \leq C_\psi \qquad$ (par définition),
d'où, $\|f\varphi\|_E \leq C\|\varphi\|_E$, par conséquent $f \in M(E)$. □

Théorème 4.1. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, alors on a*

$$M(L^p) = L^\infty.$$

Preuve. Soit $A \in L^\infty$ et $g \in L^p$, on a

$$|A(x) \cdot g(x)| \leq \|A\|_\infty |g(x)| \quad p.p.$$

Donc, $Ag \in L^p$ et par conséquent $A \in M(L^p)$.
Inversement, soit $A \in M(L^p)$, on a $Ag \in L^p$ et $\|Ag\|_p \leq C_0 \|g\|_p,\ \forall g \in L^p$.
Prenons $g = \chi_E$, où E est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$. D'après l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} |\int_E A(x)dx| &\leq \|A \cdot \chi_E\|_p \cdot \|\chi_E\|_{p'} \\ &\leq C_0 \|\chi_E\|_p \cdot \|\chi_E\|_{p'}, \ \ car\ A \in M(L^p) \\ &\leq C_0 \mu(E). \end{aligned}$$

On obtient, alors
$|\frac{1}{\mu(E)} \int_E A(x)dx| \leq C_0$, pour tout ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, ce qui implique que $A \in L^\infty$.
En effet, on sait que

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= sup_{x \in \mathbb{R}^n} ess |A(x)| \\ &= sup_{\|g\|_1 = 1} | < A, g > |, \quad car\ (L^\infty)' = L^1. \end{aligned}$$

Pour toute fonction simple $g = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}$, où $a_k \in \mathbb{R}$ et (E_k) des ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ disjoints deux-à-deux. Nous avons $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k) = 1$, car $\|g\|_1 = 1$, alors on a

$$\begin{aligned} | < A, g > | &= \sum_{k=1}^n a_k | < A, \chi_{E_k} > | \\ &\leq C_0 \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k) = C_0. \end{aligned}$$

□

4.2 Définitions et propriétés des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel

On considère les puissances successives de l'opérateur Δ_h, définie inductivement par

$$\Delta_h^1 = \Delta_h \quad et \quad \Delta_h^{\ell+1} = \Delta_h \circ \Delta_h^{\ell}, \ \ \forall \ell \in \mathbb{N}^\star.$$

On vérifie aisément la formule suivante

$$\Delta_h^{\ell} f(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \begin{pmatrix} \ell \\ j \end{pmatrix} (-1)^j f(x + (\ell - j)h), \ \ell = 1, \ 2, ...$$

• Pour tout $p \in [1, +\infty]$, tout ensemble borélien A de $\mathbb{R}^n$, toute fonction mesurable f sur $\mathbb{R}^n$ et tout $t > 0$, on pose

$$\omega_{p,A}(f,t) = \sup_{|h|\leq t} (\int_A |\Delta_h f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}},$$

$$\eta_{p,A}(f,t) = \sup_{|h|\leq t} (\int_A |\Delta_h^2 f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

On note simplement $\omega_p = \omega_{p,\mathbb{R}^n}$ et $\eta_p = \eta_{p,\mathbb{R}^n}$.

• La norme d'une fonction f dans l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ est notée $\|f\|_p$.

Définition 4.2. [4] *Soient* $0 < s < 1$, $p, q \in [1, +\infty]$. *L'espace de Besov* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des fonctions* f *vérifiant*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + (\int_0^1 (t^{-s}\omega_p(f,t))^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Définition 4.3. [4] *Soient* $0 < s < 1$, $1 \leq p < +\infty$ *et* $q \in [1, +\infty]$. *L'espace de Lizorkin-Triebel* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des fonctions* f *vérifiant*

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \|(\int_0^1 (t^{-s-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(x)|^q dh)^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}} \|_p < +\infty.$$

• Rappelons qu'on obtient les mêmes espaces fonctionnels avec des normes équivalentes, en remplaçant dans la définition précédente, l'intégrale $\int_0^1$ par l'intégrale $\int_0^r$, où r est n'importe quel réel positif fixé.

Nous posons $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ou $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, avec $p, q \in [1, +\infty]$ dans le cas de l'espace de Besov, et $p \in [1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$ dans le cas de l'espace de Lizorkin-Triebel.

Les espaces d'ordre supérieur à 1 sont, par définition, les espaces de Sobolev basés sur les espaces d'ordres compris entre 0 et 1.

Définition 4.4. [4] *Soient $s > 1$ et m l'entier tel que $m < s \leq m + 1$. Alors $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions f telles que $f^{(\alpha)} \in E^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $|\alpha| \leq m$. De plus l'expression*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{E^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$

est une norme équivalente dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 4.1. [1] *Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction s'annulant à l'origine telle que $T_f = (f \circ g)$ envoie $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'implication*

$$\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \Longrightarrow \|f \circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M,$$

soit vérifiée par toute fonction g portée par Q.

Preuve. Voir [1]. □

Théorème 4.2. [2] *Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \nsubseteq L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (autrement dit : $s < \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $q > 1$). Si T_f envoie $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors f est globalement lipschitzienne.*

Preuve. Voir [2]. □

4.3 Localisation d'un espace de distribution

4.3.1 Localisation

Un espace de Banach de distributions $(E.B.D.)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, est un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ muni d'une norme complète $\| - \|_E$, telle que l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soit continue.

