وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد بوضياف بالمسيلة
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي

قسم الرياضيات — اللجنة العلمية

رقم: 37/ق.ر/2023 — المسيلة في: 15- 03 - 2023

مستخلص محضر اللجنة العلمية ليوم: 2023/03/15

بخصوص اعتماد مطبوعة دروس

وافقت اللجنة العلمية على اعتماد مطبوعة الدروس الخاصة بالأستاذ **فراحتية نسيم** المعنونة بـ:

Transformations intégrales dans les espaces L^p

كمرجع للدروس لطلبة السنة الثالثة رياضيات.

وهذا بعد الاطلاع على التقارير الإيجابية للأستاذ الخبير المكلف بالمطبوعة.

رئيس اللجنة العلمية

مرزوقي عبد الكريم

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohamed Boudhiaf de M'sila
Faculté de Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques

Transformations intégrales dans les espaces L^p

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Année : 3^{me} année Licence Mathématiques
Semestre : 6

Dr. FERAHTIA Nassim

Année universitaire : 2022/2023

Table des matières

Notations

• $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est la base canonique dans $\mathbb{R}^n$.
• $x \cdot y = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
• Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.
• $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ est le produit du convolution des fonctions f et g.
• Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, le support de f est noté par $supp\, f$.
• $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, est appelé aussi l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$.
• $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz, de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$, le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.
• Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors sa transformée de Fourier est :

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi i x.\xi) f(x) dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est :

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\xi))(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(2\pi i x.\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi$$

• q est l'exposant conjugué de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ où $p \in [1, +\infty]$.
• Soit $a \in \mathbb{R}^n$, τ_a est l'opérateur de translation définit par $\tau_a f(\cdot) = f(\cdot - a)$.
• $L^p(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables f sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

• ℓ^q est l'espace des suites $(a_k)_k$ telles que $\|(a_k)\|_{\ell^q} = (\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$.
• C_L désigne les fonctions causales continues par morceaux et d'ordre exponentielle.
• $F(s)$ désigne la transformée de Laplace de la fonction f.

Chapitre 1

Les espaces L^p

Les espaces de Lebesgue sont des espaces de Banach, c'est-à-dire des espaces vectoriels normés complets, dont la définition et l'étude nécessitent la théorie de l'intégration.
Dans tout ce chapitre, on se donne une fois pour toutes un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

1.1 Fonctions convexes et inégalités

Définition 1.1. Une fonction f définie sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite convexe si, quels que soient x, y et λ tels que

$$a < x < b \quad , \quad a < y < b \quad et \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

on a

$$f\left((1-\lambda)\, x + \lambda y\right) \leq (1-\lambda)\, f(x) + \lambda f(y).$$

Si $-f$ est convexe, f est dite concave.

Remarques 1.1. 1) Si f est convexe sur $]a, b[$ et si x_1, x_2 *et* x_3 sont tels que $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

2) Si f est convexe et si f' existe sur $]a, b[$ on en déduit que, pour x_1 *et* x_2 tels que $a < x_1 < x_2 < b$, on a

$$f'(x_1) \leq f'(x_2).$$

3) Si f est convexe et si f'' existe sur $]a, b[$ on a

$$f''(x) \geq 0,$$

quel que soit x tel que $a < x < b$.

Définition 1.2. Soient p et q deux réels appartenant à $[1, +\infty]$. On dit que p et q sont des exposants conjugués si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Cette définition implique $1 < p < \infty$ et $1 < q < \infty$. Comme $p = 1$ on a $q = +\infty$, on dit que 1 et $(+\infty)$ sont des exposants conjugués.

Théorème 1.1. *(Inégalité de Young) Soient a et b deux réels positifs, alors on a*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

avec $p, q \in]1, +\infty[$ et p, q sont des exposants conjugués.

Preuve. La fonction $\ln x$ est concave sur $]0, +\infty[$
i.e., $\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 \ln(x_1) + \lambda_2 \ln(x_2)\,,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$
Donc, pour $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ on a $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$
On pose $x_1 = a^p \geq 0$, $x_2 = b^q \geq 0$, alors on a

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) &\geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \\
&\geq \ln(a^p)^{\frac{1}{p}} + \ln(b^q)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \ln(a^p)^{\frac{1}{p}}(b^q)^{\frac{1}{q}} \\
&= \ln(ab)
\end{aligned}$$

i.e.,

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

□

Théorème 1.2. *(Inégalité de Hölder) Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, f et g étant deux fonctions $f,\ g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, mesurables. Alors on a*

$$\int_X |f(x)g(x)|\, d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}},$$

où p et q sont deux exposants conjugués.

Preuve. Si un des deux termes du produit du membre de droite de l'inégalité est nul ou infini celle-ci étant automatiquement satisfaite, nous pouvons supposer qu'il n'en est pas ainsi. Posons

$$F(x) = \frac{|f(x)|}{\left(\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad et \qquad G(x) = \frac{|g(x)|}{\left(\int_X |g(x)|^q\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}},$$

on a alors
$$\int_X (F(x))^p \, d\mu(x) = \int_X (G(x))^q \, d\mu(x) = 1.$$
Si $x \in X$ est tel que
$$0 < F(x) < \infty \qquad et \qquad 0 < G(x) < \infty,$$
il existe deux nombres réels t et u tels que
$$F(x) = e^{\frac{t}{p}} \qquad et \qquad G(x) = e^{\frac{u}{q}}.$$
La fonction e^x étant convexe, et p et q étant des exposants conjugués, on a
$$e^{\frac{t}{p}+\frac{u}{q}} \leq \frac{1}{p}e^t + \frac{1}{q}e^u.$$
On en déduit que, pour tout x de X,
$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p}(F(x))^p + \frac{1}{q}(G(x))^q.$$
En intégrant par rapport à la mesure μ, on a
$$\begin{aligned}\int_X F(x)G(x)d\mu(x) &\leq \frac{1}{p}\int_X (F(x))^p \, d\mu(x) + \frac{1}{q}\int_X (G(x))^q \, d\mu(x) \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\end{aligned}$$
i.e.,
$$\int_X \frac{|f(x)|}{\left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}} \times \frac{|g(x)|}{\left(\int_X |g(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}} d\mu(x) \leq 1,$$
donc on a
$$\frac{1}{\left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}} \times \frac{1}{\left(\int_X |g(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}} \int_X |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \leq 1.$$
i.e.,
$$\int_X |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}.$$
□

Remarque 1.1. Lorsque $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder est dans ce cas connue sous le nom, l'inégalité de Cauchy-Schwartz .

Théorème 1.3. *(Inégalité de Minkowski) Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, f et g étant deux fonctions*

$f,\ g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, *mesurables. On a* $\forall\ 1 \leq p \leq \infty$

$$\left(\int_X |f(x)+g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve. On a

$$(f(x)+g(x))^p = f(x)\,(f(x)+g(x))^{p-1} + g(x)\,(f(x)+g(x))^{p-1}$$

i.e.,

$$|f(x)+g(x)|^p \leq |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}. \tag{1.1}$$

E n appliquant l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_X |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \, d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

et

$$\int_X |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \, d\mu(x) \leq \left(\int_X |g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc, l'équation (1.1) devient

$$\int_X |f(x)+g(x)|^p \, d\mu(x) \leq \left(\left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}},$$

et puisque $(p-1)q = p$, alors on a

$$\int_X |f(x)+g(x)|^p \, d\mu(x) \leq \left(\left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\int_X |f(x)+g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

On deviser les deux membres par $\left(\int_X |f(x)+g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$, on obtient le résultat cherché. □

1.2 Définitions et propriétés élémentaires sur $\mathcal{L}^p$ et L^p

1.2.1 l'espace $\mathcal{L}^p\,(X, \mathcal{M}, \mu)$

Définition 1.3. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : (X, \mathcal{M}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda),\ f \text{ est mesurable et } \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) < +\infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}},$$

on vérifiera que $\|f\|_p$ est une semi-norme.

Cas particulier Si $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$, on note $\ell^p = \{x = (x_n)_{n\geq 0} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, avec la norme $\|x\|_{\ell^p} = \|x\|_p = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Remarque 1.2.

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{L}^p &\Leftrightarrow \|f\|_p < +\infty \; et \; mesurable, \; car \\
f \in \mathcal{L}^p &\Leftrightarrow \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) < +\infty \; et \; mesurable \\
&\Leftrightarrow \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \; et \; mesurable \\
&\Leftrightarrow \|f\|_p < +\infty \; et \; mesurable.
\end{aligned}$$

Définition 1.4. On dit qu'une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ est essentiellement bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq M \; p.\,p.$

$$i.e., \; \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > M\}\right) = 0.$$

On note par

$$\mathcal{L}^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, \; f \; mesurable \; telle \; que \; \exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M \; p.\,p. \; sur \; X\}.$$

On note aussi, $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|f\|_\infty = sup_{x\in X} ess\,|f(x)| = inf\,\{M : |f(x)| \leq M \; p.\,p. \; sur \; X\}$.

Lemme 1.1. *Soit $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$, alors*

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \; p.\,p. \; sur \; X,$$

de sorte que $\|f\|_\infty = inf\,\{M : |f(x)| \leq M \; p.\,p.\}$. Autrement dit, $\|f\|_\infty$ est une borne atteinte.

Remarque 1.3. 1) avec la notation précédente, $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$ les inégalités de Hölder et Minkowski s'écrivent

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q, \quad \text{inégalité de Hölder}.$$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad \text{inégalité de Minkowski}.$$

Corollaire 1.1. *Soit $p \in [1, +\infty]$, alors $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_p : & \mathcal{L}^p & \to \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto \|f\|_p \end{array}$$

est une semi norme.

Preuve. 1) $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
a) $\forall f \in \mathcal{L}^p, \forall g \in \mathcal{L}^p \Rightarrow (f+g) \in \mathcal{L}^p$
Soient $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^p$, alors d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{1.2}$$

Puisque $f \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow \|f\|_p < \infty$ et $g \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow \|g\|_p < \infty$.
Donc, (1.2) $\Leftrightarrow \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p < +\infty$.
i.e., $(f+g) \in \mathcal{L}^p$.
b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{L}^p \Rightarrow (\lambda f) \in \mathcal{L}^p$. On a

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_p &= \left(\int_X |\lambda f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda| \, \|f\|_p \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Donc, $(\lambda f) \in \mathcal{L}^p$.
i.e., $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2) $\|f\|_p$ est une semi norme, car
a) $\|f\|_p \geq 0$
b) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$
c) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, inégalité de Minkowski.
d) On a

$$\begin{aligned} f = 0 \ &\Rightarrow \ \|f\|_p = \left(\int_X |0|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \ 0 \end{aligned}$$

et on a aussi

$$\begin{aligned} \|f\|_p = 0 \ &\Rightarrow \ \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ &\Rightarrow \ f = 0 \ p.\ p.\ sur\ X. \end{aligned}$$

D'où l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi norme.

□

Ce résultat suggère de décomposer l'espace $\mathcal{L}^p$ en classes d'équivalence de la manière suivante : nous dirons que deux fonctions f et g appartenant à $\mathcal{L}^p$ sont équivalentes si $\|f-g\|_p = 0$, i.e., f et g sont presque partout égales.

1.2.2 l'espace $L^p\left(X, \mathcal{M}, \mu\right)$

Considérons la relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p\left(X, \mathcal{M}, \mu\right)$ définie par

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f = g \; p.\, p. \quad i.e., \; \|f-g\|_p = 0.$$

On note par $[f]$ la classe d'équivalence de f pour cette notation

$$\begin{aligned} [f] &= \{g \in \mathcal{L}^p : g\mathcal{R}f\} \\ &= \{g \in \mathcal{L}^p : f = g \; p.\, p.\} \end{aligned}$$

Définition 1.5. Soit $p \in [1, +\infty]$. On note $L^p\left(X, \mathcal{M}, \mu\right)$ le quotient $\mathcal{L}^p\left(X, \mathcal{M}, \mu\right)$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} L^p &= \{[f]\,,\; f \in \mathcal{L}^p\} \\ &= \mathcal{L}^p/\mathcal{R}. \end{aligned}$$

Si on pose $\|[f]\|_p = \|f\|_p$, on obtient

$$\begin{aligned} \|[f]\|_p = 0 &\Leftrightarrow \|f\|_p = 0 \\ &\Leftrightarrow f = 0 \; p.\, p. \\ &\Leftrightarrow [f] = [0]\,. \end{aligned}$$

On associe $L^p(X)$ par les deux opérations

$$+ : L^p(X) \times L^p(X) \to L^p(X) \quad et \quad \bullet : \mathbb{R} \times L^p(X) \to L^p(X)$$

définies par : $[f] + [g] = [f+g] \quad et \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}; \lambda\,[f] = [\lambda f]$,
on obtient à un nouvelle espace vectoriel $(L^p(X), +, \bullet)$ sur le corps $\mathbb{R}$.

Remarque 1.4. 1) On considère les éléments de $L^p(X)$ (l'ensemble des classes d'équivalences) comme des fonctions normales, et on désigne par f au lieu $[f]$.

2) l'application,

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_p : L^p(X) & \to & \mathbb{R}_+ \\ f & \mapsto & \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

est une norme sur $L^p(X)$.

Théorème 1.4. *(Théorème de Riesz-Fisher) L'espace de Lebesgue $L^p\left(X, \mathcal{M}, \mu\right)$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet) pour tout $p \in [1, +\infty]$, avec la norme*

$$1 \leq p < \infty, \text{ on a } \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \; p = +\infty \text{ on a } \|f\|_\infty = sup_{x \in X} ess \, |f(x)| \, .$$

***Preuve*.** Voir [3]. □

La convergence dans $L^p((X, \mathcal{M}, \mu)$ Soient $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions dans L^p et $f \in L^p$. On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans L^p et on écrit $f_n \overset{L^p}{\to} f$, si $lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

Exercice 1.1. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et soit $f \in L^p([0, +\infty[)$ et $g \in L^q([0, +\infty[)$, calculer

$$lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) g(x) dx$$

Solution On a

$$\begin{array}{rcl} \left| \int_0^T f(x) g(x) dx \right| & \leq & \int_0^T |f(x) g(x)| \, dx \\ & \leq & \int_0^{+\infty} |f(x) g(x)| \, dx. \end{array}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{array}{rcl} \left| \int_0^T f(x) g(x) dx \right| & \leq & \left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq & \|f\|_p \, \|g\|_q \, . \end{array}$$

Donc on a

$$\frac{1}{T} \left| \int_0^T f(x) g(x) dx \right| \leq \frac{1}{T} \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

i.e.,

$$lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) g(x) dx = 0.$$

Corollaire 1.2. *L'espace $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire*

$$< f, g >= \int_X f(x)g(x)d\mu(x),$$

où $f, g : X \to \mathbb{R}$ et $f, g \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Inégalité de Cauchy-Schwartz :
L'inégalité de Hölder dans le cas $p = 2$, donne l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On a

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 ,$$

donc on a

$$\int_X |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^2 \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g(x)|^2 \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}},$$

i.e.,

$$|< f, g >| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 .$$

Remarque 1.5. Pour $p \neq 2$, l'espace $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ n'est pas un espace de Hilbert.

Théorème 1.5. *1) Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré finie (i.e., $\mu(X) < +\infty$) et soit $p, q \in [1, +\infty]$ avec $1 \leq q \leq p$, alors on a*

$$L^p(X) \subset L^q(X).$$

2) Si $1 \leq p_1 < p_2$, on a

$$\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}.$$

Preuve. 1) Supposons que $1 \leq q < p$ (car $q = p$ est trivial).
Posons $r = \frac{p}{q} > 1$ et r' tels que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.
Soit $f \in L^p$, alors on a

$$\begin{aligned} \int_X |f|^{qr} \, d\mu &= \int_X |f|^p \, d\mu \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

i.e., $(f)^q \in L^r$.
Et

$$\begin{aligned} \int_X |1|^{r'} \, d\mu &= \mu(X) \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

i.e., $1 \in L^{r'}$.

L'inégalité de Hölder appliquée à $(f)^q$ et 1, on obtient

$$\begin{aligned}\int_X |f|^q \times 1 d\mu &\leq \left(\int_X |f|^{qr}\, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_X |1|^{r'}\, d\mu\right)^{\frac{1}{r'}} \\ &\leq (\int_X |f|^p\, d\mu)^{\frac{1}{r}} (\mu(X))^{\frac{1}{r'}}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_p^q (\mu(X))^{1-\frac{q}{p}},$$

alors on a

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p (\mu(X))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},$$

i.e.,

$$L^p(X) \subset L^q(X).$$

2) On montre que si, $p_1 < p_2$ on a $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$
Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^{p_1} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{p_1} < \infty$
i.e., la série est absolument convergente $\Rightarrow$ la série est convergente.
Alors d'après la condition nécessaire de la convergence d'une série, on a

$$lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0; |x_n| < \epsilon = 1.$$

On a

$$\begin{aligned}p_1 < p_2 &\Rightarrow |x_n|^{p_2} < |x_n|^{p_1},\ \forall n \geq n_0 \\ &\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^{p_2} < \sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^{p_1} \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{p_2} < \infty,\end{aligned}$$

i.e., $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^{p_2}$.

Pour la première inclusion, il suffit de remplacer le couple (p_1, p_2) par $(1, p_1)$. □

Exemple 1.1. Soit

$$\begin{aligned}f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{1+|x|},\end{aligned}$$ λ est la mesure de Lebesgue.

1) Montrer que $f \in L^2(\mathbb{R})$ et que $f \notin L^1(\mathbb{R})$.
2) Que peut-on déduire ?

Solution On a f est continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ est mesurable.
De plus,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+2|x|+x^2} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi \\ &< \infty,\end{aligned}$$

donc, $f \in L^2(\mathbb{R})$.
Mais,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|} dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx = +\infty\end{aligned}$$

donc, $f \notin L^1(\mathbb{R})$.
2) On en déduit que $L^2(\mathbb{R}) \nsubseteq L^1(\mathbb{R})$, car $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$.

Théorème 1.6. ***(Extension du théorème de la convergence dominée de Lebesgue)***
Soient $p \in [1, +\infty[$, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de L^p et $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ un élément de L^p tels que

(i) $lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ *μ p. p.,*

(ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ *μ p. p.*

Alors, $f \in L^p$ et $lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$

Corollaire 1.3. *Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de L^p telle que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty.$$

Alors, la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est absolument convergente μ p. p. De plus, la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ (définie μ p. p.) appartient à L^p et $lim_{n\to+\infty} \|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_p = 0$.

1.3 Théorèmes de densité

Nous allons établir que certains ensembles de fonctions particulièrement simples sont denses dans les espaces L^p.

Définition 1.6. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et E_0 sous-espace de E, on dit que E_0 est dense dans E, s'il existe pour tout $f \in E$ et $\epsilon > 0$ un élément $f_0 \in E_0$ tels que $\|f - f_0\| < \epsilon$.

Théorème 1.7. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, l'ensemble E des fonctions étagées définies sur cet espace, telles que*

$$(\forall f \in E); \quad \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) < \infty,$$

est dense dans $L^p(X)$, si $1 \leq p < \infty$.

Preuve. La définition de l'ensemble E implique $E \subset L^p$. Soit f une fonction positive appartenant à L^p et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers f. pour tout n on a $0 \leq e_n < f$ ce qui implique $e_n \in L^p$ et, par conséquent, $e_n \in E$. En outre, l'inégalité $|f - e_n|^p \leq f^p$ permet d'utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. On en déduit

$$lim_{n\to\infty} \|f - e_n\|_p = 0.$$

f appartient donc à l'adhérence de E. Une fonction réelle (ou complexe) étant combinaison linéaire de deux (ou quatre) fonctions positives, on en déduit que L^p coïncide avec l'adhérence de E, ou ce qui est équivalent, que E est dense dans L^p. □

• On donne maintenant quelques résultats concernant la densité dans l'espace L^p, dans le cas où $X = \mathbb{R}$ et μ est la mesure de Lebesgue λ.

Définition 1.7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on appelle support de f la fermeture de l'ouvert $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$, i.e.,

$$supp\ f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}.$$

Corollaire 1.4. *L'espace vectoriel $C_c^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support borné sur $\mathbb{R}$ est dense dans L^p pour tout $p \in [1, +\infty[$.*

Exemple 1.2. La fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$$

appartient à l'espace $C_c^0(\mathbb{R})$, car la fonction est continue sur $\mathbb{R}$, et $supp\ \varphi = [-1, 1]$.

Corollaire 1.5. *L'espace vectoriel $C_c^k(\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^k à support borné sur $\mathbb{R}$ est dense dans L^p pour tout $p \in [1, +\infty[$.*

Remarques 1.2. 1) k étant quelconque, notons qu'en particulier l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support borné sur $\mathbb{R}$ (i.e., l'espace des fonctions test, noté $\mathcal{D}(\mathbb{R})$) est dense dans L^p pour tout $p \in [1, +\infty[$.
2) Les résultats que nous avons obtenus ne sont valables que pour $1 \leq p < \infty$. Ainsi, par exemple la fonction constante $f(x) = 1$ qui appartient à L^∞ n'appartient pas à l'adhérence de $C_c^0(\mathbb{R})$.

1.4 Quelques propriétés de l'espace $L^p(X)$

Le tableaux ci-dessous donne quelques propriétés de l'espace L^p (Réflexibilité, Séparabilité, