

المسيلة في : ١٥... ٢٠٢٣ ملـس.

رقم: 2023/GE/136

مستخلص من محضر اجتماع اللجنة العلمية لقسم الهندسة الكهربائية

المنعقد بتاريخ 2023-02-28

- بخصوص مطبوعة الدروس للأستاذ إيدير عبد الحكيم

بخصوص مطبوعة الدروس المنجزة من طرف الأستاذ إيدير عبد الحكيم أستاذ محاضر قسم "أ" بقسم

الهندسة الكهربائية تحت عنوان: «Méthodes numériques appliquées et optimisation» فقد اطلع

اللجنة على التقارير الواردة من طرف لجنة الخبراء المكونة من الأستاذ حريري عبد الغفور أستاذ محاضر

-أ- بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة ، الأستاذ غلام محمد زين العابدين أستاذ محاضر -أ- بجامعة

محمد بوضياف بالمسيلة و الأستاذة لطوش سامية أستاذة محاضرة -أ- بجامعة سطيف -1- والتي كانت

كلها إيجابية، لهذا فإن اللجنة لا ترى مانعاً أن تتخذ سندًا في تدريس طلبة السنة الأولى ماستر آلية وأنظمة

ميدان علوم و تكنولوجيا وأن تعتمد في أي تقييم للمسار العلمي للأستاذ المعنى.

رئيس اللجنة العلمية

بوقرة عبد الرحمن



République Algérienne Démocratique et Populaire  
الجمهوريّة الديموقراطية الشعبيّة

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf -Msila  
Faculté de Technologie  
Département : Génie Electrique



جامعة محمد بوضياف - المسيلة  
كلية التكنولوجيا  
قسم : الهندسة الكهربائية

# Méthodes numériques appliquées et Optimisation

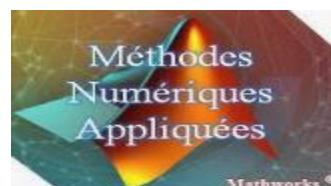
## Cours et Exercices

Réalisé par :

*Dr. Abdelhakim Idir*

*Maitre de Conférences Classe A*

Enseignant chercheur au département de : Génie électrique



*Année universitaire 2022-2023*

## Table des matières

<b>Avant-propos .....</b>	<b>2</b>
<b>Chapitre I :Rappels sur quelques méthodes numériques.....[3 - 20]</b>	
<b>Chapitre II : Equations Aux Dérivées Partielles .....</b>	<b>[21 - 33]</b>
<b>Chapitre III : Rappels sur quelques méthodes numériques .... [34 - 49]</b>	
<b>Bibliographie .....</b>	<b>50</b>

## **Avant-propos**

Ce document est un support pédagogique du cours destiné aux étudiants de Master première année assurés au département de *Génie électrique* (Faculté de Technologie) pour les quatre spécialités: *Commande électrique, Energie renouvelable, Réseaux électriques et Robotiques*. Dans ce polycopié de cours on s'intéresse, en première partie à un certain nombre de méthodes itératives utilisées pour la résolution des systèmes d'équations linéaires, des équations non linéaires, la résolution numérique des équations différentielles et les formules de quadrature, Trapèze et Simpson pour l'intégration numérique. Ensuite la résolution des équations aux dérivées partielles en utilisant la méthode des différences finies (MDF) et la méthode des éléments finis (MDF). En deuxième partie, on s'intéresse aux techniques d'optimisation ; dont l'optimisation de point de vue athématique consiste à rechercher le minimum ou le maximum d'une fonction avec ou sans contraintes, cependant on limite souvent l'optimisation à une recherche de minimum. Plusieurs méthodes seront étudiées comme la méthode de gradient optimal, gradient conjugué, méthode de Newton...etc. Le tout est regroupé sous le terme générique de "*Méthodes Numériques appliquées et optimisation*".

Il rassemble une série de cours, d'exemples et d'exercices ayant pour but de permettre à l'étudiant de mieux comprendre les notions du module "Méthodes numériques appliquées et optimisation". A la fin de ce cours, l'étudiant obtient des connaissances solides sur différentes méthodes numériques et technique d'optimisation que par la suite sera capable de les implémenter en langage de programmation tel que Matlab ou Scilab.

Le contenu de ce polycopié est conforme au programme du module " "*Méthodes Numériques appliquées et optimisation*" ." proposé par le comité pédagogique national du domaine sciences et technologies pour l'harmonisation de l'offre de formation de master académique des spécialités *Commande Electrique, réseaux électriques, Energies Renouvelables...etc.*

# Chapitre 1

## Rappels sur quelques méthodes numériques

### 1.1 Introduction

L'analyse numérique a commencé bien avant le développement des ordinateurs et leur utilisation quotidienne telle que nous les connaissons aujourd'hui. Les premières méthodes ont été développées pour trouver des moyens rapides et efficaces de résoudre des problèmes qui étaient lourds à résoudre soit en raison de leur taille (par exemple des systèmes avec des dizaines d'équations) soit parce qu'aucune solution explicite ne semble être connue même pour certaines équations assez simples.

Dès l'apparition des premiers ordinateurs, ce domaine des mathématiques a pris son essor et continue de se développer. Les applications extraordinairement nombreuses ont pénétré directement ou indirectement dans notre vie quotidienne. Maintenant, nous les utilisons accidentellement, mais nous ignorons la plupart du temps toute la théorie, l'expérience, le développement des compétences et l'ingéniosité des chercheurs pour y arriver. On peut téléphoner, communiquer par satellite, chercher sur Internet, regarder des films là où rien n'est réel, améliorer la sécurité des voitures, des trains, des avions, savoir quel temps il fera dans une semaine,...et ce n'est qu'une petite partie de ce que nous pouvons faire. L'objectif de ce cours est de connaître les concepts de base de l'analyse numérique, en espérant qu'ils sauront susciter l'intérêt, la curiosité et pourquoi pas la vocation.

### 1.2 Résolution des systèmes d'équations linéaires

La **méthode itérative** a l'avantage sur les autres qu'elle n'a pas à garder en mémoire l'intégralité d'une matrice de très grande taille gourmande en capacités mémoire. Cette technique permet de ne garder en mémoire que les coefficients non nuls d'une grande matrice. Cependant, le succès du calcul n'est pas garanti quelle que soit la matrice, certaines conditions sont requises pour obtenir un résultat convergent, ce que nous allons voir dans ce document au travers des méthodes de **Jacobi** et de **Gauss-Seidel**.

On considère un système linéaire suivant :

$$Ax = b \tag{1.1}$$

Avec  $A$  inversible.

L'idée consiste à déduire le schéma itératif de la décomposition de  $A$  sous la forme  $A = M - N$  où  $M$  est une matrice inversible.

Le système (1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} (M - N)x &= b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \\ &\Leftrightarrow M^{-1}Mx = M^{-1}Nx + M^{-1}b \\ &\qquad\qquad\qquad I \\ \Rightarrow x &= M^{-1}Nx + M^{-1}b \end{aligned}$$

qui définit une équation de point fixe.

On considère alors le schéma itératif associé :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}N x^k + M^{-1}b \quad (1.2)$$

Avec  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$  (vecteur de départ). L'algorithme est initialisé par un vecteur arbitraire  $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$

Pour un  $\varepsilon$  donné, il s'arrête quand:

$$\forall i \in \mathbb{N}, |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon \quad (1.3)$$

On distingue différentes méthodes itératives selon le choix des matrices  $M$  et  $N$ . Le point de départ de chacune de ces méthodes est l'unique **décomposition** de la matrice  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  sous la forme  $A = D - (E + F)$  avec :

- $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  diagonale, telle que  $d_{ij} = a_{ij}$  et  $d_{ij} = \mathbf{0}$  pour  $i \neq j$  ;
- $-E = (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  triangulaire inférieure **stricte** telle que  $e_{ij} = a_{ij}$  si  $i > j$  et  $e_{ij} = \mathbf{0}$  si  $i \leq j$  ;
- $-F = (f_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  triangulaire supérieure **stricte**, telle que  $f_{ij} = a_{ij}$  si  $i < j$  et  $f_{ij} = \mathbf{0}$  si  $i \geq j$  ;

### Exemple

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La décomposition de  $A$  sous la forme  $A = D - (E + F)$  décrite ci-dessus s'écrit alors :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_D - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{-E} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{-F}$$

#### 1.2.1 Méthode de Jacobi

On suppose que  $A$  est une matrice inversible dont aucun élément de la diagonale est nul ( $a_{ii} \neq 0, \forall i$ ). Cette méthode consiste à isoler le coefficient de la diagonale de chaque ligne du système, si l'un des coefficients diagonaux est nul, il est parfois possible de permute certaines lignes pour éviter cette situation.

On considère un système linéaire suivant :

$$Ax = b, \text{ avec } A \text{ inversible.}$$

On pose :

$$A = M - N, \text{ avec } M = D \text{ et } N = (E + F); \text{ sachant que } D \text{ est inversible.}$$

Le schéma itératif s'écrit alors :

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^k + D^{-1}b \quad (1.4)$$

avec  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$

La matrice  $B_J = D^{-1}(E + F)$  est appelée **matrice de Jacobi**.

**Algorithme de Jacobi**

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j \neq i, j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ \text{---} \\ x^{(0)} \text{ donné} \end{array} \right.} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Cet algorithme nécessite  $a_{ii} \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, n$

Explicitement, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} &= -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \dots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\ a_{22}x_2^{(k+1)} &= -a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} \dots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} &= -a_{n1}x_1^{(k)} - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)} + b_n \end{aligned}$$

**Test de convergence**

La méthode ne converge pas toujours. On démontre que si  $A$  est une matrice définie positive, la méthode itérative converge. De même, si  $A$  est une matrice diagonalement dominante, c'est-à-dire si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (1.5)$$

alors la méthode de Jacobi converge. Par conséquent, on peut avoir intérêt à réarranger les termes de  $A$  de façon à mettre  $A$  sous la forme d'une matrice dont les éléments diagonaux sont les plus grands possibles.

**1.2.2 Méthode de Gauss-Seidel**

Comme pour la méthode de Jacobi, on suppose cette fois que la matrice  $D$  est une matrice inversible dont aucun élément de la diagonale est nul ( $a_{ii} \neq 0, \forall i$ ). Cette méthode consiste à isoler le coefficient de la diagonale de chaque ligne du système, si l'un des coefficients diagonaux est nul, comme pour la méthode de Jacobi, il est parfois possible de permute certaines lignes pour éviter cette situation.

On considère un système linéaire suivant :

$$Ax = b, \text{ avec } A \text{ inversible.}$$

On pose :

$$A = M - N, \text{ avec } M = D - E \text{ et } N = F; \text{ avec } (D - E) \text{ inversible}$$

Le schéma itératif s'écrit alors :

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1}Fx^k + (D - E)^{-1}b \quad (1.6)$$

avec  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$  (vecteur de départ).

La matrice  $B_{GS}(D - E)^{-1}F$  est appelée **matrice de Gauss-Seidel**. A chaque pas, on calcule

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^i a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (1.7)$$

**Algorithme de Gauss-Seidel**

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j < i}^i a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ \text{pour } i = 1, \dots, n \end{array} \right.} \quad x^{(0)} \text{ donné}$$

Cet algorithme nécessite  $a_{ii} \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, n$

Explicitement, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} &= -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \dots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\ a_{22}x_2^{(k+1)} &= -a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} \dots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2 \\ &\vdots \\ a_{ii}x_i^{(k+1)} &= -a_{i1}x_1^{(k+1)} - a_{i(i-1)}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i(i+1)}x_{i+1}^{(k)} \dots - a_{in}x_n^{(k)} + b_n \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} &= -a_{n1}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n \end{aligned}$$

**1.3 Résolution des systèmes d'équations non linéaires****1.3.1 Méthode de Newton-Raphson**

La **méthode de Newton**(ou **Newton-Raphson**) consiste à prendre pour  $x_{k+1}$  la racine du développement de Taylor de premier ordre autour de  $x^{(k)}$ ; cela revient, pour autant que  $f'(x^{(k)}) \neq 0$ , à déterminer  $x^{(k+1)}$  qui satisfait :

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$$

Et donc

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad (1.8)$$

**Critère de convergence**

Soit une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$  telle que :

- i.  $f(a)f(b) < 0$
- ii.  $f'(x)$  et  $f''(x)$  sont non nulles et gardent un signe constant sur l'intervalle donné.

**Algorithme de Newton**

(entrée :  $f, f', x^{(0)}$ , Sortie :  $x^{(k+1)}$ )

Répéter jusqu'à l'arrêt

Pour autant que  $f'(x^{(k)}) \neq 0$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

**Critère d'arrêt**

En général, pour les méthodes étudiées, nous pouvons utiliser deux critères d'arrêt distincts.

Donc, les itérations s'achèvent dès que :

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon \quad (\text{Contrôle de l'incrément})$$

Si non

$$|f(x^{(k)})| < \varepsilon \quad (\text{Contrôle de résidu})$$

Où  $\varepsilon$  est une tolérance choisie. Nous avons vu que pour la méthode de Newton le premier critère (contrôle incrémental) est optimal dans le sens où il garantit que l'erreur finale est inférieure à la tolérance fixée.

Par contre, le deuxième critère (contrôle du résidu) est satisfaisant lorsque  $|f'| \simeq 1$  dans un voisinage de la racine  $\alpha$  (un zéro pour la fonction  $f$ ). Sinon il est soit trop restrictif (si  $|f'| \gg 1$ ) soit trop faible (si  $|f'| \ll 1$ ).