Définition 4.5. [3] *Soit $E \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un espace de Banach de distributions. On dit que l'espace E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module si $\varphi f \in E$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et tout $f \in E$.*

Du théorème du graphe fermé, on a la proposition suivante

Proposition 4.3. [3] *Soit E un $(E.B.D.)$ sur $\mathbb{R}^n$. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module, alors l'opérateur linéaire $f \longmapsto \varphi f$ est borné sur E, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*
Sous les hypothèses de cette proposition, on pose

$$\|\varphi\|_{M(E)} = \sup\{\|\varphi f\|_{_E} : f \in E,\ \|f\|_E = 1\}.$$

Définition 4.6. [3] *Soit E un $(E.B.D.)$ sur $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ appartient localement à E si $\varphi f \in E$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. L'ensemble des telles distributions est noté E_{loc}.*

Proposition 4.4. [2] *Soit E un $(E.B.D.)$. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module et si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $f \in E_{loc}$.

(ii) Il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $(\tau_a\varphi_0)f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.

(iii) pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il existe une boule ouverte B contenant a et $g \in E$ tels que $g/B = f/B$.

Preuve. Voir [2]. □

4.3.2 Localisation uniforme

Un $E.B.D.$ est isométriquement invariant par translation si $\tau_a f \in E$ et $\|\tau_a f\|_E = \|f\|_E$ pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$. De plus, si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module, nous avons la propriété suivante

$$\|\tau_a\varphi\|_{M(E)} = \|\varphi\|_{M(E)},\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \forall a \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Proposition 4.5. [2] *Soit E un $E.B.D.$ Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module isométriquement invariant par translation, on dit qu'une distribution f appartient localement uniformément à E si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite*

(i) Il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $(\tau_a\varphi_0)f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, et

$$\|f\|_{E_{lu}} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi_0)f\|_E < +\infty.$$

(ii) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $(\tau_a\varphi)f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, et

$$\|f\|_{E_{lu}} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi)f\|_E < +\infty.$$

L'ensemble des distributions ayant ces propriétés est noté E_{lu}, c'est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module isométriquement invariant par translation pour la norme $\| - \|_{E_{lu}}$.

Preuve. Voir [2]. □

Remarque 4.1. *De la proposition ci-dessus, il résulte qu'à équivalence près, la norme de E_{lu} ne dépend pas du choix de la fonction φ_0.*

Définition 4.7. [4] *Soit E est un $E.B.D.$ et m un entier positif, l'espace de Sobolev $W^m(E)$ d'ordre m de base E, est l'ensemble des distributions f telles que*

$$W^m(E) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : f^{(\alpha)} \in E,\ pour\ tout\ |\alpha| \leq m\}.$$

$W^m(E)$ est un $E.B.D.$ pour la norme

$$\|f\|_{W^m(E)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E.$$

Proposition 4.6. *Soit E un $E.B.D.$ Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module, isométriquement invariant par translation, il en est de même pour $W^m(E)$ et on a*

$$(W^m(E))_{lu} = W^m(E_{lu}),$$

avec des normes équivalentes.

Preuve. Il suffit d'appliquer la formule de Leibniz et la Proposition 4.5. □

Proposition 4.7. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors une fonction mesurable f sur $\mathbb{R}^n$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ si et seulement si*

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} (\int_{B+a} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \tag{4.2}$$

où B une boule ouverte (ou un cube ouvert) dans $\mathbb{R}^n$. De plus, l'expression ci-dessus est équivalente à la norme $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}}$.

Preuve. $\Longleftarrow$) Supposons que f a la propriété (4.2). En choisissant la fonction $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ selon la Proposition 4.5 (i.e., positive, non identiquement nulle) à support dans la boule B, alors on a

$$\begin{aligned}
\|(\tau_a\varphi_0)f\|_p &= (\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_0(x-a)|^p |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\int_{B+a} |\varphi_0(x-a)|^p |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \ car\ supp\ \varphi_0 \subset B \\
&\leq \|\varphi_0\|_\infty (\int_{B+a} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \ \forall a \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi_0)f\|_p &\leq \|\varphi_0\|_\infty \sup_{a\in\mathbb{R}^n} (\int_{B+a} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

cela montre que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$.
$\Longrightarrow$) Inversement, supposons que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ (i.e., $\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi)f\|_p < +\infty$). En choisissant

la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de telle sorte que $\varphi(x) = 1\ sur\ B$, alors on a

$$\begin{aligned}
(\int_{B+a} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} &= (\int_{B+a} |f(x)\varphi(x-a)|^p dx)^{\frac{1}{p}},\ car\ \varphi(x) = 1\ sur\ B \\
&\leq (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x-a)|^p dx)^{\frac{1}{p}},\ car\ B + a \subset \mathbb{R}^n \\
&\leq \|(\tau_a\varphi)f\|_p,\ \forall a \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\sup_{a\in\mathbb{R}^n} (\int_{B+a} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} &\leq \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi)f\|_p \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

i.e., on a la propriété (4.2).

□

Remarque 4.2. *On a*

$$L^\infty(\mathbb{R}^n)_{lu} = L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

4.4 Localisation des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel

Nous avons les formules suivantes, où $k \in \mathbb{N}^\star,\ h \in \mathbb{R}^n$ et où $f\ et\ g$ sont des fonctions quelconques

$$\Delta_h(fg) = (\Delta_h f)(\tau_{-h} g) + f(\Delta_h g), \tag{4.3}$$

$$\Delta_h^2(fg) = (\Delta_h^2 f)(\tau_{-2h} g) + (\Delta_h^2 g)(\tau_{-h} f) + (\Delta_h f)(\Delta_{2h} g), \tag{4.4}$$

$$\Delta_h = 2^{-k}\Delta_{2^k h} - \sum_{\ell=0}^{k-1} 2^{-\ell-1}\Delta_{2^\ell h}^2,\ pour\ tout\ k \in \mathbb{N}^\star. \tag{4.5}$$

Les deux formules (4.3) et (4.4) sont immédiates, la formule (4.5) s'obtient facilement par récurrence sur k.

Lemme 4.2. [2] *Pour toute fonction localement intégrable f et pour tout $p \in [1, +\infty]$, il existe $c > 0$ tel que*

$$\omega_{p,Q+a}(f,t) \leq ct\{(\int_{2Q+a} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} + M|\ln t|\},$$

pour tout $0 < t \leq \frac{1}{2}$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$, où $M = \sup_{0<t\leq\frac{1}{2}} t^{-1}\eta_{p,Q+a}(f,t)$.

Preuve. Voir [2] □

Lemme 4.3. [2] *Il existe $c > 0$ tel que*

$$\sup_{0<t\leq\frac{1}{2}} t^{-1}\eta_{p,Q+a}(f,t) \leq c\Big(\int_0^1 (t^{-1}\eta_{p,Q+a}(f,t))^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}},$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $p \in [1,+\infty]$ et $q \in [1,+\infty[$.

Preuve. Voir [2] □

Lemme 4.4. *Soit $0 < s \leq 1$. Si $\partial_j f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ pour $j = 1,...,n$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$, alors $f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.*

Preuve. **Étape 1. Le cas** $0 < s < 1$
Par le plongement

$$E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}, \tag{4.6}$$

les hypothèses sur f implique que $f \in W^1(L^p(\mathbb{R}^n)_{lu})$, et d'après la Proposition 4.6 on a $f \in (W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{lu}$. Puisque on a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ (dans le cas $s < 1$), on obtient que $f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.
Étape 2. Le cas $s = 1$
Par hypothèse sur f, on a $\partial_j f \in E^{\frac{1}{2}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$, pour $j = 1,...,n$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$. D'après l'étape 1, on a $f \in E^{\frac{1}{2}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ et on conclut que $f \in E^{\frac{3}{2}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$, qui est lui-même un sous-espace de $E^1_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$. □

Théorème 4.3. [4] *Soient $s > 0$ et $p, q \in [1,+\infty]$, alors $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ vérifiant de plus les conditions suivantes, respectivement*

(i) Dans le cas $0 < s < 1$,

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^1 (t^{-s}\omega_{p,Q+a}(f,t))^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

De plus l'expression

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^1 (t^{-s}\omega_{p,Q+a}(f,t))^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}},$$

est une norme équivalente sur $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

(ii) Dans le cas $s = 1$,

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^1 (t^{-1}\eta_{p,Q+a}(f,t))^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

De plus l'expression

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^1 (t^{-1}\eta_{p,Q+a}(f,t))^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}},$$

est une norme équivalente sur $B^1_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

Preuve. Voir [4]. □

Théorème 4.4. [4] *Soient $s > 0$, $1 \leq p < +\infty$ et $q \in [1, +\infty]$, alors $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ vérifiant de plus les conditions suivantes, respectivement*

(i) Dans le cas $0 < s < 1$,

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\int_0^1 (t^{-s-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(x)|dh)^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}\|_{L^p(Q+a)} < +\infty.$$

De plus l'expression

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\int_0^1 (t^{-s-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(x)|dh)^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}\|_{L^p(Q+a)} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}},$$

est une norme équivalente sur $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

(ii) Dans le cas $s = 1$,

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\int_0^1 (t^{-1-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta^2_h f(x)|dh)^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}\|_{L^p(Q+a)} < +\infty.$$

De plus l'expression

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\int_0^1 (t^{-1-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta^2_h f(x)|dh)^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}\|_{L^p(Q+a)} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}},$$

est une norme équivalente sur $F^1_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

Preuve. Voir [4]. □

4.5 Propriété de composition dans l'espace de Besov localisé uniforme $-\tau$

Dans cette section, on va étudier une propriété de composition dans l'espace de Besov localisé uniforme, où on cherche à caractériser les fonctions qui opèrent par composition, sur l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 4.5. [1] *On suppose que $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \nsubseteq L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (autrement dit : $0 < s < \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $q > 1$), alors il existe une suite $(\theta_\nu)_{\nu\geq 1}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, portées par $4Q$, telles que $\theta_\nu(x) = 1$ sur le cube $2^{2-\nu}Q$ et $\lim_{\nu\longrightarrow+\infty} \|\theta_\nu\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = 0$.*

Preuve. Voir [1]. □

Proposition 4.8. [2] *Soient $s = \frac{n}{p} > 1$ et $q > 1$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors f' appartient à $B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R})$ localement uniformément.*

Preuve. Voir [2]. □

4.5.1 Localisation uniforme de l'espace de type de Lebesgue $L_p^\tau(\mathbb{R}^n)$

On va donner maintenant la desciption de lespace $L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}$, où $p \in [1, +\infty]$ et $\tau \geq 0$.

Théorème 4.5. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $0 \leq \tau < \infty$. Alors une fonction mesurable f sur $\mathbb{R}^n$ appartient à $L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}$ si et seulement si*

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}\Big(\int_{P+a}|f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) < \infty, \tag{4.7}$$

où P est un cube dyadique de longueur de côté $\ell(P) \geq 1$. De plus l'expression ci-dessus est équivalente à la norme $\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}}$.

***Preuve**.* $\Longleftarrow$) Supposons que f a la propriété (4.7) et on montre que $f \in L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}$.
i.e., $\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\|(\tau_a\varphi_0)f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)} < \infty$, où $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive, non identiquement nulle à support dans le cube P, alors on a

$$\begin{aligned}\|(\tau_a\varphi_0)f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}\Big(\int_{P+a}|\varphi_0(x-a)|^p|f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},\ car\ supp\ \varphi_0 \subset P\\ &\leq \|\varphi_0\|_\infty \sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}\Big(\int_{P+a}|f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},\ \forall a \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\|(\tau_a\varphi_0)f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\varphi_0\|_\infty \sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}\Big(\int_{P+a}|f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)\\ &< +\infty,\end{aligned}$$

i.e., $f \in L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}$.
$\Longrightarrow$) Inversement, soit $f \in L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}$ (i.e., $\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\|(\tau_a\varphi)f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)} < +\infty$), où
la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(x) = 1$ sur le cube P, alors on a

$$\begin{aligned}\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}\Big(\int_{P+a}|f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}\Big(\int_{P+a}|f(x)\varphi(x-a)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},\ car\ \varphi(x) = 1\ sur\ P\\ &= \|(\tau_a\varphi)f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)},\ \forall\, a \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}\Big(\int_{P+a}|f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n}\|(\tau_a\varphi)f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)}\\ &< +\infty,\end{aligned}$$

i.e., on a la propriété (4.7). $\square$

Théorème 4.6. *Soit $0 \leq \tau < +\infty$. Alors on a*

$$L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)_{lu} = L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. 1) On montre que $L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.
Soit $f \in L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, et soit $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive, non identiquement nulle à support dans le cube P, alors on a $\forall a \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\|(\tau_a\varphi_0)f\|_{L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1} \frac{1}{|P|^{\tau}}(\sup_{x\in P+a} |\varphi_0(x-a)f(x)|)\\
&= \sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1} \frac{1}{|P|^{\tau}}(\sup_{x\in P+a} |\varphi_0(x-a)| \sup_{x\in P} ||f(x)|)\\
&\leq \|\varphi_0\|_{\infty} \sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1} \frac{1}{|P|^{\tau}}(\sup_{x\in P} |f(x)|)\\
&\leq \|\varphi_0\|_{\infty} \cdot \|f\|_{L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)},\ \forall a \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi_0)f\|_{L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\varphi_0\|_{\infty} \cdot \|f\|_{L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)}\\
&< +\infty
\end{aligned}$$

i.e., $f \in L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.
Inversement, on montre que $L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)_{lu} \hookrightarrow L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$.
Soit $f \in L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)_{lu} \Longleftrightarrow \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi_0)f\|_{L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)} < +\infty$, avec
$\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive, non identiquement nulle à support dans le cube P. On a

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1} \frac{1}{|P|^{\tau}}(\sup_{x\in P} |f(x)|)\\
&\leq \sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1} \frac{1}{|P|^{\tau}}(\sup_{x\in P} |f(x)| \sup_{x\in P+a} |\varphi_0(x-a)|)\\
&\leq \sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1} \frac{1}{|P|^{\tau}}(\sup_{x\in P+a} |\varphi_0(x-a)f(x)|)\\
&\leq \|(\tau_a\varphi_0)f\|_{L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)},\ \forall a \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)} &\leq \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi_0)f\|_{L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)}\\
&< +\infty
\end{aligned}$$

i.e., $f \in L^{\tau}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Théorème 4.7. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $0 \leq \tau < +\infty$, alors on a*

(i) $L_p^0(\mathbb{R}^n)_{lu} = L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$

(ii) Si $\tau_0 \leq \tau_1$ on a $L_p^{\tau_0}(\mathbb{R}^n)_{lu} \hookrightarrow L_p^{\tau_1}(\mathbb{R}^n)_{lu}$

Preuve. (i) Il est clair que, pour $\tau = 0$ on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p^0(\mathbb{R}^n)_{lu}} &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n}(\int_{P+a}|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \ avec\ P\ est\ un\ cube\ dyadique\ tel\ que\ \ \ell(P)\geq 1 \\ &= \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}} \end{aligned}$$

(ii) Soit $f \in L_p^{\tau_0}(\mathbb{R}^n)_{lu}$, alors on a $\tau_0 \leq \tau_1 \Longrightarrow |P|^{\tau_0} \leq |P|^{\tau_1}$, car $\ell(P) \geq 1$.
i.e., $\frac{1}{|P|^{\tau_1}} \leq \frac{1}{|P|^{\tau_0}}$. Donc

$$\frac{1}{|P|^{\tau_1}}(\int_{P+a}|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{|P|^{\tau_0}}(\int_{P+a}|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \ pour\ tout\ cube\ dyadique\ tel\ que\ \ell(P)\geq 1.$$

Ce qui implique que

$$\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^{\tau_1}}(\int_{P+a}|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^{\tau_0}}(\int_{P+a}|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \ pour\ tout\ a\in\mathbb{R}^n.$$

i.e.,

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^{\tau_1}}(\int_{P+a}|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}) \leq \sup_{a\in\mathbb{R}^n}(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^{\tau_0}}(\int_{P+a}|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}).$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p^{\tau_1}(\mathbb{R}^n)_{lu}} &\leq \|f\|_{L_p^{\tau_0}(\mathbb{R}^n)_{lu}} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

i.e., $L_p^{\tau_0}(\mathbb{R}^n)_{lu} \hookrightarrow L_p^{\tau_1}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

□

4.5.2 Localisation uniforme des espaces de type de Besov

Dans cette section, on va donner des caractérisations concrètes des versions localisées-uniformes des espaces de type de Besov $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$, où $p, q \in [1, +\infty]$, $\tau \in \mathbb{R}$, et $0 < s < 1$.

Théorème 4.8. [40] *Soient* $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $0 \leq \tau \leq \frac{1}{p}$, $M \in \mathbb{N}$, *et* $0 < s < M$. *Alors* $f \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si* $f \in L^{\tau}_p(\mathbb{R}^n)$ *et* $\|f\|^{\spadesuit}_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty$, *où*

$$\|f\|^{\spadesuit}_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{P\in\mathcal{Q}} \frac{1}{|P|^{\tau}}\Big(\int_0^{2\min(\ell(P),1)} t^{-sq} \sup_{\frac{t}{2}\leq|h|<t}\Big(\int_P |\Delta_h^M f(x)|^p dx\Big)^{\frac{q}{p}}\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

De plus, $\|f\|_{L^{\tau}_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|^{\spadesuit}_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ *et* $\|f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ *sont des normes équivalentes.*

***Preuve*.** Voir [49]. □

Théorème 4.9. *Soient* $1 \leq p, q \leq +\infty$, $0 \leq \tau \leq \frac{1}{p}$, $0 < s < 1$. *Alors* $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ *est l'ensemble des fonctions* $f \in L^{\tau}_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ *vérifiant de plus la condition suivante*

(*i*) *dans le cas* $0 < s < 1$,

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^{\tau}}\Big(\int_0^2 (t^{-s}\omega_{p,P+a}(f,t))^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big) < +\infty.$$

De plus l'expression

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^{\tau}}\Big(\int_0^2 (t^{-s}\omega_{p,P+a}(f,t))^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big) + \|f\|_{L^{\tau}_p(\mathbb{R}^n)_{lu}},$$

est une norme équivalente sur $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

***Preuve*.** On peut supposer le cube dyadique P de longueur de côté $\ell(P) \geq 1$ est la boule unité de $\mathbb{R}^n$. On fixe les fonctions φ_0 et φ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telles que
• $0 \leq \varphi_0 \leq 1$, φ_0 est non identiquement nulle et portée par $P/4$,
• $\varphi_1(x) = 1$ sur $4P$.
Supposons on a la condition (i) avec $f \in L^{\tau}_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$, et on montre que $f \in B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$
(i.e., $\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi_0)f\|_{B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty$).
Par la formule (4.3) et pour tout $a, h \in \mathbb{R}^n$ avec $|h| \leq t \leq \frac{1}{2}$, on a

$$\Big(\int_{P+a} |\Delta_h((\tau_a\varphi_0)f)(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \Big(\int_{P+a} |\Delta_h f(x)\varphi_0(x+h-a)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_{P+a} |f(x)|^p|\Delta_h(\tau_a\varphi_0)(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \Big(\int_{P+a} |\Delta_h f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + t\|\nabla\varphi_0\|_\infty\Big(\int_{P+a} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},\ \forall\, a,\ h\in\mathbb{R}^n,\ \textit{et tout cube } P.
\end{aligned}$$

Donc on a

$$\sup_{|h|\leq t}\Big(\int_{P+a} |\Delta_h((\tau_a\varphi_0)f)(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} &\leq c\sup_{|h|\leq t}(\int_{P+a}|\Delta_h f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}+t\|\nabla\varphi_0\|_\infty \sup_{a\in\mathbb{R}^n}(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}(\int_{P+a}|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}) \\ &\leq c(\omega_{p,P+a}(f,t)+t\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}}) \end{aligned}$$

i.e.,

$$\omega_{p,P+a}((\tau_a\varphi_0)f,t)\leq c(\omega_{p,P+a}(f,t)+t\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}}),$$

donc, on a

$$(\int_0^{\frac{1}{2}}(t^{-s}\omega_{p,P+a}((\tau_a\varphi_0)f,t))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}\leq c((\int_0^{\frac{1}{2}}(t^{-s}\omega_{p,P+a}(f,t))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}+\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}}),\ pour\ tout\ cube\ P.$$

Alors

$$\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}(\int_0^{\frac{1}{2}}(t^{-s}\omega_{p,P+a}((\tau_a\varphi_0)f,t))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq c(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}(\int_0^{\frac{1}{2}}(t^{-s}\omega_{p,P+a}(f,t))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}+\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}}),$$

par la condition $s<1$, on a

$$\|(\tau_a\varphi_0)f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}\leq c(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}(\int_0^{2}(t^{-s}\omega_{p,P+a}(f,t))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}+\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}}).$$

D'après le Théorème 4.5 et la Proposition 4.5, on a

$$\begin{aligned} \sup_{a\in\mathbb{R}^n}\|(\tau_a\varphi_0)f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)} &\leq c(\sup_{a\in\mathbb{R}^n}(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}(\int_0^{2}(t^{-s}\omega_{p,P+a}(f,t))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}})+\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}}) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

i.e., $f\in B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.
• On suppose maintenant que $f\in B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ (i.e., $\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\|(\tau_a\varphi_1)f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}<\infty$).
On a : $\Delta_h((\tau_a\varphi_1)f)(x)=\Delta_h f(x)$ pour tout $a\in\mathbb{R}^n$, tout $x\in P+a$ et tout $|h|\leq 2$.
On a aussi : $\omega_{p,P+a}(f,t)\leq\omega_{p,P}((\tau_a\varphi_1)f,t)$, pour tout $0<t\leq 2$.
Alors, on a

$$(\int_0^{2}(t^{-s}\omega_{p,P+a}(f,t))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}\leq(\int_0^{2}(t^{-s}\omega_{p,P}((\tau_a\varphi_1)f,t))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}$$

i.e.,

$$\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}(\int_0^{2}(t^{-s}\omega_{p,P+a}(f,t))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}\leq\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}(\int_0^{2}(t^{-s}\omega_{p,P}((\tau_a\varphi_1)f,t))^q\frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}},\ \forall\,a\in\mathbb{R}^n.$$

Donc, on a

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}\Big(\int_0^2(t^{-s}\omega_{p,P+a}(f,t))^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big)+\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}}\leq\|(\tau_a\varphi_1)f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)},\ \forall\, a\in\mathbb{R}^n.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\Big(\sup_{P\in\mathcal{Q},\ell(P)\geq 1}\frac{1}{|P|^\tau}\Big(\int_0^2(t^{-s}\omega_{p,P+a}(f,t))^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big)+\|f\|_{L_p^\tau(\mathbb{R}^n)_{lu}} &\leq \sup_{a\in\mathbb{R}^n}\|(\tau_a\varphi_1)f\|_{B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)}\\ &< +\infty.\end{aligned}$$

i.e., on a la propriété (i).

$\square$

Conclusions générales et perspectives

Dans ce travail, on a généralisé le théorème de Bourdaud de la propriété de localisations des espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sur l'espace ℓ^r, où $s \in \mathbb{R}$, $p,q,r \in [1,+\infty]$. Aussi, on a démontré que les espaces de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sont localisables en norme ℓ^p. De plus, on a intéressé aux opérateurs de composition $T_f(g) = f \circ g$ sur certains espaces de Besov à valeurs vectorielles, où on a donné des conditions suffisantes pour que l'opérateur T_f opère sur $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Finalement, on a étudié la localisation uniforme sur l'espace de type de Lebesgue $L^\tau_p(\mathbb{R}^n)$ et l'espace de type de Besov $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, où on a caractérisé concrètement les espaces $L^\tau_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ avec $p \in [1,+\infty]$ et $\tau \geq 0$ et les espaces de type de Besov localisés uniformes $B^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ avec $p,q \in [1,+\infty]$, $\tau \in \mathbb{R}$, et $0 < s < 1$. On a établi que ces espaces, sont décrits sans utiliser une fonction auxiliaire.

• Les futures travaux sont anticipés dans plusieurs direction. Nous pensons qu'il est important d'étudier la composition dans l'espace de Besov et Lizorkin-Triebel localisés uniformes.

Pour cela on peut citer les cinq perspectives suivantes :

Perspective 01

Soient $0 < s < 1$, $p,q \in [1,+\infty]$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $(B^s_{p,q} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)_{lu}$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)_{lu}$, alors f est localement lipschitzienne.

Perspective 02

Soient $0 < s < 1$, $p,q \in [1,+\infty]$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu} \not\subseteq L^\infty(\mathbb{R}^n)_{lu}$ (autrement dit : $s < \frac{n}{p}$ *ou* $s = \frac{n}{p}$ *et* $q > 1$). Si T_f envoie $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)_{lu}$, alors f est globalement lipschitzienne.

Perspective 03

Soient $0 < s < 1$, $p \in [1, +\infty[$ et $q \in [1, +\infty]$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $(F^s_{p,q} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)_{lu}$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)_{lu}$, alors f est localement lipschitzienne.

Perspective 04

Soient $0 < s < 1$, $p \in [1, +\infty[$ et $q \in [1, +\infty]$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu} \nsubseteq L^\infty(\mathbb{R}^n)_{lu}$ (autrement dit : $s < \frac{n}{p}$ *ou* $s = \frac{n}{p}$ *et* $p > 1$). Si T_f envoie $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)_{lu}$, alors f est globalement lipschitzienne.

Perspective 05

Nous pensons aussi qu'il est important d'étudier la localisation uniforme sur l'espace de type de Lizorkin-Triebel $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, avec $q \in [1, +\infty]$, $p \in [1, +\infty[$, $\tau \in \mathbb{R}$, et $0 < s < 1$. i.e., nous donnerons une caractérisation concrète des espaces de type de Lizorkin-Triebel localisés uniformes $F^{s,\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ sans utiliser une fonction auxiliaire.

Bibliographie

[1] S.E. Allaoui, *Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles*. Annales Mathématiques Blaise Pascal **16** (2009), 399–429.

[2] S.E. Allaoui, INTÉGRALES SINGULIÈRES. Thèse de Doctorat Université de Batna, 2011.

[3] S.E. Allaoui, G. Bourdaud, *Composition dans les espaces de Besov critiques*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **25** (2016), 875–893.

[4] S.E. Allaoui, G. Bourdaud, *Localisation uniforme des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel*. Arch. Math. **109** (2017), 551–562.

[5] A. Benedek, R. Panzone, *The spaces L^p with mixed norm*. Duke Math. J. **28** (1961), 301–324.

[6] J. Bergh, J. Löfström, Interpolation Spaces. Springer, 1976.

[7] G. Bourdaud, Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien. Pub. Math. Univ. Paris 7, (1987).

[8] G. Bourdaud, Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien. 2ième édition, Pub. Math. Univ. Paris 7, 23 (1995).

[9] G. Bourdaud, Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients peu réguliers. Thèse, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1983.

[10] G. Bourdaud, *Localisations des espaces de Besov*. Studia Math. **90** (1988), 153–163.

[11] G. Bourdaud, *Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev*. Invent. Math. **104** (1991), 435–446.

[12] G. Bourdaud, *La trivialité du calcul fonctionnel dans l'espace $H^{3/2}(\mathbb{R}^4)$*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **314** (1992), 187–190.

[13] G. Bourdaud, *Le calcul fonctionnel dans l'espace de Besov critique*. Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 983–986.

[14] G. Bourdaud, *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel*. Ann. I. H. Poincaré - AN **10** (1993), 413–422.

[15] G. Bourdaud, *Une propriété de composition dans l'espace H^s*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **340** (2005), 221–224.

[16] G. Bourdaud, *Une propriété de composition dans l'espace $H^s(II)$*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **342** (2006), 243–246.

[17] G. Bourdaud, *Le calcul symbolique dans certaines algèbres de type Sobolev*. Recent Developments in Fractals and Related Fields, J.Barral, S.Seuret (eds), Birkhäuser (2010), 131–144.

[18] G. Bourdaud, *Superposition in homogeneous and vector valued Sobolev spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), 6105–6130.

[19] G. Bourdaud, D. Kateb, *Calcul fonctionnel dans certains espaces de Besov*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1990), 153–162.

[20] G. Bourdaud, D. Kateb, *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov*. Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 1067–1076.

[21] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis, *Regularity of the symbolic calculus in Besov algebras*. Studia Math. **184** (2008), 271–298.

[22] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis and W. Sickel, *Superposition operators and functions of bounded p-variation II*. Nonlinear Analysis **62** (2005), 483–517.

[23] G. Bourdaud, M. Moussai and W. Sickel, *Composition operators on Lizorkin-Triebel spaces*. Journal of Functional Analysis **259** (2010), 1098–1128.

[24] B. E. J. Dahlberg, *A note on Sobolev spaces*. Proc. Sympos. Pure Math. **35** (1979), 183–185.

[25] D. Drihem, La multiplication ponctuelle dans certains espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel. Thèse de Doctorat Université de Batna, 2007.

[26] N. Ferahtia, S.E. Allaoui, *A generalization of a localization property of Besov spaces*. Carpathian Math. Publ. **10** (2018), 71–78.

[27] M. Frazier, B. Jawerth, *Decomposition of Besov Spaces*. Indiana Univ. Math. J. **84** (1985), 777–799.

[28] M. Frazier, B. Jawerth, *A Discrete Transform and Applications to Distribution Spaces*. J. Funct. Anal. **93** (1990), 34–170.

[29] M. Hazewinkel, Encyclopaedia of Mathematics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988–2001.

[30] S. Igari, *Sur les fonctions qui opèrent sur l'éspace $\widehat{A}^2$*. Ann. Inst. Fourier (Gronoble) **15** (1965), 525–536.

[31] S. Janson, *On functions with derivates in H^1*. Uppsala Univ. Dept. Math. Report **16** (1987).

[32] B. Jawerth, *Some observations on Besov and Lizorkin-Triebel Spaces*. Math. Scand. **40** (1977), 94–104.

[33] M. Marcus, V.J. Mizel, *Complete characterization of functions which act via superposition on Sobolev spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979), 187–218.

[34] M. Marcus M., V.J. Mizel , *Every superposition operator mapping one Sobolev space into another is continuous*. J. Functional Anal **33** (1979), 217–229.

[35] M. Moussai, Continuité de certains Opérateurs d'intégrales Singulières sur les espaces de Besov. Thèse de Doctorat Université Paris VII, 1988.

[36] J. Peetre, New thoughts on Besov spaces. Duke Univ. Math. Series I, Durham, N.C., 1976.

[37] J. Peetre, *Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces*. Mathematica (Cluj) **12**(1970), 1–20.

[38] T. Runst, W. Sickel, Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytzkij Operators and Nonlinear Partial Differential Equations. De Gruyter, Berlin, 1996.

[39] W. Sickel, I. Smirnov, *Localization properties of Besov spaces and of its associated multiplier spaces*. Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, Math/Inf 1999, **21**.

[40] W. Sickel, *Smoothness spaces related to Morrey spaces-a survey. I*. Eurasian Math. J. **3** (2012), 110–149.

[41] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press, 1970.

[42] H. Triebel, Theory of Function Spaces. Birkhäuser, Basel, 1983.

[43] H. Triebel, Theory of Function Spaces II. Birkhäuser, Basel, 1992.

[44] H. Triebel, *On the spaces $F^s_{p,q}$ of Hardy-Sobolev type*. Comm. Partial Differential Equations **5** (1980), 245–291.

[45] H. Triebel, *Local Approximation Spaces*. Z. Anal. Anwendungen **8** (1989), 261-288.

[46] N. Weiner, *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients*. J. Math. Phys. **3**(1924), 72–94.

[47] M. Yamazaki, A quasi-homogeneous version of paradifferential operators, I : Boundeness on spaces of Besov type. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. **33** (1986), 131-174, II : A Symbolic calculus. ibidem **33** (1986), 311-345.

[48] D. Yang, W. Yuan, *Relations among Besov-type spaces, Triebel-Lizorkin-type spaces and generalized Carleson measure spaces*. Applicable Analysis **92** (2013), 549–561.

[49] W. Yuan, W. Sickel and D. Yang, Morrey and Companato Meet Besov, Lizorkin and Triebel. Lecture Notes in Mathematics Vol. 2005, Springer, Berlin, 2010.

ملخّـص

في هذه الاطروحة، قمنا بتعميم نظرية بوردو بالنسبة للخاصية المحلية لفضاءات بيزوف $B^s_{p,q}(R^n)$ على الفضاء l^r ، أين $s \in R$ و $p,q,r \in [1,+\infty]$. أيضا، برهنًا على أن فضاءات ليزركين-تريبال تتمتع بالخاصية المحلية بالنسبة للنظيم l^p. وزيادة على هذا، قمنا أيضا بدراسة مؤثرات التركيب $T_f(g) = f^\circ g$ على بعض فضاءات بيزوف ذات القيم الشعاعية. أين أعطينا الشروط الكافية التى من أجلها التطبيق T_f يؤثر على الفضاء $B^s_{p,q}(R^n, R^m)$. أخيرا، قمنا بدراسة خاصية المحلية المنتظمة على الفضاءات من نوع لوبيغ $L^\tau_p(R^n)$ والفضاءات من نوع بيزوف $B^{s,\tau}_{p,q}(R^n)$، أين أعطينا خصائص ملموسة لهذه الفضاءات، أي بمعنى قمنا بالبرهان على أن الفضاءين $L^\tau_p(R^n)_{lu}$ و $B^{s,\tau}_{p,q}(R^n)_{lu}$ نستطيع وصفهما بدون إستعمال الدالة المساعدة φ، من أجل $p,q \in [1,+\infty]$, $0 < s < 1$ و $\tau \in R$.

الكلمات المفتاحية: فضاءات بيزوف، فضاءات ليزركين-تريبال، فضاءات من نوع بيزوف ، مؤثرات التركيب، المحلية المنتظمة.

In this thesis, we have generalized the Bourdaud theorem of the property of localizations of Besov spaces $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ on the space ℓ^r, where $s \in \mathbb{R}$, $p,\ q,\ r \in [1,+\infty]$. Also, we have proved that the Lizorkin-Triebel spaces are localizable in the ℓ^p norm. Furthermore, we were interested in composition operators $T_f(g) = f \circ g$ on some Besov spaces with vector valued, where we gave sufficient conditions so that the operator T_f operates on $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Finally, we studied the uniform localization on Lebesgue type space $L^\tau_p(\mathbb{R}^n)$ and the Besov type space $B^{s;\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, where we have characterized concretely these spaces , i.e., we have shown that $L^\tau_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ and $B^{s;\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ are described without using an auxiliary function φ, for $0 < s < 1$, $p,\ q \in [1,+\infty]$, and $\tau \in \mathbb{R}$.

Keywords : Besov spaces, Lizorkin-Triebel spaces, Besov type spaces, Composition operators, Uniform localization.

Dans cette thèse, nous avons généralisé le théorème de Bourdaud de la propriété de localisations des espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sur l'espace ℓ^r, où $s \in \mathbb{R}$, $p,\ q,\ r \in [1,+\infty]$. Aussi, nous avons démontré que les espaces de Lizorkin-Triebel sont localisables en norme ℓ^p. De plus, on a intéressé aux opérateurs de composition $T_f(g) = f \circ g$ sur certains espaces de Besov à valeurs vectorielles, où nous avons donné des conditions suffisantes pour que l'opérateur T_f opère sur $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Finalement, on a étudié la localisation uniforme sur l'espace de type de Lebesgue $L^\tau_p(\mathbb{R}^n)$ et l'espace de type de Besov $B^{s;\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, où nous avons caractérisé concrètement ces espaces, i.e., on a montré que $L^\tau_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ et $B^{s;\tau}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ sont décrits sans utiliser une fonction auxiliaire φ, pour $0 < s < 1$, $p,\ q \in [1,+\infty]$, et $\tau \in \mathbb{R}$.

Mots-Clés : Espaces de Besov, Espaces de Lizorkin-Triebel, Espaces de type de Besov, Opérateurs de composition, Localisation uniforme.