**Remarque**

Dans le cas d'un système de deux équations non linéaires à 2 inconnues, par exemple :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

L'algorithme de **Newton-Raphson** devient :

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_1^k, x_2^k) \\ f_2(x_1^k, x_2^k) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

**1.4 Equation Différentielles Ordinaires (EDO)**

De nombreux modèles s'expriment au moyen d'équations différentielles ordinaires (en abrégé EDO). L'adjectif ordinaire est surtout là pour faire la distinction entre les EDO et les EDP (équations aux dérivées partielles). Lorsque toutes les dérivations sont prises par rapport à une seule variable, on l'appelle une équation différentielle ordinaire (ODE). Une équation mettant en jeu des dérivées partielles est appelée équation aux dérivées partielles (EDP).

Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre  $n$  est une relation entre la variable réelle  $t \in I, I$  intervalle réel une fonction inconnue  $x(t)$  et ses dérivées par rapport à  $t$  définie par :

$$F(t, x, x'', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (1.11)$$

Une fonction  $x$  qui vérifie  $F(t, x, x'', \dots, x^{(n)}) = 0$  s'appelle solution de l'EDO.

**Remarque :** Une EDO est d'ordre  $n$  si elle contient les dérivées de  $x$  jusqu'à l'ordre  $n$ .

**Exemple 1**

Les équations suivantes :

$$\begin{aligned}y'(t) - t &= 0 \\y''(t) - y(t) &= 0\end{aligned}$$

Sont équation différentielles ordinaires.

### Exemple 2

L'EDO d'ordre 2 la plus célèbre est la deuxième *loi de Newton* :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

qui décrit par exemple la dynamique d'un point matérielle soumis à la résultante des forces  $F$ .

On peut réécrire la loi de Newton sous la forme d'un système d'équations différentielles, en posant

$$v = \frac{dx}{dt}$$

On obtient alors le système du premier ordre autonome :

$$\begin{cases} v = \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F(x) \end{cases}$$

#### 1.4.1 Méthode de résolution des EDO

##### a) Méthode d'Euler

La **méthode d'Euler** est une procédure numérique qui permet de résoudre de façon approximative des équations différentielles ordinaires du premier ordre avec condition initiale. Elle a le mérite d'être simple à comprendre et à programmer.

On cherche donc une solution approchée d'une équation ordinaire se mettant sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) & 0 \leq t \leq T \\ t(0) = t_0, y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Avec  $T$ : une durée bien déterminée dans le temps.

On peut intégrer cette équation comme suit :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \quad (1.13)$$

La méthode d'Euler consiste à approcher l'intégrale par la méthode des rectangles à gauche :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \cong h \times f(t_k, y(t_k))$$

D'où le schéma itératif suivant

$$y_{k+1} = y_k + \underbrace{(t_{k+1} - t_k) f(t_k, y_k)}_{h : \text{Taille de pas}}$$

Donc

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k) \\ y_0 = y(0), \quad k = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $y_k$  désigne l'approximation numérique de  $y(t_k)$ . La mise en œuvre est alors extrêmement simple :

### Algorithme d'Euler

1. Initialisation du pas  $h$  et de la durée  $T$ .
2. Initialisation des conditions initiales :  $t = 0$  et  $y = y(0)$ .
3. Tant que  $t \leq T$  faire :
  - (a) Calcul de  $k_1 = f(t, y)$ .
  - (b)  $y = y + hk_1; t = t + h$ .
  - (c) Enregistrement des données.

### Exemple

Pour le problème de valeur initiale suivant:

$$\begin{cases} y' + 2y = 2 - e^{-4t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Utilisez la méthode d'Euler avec un pas de  $h = 0,1$  pour trouver les valeurs approximatives de la solution à  $t = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$  et  $0,5$ . Comparez-les aux valeurs exactes de la solution à ces points.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire assez simple, nous vous laisserons donc le soin de vérifier que la solution correcte est :

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

De cela nous pouvons constater que :

$$f(t, y) = y' = 2 - e^{-4t} - 2y$$

Notez également que  $t_0 = 0$  et  $y_0 = y(0) = 1$ .

Nous pouvons maintenant commencer à faire des calculs.

On a :

$$y_{k+1} = y_k + h \times f(t_k, y_k)$$

Pour  $k = 0$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \times f(t_0, y_0) \Rightarrow y_1 = 1 + 0.1f(0,1) \\ f_0 &= f(0,1) = 2 - e^{-4(0)} - 2(1) = -1 \\ &\Rightarrow y_1 = 0.9 \end{aligned}$$

Donc, l'approximation de la solution à  $t_1 = 0,1$  est  $y_1 = 0,9$ .

Pour  $k = 1$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h \times f(t_1, y_1) \Rightarrow y_2 = 1 + 0.1f(0.1, 0.9) \\ f_1 &= f(0.1, 0.9) = 2 - e^{-4(0.1)} - 2(0.9) = -0.4703 \\ &\Rightarrow y_2 = 0.9 + (0.1)(-0.4703) = 0.85297 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'approximation de la solution à  $t_2 = 0,2$  est  $y_2 = 0,85297$ .

Je vous laisse le soin de vérifier le reste de ces calculs.

$$\begin{array}{ll} f_2 = -0.1553 & y_3 = 0.8374 \\ f_3 = 0.02392 & y_4 = 0.8398 \\ f_4 = 0.11843 & y_5 = 0.8517 \end{array}$$

Voici un tableau (1.1) rapide qui donne les approximations ainsi que la valeur exacte des solutions aux points donnés. Nous avons également inclus l'erreur en pourcentage. Il est souvent plus facile de voir à quel point une approximation est efficace si vous examinez les pourcentages. La formule pour cela est,

$$\text{Erreur (\%)} = \frac{|\text{valeur exacte} - \text{valeur approximée}|}{\text{valeur exacte}} \times 100$$

**Tableau 1.1** Approximations et valeur exacte des solutions aux points donnés

Temps $t_k$	Approximation	Exacte	Erreur
$t_0 = 0$	$y_0 = 1$	$y(0) = 1$	0%
$t_1 = 0.1$	$y_1 = 0.9$	$y(0.1) = 0.9258$	2.79%
$t_2 = 0.2$	$y_2 = 0.8529$	$y(0.2) = 0.8895$	4.11%
$t_3 = 0.3$	$y_3 = 0.8374$	$y(0.3) = 0.8762$	<b>4.42%</b>
$t_4 = 0.4$	$y_4 = 0.8398$	$y(0.4) = 0.8763$	4.16%
$t_5 = 0.5$	$y_5 = 0.8517$	$y(0.5) = 0.8837$	3.63%

D'après le tableau (1.1), l'erreur maximale dans les approximations du dernier exemple était de 4,42%, ce qui n'est pas si mal, mais qui n'est pas non plus une si grande approximation. Ce type d'erreur est cependant généralement inacceptable dans la plupart des applications réelles. Alors, comment pouvons-nous obtenir de meilleures approximations?

Rappelons que nous obtenons les approximations en utilisant une ligne tangente pour approximer la valeur de la solution et que nous avançons dans le temps par pas de  $h$ . Donc, si nous voulons une approximation plus précise, il semble alors qu'il existe une seule façon d'obtenir une meilleure approximation c'est de ne pas avancer autant à chaque étape. En d'autres termes, il faudrait prendre des  $h$  plus petits.

### Remarque

- La diminution de la taille de pas  $h$  améliore la précision de l'approximation.
- La diminution d'un facteur 10 la taille du pas  $h$ , réduit l'erreur d'un facteur de 10 environ.

### b) Méthode de Runge-Kutta

Les techniques de **Runge-Kutta** sont des schémas numériques à un pas qui permettent de résoudre les équations différentielles ordinaires. Elles font parties des méthodes les plus populaires de par leur facilité de mise en œuvre et leur précision. C'est *Carle Runge* et *Martin Kutta* qui, au début du 20e siècle, ont inventé ces méthodes.

Dans de nombreux cas, les systèmes d'équations différentielles que l'on rencontre en science peuvent se mettre sous la forme d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre (Eq. 1.8).

À l'instar de la **méthode d'Euler**, celles de **Runge-Kutta** sont des schémas numériques à un pas basée sur la discréttisation de la variable  $t$ . On note  $h$  ce pas et  $y_k$  la valeur approchée de  $y(t_k)$  pour les différents instants

$$t_k = kh. \quad (1.15)$$

En intégrant l'équation différentielle entre  $t_k$  et  $t_k + h$  on a la relation :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_k+h} f(t, y(t)) dt \quad (1.16)$$

L'idée consiste à approcher cette intégrale de façon plus précise que ne le fait la méthode d'Euler.

Le schéma itératif de **Runge-Kutta d'ordre 2** est (*RK2*):

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (\textcolor{green}{k}_1 + \textcolor{red}{k}_2), \\ t_{k+1} = t_k + h; \quad k = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \textcolor{green}{k}_1 = f(t_k, y_k) \\ \textcolor{red}{k}_2 = f(t_k + h, y_k + h\textcolor{green}{k}_1) \end{cases}$$

La méthode classique **de Runge-Kutta** est une approximation d'ordre 4. On cherche donc une solution approchée d'une équation ordinaire se mettant sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) & 0 \leq t \leq T \\ t(0) = t_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases}$$

Le schéma itératif de **Runge-Kutta d'ordre 4** est (*RK4*):

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} [\textcolor{green}{k}_1 + 2\textcolor{red}{k}_2 + 2\textcolor{blue}{k}_3 + k_4] \\ t_{k+1} = t_k + h, \quad k = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \textcolor{green}{k}_1 = f(t_k, y_k) \\ \textcolor{red}{k}_2 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}h\textcolor{green}{k}_1) \\ \textcolor{blue}{k}_3 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}h\textcolor{red}{k}_2) \\ k_4 = f(t_k + h, y_k + h\textcolor{blue}{k}_3) \end{cases}$$

### c) Méthode de d'Adams-Bashforth

La méthode **d'Adams- Bashforth** est une méthode à pas multiples qui repose sur une approximation de l'intégrale suivant :

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt$$

Les schémas itératifs de la méthode d'Adams-Bashforth:

On note en abrégé  $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(t_k, y_k)$ . Voici trois schémas :

- schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 2 à 2 pas (*AB2*):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(3f_k - f_{k-1}) \quad (1.17)$$

- schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 3 à 3 pas (**AB3**) :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}) \quad (1.18)$$

- schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 4 à 4 pas (**AB4**):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}) \quad (1.19)$$

#### d) Méthode d'Adams-Moulton (AM)

Cette méthode est l'une des méthodes fermées, son algorithme est :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}^{(i)})) \quad (1.20)$$

Avec  $\mathbf{y}_{k+1}^{(i)}$  est donnée pour  $i = 0, 1, 2, \dots$

$\mathbf{y}_{k+1}^{(0)}$  est dite **le prédicteur** de  $y_{k+1}$ , les  $\mathbf{y}_{k+1}^{(i)}$  sont appelés **les correcteurs**, pour les calculés, on utilise la **méthode d'Euler** comme **prédicteur** et la **méthode d'Adams-Moulton** comme **correcteur**. On obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(t_k, y_k) & \text{Prédiction} \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}^{(0)})) & \text{Correction} \end{cases} \quad (1.21)$$

### 1.5 Intégration numérique

L'intégration numérique est le calcul par des méthodes numériques l'intégrale :

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \quad (1.22)$$

où  $f(x)$  est une fonction connue seulement en quelques points ou encore une fonction n'ayant pas de primitive.

#### 1.5.1 Méthodes des trapèzes

On considère une subdivision de  $[a, b]$  en sous intervalles égaux  $[x_i, x_{i+1}]$  de bornes  $x_i = a + ih$ , ( $i = 0, \dots, n$ ),  $a = x_0$ ,  $b = x_n$  et  $h = \frac{b-a}{n}$ . On suppose connues les valeurs  $f(x_i)$  pour  $i = 0, \dots, n$ . Sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  on remplace la fonction  $f(x)$  par la droite :

$$y = f(x_i) + (x - x_i) \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (1.23)$$

L'aire exacte est donc remplacée par l'aire  $T_i$  du trapèze. Par conséquent en sommant les aires des  $n$  trapèzes de base  $|x_i, x_{i+1}|$ , ( $i = 0, \dots, n$ ), on obtient une approximation suivante :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{l=0}^{n-1} \int_{x_l}^{x_{l+1}} f(x) dx \approx \sum_{l=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_l) + f(x_{l+1})] \quad (1.24)$$

Après un calcul on déduit la formule de la méthode de Trapèzes suivante :

$$I_{\text{trapèze}} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left( f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (1.25)$$

### Remarque

Plus le nombre  $n$  de sous-intervalles est grand, plus la précision sur la valeur approchée de l'intégrale est grande.

L'erreur commise à la méthode de trapèzes est majorée :

$$|I_{\text{trapèze}}(f) - I_{\text{exacte}}(f)| = \left| \frac{(b-a)^3}{12\eta^2} f''(\eta) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12\eta^2} M_2 \quad (1.26)$$

$$M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)| \quad (1.27)$$

Etant donnée la précision  $\varepsilon$  on peut alors déterminer le nombre minimal  $n$  des sous-intervalles par :

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} M_2} \quad (1.28)$$

### 1.5.2 Méthode de Simpson

Dans cette méthode on suppose que **n est pair** (soit  $n = 2s$ ), puis on subdivise  $[a, b]$  en  $s$  sous intervalles égaux  $|x_{i-1}, x_{i+1}|$  de longueur  $h$ , ( $i = 1 \dots s-1$ ), puis on remplace  $f(x)$  sur chaque intervalle  $|x_{i-1}, x_{i+1}|$  non pas par une droite comme dans les trapèzes, mais par une parabole ayant aux abscisses  $x_{i-1}, x_i$  et  $x_{i+1}$  les mêmes valeurs que  $f$ ; c'est à dire par une interpolation quadratique sur ces trois points. Le polynôme  $P_1$  d'interpolation en  $x_{i-1}, x_i$  et  $x_{i+1}$  est :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(x_{i-1}) \frac{(x - x_{i+1})(x - x_i)}{2h^2} + \\ &= f(x_i) \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{-h^2} + \\ &= f(x_{i+1}) \frac{(x - x_i)(x - x_{i-1})}{2h^2} \end{aligned}$$

D'autre part la surface  $S_i$  délimitée par cette parabole, les droites  $x = x_{i-1}, x = x_{i+1}$  et l'axe des abscisses s'obtient en calculant :  $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_1(x)dx$  d'où ;

$$S_i = \frac{h}{3} (f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Ceci donne l'approximation de Simpson  $I_{\text{Simpson}}$  de  $I$ , en sommant les aires  $I_{\text{Simpson}}$  pour  $i = 1$  à  $n - 1$ . Finalement :

$$I_{\text{Simpson}} = \frac{h}{3} [[f(x_0) + f(x_{2s}) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2s-1})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2s-2})]] \quad (1.29)$$

C'est à dire :

$$I_{\text{Simpson}} = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + f(x_{2s}) + 4 \sum_{k=1}^s f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{s-1} f(x_{2k}) \right] \quad (1.30)$$

L'erreur commise à la méthode de Simpson est majorée :

$$|I_{\text{Simpson}}(f) - I_{\text{exacte}}(f)| = \left| -\frac{h^5(b-a)^3}{180\eta^4} f^{(4)}(\eta) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180\eta^4} M_4 \quad (1.26)$$

$$M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \quad (1.27)$$

Etant donnée la précision  $\varepsilon$  on peut alors déterminer le nombre minimal  $n$  des sous-intervalles par :

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^3}{180\varepsilon}} M_4 \quad (1.28)$$

**Remarque**

En général la méthode de Simpson donne une meilleure approximation que celle des trapèzes, (sous certaines conditions de régularité de  $f$ ).

## Exercices corrigés Chapitre 1

**Exercice 1 :**

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$$

avec  $x^{(0)} = (0,0,0)^T$  (vecteur de départ) et le critère d'arrêt  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

à l'aide de la **méthode de Gauss-Seidel**. Effectuer seulement les trois (3) premières itérations, en partant de point  $x^{(0)} = (0,0,0)^T$  (vecteur de départ).

Déduire la solution exacte ?

**Exercice 2 :**

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) = y(t) + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a) Vérifier que la solution analytique est  $y(t) = -1 - t + 2e^t$
- b) Montrer que la méthode d'Euler s'écrit  $y_{k+1} = y_k(\mathbf{1} + \mathbf{h}) + \mathbf{h}t_k$

Calculer de la solution au point 0.3.

**Exercice 3 :**

On considère des équations différentielles suivantes :

(a)  $\frac{dy}{dt} = tsin(y(t))$   $(y(0) = 2)$

(b)  $\frac{dy}{dt} = e^t y(t)$   $(y(0) = 2)$

Utilisez la **méthode d'Euler**, puis la **méthode de Runge-Kutta** d'ordre 4, avec un pas de  $h = 0,1$  pour trouver les valeurs approximatives de la solution à  $t = 0.1, 0.2, 0.3$ .

**Exercice 4 :**

Soit l'équation  $f$  suivante

$$f(x) = \ln(x) - x + 2 = 0$$

Approcher de la racine à  $\varepsilon = 10^{-4}$  près par la **méthode de Newton** avec  $x_0 = 3$ .

**Exercice 5 :**

Déterminer par la méthode des trapèzes puis par celle de Simpson  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$  sur la base du tableau suivant :

$x$	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

Ces points d'appui sont ceux donnant  $\sin x$ , comparer alors les résultats obtenus avec la valeur exacte.

### Exercice 6 :

On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération  $\gamma$  :

$t(s)$	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\gamma(m/s^2)$	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant  $t = 80$  s, par les Trapèzes puis par Simpson.

## Solutions des Exercices de Chapitre 1

### Solution Exercice 1 :

Résolution à l'aide de la **méthode de Gauss-Seidel** du système suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 2 ; \quad \varepsilon = 10^{-5} \text{ et } x^{(0)} = (0,0,0)^T \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(4 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(2 + x_1^{(k+1)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(9 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

### Itération (1) (pour $k = 0$ )

En partant de  $x^{(0)} = (0,0,0)^T$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(2 + x_1^{(1)}) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(9 - 2x_1^{(1)} - x_2^{(1)}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 - 2(0) - (0)) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(2 + 1) = 3/2 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(9 - 2(1) - 3/2) = 11/8 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}\right)^T \cong (1, 1.5000, 1.3750)$$

**Itération (2) (pour  $k = 1$ )**

En partant de  $x^{(1)} = (1, \frac{3}{2}, \frac{11}{8})^T$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(4 - 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(2 + x_1^{(2)}) \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}(9 - 2x_1^{(2)} - x_2^{(2)}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{11}{8}\right)\right) = \frac{-3}{32} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{-3}{32}\right) = \frac{61}{64} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2\left(\frac{-3}{32}\right) - \frac{61}{64}\right) = \frac{527}{256} \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \left(\frac{-3}{32}, \frac{61}{64}, \frac{527}{256}\right)^T \cong (-0.0937, 0.9521, 2.0585)$$

**Itération (3) (pour  $k = 2$ )**

En partant de  $x^{(2)} = (\frac{-3}{32}, \frac{61}{64}, \frac{527}{256})^T$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{4}(4 - 2x_2^{(2)} - x_3^{(2)}) \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{2}(2 + x_1^{(3)}) \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{4}(9 - 2x_1^{(3)} - x_2^{(3)}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2\left(\frac{61}{64}\right) - \left(\frac{527}{256}\right)\right) = \frac{9}{1024} \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{9}{1024}\right) = \frac{2057}{2048} \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2\left(\frac{9}{1024}\right) - \left(\frac{2057}{2048}\right)\right) = \frac{16339}{8192} \end{cases}$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{9}{1024}, \frac{2057}{2048}, \frac{16339}{8192}\right)^T \cong (0.0087, 1.0043, 1.9945)$$

La suite  $x^{(3)}$  converge vers la solution du système  $x = (0, 1, 2)$ .

**Solution exercice 2**

**1-** On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) = y(t) + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Vérification de la solution analytique:  $y(t) = -1 - t + 2e^t$   
On a :  $y'(t) = -1 + 2e^t = y(t) + t$

b) Méthode d'Euler s'écrit:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k) \\ &= y_k + h(t_k + y_k) \\ y_{k+1} &= y_k(\mathbf{1} + \mathbf{h}) + \mathbf{h}t_k \end{aligned}$$

c) Calcule de la solution au point 0.3.

On a  $h = 0.1$ ,  $y_0 = 1$  et  $t_k = t_0 + kh$  et  $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} \mathbf{y}_k + \mathbf{0.1} \mathbf{t}_k$

Donc :

Pour  $k = 0$ ,  $y_1 = 1.1y_0 + 0.1t_0 = 1.1 \times (1) + 0.1(0) = 1.1$

Pour  $k = 1$ ,  $y_2 = 1.1y_1 + 0.1t_1 = 1.1 \times (1.1) + 0.1(0.1) = 1.22$

Pour  $k = 2$ ,  $y_3 = 1.1y_2 + 0.1t_2 = 1.1 \times (1.22) + 0.1(0.2) = 1.362$

C'est à dire que l'approximation en  $t = 0.3$  de  $y(t)$ , est  $y_3 = 1.362$ .

**Solution de l'exercice 3 :**

1) **Méthode d'Euler**

a) On a  $y' = ts\sin(y(t))$ ,  $y(0) = 2$  et  $h = 0,1$ . On a donc que  $t_0 = 0$ , que  $y_0 = 2$  et que  $f(t_k, y_k) = t_k \sin(y_k)$ .

$$\text{Euler : } \begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \\ t_{k+1} = t_k + h \end{cases}$$

$$-y_0 = 2$$

$$-y_1 = 2 + 0,1 \times 0 \times \sin 2 = 2$$

$$-y_2 = 2 + 0,1 \times 0,1 \sin 2 = 2,0090929$$

$$-y_3 = 2,0090929 + 0,1 \times 0,2 \times \sin 2,0090929 = 2,02720249$$

$$y_3 = \mathbf{2,02720249}.$$

2) **Méthode RK4**

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\ t_{k+1} = t_k + h \end{cases}, k = 0, \dots, N-1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ k_2 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(t_k + h, y_k + hk_3) \end{cases}$$

On a que  $h = 0,1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = 2$  et que  $f(t_k, y_k) = t_k \sin(y_k)$ .

▪ **Pour la première itération**, on obtient :

$$k_1 = f(t_0, y_0) = 0,1 \times 0 \times \sin 2 = 0$$

$$k_2 = f\left(0 + 0,05, 2 + \frac{0}{2}\right) = f(0,05, 2) = 0,05 \times \sin 2 = 0,04546487$$

$$k_3 = f(0,05, 2 + 0,004546487/2) = f(0,05, 2,002273244)$$

$$= 0,05 \times \sin(2,002273244) = 0,04541745$$

$$k_4 = f(0,1, 2,004541745) = 0,0907398$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = \mathbf{2.004541741}$$

De même, on trouve que:

▪ **Pour la deuxième itération**, on obtient :

$$k_1 = 0,09074, k_2 = 0,13582, k_3 = 0,13568, k_4 = 0,18032$$

$$y_2 = \mathbf{2,01810947}.$$

▪ **Pour la troisième itération**, on obtient :

$$k_1 = 0,18032, k_2 = 0,22442, k_3 = 0,22418, k_4 = 0,26751$$

$$y_3 = \mathbf{2,04052645}.$$

b) On a :

$$y'(t) = y(t)e^t, y(0) = 2 \text{ et } h = 0,1.$$

Donc, on a également que  $t_0 = 0, y_0 = 2$  et que  $f(t_k, y_k) = y_k e^{t_k}$ .

**1) Méthode d'Euler :**

$$y_1 = 2,2, \quad y_2 = 2,4431376, \quad y_3 = 2,741543$$

**2) Méthode de Runge-Kutta 4 (RK4)**

• **Première itération :**

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2.20767, \quad k_3 = 2.21859, \quad k_4 = 2.45553$$

**$y_1 = 2.2218007$**

• **Deuxième itération :**

$$k_1 = 2.45547, \quad k_2 = 2.72401, \quad k_3 = 2.73961, \quad k_4 = 3.04833$$

**$y_2 = 2.495651$**

• **Troisième itération :**

$$k_1 = 0,304820 \quad k_2 = 0,340018 \quad k_3 = 0,342278 \quad k_4 = 0,383080$$

$y_2 = 2,8377328$

**Solution de l'exercice 4 :**

Approche de la racine à  $\varepsilon = 10^{-4}$  près par la méthode de Newton avec  $x_0 = 3$ .

$$\text{Algorithme de Newton} \quad \begin{cases} x_0 = 3 \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \end{cases}$$

On a:

$$f(x) = \ln(x) - x + 2 = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$\text{Avec } f(x^{(k)}) = \ln(x^{(k)}) - x^{(k)} + 2$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3.1479 \quad |x^{(1)} - x^{(0)}| = |3.1479 - 3| = 0.1479$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})} = 3.1479 - \frac{f(3.1479)}{f'(3.1479)} = 3.1462 \quad |x^{(2)} - x^{(1)}| = |3.1462 - 3.1479| = 0.0017$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})}{f'(x^{(2)})} = 3.1462 - \frac{f(3.1462)}{f'(3.1462)} = 3.1462 \quad |x^{(2)} - x^{(1)}| = |3.1462 - 3.1462| = 0.0000$$

Donc la solution approchée est  $x^{(3)} = 3.1462$ .

**Solution de l'exercice 5 :**

On l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

- a) Soit  $T$  l'approximation de  $I$  par la méthode des trapèzes, le pas  $T$  est donné par,  $h = \frac{z_s - z_0}{N} = \frac{\pi}{8}$ .

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{2} \left( f(x_0) + f(x_1) + 2 \sum_{i=1}^3 f(x_i) \right) \\ &= \frac{\pi}{16} (0 + 1 + 2(0,382683 + 0,707107 + 0,92388)) \\ &= 0,987116 \end{aligned}$$

- b) Soit  $S$  l'approximation de  $I$  par la méthode de Simpson. Celle-ci s'écrit,

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3} (y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) \\ &= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{3} [(0 + 1 + 4(0,38 \dots + 0,92 \dots) + 2 \cdot 0,707)] \\ &= 1,000135 \end{aligned}$$

Les points d'appui donnés dans cet exercice correspondent à la fonction  $\sin x$ . Et  $I = \int_0^\pi \sin x dx = 1$ . On constate donc que l'approximation de  $I$  par Simpson est meilleure que celle par les trapèzes, puisque  $|S - I| = 0,000135$  et  $|T - I| = 0,012884$ .

### Solution de l'exercice 6 :

On sait que l'accélération  $\gamma$  est la dérivée de la vitesse  $V$ , donc,

$$\begin{aligned} V(t) &= V(0) + \int_0^t \gamma(s) ds \\ V(80) &= 0 + \underbrace{\int_0^{80} \gamma(s) ds}_I \end{aligned}$$

- a) Calculons  $I$  par la méthode des trapèzes. Ici, d'après le tableau des valeurs,  $h = 10$ .

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{2} \left( \gamma(x_0) + \gamma(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \gamma(x_i) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10 (30 + 50,67 + 2(31,63 + \dots + 46,70)) \\ &= 3089 \text{ m}^{-s^{-1}} \end{aligned}$$

- b) Calculons  $I$  par la méthode de Simpson.

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{3} (\gamma(x_0) + \gamma(x_n) + 4(\gamma(x_1) + \gamma(x_3) + \dots) + 2(\gamma(x_2) + \gamma(x_4) + \dots)) \\ &= \frac{10}{3} (30 + 50,67 + 4(31,63 + 35,47 + \dots) + 2(33,44 + 37,75 + \dots)) \\ &= 3087 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

## Chapitre 2 :

### Equations aux Dérivées Partielles

#### 2.1 Introduction

Les **Equations aux Dérivées Partielles (EDP)** interviennent dans la description de très nombreux problèmes de l'électronique, physique, chimie, sciences de la terre, biologie...etc.

Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, la prévision météorologique, la démographie, ou les finances (équation de Black-Scholes). Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale, de la mécanique quantique (équation de Schrödinger), d'électromagnétisme (équations de Maxwell), et de la mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes), sont également des EDP. Ce sont des équations indispensables pour la résolution de presque la totalité des problèmes dans ces domaines.

Une équation différentielle aux dérivées partielles ou EDP, est une relation faisant intervenir une fonction inconnue  $u$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , les variables  $(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n$  et une ou plusieurs dérivées partielles, qu'on peut écrire sous la forme :

$$F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u_{yy}, \dots\right) = 0 \quad (2.1)$$

#### *Exemple*

- l'équation aux dérivées partielles  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  avec  $u = u(x, y)$  qui admet comme solutions :  $u(x, y) = 2x + y^2$ ,  $u(x, y) = e^{-x} \sin(y)$ .....
- l'équation aux dérivées partielles  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  avec  $u = u(x, y)$  qui admet comme solutions :  $u(x, y) = (x + y)^3$ ,  $u(x, y) = \sin(x - y)$ .....

#### 2.2 Généralités sur les EDP

##### 2.2.1 Définitions

###### Définition 1

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle le plus élevé intervenant dans l'équation.

#### *Exemple*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \quad 1^{er} \text{ Ordre}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 2^{eme} \text{ Ordre}$$

**Définition 2 :** Si  $u$  et ses dérivées partielles apparaissent séparément et "à la puissance 1" dans l'EDP, celle-ci est dite **linéaire**. Si on multiplie par une fonction qui dépend elle-même de la solution, celle-ci est dite **non linéaire**.

**Exemple**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad EDP \text{ Linéaire}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \text{ et } \cancel{u^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = y \quad EDPs \text{ Non Linéaire}$$

**Définition 3**

Une équation aux dérivées partielles est dite **homogène** si elle est vérifiée pour  $u = 0$  (tous les termes de l'équation contiennent la fonction  $u$  ou l'une de ses dérivées partielles).

**2.2.2 EDP du 1<sup>er</sup> ordre**

La forme la plus générale pour une EDP linéaire de deux variables et du 1<sup>er</sup> ordre est :

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = D(x, y) \quad (2.2)$$

Où  $A, B, C$  et  $D$  sont des fonctions.

**2.2.3 EDP du 2<sup>ème</sup> ordre**

Une EDP linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre, à coefficients constants s'écrit sous la forme :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \quad (2.3)$$

Les trois premiers termes correspondent à la **partie principale**.  $a, b, c, d, e, f$  et  $g$  sont des constantes. Le type de l'EDP dépend du signe de  $b^2 - 4ac$ .

**2.2.4 Classification**

- Si  $b^2 - 4ac > 0$ , alors l'EDP est dite **hyperbolique**.
- Si  $b^2 - 4ac = 0$ , alors l'EDP est dite **parabolique**.
- Si  $b^2 - 4ac < 0$ , alors l'EDP est dite **elliptique**.

**Exemple**

(i)  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  avec  $c > 0$ .

$b^2 - 4ac = 4c^2 > 0$ . Ainsi l'**équation des ondes** est hyperbolique.

(ii)  $\frac{\partial u}{\partial t} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  avec  $d > 0$ .

$b^2 - 4ac = 4c^2 = 0$ . Ainsi l'**équation de la diffusion** est parabolique.

(iii)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  avec  $c > 0$ .

$b^2 - 4ac = -4 < 0$ . Ainsi l'**équation de Laplace** est elliptique.

(iv)  $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  (*Equation de Tricomi*)

$$b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(y)(-1) = 4y.$$

- ✓ Si  $y > 0 \Rightarrow$  l'EDP est **hyperbolique**.
- ✓ Si  $y = 0 \Rightarrow$  l'EDP est **parabolique**.
- ✓ Si  $y < 0 \Rightarrow$  l'EDP est **elliptique**.

### 2.3 Condition aux limites

On doit se donner des « conditions au limites » (*CL*). L'équation étant vérifiée dans dans un domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace (ou espace-temps), on distingue des conditions de 2 types :

- a) **Conditions de Dirichlet** : on impose la valeur de  $u$  sur la bordure de  $\mathcal{D}$ . Dans le cas où on étudie un problème dépendant du temps, cela inclut des conditions « initiales ».
- b) **Conditions de Neumann** : c'est la valeur de la dérivée normale  $\frac{\partial u}{\partial n} = \overrightarrow{\text{grad}}u \cdot \vec{n}$  que l'on impose.
- c) **Condition de Cauchy** : on a une combinaison des deux selon différentes parties de la bordure (imposer une double condition Dirichlet/Neumann).

À titre d'exemple pour l'équation de la chaleur :

- Des CL de Dirichlet correspondent à des parois isothermes, qui imposent leur température.
- Des CL de Neumann avec  $\overrightarrow{\text{grad}}u \cdot \vec{n}$  annulent le transfert de chaleur : parois adiabatiques (sans perte ou gain de chaleur, **cela n'implique pas pour autant que la température du système reste constante, contrairement au cas isotherme**).

### 2.4 Méthodes de résolution

Les méthodes numériques ne donnent pas la vraie solution au problème que nous essayons de résoudre. Des méthodes numériques mal appliquées peuvent conduire à des résultats complètement erronés. Le but est de savoir calculer explicitement une solution approchée facilement calculable, en ayant une idée assez précise de l'erreur commise par rapport à la solution exacte. Il existe plusieurs méthodes pour cette approche, notamment : la **méthode des différences finies**, la **méthode des éléments finis** et la **méthode de Galerkin (Ritz)**,...etc.

#### 2.4.1 Méthode des différences finies (MDF)

La **méthode MDF** est très classique, simple à mettre en œuvre et convient pour beaucoup de problèmes rencontrés en pratique. Les calculs sont effectués suivant un **maillage** obtenu par un double réseau de parallèles aux axes et régulièrement espacées.

Elle repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation ou différentiation et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu. Son inconvénient est qu'on se limite à des géométries simples, et qu'il y a des difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

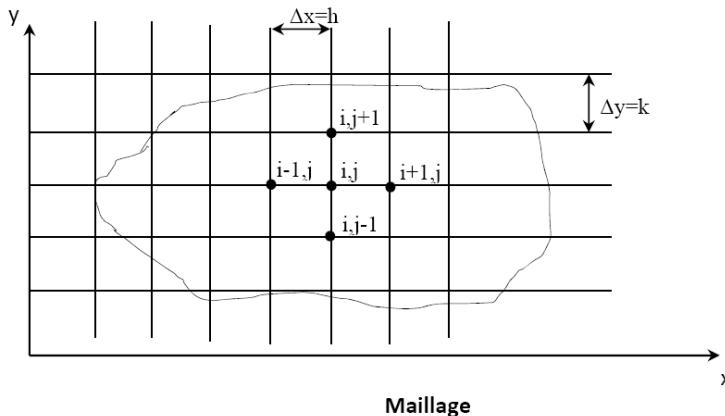
Pour obtenir une approximation numérique de la solution de ce problème, nous devons approcher les dérivées partielles de l'E.D.P en chaque nœud du domaine discréteisé (maillage) en utilisant les valeurs de la variable dépendante en ce nœud et aux nœuds avoisinants.

L'intersection de deux droites du maillage définit un nœud  $M$  de coordonnées  $(x_M, y_M)$ .

Si les parallèles à l'axe  $x$  sont espacées de  $\Delta x = h$  et les parallèles à l'axe  $y$  de  $\Delta y = k$ , le noeud a comme coordonnées :

$$x_M = i\Delta x = ih \text{ et } y_M = j\Delta y = jk$$

Ou d'une manière condensée  $(i, j)$ .



Ainsi la fonction  $u(x, y)$  prend au point  $M(x_M, y_M)$  la valeur  $u(i\Delta x, j\Delta y) = u(ih, jk) = u_{i,j}$

**Remarque 1:**

*A chaque étape, nous remarquons que pour calculer la valeur de  $u_{i,j}$  au point  $(x_i, y_j)$  nous avons besoin de connaître les points  $u_{i-1,j}, u_{i,j-1}, u_{i+1,j}, u_{i,j+1}$ .*

**Remarque 2:**

Si  $\Delta x = \Delta y$  le *maillage* est dit régulier sinon il est *irrégulier*.

#### 2.4.2 Notation indicelle

Durant ces projets nous utiliserons souvent la *notation indicelle*. C'est pourquoi nous voulons en rappeler le principe. Si  $x$  est un des vecteurs de base du repère (quadrillage) discrétilisé, nous noterons le point  $x(i)$ , qui est la  $i^{\text{ème}}$  abscisse par  $x_i$  et de même la  $j^{\text{ème}}$  ordonnée  $y(j)$  sera noté  $y_j$  et si  $u$  est maintenant la fonction, ici la solution de l'équation aux dérivées partielles dépendant seulement des variables de l'espace, on remplacera  $u(x_i, y_j)$  par  $u_{i,j}$ . Si, en plus des variables de l'espace, il existe une variable temporelle  $t(k) = t_k$ , alors la fonction  $u(x_i, y_j, t_k)$  sera notée  $u_{i,j}^k$ .

**En résumé**, les indices des *variables* spatiales resteront en *indices* et celui du *temps* sera en *exposant*. C'est ce qu'on appellera la *notation indicelle*.

#### 2.4.3 Expressions discrètes de la première et deuxième dérivée

La méthode des différences finies pour la résolution des problèmes aux limites remplace chaque dérivée dans l'équation différentielle aux dérivées partielles par une approximation appropriée en termes de rapport aux différences.

En utilisant le développement de Taylor au voisinage du point  $(x_i, y_i)$ , on obtient :

a) Première dérivée

- Différence en avant :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{U_{i+1}-U_i}{h} \quad (2.4)$$

- Différence en arrière :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{U_i-U_{i-1}}{h} \quad (2.5)$$

- Différence centrée :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h} \quad (2.6)$$

### b) Deuxième dérivée

- Différence en avant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i,j}-2U_{i+1,j}+U_{i+2,j}}{h^2} \text{ ET } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j}-2U_{i,j+1}+U_{i,j+2}}{h^2} \quad (2.7)$$

- Différence en arrière :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i-2,j}-2U_{i-1,j}+U_{i,j}}{h^2} \text{ ET } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j-2}-2U_{i,j-1}+U_{i,j}}{h^2} \quad (2.8)$$

- Différence centrée :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{h^2} \text{ ET } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j+1}-2U_{i,j}+U_{i,j-1}}{h^2} \quad (2.9)$$

## 2.5 Equations elliptiques

On distingue deux équations classiques de ce type :

- Equation de Laplace:  $u''_x + u''_y = 0$
- Equation de Poisson :  $u''_x + u''_y + g(x,y) = 0$

En général, ces deux équations décrivent des phénomènes non évolutifs en régime permanent (indépendamment des variables temporelles ou du régime permanent). Par exemple, les champs électriques dans les conducteurs, les déplacements et les contraintes dans les corps élastiques, etc.

La forme canonique de l'équation elliptique à deux variables est

$$\nabla^2 u = G. \quad (2.10)$$

Soit un domaine fermé  $D$ , avec la frontière  $S$ , on définit :

a) Le problème de Dirichlet (position)

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= f \text{ dans } D \\ u &= g \text{ sur } S \end{aligned} \quad (2.11)$$

b) Le problème de Neumann (vitesse)

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= f \text{ dans } D \\ u'_n &= g \text{ sur } S \end{aligned} \quad (2.12)$$

c) Le problème de Fourier ou mixte (position et vitesse)

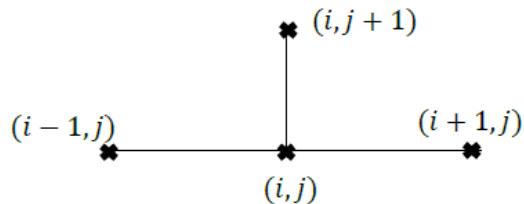
$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= f \text{ dans } D \\ u'_n + ku &= 0 \text{ sur } S \end{aligned} \quad (2.13)$$

## 2.6 Equations paraboliques

L'équation la plus simple du type parabolique est une équation de la forme  $u'_t = a^2 u''_{xx}$ . C'est ce qu'on appelle l'équation de la chaleur ou l'équation de Fourier. Pour bien déterminer la solution de cette équation, la fonction  $u(x, t)$  nécessite certaines conditions initiales pour vérifier les conditions aux limites et les conditions au temps initial  $t = 0$ . Les solutions numériques peuvent être obtenues soit par des schémas explicites, soit par la formule centrée, en avant, en arrière ou dans une combinaison d'expressions.

### a) Schéma explicite

Dans le schéma explicite la solution  $u_{i,j+1}$  est calculée directement en appliquant le schéma centré sur les termes  $u_{i-1,j}$ ,  $u_{i,j}$  et  $u_{i+1,j}$ , dont le système (la maille) de résolution est itératif.



Au point  $(ih, jk)$ , pour

$$\begin{cases} u'_t = \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) \\ u''_{xx} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \end{cases} \quad (2.14)$$

On remplace dans l'équation de chaleur :

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = a^2 * \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}),$$

d'où :

$$u_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2ka^2}{h^2}\right)u_{i,j} + \frac{ka^2}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}),$$

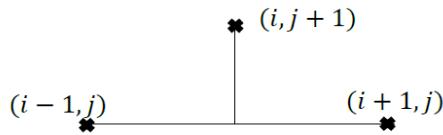
en posant  $r = \frac{ka^2}{h^2}$ , la formule précédente devient:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \quad (2.15)$$

Ce schéma est stable pour  $r \leq 0.5$  et instable pour  $r > 0.5$  dont les erreurs s'amplifient rapidement. Pour  $r = 0.5$ , alors :

$$u_{i,j+1} = 0.5(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \quad (2.16)$$

La maille du calcul est donc:



### b) Schéma implicite

Dans ce schéma, on approche la dérivée  $u''_{xx}$  au temps ( $t = (j+1)k$ ) au lieu du point  $t = jk$  et pour obtenir la solution, il faut résoudre un système d'équations linéaires.

$$u_{i,j} = -ru_{i-1,j+1} + (1 + 2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} \text{ avec } r = \frac{a^2 k}{h^2}. \quad (2.17)$$

Ce schéma est inconditionnellement stable c'est à dire il est stable quel que soit  $r$ .

## 2.7 Equations hyperbolique

La plus simple équation de type hyperbolique est l'équation d'onde, sa forme générale est :  $u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$  avec  $c$  est la vitesse de propagation.

Ces équations dépendent souvent du temps c'est pourquoi on les appelle souvent équations d'évolution ou équations dynamiques.

Pour obtenir la solution  $u(x, t)$  de ce type d'équation, il faut avoir des conditions supplémentaires :

a) des conditions aux limites :  $u(0, t)$  et  $u(L, t)$ ,  $L$  est la dimension du problème.

b) des conditions initiales ou l'état de la solution à l'instant  $t = 0$  :

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ u'(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (2.18)$$

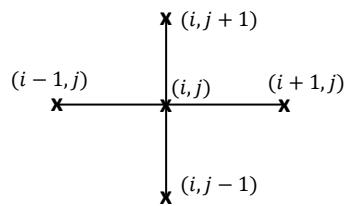
Utilisant le schéma centré pour remplacer les dérivées de l'équation d'onde :

$u''_{tt} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$  et  $u''_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$ , remplacer ces quantités discrètes dans l'équation d'onde, on obtient le schéma explicite:

$$u_{i,j+1} = r^2 u_{i-1,j} + 2(1 - r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} - u_{i,j-1}) \quad (2.19)$$

avec  $r = \frac{ck}{h}$

La maille du calcul est :



Cet algorithme est stable pour  $r \leq 1$ . Pour  $r = 1$ , l'algorithme devient donc :

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \quad (2.20)$$

Pour lancer l'algorithme, les valeurs  $(u_{0,0}, u_{1,0}, \dots, u_{N,0})$  sont calculées à partir de la condition initiale  $u(x, 0)$  et les valeurs  $(u_{0,1}, \dots, u_{N,1})$  sont calculées par  $u(0, t)$  et  $u(L, t)$ . Dans la première itération l'algorithme fait appel à des points appelés points fictifs ( $u_{i,-1}$  pour  $j = 0$ ). Ces points sont trouvés en utilisant la condition initiale de vitesse  $u'_t(x, 0) = g(x)$ .

## Exercices corrigés Chapitre 2

### Exercice 1 :

Soit le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Dans le carré  $[0 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 3]$ , vérifiant les conditions suivantes :

$$u(0, y) = 2y, u(0.2, y) = y + 0.2, u(x, 0) = x \text{ et } u(x, 0.3) = 0.6 - 0.5x.$$

- 1- Donner le type du problème, et séparer ses conditions.
- 2- Résoudre le problème par la **méthode des différences finies (MDF)** en prenant  $\Delta x = h = \Delta y = k = 0.1$ .

### Exercice 2

On étudie la température de l'intérieur d'un système électronique où on maintient ses limites à température  $0^\circ C$  avec:

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx} & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 0) = 2x & \text{pour } 0 \leq x \leq 0.5 \\ u(x, 0) = 2(1-x) & \text{pour } 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

- Résoudre le problème avec la méthode MDF en utilisant le schéma explicite avec  $r = 0.1, \Delta x = h = 0.25$  et  $0 \leq t \leq 0.0125$ .

### Exercice 3

Soit l'équation d'onde :  $u''_{tt} = 16u''_{xx}$ , avec les conditions suivantes:

$$\begin{cases} u(1, t) = t + 1, t \geq 0 \\ u(2.6, t) = 1.8 + t, t \geq 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u(x, 0) = 0.5 + \frac{x}{2} \\ u'_t(x, 0) = \frac{x}{2} \end{cases}$$

- 1- Séparer les conditions du problème précédent.
- 2- Trouver la solution pour  $r = 1, \Delta x = 0.4$  et  $0 \leq t \leq 0.1$  S.

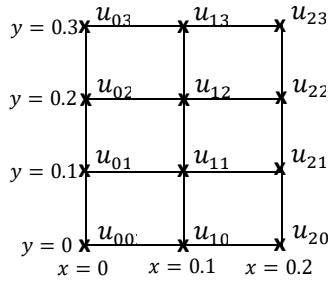
## Solutions des Exercices Chapitre 2

**Solution l'exercice 1**

1) L'équation est de type elliptique et le problème de type de Dirichlet. Dans ce problème on a seulement des conditions aux limites.

2) Pour résoudre ce problème, on doit suivre les étapes ci-après :

2.1) Tracer le problème : on a  $\Delta x = h = \Delta y = 0.1$  et  $[0 \leq x \leq 2]$  et  $0 \leq y \leq 3$ .



2.2) déterminer les connues et les inconnues par les conditions aux limites.

- à l'aide de  $U(0, y) = 2y$ :  $U_{00} = 0$ ,  $U_{01} = 0.2$ ,  $U_{02} = 0.4$  et  $U_{03} = 0.6$ .
- à l'aide de  $U(0.2, y) = y + 0.2$ :  $U_{20} = 0.2$ ,  $U_{21} = 0.3$ ,  $U_{22} = 0.4$  et  $U_{23} = 0.5$ .
- à l'aide de  $U(x, 0) = x$ :  $U_{00} = 0$ ,  $U_{10} = 0.1$ ,  $U_{20} = 0.2$ .<sup>1</sup>
- à l'aide de  $U(x, 0.3) = 0.6 - 0.5x$ :  $U_{03} = 0.6$ ,  $U_{13} = 0.55$ ,  $U_{23} = 0.5$ .

En remarque que le problème est bien posé.

2.3) détermination des inconnues : les inconnues sont  $U_{11}$  et  $U_{12}$ .

2.3) Ecriture de l'algorithme

On remplace les formes discrètes dans la fonction continue, c'est-à-dire, on remplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2}$$

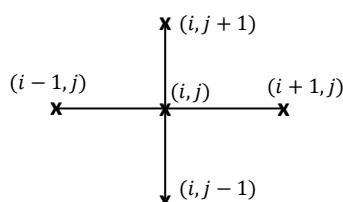
On obtient

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} = 0 \text{ et } h = k,$$

Donc l'approximation de problème (1) est :

$$4U_{i,j} = U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}$$

La valeur de la fonction au point  $(i, j)$  est obtenue en faisant la moyenne arithmétique des valeurs aux points  $(i+1, j)$ ,  $(i-1, j)$ ,  $(i, j+1)$  et  $(i, j-1)$ . Dont voici la maille du calcul est :



2.4) Calculer les inconnues  $U_{11}$  et  $U_{12}$ : l'intérieur du domaine, on a :

$$\begin{cases} 4U_{11} = U_{21} + U_{01} + U_{12} + U_{10} = 0.3 + 0.2 + U_{12} + 0.1 \\ 4U_{12} = U_{02} + U_{22} + U_{11} + U_{13} = 0.4 + 0.4 + U_{11} + 0.55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4U_{11} - U_{12} = 0.6 \\ 4U_{12} - U_{11} = 1.35 \end{cases}$$

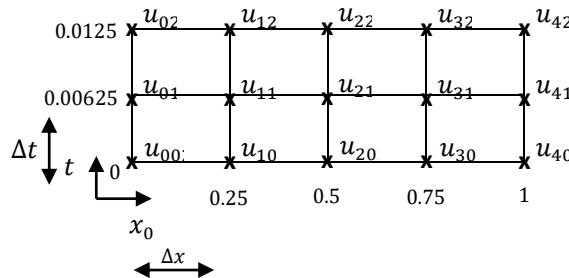
Sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.35 \end{bmatrix}$$

A l'aide de la méthode de Crammer, on trouve ( $U_{11} = 0.25$  et  $U_{12} = 0.4$ )

### Solution l'exercice 2

- 1 Tracer le problème : on a  $r = 0.1$ ,  $\Delta x = h = 0.25$  et  $0 \leq t \leq 0.0125$ . On détermine  $k$  pour limiter l'axe temporel.



- 2 déterminer les connues du problème.

- a l'aide de  $u(x, 0) = 2x$  pour  $0 \leq x \leq 0.5$ :  $u_{00} = 2 \times 0 = 0$ ,  $u_{10} = 2 \times 0.25 = 0.5$ ,  $u_{20} = 2 \times 0.5 = 1$ .  
- d'autre aide de  $u(x, 0) = 2(1 - x)$  pour  $0.5 < x \leq 1$ :  $u_{30} = 2 \times (1 - 0.75) = 0.5$ ,  $u_{40} = 2 \times (1 - 1) = 0$ .
  - a l'aide de la condition (on maintient ses limites à  $0^\circ\text{C}$ )  $c - d - du(0, t) = u(1, t) = 0$  pour  $0 \leq t \leq 0.0125$ :  $u_{00} = u_{01} = u_{02} = u_{40} = u_{41} = u_{42} = 0$ .  
Le problème est bien posé.
- 3 détermination des inconnues : les inconnues sont  $u_{11}, u_{21}, u_{31}; u_{12}, u_{22}, u_{32}$ .
- 4 Ecriture de l'algorithme :  
L'algorithme est:

$$u_{lj+1} = u_{lj} + r(u_{l+1,j} - 2u_{l,j} + u_{l-1,j})$$

Pour  $r = 0.1$ , l'algorithme devient :  $u_{lj+1} = u_{lj} + 0.1 \times (u_{l+1,j} - 2u_{l,j} + u_{l-1,j})$ , et la maille du calcul est :

- 4) Calculer les inconnues ( $u_{11}, u_{21}, u_{31}; u_{12}, u_{22}, u_{32}$ ) :  
4.1) Première itération :  $j = 0, i = 1, 2, 3$ .

- pour  $i = 1$

$$u_{11} = u_{10} + 0.1(u_{20} - 2u_{10} + u_{00}) = 0.5 + 0.1(1 - 2 \times 0.5 + 0) = 0.5$$

$$u_{11} = 0.5$$

- pour  $i = 2$

$$u_{21} = u_{20} + 0.1(u_{30} - 2u_{20} + u_{10}) = 1 + 0.1(0.5 - 2 \times 1 + 0.5) = 0.9$$

$$u_{21} = 0.9$$

- pour  $i = 3$

$$u_{31} = u_{30} + 0.1(u_{40} - 2u_{30} + u_{20}) = 0.5 + 0.1(0 - 2 \times 0.5 + 1) = 0.5$$

4.1) Deuxième itération :  $j = 1, i = 1, 2, 3$ .

- pour  $i = 1$

$$u_{12} = u_{11} + 0.1(u_{21} - 2u_{11} + u_{01}) = 0.5 + 0.1(0.9 - 2 \times 0.5 + 0) = 0.49$$

$$u_{32} = 0.49$$

- pour  $i = 2$

$$u_{22} = u_{21} + 0.1(u_{31} - 2u_{21} + u_{11}) = 0.9 + 0.1(0.5 - 2 \times 0.9 + 0.5) = 0.82$$

$$u_{22} = 0.82$$

- pour  $i = 3$

$$u_{32} = u_{31} + 0.1(u_{41} - 2u_{31} + u_{21}) = 0.5 + 0.1(0 - 2 \times 0.5 + 0.9) = 0.49$$

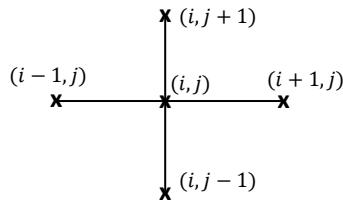
$$u_{32} = 0.49$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ u'(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Utilisant le schéma centré pour remplacer les dérivées de l'équation d'onde :  $u''_{tt} = \frac{u_{(j+1)-2}u_{l,j}+u_{l,j-1}}{k^2}$  et  $u^n_{xx} = \frac{u_{4+1,j}-2u_{l,j}+u_{-14,j}}{h^2}$ , remplacer ces quantités discrètes dans l'équation d'onde, on obtient le schéma explicite :

$$u_{i,j+1} = r^2 u_{[-1,j]} + 2(1 - r^2) u_{[l,j]} + r^2 (u_{i+1,j} - u_{i,j-1}) \text{ avec } r = \frac{ck}{h}$$

La maille du calcul est:



Cet algorithme est stable pour  $r \leq 1$ . Pour  $r = 1$ , l'algorithme devient donc:

$$u_{1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1}$$

Pour lancer l'algorithme, les valeurs  $(u_{0,0}, u_{1,0}, \dots, u_{N,0})$  sont calculées à partir de la condition initiale  $u(x, 0)$  et, les valeurs  $(u_{0,1}, \dots, u_{N,1})$  sont calculées par  $u(0, t)$  et  $u(L, t)$ . Dans la première itération l'algorithme fait appel des points appelés points fictifs ( $u_{i,-1}$  pour  $j = 0$ ). Ces points sont trouvés en utilisant la condition initiale de vitesse  $u_t'(x, 0) = g(x)$ .

### Solution l'exercice 3

Séparation des conditions:

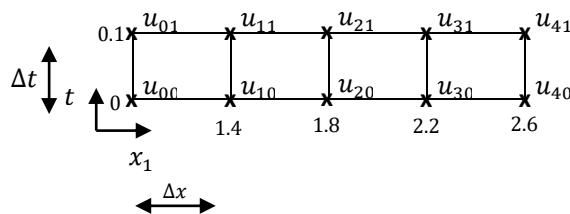
- Les conditions initiales sont:  $\begin{cases} u(x, 0) = 0.5 + \frac{x}{2} \\ u_t(x, 0) = \frac{x}{2} \end{cases}$
- Les conditions aux limites sont :  $\begin{cases} u(1, t) = t + 1 \\ u(2.6, t) = 1.8 + t \end{cases}$

2 La solution pour  $r = 1, \Delta x = 0.4$  et  $0 \leq t \leq 0.1S$ .

2.1) Tracer le problème : on a  $c = 4, r = 1$ . On détermine  $k = \Delta t$  pour limiter l'axe temporel.

$$r = c \frac{k}{h} \rightarrow k = \frac{rh}{c} \text{ avec } c = 4 \text{ dans ce cas.}$$

$$k = \Delta t = \frac{1 \times 0.4}{4} = 0.1 \text{ (0.1/0.1) C'est-à-dire on a seulement une seule itération )}$$



2.2) déterminer les connues du problème.

- à l'aide de  $u(1, t) = t + 1$ :  $u_{00} = 0 + 1 = 1, u_{01} = 0.1 \times 1 = 1.1$ .
- à l'aide de  $u(2.6, t) = 1.8 + t$ :  $u_{40} = 1.8, u_{41} = 1.8$ .
- à l'aide de  $u(x, 0) = 0.5 + \frac{x}{2}$ :  $u_{00} = 1, u_{10} = 1.2, u_{20} = 1.4, u_{30} = 1.6, u_{40} = 1.8$ .

Le problème est bien posé.

2.3) détermination des inconnues : les inconnues sont  $u_{11}, u_{21}$  et  $u_{31}$ .

2.4) Ecriture de l'algorithme :

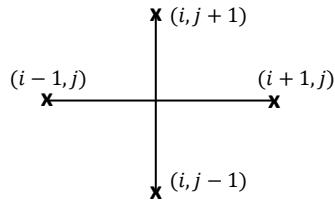
L'algorithme est :

$$u_{i,j+1} = r^2 u_{i-1,j} + 2(1 - r^2) u_{i,j} + r^2 (u_{i+1,j} - u_{i,j-1}) \text{ avec } r = \frac{ck}{h}$$

Pour  $r = 1$

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1}$$

La maille du calcul est:



2.6) Calculer les inconnues ( $u_{11}$ ,  $u_{21}$  et  $u_{31}$ ):

- Première itération :  $j = 0, i = 1, 2, 3$ .

– Pour  $i = 1$

$$u_{11} = u_{00} + u_{20} - u_{1-1}$$

$u_{1-1}$  est point fictif (hors domaine du calcul), on va utiliser la condition  $u'_t(x, 0) = \frac{x}{2}$  pour l'éliminer.

$$u'_t = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = \frac{x_i}{2}$$

$$\text{donc: } u_{i,j-1} = u_{i,j+1} - 2k \frac{x_i}{2} \rightarrow u_{i,j-1} = u_{i,j+1} - kx_i$$

$$u_{1,-1} = u_{1,1} - kx_1, \text{ on remplace dans } u_{11}$$

$$u_{11} = u_{00} + u_{20} - (u_{1,1} - kx_1), \text{ donc: } u_{11} = 0.5(u_{00} + u_{20} + kx_1) \text{ avec } k = 0.1 \text{ et } x_1 = 1.4.$$

$$u_{11} = 0.5(1 + 1.4 + 0.1 \times 1.4)$$

$$u_{11} = 1.27.$$

– Pour  $i = 2$

$$u_{21} = u_{10} + u_{30} - u_{2-1}$$

$$u_{2-1} \text{ est point fictif. } u_{2,-1} = u_{2,1} - kx_2, \text{ on remplace dans } u_{21}$$

$$u_{21} = 0.5(u_{10} + u_{30} + kx_2) \text{ avec } k = 0.1 \text{ et } x_2 = 1.8.$$

$$u_{21} = 0.5(1.2 + 1.6 + 0.1 \times 1.8)$$

$$u_{21} = 1.49.$$

– Pour  $i = 3$

$$u_{3-1} \text{ est point fictif. } u_{3,-1} = u_{3,1} - kx_3, \text{ on remplace dans } u_{31}$$

$$u_{31} = 0.5(u_{20} + u_{40} + k3) \text{ avec } k = 0.1 \text{ et } x_3 = 2.2.$$

$$u_{31} = 0.5(1.4 + 1.8 + 0.1 \times 2.2)$$

$$u_{31} = 1.71.$$

## Chapitre 3 :

### Techniques d'optimisation

#### 3.1 Introduction

L'optimisation numérique est une branche des mathématiques permettant de **choisir** automatiquement la meilleure solution parmi un ensemble de solutions possibles. Les applications possibles couvrent des domaines variés de la recherche opérationnelle aux statistiques et bien sûr l'industrie.

Nous énumérons ci-dessous, quelques domaines d'application de l'optimisation:

- ✓ Transport et livraisons.
- ✓ Fabrication et production.
- ✓ Agriculture et génie civil.
- ✓ Finance, vente et marketing
- ✓ Gestion de stock
- ✓ Recherche et gestion des bases de données.
- ✓ ...etc

Résoudre un problème d'optimisation numérique signifie trouver les meilleurs paramètres (ou variables de contrôle) résolvant le problème à minimiser (ou à maximiser) une quantité mathématique donnée, appelée fonction objectif (ou critère). Cette fonction objective peut être sujette à des contraintes (conditions).

#### 3.2. Problèmes d'optimisation (po)

- Un problème d'optimisation c'est un modèle mathématique formel d'un problème réel.

- On cherche à maximiser ou minimiser une fonction objective sous certaines contraintes:

$x \in \mathbb{R}^n$ : Ensemble des variables

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ : Fonction du cout (objectif)

$D \subset \mathbb{R}^n$ : Ensemble des contraintes  $g(x)$

$$po = \begin{cases} \min(\max) f(x) \\ g(x) \leq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.1)$$

Alors on cherche à minimiser ou maximiser  $f$  sur  $D$ , c.à.d on cherche  $x^*$  tel que :

$$F(x^*) = \min(\max) f(x) \quad (3.2)$$

Avec  $f(x) \leq f(x^*), \forall x \in D$ .

#### 3.2 Rappels et définitions

Avant de commencer à rechercher l'optimum d'une fonction, nous devons nous assurer qu'elle existe. Pour ce faire, nous utilisons une technique similaire à la recherche du maximum ou du minimum d'une fonction scalaire. Cela nous amène à utiliser les dérivées partielles d'une fonction multi-variable.

##### a) Gradient

Soit la fonction  $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable sur  $\mathbb{R}^n$ , on posera  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  (les éléments de  $\mathbb{R}^n$  sont assimilés à des vecteurs-colonnes).

On note  $\nabla f(x)$  et on appelle **gradient** de  $f$  au point  $x$  le vecteur-colonne :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}^t \quad (3.3)$$

On dit que  $f(x)$  à un optimum au point  $x^*$  si :

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad (3.4)$$

### Remarque 1

- $x^*$  est appelé point stationnaire de la fonction  $f(x)$ .
- La relation  $\nabla f(x^*)$  est aussi appelée équation d'Euler.
- Ce théorème n'a aucun sens si la fonction n'est pas différentiable

### Remarque 2

Le gradient jouera un rôle essentiel dans le développement et l'analyse des algorithmes d'optimisation.

#### b) Matrice Hessienne

Soit  $f(x)$  une fonction scalaire de  $n$  variables. Le **Hessien** de la fonction  $f$ , qu'on note  $H_f$  est une matrice de dimension  $n \times n$ , dont les éléments sont les dérivées partielles d'ordre deux de la fonction  $f$ .

$$H_f(x) = \nabla^2 f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x)^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x_2)^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x_n)^2} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

#### c) Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

**Théorème 1** : Soit  $f: f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable au point  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ . Si  $\hat{x}$  est un minimum local de  $(P)$  alors  $\nabla f(\hat{x}) = 0$ .

#### d) Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

**Théorème 2** Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois différentiable au point  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ . Si  $\hat{x}$  est un minimum local de  $(P)$  alors alors  $\nabla f(\hat{x}) = 0$  et la matrice Hessienne de  $f$  au point  $\hat{x}$ , qu'on note  $H(\hat{x})$ , est semi définie positive.

### Remarque 3

- ✓ Si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\hat{x}, \hat{y}) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \right)^2 > 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}, \hat{y}) < 0$  alors  $(\hat{x}, \hat{y})$  est une **solution maximale locale stricte**.
- ✓ Si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\hat{x}, \hat{y}) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \right)^2 > 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}, \hat{y}) > 0$  alors  $(\hat{x}, \hat{y})$  est une **solution minimale locale stricte**.

- ✓ Si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\hat{x}, \hat{y}) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \right)^2 < 0$  alors  $(\hat{x}, \hat{y})$  n'est ni une solution minimale locale ni une solution maximale locale.
- ✓ Si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}, \hat{y}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\hat{x}, \hat{y}) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \right)^2 = 0$ . On ne peut pas conclure: l'étude doit continuer;  $(\hat{x}, \hat{y})$  peut être une solution optimale ou ne pas l'être.

**Remarque 4**

Si  $\nabla f(x) = \mathbf{0}$  et la matrice Hессиене  $H(x)$  est **indéfinie** (n'est ni semi-définie positive, ni définie positive, ni semi-définie négative, ni définie négative). Alors, le **point**  $x$  est appelé **point selle**.

### 3.3 Méthodes d'optimisation sans contraintes

- **Définitions**

Soit  $f(x)$  une fonction de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; Le problème d'optimisation sans contraintes s'écrit de la façon suivante :

Minimiser la fonction  $f(x)$  avec  $x \in \mathbb{R}^n$

La fonction  $f(x)$  est souvent appelée :fonction coût, fonction objectif, ou critère d'optimisation.

On dit que  $x^*$  est un point qui minimise la fonction  $f(x)$  sur l'ensemble  $\mathbb{R}^n$  ssi :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, f(X^*) \leq f(X) \quad (3.6)$$

- **Direction de descente**

Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$ , est dite direction de descente au point  $\hat{x}$  **si et seulement si** il existe  $\delta > 0$  tel que

$$f(\hat{x} + \alpha d) < f(\hat{x}): \forall \alpha \in ]0, \delta[ \quad (3.7)$$

- **Schémas général des algorithmes d'optimisation sans contraintes**

Supposons que  $d_k$  soit une direction de descente au point  $x_k$ . Ceci nous permet de considérer le point  $x_{k+1}$ , successeur de  $x_k$ ; de la manière suivante :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad \alpha_k \in ]0, +\infty[ \quad (3.8)$$

Vu la définition de direction de descente, on est assuré que :

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k) \quad (3.9)$$

Un bon choix de  $d_k$  et de  $\alpha_k$  permet ainsi de construire une multitude d'algorithmes d'optimisation.

- **Exemples de choix de directions de descente**

Par exemple on choisi  $d_k = -\nabla f(x_k)$  et si  $\nabla f(x_k) \neq \mathbf{0}$  on obtient la **méthode du gradient**. La **méthode de Newton** correspond à  $d_k = -(H(x_k))^{-1} \cdot \nabla f(x_k)$ . Bien sur  $-\nabla f(x_k)$  est une direction de descente ( $\nabla f(x_k)^T \cdot d_k = -\nabla f(x_k)^T \cdot \nabla f(x_k) = -\|\nabla f(x_k)\|^2 < 0$ ). Pour la deuxième direction si la matrice Hessianne  $H(x_k)$  est définie positive alors  $d_k = -(H(x_k))^{-1} \cdot \nabla f(x_k)$  est aussi une direction de descente.

### 3.3.1 Méthode de gradient

Elle s'agit d'une famille de méthodes itératives qui s'appliquent à des fonctions dérivables.

#### a) Algorithme de gradient à pas fixe

L'algorithme du gradient à pas fixe est une méthode de descente utilisant un pas fixe et la stratégie de Cauchy pour le choix de la direction de descente :

*Algorithme de la méthode de gradient à pas fixe*

**Entrée:** Paramètre de tolérance  $\varepsilon > 0$  et la pas  $\alpha$ .

**Initialisation:** Choisir  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  quelconque.

**Pas général:** pour tous  $k = 0, 1, \dots$   $k$  exécuter

Etape 1 : si  $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$  Stop et  $x_k$  est le minimum sinon continuer

Etape 2 : Calculer.  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

Etape 4 : Poser  $k = k + 1$  et revenir à l'étape 1

#### b) Méthode de la plus forte pente à pas optimal

La méthode de la plus forte pente à pas optimal est la méthode de gradient la plus utilisée. On choisit ici un  $d_k = -\nabla f(x_k)$ ; il s'agit de la descente de plus forte pente. On pose ensuite  $g(\alpha) = f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$  et on calcule  $\alpha_k$  de façon à minimiser  $g$  pour  $\alpha \geq 0$ . On est alors ramené à un problème d'optimisation unidimensionnelle.

Où :  $d_k$  est la direction de descente et  $\alpha_k$  est le pas.

*Algorithme de la méthode de gradient à pas optimal*

**Entrée:** Paramètre de tolérance  $\varepsilon > 0$ .

**Initialisation:** Choisir  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  quelconque.

**Pas général:** pour tous  $k = 0, 1, \dots$   $k$  exécuter

Etape 1 : si  $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$  Stop et  $x_k$  est le minimum sinon continuer

Etape 2 : Choisir un pas  $\alpha_k$  par une procédure de recherche de ligne sur la fonction

$$g(\alpha) := f(x_k - \alpha \nabla f(x_k)).$$

Etape 3 : Calculer.  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

Etape 4 : Poser  $k = k + 1$  et revenir à l'étape 1

### 3.3.2 Méthode de gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué est une modification de la méthode de la méthode de gradient de la plus forte pente. C'est une méthode qui permet de résoudre un problème d'optimisation quadratique correspondant au cas test des parties précédentes : minimiser  $\frac{1}{2}(X, AX + b, X)$ , avec  $A$  une matrice définie positive.

Cela revient à résoudre :

$$Ax + b = 0.$$

de l'équation en un nombre fini d'étapes, puis a obtenu **un regain d'intérêt** lorsque l'on s'est aperçu que **la convergence était bonne dès les premiers pas**, et que c'était une méthode adaptée aux grandes dimensions, en particulier quand le calcul de  $Ax$  est peu coûteux (par exemple si **A est une matrice creuse** provenant de la discréétisation d'un opérateur comme le Laplacien).

### **Algorithme de la méthode de gradient conjugué**

Etape 1: Choisir un démarrage  $x_0$ . Réglez le compteur d'itérations  $k = 0$ . Sélectionnez une tolérance  $\varepsilon$  pour le critère d'arrêt. Calculer

$$\mathbf{d}^{(0)} = -\mathbf{c}^{(0)} = -\nabla f(x_0)$$

Vérifier le critère d'arrêt . If  $\|\nabla f(x_0)\| < \varepsilon$ , alors stop. Sinon, Aller à l'étape 5 (notez que la première itération des méthodes du gradient conjugué et de la forte pente est la même).

Etape 2: Calculer le gradient de la fonction objectif comme  $\mathbf{c}^{(k)} = \nabla f(x_k)$ .

Etape 3: Calculer  $\|\mathbf{c}^{(k)}\|$ . si  $\|\mathbf{c}^{(k)}\| < \varepsilon$ , alors stop; sinon continue.

Etape 4: Calculer la nouvelle direction conjuguée comme

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{(k)} &= -\mathbf{c}^{(k)} + \beta_k \mathbf{d}^{(k-1)} \\ \beta_k &= \left( \frac{\|\mathbf{c}^{(k)}\|}{\|\mathbf{c}^{(k-1)}\|} \right)^2\end{aligned}$$

Etape 5: Calculer une taille de pas  $\alpha_k = \alpha$  pour minimiser  $f(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ .

Etape 6: Modifiez la conception comme suit :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha d_k$$

Poser  $k = k + 1$  et aller à l'étape 2 .

### **3.3.3 Méthode de Newton**

Avec la méthode de descente la plus forte pente, seules les informations dérivées du premier ordre sont utilisées pour déterminer la direction de recherche. Si des dérivées de second ordre sont disponibles, nous pouvons les utiliser pour représenter plus précisément la surface de coût et une meilleure direction de recherche peut être trouvée. Avec l'inclusion d'informations de second ordre, nous pouvons également nous attendre à un meilleur taux de convergence. Par exemple, la méthode de Newton, qui utilise le Hessien de la fonction pour calculer la direction de recherche, a un taux de convergence quadratique (ce qui signifie qu'il converge très rapidement lorsque le point de conception se trouve dans un certain rayon du point minimum). **Pour toute fonction quadratique définie positive, la méthode converge en une seule itération avec un pas de un.**

#### **a) Méthode de Newton classique**

L'algorithme de Newton en optimisation est une application directe de l'algorithme de Newton pour la résolution d'équations du type :  $F(x) = 0$ . En optimisation sans contrainte, l'algorithme de Newton cherche les solutions de l'équation :

$$\nabla f(x) = 0$$

Autrement dit, les points critiques de la fonction  $f$  à minimiser. En supposant  $f$  de classe  $C^2$  et la matrice Hessienne  $H_f(x_k)$  inversible, une itération de l'algorithme de Newton s'écrit :

$$x_{k+1} = x_k - (H(x_k))^{-1} \cdot \nabla f(x_k) \quad (3.10)$$

Où  $d_k = -(H(x_k))^{-1} \cdot \nabla f(x_k)$ . est appelée **direction de Newton**.

### *Algorithme de la méthode de Newton classique*

Etape 1 : Choisir un démarrage  $x_0$ . Réglez le compteur d'itérations  $k = 0$ .

Sélectionnez une tolérance  $\varepsilon$  pour le critère d'arrêt. Le pas  $\alpha_k = 1$ .

Etape 2 : si  $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$  ou  $\|x_{k-1} - x_k\| \leq \varepsilon$  Stop sinon on pose

$$d_k = -[H^{(k)}]^{-1} \nabla f(x_k)$$

Etape 3 : Calculer.  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

Etape 4 : Poser  $k = k + 1$  et revenir à l'étape 2

### *b) Méthode de Newton modifiée*

Notez que la méthode de Newton classique **la taille du pas est prise comme un (un pas de longueur un est appelé une taille de pas idéale ou un pas de Newton)**. Par conséquent, il n'y a aucun moyen pour s'assurer que la fonction de coût sera réduite à chaque itération (c'est-à-dire pour s'assurer que  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ ). Ainsi, la méthode n'est pas garantie de converger vers un point minimum local même avec l'utilisation d'informations de second ordre qui nécessitent de gros calculs.

Cette situation peut être corrigée si nous intégrons l'utilisation d'une taille de pas dans le calcul du changement de la direction de Newton. Autrement dit, on traite la solution comme direction de recherche et on utilise l'une des méthodes de recherche unidimensionnelle pour calculer la taille du pas dans le sens de la recherche. C'est ce qu'on appelle **la méthode de Newton modifiée** et elle est présentée comme un algorithme pas à pas.

### *Algorithme de la méthode de Newton classique*

**Étape 1.** Choisir un démarrage  $x_0$ . Réglez le compteur d'itérations  $k = 0$ . Sélectionnez une tolérance  $\varepsilon$  pour le critère d'arrêt.

**Étape 2.** si  $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$  Stop et  $x_k$  est le minimum sinon continuer.

**Étape 3.** Calculer la matrice Hessienne  $H^{(k)}$  au point initial  $x_k$ .

**Étape 4.** Calculez la recherche en résolvant l'équation  $d_k = -[H^{(k)}]^{-1} \nabla f(x_k)$ .

Notez que le calcul de  $d_k$  est symbolique. Pour l'efficacité de calcul, l'équation linéaire  $H^{(k)}d_k = -\nabla f(x_k)$  est résolu directement au lieu d'évaluer l'inverse de la matrice hessienne.

**Étape 5.** Mettre à jour la conception comme  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ , où  $\alpha_k$  est calculé pour minimiser  $f(x_k + \alpha d_k)$ . Toute procédure de recherche unidimensionnelle peut être utilisée pour calculer  $\alpha$ .

**Étape 7.** Poser  $k = k + 1$  et aller à l'**étape 2**.

### 3.4 Programmation linéaire (PL)

PL est l'un des outils les plus puissants et les plus utilisés en applications « industrielles » parmi les technologies d'aide à la décision

- ✓ Planification de la production
- ✓ Répartition des ressources
- ✓ Choix de produits à fabriquer
- ✓ Planification d'investissements
- ✓ Planification des acheminements
- ✓ Logistique
- ✓ Distribution
- ✓ Affectation et gestion du personnel
- ✓ Gestion de projet, ...

**La méthode du simplexe** est la première méthodologie proposée par (George B. Dantzig – 1949) :

- Facile à résoudre;
- Permet de traiter de façon systématique des problèmes complexes où plusieurs activités sont en compétition pour des ressources limitées et un objectif global (maximisation des profits, minimisation des coûts, ...) est recherché.

La PL est un outil qui permet de :

- modéliser
- résoudre toute une classe de problèmes d'optimisation.

#### 3.4.1 Modélisation d'un problème en PL

Une entreprise fabrique 2 produits X et Y. Pour sa conception, chaque produit fini nécessite 3 produits intermédiaires A, B et C. Pour fabriquer un produit X, on a besoin de 2 produits A, de 2 produits B et de 1 produit C. De même, pour fabriquer un produit Y, on a besoin de 3 produits A, de 1 produit B et de 3 produits C. En outre, l'entreprise dispose d'une quantité limitée de produits A, B et C. Elle a 180 produits A, 120 produits B et 150 produits C.

Sachant que le prix de revient de X est 3 DA et que celui de Y est de 4 DA, combien de produits X et Y faut-il fabriquer pour maximiser le profit ?

**Solution :** On modélise ce problème par un programme linéaire. Soit  $x$  et  $y$  les quantités de produits X et Y fabriqués. La quantité totale de produits A utilisée est  $2x + 3y$ . Cette quantité ne doit pas dépasser 180, d'où la première contrainte.

$$2x + 3y \leq 180$$

De même, pour les produits B et C, on obtient:

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 120 \\ x + 3y &\leq 150 \end{aligned}$$

Bien entendu, les quantités  $x$  et  $y$  sont positives.

$$x, y \geq 0$$

Enfin, on tente de maximiser le profit qui est le total des bénéfices sur la vente des produits X plus celui des produits Y.

$$\text{Max: } 3x + 4y$$

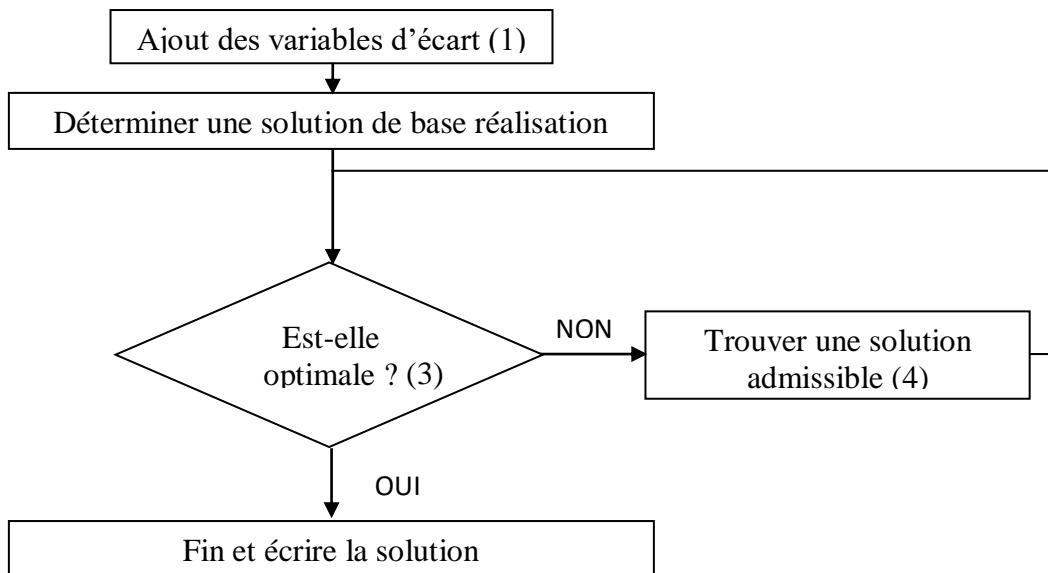
Le programme linéaire est donc le suivant.

$$\begin{aligned} \text{Max: } z &= 3x + 4y \\ 2x + 3y &\leq 180 \\ 2x + y &\leq 120 \\ x + 3y &\leq 150 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

On peut représenter le problème dans un espace à deux dimensions.

### 3.4.2 Algorithme du simplexe (avec contrainte)

L'algorithme du simplexe est un algorithme de résolution des problèmes d'optimisation linéaire. Il a été introduit par George Dantzig en 1947. Cet algorithme est donné par :



L'étape (4) est composée de :

- Tableau de la solution,
- Variable entrante (colonne pivot : plus basse entre les négatifs  $\min(z)$ ),
- Variable sortante (ligne pivot :  $\min(k)$  positif),
- Mise à jour du tableau,
- Critère de sortie.

#### *Exemple d'application*

Soit problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } F &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} & \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

Résoudre moyennant la **méthode du Simplexe**.

### Solution

Soit à résoudre le problème linéaire suivant en utilisant la méthode de simplexe :

$$\begin{aligned} \text{Max } F &= 4x_1 + 3x_2 \\ S. C &\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{array} \right. \end{aligned}$$

1) **Ajout des variables d'écart : on ajoute deux variables ( $e_1, e_2, e_3$ ) :**

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + e_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + e_2 = 20 \\ x_1 + x_2 + e_3 = 12 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

2) **La solution de base réalisable** : généralement on prend :

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0.$$

Donc

$$e_1 = 6, e_2 = 20, e_3 = 12 \text{ et } \max F = 0.$$

La solution est-elle **optimale** ? **NON**. On cherche à maximiser  $F$  est nous, nous avons un minimum.

3) Trouver une solution admissible

#### 3.1 Tableau

	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$C$	$K = C/C_p$
$e_1$	-1	1	1	0	0	6	$6/(-1) = -6$
$e_2$	2	1	0	1	0	20	$20/2 = 10$
$e_3$	1	1	0	0	1	12	$12/1 = 12$
$F$	4	3	0	0	0	0	

$\uparrow$   
 $C_p$

$L_p$

#### 3.2 Variable d'entrée

Max coéf  $F = \max\{4, 3\} = 4$ , il donne la colonne de pivot ( $C_p$ ).

$\Rightarrow x_1$  est la variable d'entrée.

#### 3.3 Variable de sortie

1- **On calcule** :  $K = C/C_p$

2- **min  $K$**   $\underset{K \geq 0}{\min} K = \min\{-6, 10, 12\} = 10$ , il donne la ligne de pivot ( $L_p$ ).

$\Rightarrow e_2$  est la variable de sortie.

$$L_p \cap C_p = \text{pivot} = P = 2$$

### 3.5 Mise à jour de tableauau

$$1 - \frac{L_p}{P}$$

2- Forcer la colonne de pivot ( $C_p \rightarrow 0$ ) sauf le pivot.

	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$C$	$K = C/C_p$
$e_1$	0	3/2	1	1/2	0	16	32/3
$x_1$	1	1/2	0	1/2	0	10	20
$e_3$	0	1/2	0	-1/2	1	2	4
$F$	0	1	0	-2	0	-40	

$\uparrow C_p$

$L_p \rightarrow$

$L_1 = L_1 + (1/2)L_p$

$L_p/P$

$L_3 = L_3 - (1/2)L_p$

$L_4 = L_4 + 2L_p$

La solution est-elle optimale ? **NON**. Car tous les coefficients de F ne sont pas tous négatifs.

Donc on continue :

#### 4- Trouver une solution admissible

##### 4.1 Variable d'entrée

Max coéf F =  $\max\{1, -2\} = 1$ , il donne la colonne de pivot ( $C_p$ ).  
 $\Rightarrow x_2$  est la variable d'entrée.

##### 4.2 Variable de sortie

1- On calcule :  $K = C/C_p$

2-  $\min_{K \geq 0} K = \min\{32/3, 20, 4\} = 4$ , il donne la ligne de pivot ( $L_p$ ).  
 $\Rightarrow e_3$  est la variable de sortie.

$$L_p \cap C_p = \text{pivot} = 1/2$$

### 4.3 Mise à jour de tableauau

$$1 - \frac{L_p}{P}$$

2- Forcer la colonne de pivot ( $C_p \rightarrow 0$ ) sauf le pivot.

	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$C$	$K = C/C_p$
$e_1$	0	0	1	2	-3	10	
$x_1$	1	0	0	1	-1	8	
$x_2$	0	1	0	-1	2	4	
$F$	0	0	0	-1	-2	-44	

$L_1 = L_1 - 3L_p$

$L_2 = L_2 - L_p$

$L_p/P$

$L_4 = L_4 - 2L_p$

La solution est-elle optimale ? **OUI**. Car tous les coefficients de F sont négatifs.

Donc les solutions optimales sont :

$$x_1^* = 8, \quad x_2^* = 4, \quad e_1^* = 10, \quad e_2^* = 0, \quad e_3^* = 0 \quad ET \quad F = 44$$

**Exercices corrigés de chapitre 3.**

**Exercice1.** Considérons la fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + x_2^3 + 6x_1x_2 + 3x_2^2$$

Identifier tous les points critique de la fonction  $f$  et leurs natures (minimum local, maximum local, ou ni minimum ni maximum).

**Exercice 2 :**

Considérons  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

On prend

$$x_0 = (x_1, x_2)^T = (1,1), \quad d_k = -\nabla f(x_k)$$

- a) Calculez  $\varphi_k(\alpha), \varphi'_k(\alpha), \varphi_k(0), \varphi'_k(0)$
- b) Trouver le pas optimal  $\alpha_k$ .

**Exercice 3**

Considérons  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2,$$

point de départ  $x_0 = (2,2)^T$ , et  $\varepsilon = 0$ .

Calculer la première itération en utilisant la méthode de gradient à pas optimale.

**Exercice 4 :**

Problème de découpe. Une usine a reçu des plaques de métal d'une largeur de 200 cm et d'une longueur de 500 cm. Il faut en fabriquer au moins 30 plaques de largeur de 110 cm, 40 plaques de largeur de 75 cm et 15 plaques de largeur de 60 cm.

***Donner le modèle mathématique pour que les déchets soient les plus petits possibles.***

**Exercice 5 :**

Soit problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Max } F = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t. } & \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Résoudre moyennant la **méthode du Simplexe**.

### Solutions des Exercices de chapitre 3.

#### Solution Exercice 1

##### 1- Identification des points critiques :

La fonction  $f$  est différentiable et son gradient est:

$$\nabla f(x) = (12x^1 + 6x^2, 3x^2 + 6x_1 + 6x_2)'$$

La condition nécessaire de premier ordre :  $\nabla f(x_1, x_2) = (0,0)'$  nous permet d'identifier deux points critique :

$$x = (0,0)' \text{ et } x = (1/2, -1)'$$

##### 2- Nature des points critiques

La matrice Hessienne de cette fonction est

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 6x_2 + 6 \end{pmatrix}$$

Les conditions de deuxième ordre nous permettent de classer ces points critiques

- Pour  $x = (0,0)'$  on a  $\det H(0,0) = 36 > 0$  et ses valeurs propres sont positives.

La matrice Hesienne est **alors définie positive**, et donc  $x = (0,0)'$  est un minimum local.

- pour  $x = \left(\frac{1}{2}, -1\right)'$  donc  $\det H((1/2), -1) = -36 < 0$ .

La matrice Hesienne n'est pas **semi-définie positive**, et donc  $x = (1/2, -1)'$  n'est pas un minimum local.

#### Solution l'Exercice 2

a) On a

$$\nabla f(x_1, x_2)^T = (2x_1, 2x_2)$$

donc

$$d_k = -\nabla f(x_0) = (-2, -2)$$

Maintenant

$$(x_0)^T + \alpha d_0^T = (1,1) + \alpha(-2, -2) = (1,1) + (-2\alpha, -2\alpha) = (1 - 2\alpha, 1 - 2\alpha)$$

Par conséquent

$$\varphi_k(\alpha) = f[x_k + \alpha d_k] = f(1 - 2\alpha, 1 - 2\alpha) = (1 - 2\alpha)^2 + (1 - 2\alpha)^2 = 2(1 - 2\alpha)^2$$

On a

$$\varphi_k(\alpha) = 2(1 - 2\alpha)^2 \Rightarrow \varphi'_k(\alpha) = 16\alpha - 8$$

et

$$\varphi_k'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

D'autre part

$$\varphi_k''(\alpha) = 16 > 0: \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Par conséquent  $\alpha_k = \frac{1}{2}$  est une solution minimale globale de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  est la valeur minimale globale.

### Solution l'Exercice 3

Calcul de la première itération  $x_1 = ?$

**Etape1 :** Calcul de gradient

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow c^{(0)} = \nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

**Etape 2 :** test d'arrêt

$$\|c^{(0)}\| = \sqrt{4^2 + 12^2} \cong 12.65 \neq 0 \text{ on continue}$$

$$\text{On pose } d_0 = -\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

**Etape 3 :**

Calcul de  $\alpha$  qui minimise la  $f(x_0 + \alpha d_0)$

On a :

$$x_0 + \alpha d_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4\alpha \\ 2 - 12\alpha \end{pmatrix}$$

$$f(\alpha) = f(x_0 + \alpha d_0) = f(2 - 4\alpha, 2 - 12\alpha) = (2 - 4\alpha)^2 + 3(2 - 12\alpha)^2$$

$$\Rightarrow f'(\alpha) = (-4)2(2 - 4\alpha) + 3(-12)2(2 - 12\alpha) = 23 \times (28\alpha - 5)$$

$$\text{D'où } f'(\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{5}{28}$$

On a :

$$x_1 = x_0 + \alpha d_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{28} \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$x_1 = (1.2857, -01428)^t$$

### Solution de l'exercice 4

Formulation du problème

Une **plaqué de 200 cm** de largeur peut être découpée **de cinq façons** :

1. **Une (1) plaque de 75 cm et deux (2) plaques de 60 cm.** Les **déchets** seront **de 05 cm**.
2. **Une (1) plaque de 110 cm et Une (1) plaque de 75 cm.** Les **déchets** seront **de 15 cm**.
3. **Une (1) plaque de 110 cm et Une (1) plaque de 60 cm.** Les **déchets** seront **de 30 cm**.

4. Trois (3) plaques de 60 cm. Les déchets (ou chutes) seront de 20 cm.  
 5. Deux (2) plaques de 75 cm. Les déchets (ou chutes) seront de 50 cm.

**Variables :**

- $x_1$ : Nombre de plaques à découper par la 1<sup>ère</sup> façon ;
- $x_2$ : Nombre de plaques à découper par la 2<sup>ème</sup> façon ;
- $x_3$ : Nombre de plaques à découper par la 3<sup>ème</sup> façon ;
- $x_4$ : Nombre de plaques à découper par la 4<sup>ème</sup> façon ;
- $x_5$ : Nombre de plaques à découper par la 5<sup>ème</sup> façon.

**Fonction objectif à minimiser :**

La fonction objective  $F$  correspond au déchet total à minimiser :

$$\min F = 5x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 50x_5$$

**Sous contraintes :**

- Plaques de largeur 110 cm :  $x_2 + x_3 \geq 30$
- Plaques de largeur 75 cm :  $x_1 + x_2 + x_5 \geq 40$
- Plaques de largeur 60 cm :  $2x_1 + x_3 + 3x_4 \geq 15$
- Positivité des variables :  $x_1 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0$

Finalement, le programme linéaire à résoudre est :

$$\min F = 5x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 50x_5$$

$$sc: \begin{cases} x_2 + x_3 \geq 30 \\ x_1 + x_2 + x_5 \geq 40 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

### Solution de l'exercice 5

Soit à résoudre le problème linéaire suivant en utilisant la méthode de simplexe :

$$Max F = x_1 + 2x_2$$

$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) **Ajout des variables d'écart : on ajoute deux variables**

( $e_1, e_2, e_3$ )

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + e_1 = 21 \\ -x_1 + 3x_2 + e_2 = 18 \\ x_1 - x_2 + e_3 = 5 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

2) **La solution de base réalisable** : généralement on prend :

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \text{ et } x_3 = 0.$$

Donc

$$e_1 = 21, e_2 = 18, e_3 = 5 \text{ et } F = 0.$$

La solution est-elle **optimale**? **NON**. On cherche à maximiser  $F$  est nous, nous avons un minimum.

**3) Tableaux de la solution**

3.1) Première itération

3.2) Variable entrante (V.e)

	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$C$	$K = C/C_p$
$e_1$	1	3	1	0	0	21	$21/3 = 7$
$e_2$	-1	3	0	1	0	18	$18/3 = 6$
$e_3$	1	-1	0	0	1	5	$-5/1 = -5$
$F$	1	2	0	0	0	0	

$\leftarrow L_p$

V.e :  $\max(\text{coéf}(F)) = 2 \Rightarrow x_2 \text{ est la v.e}$

$\uparrow C_p$

3.3) Variable sortante (V.s)

V.s :  $\min_{\geq 0} K = 6 \Rightarrow e_2 \text{ est la v.s, Pivot} = C_p \cap L_p = 3$

3.4) Mise à jour du tableau

-V.e :  $\max(\text{coéf}(F)) = 5/3 \Rightarrow x_1 \text{ est la v.e}$   
 -V.s :  $\min_{\geq 0} K = \frac{3}{2} \Rightarrow e_1 \text{ est la v.s}$   
 -Pivot = 2

	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$C$	$K = C/C_p$
$e_1$	2	0	1	-1	0	3	$3/2$
$x_2$	-1/3	1	0	1/3	0	6	$6/(-1/3)$
$e_3$	2/3	0	0	1/3	1	11	$11/(2/3)$
$F$	5/3	0	0	-2/3	0	-12	

$$\begin{aligned} L_1 &= L_1 - L_p \\ L_2 &= \frac{L_p}{P} \\ L_3 &= L_3 + (1/3)L_p \\ L_4 &= L_4 - (2/3)L_p \end{aligned}$$

Est-ce que c'est une solution optimale !!? Non, car les coéf de F ne sont pas tous négatifs,  
**Donc on continu !**

3.5) Mise à jour du tableau

-V.e :  $\max(\text{coéf}(F)) = 1/6 \Rightarrow e_2 \text{ est la v.e}$   
 -V.s :  $\min_{\geq 0} K = 15 \Rightarrow e_3 \text{ est la v.s}$   
 Pivot = 2/3

	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$C$	$K = C/C_p$
$x_1$	1	0	1/2	-1/2	0	3/2	-3
$x_2$	0	1	1/6	1/6	0	13/2	39
$e_3$	0	0	-1/3	2/3	1	10	15
$F$	0	0	-5/6	1/6	0	-29/2	

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{L_p}{P} \\ L_2 &= L_2 + (1/6)L_p \\ L_3 &= L_3 - (1/3)L_p \\ L_4 &= L_4 - (5/6)L_p \end{aligned}$$

$\uparrow C_p$

Est-ce que c'est une solution optimale !!? Non, car les coéf de F ne sont pas tous négatifs,  
**Donc on continu !**

3.6) Mise à jours du tableau

	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$C$	$K = C/C_p$
$x_1$	1	0	1/4	0	3/4	9	
$x_2$	0	1	1/4	0	-1/4	4	
$e_2$	0	0	-1/2	1	3/2	15	
$F$	0	0	-3/4	0	-1/4	-17	

$$L_1 = L_1 + (3/4)L_p$$

$$L_2 = L_2 - (1/4)L_p$$

$$\begin{aligned} L_3 &= \frac{L_p}{P} \\ L_4 &= L_4 - (1/4)L_p \end{aligned}$$

Est-ce que c'est une solution optimale !!? **Oui**, car tous les coéf de F sont négatifs,  
Donc les solutions optimales sont :

$$x_1^* = 9, \quad x_2^* = 4, \quad e_1^* = 0, \quad e_2^* = 15, \quad e_3^* = 0 \quad ET \quad F = 17$$

## Bibliographie

1. G. Allaire, Analyse numérique et optimisation, Edition 2002.
2. M. Bergounioux, Optimisation et contrôle des systèmes linéaires, Dunod, Paris, 2001.
3. M. Bierlaire, Introduction à l'optimisation différentiable, PPUR, 2006.
4. J-F. Bonnans, J-C. Gilbert, C. Lemaréchal, C. Sagastizàbal, Optimisation Numérique, Aspects théoriques et pratiques, Springer M&A 27, 1997.
5. O. Brun, Eléments d'optimisation, INSA, 2010.
6. P. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, 1988.
7. Arora, J. (2004). Introduction to optimum design. Elsevier
8. Y. Dodge, Optimisation appliquée, Springer, 2005.
9. J. C. Gilbert , Eléments d'optimisation différentiable : théorie et algorithmes, Notes de cours, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, Paris, (2007).
10. J. C. Gulioli , Introduction à l'optimisation, Ellipses, 1994.
11. A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs, quatrième édition, Canada, 2011.
12. J-B. Hiriart-Urruty, Optimisation et analyse convexe, exercices corrigés, EDP sciences, 2009.
13. A. Iouditski, Optimisation et analyse convexe, Notes de cours. 2002.
14. J. Nocedal, and S. J. Wright, Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, second ed, 2006.
15. R.T. Picard, Convexité et applications, Notes de cours. Université de Rennes 1.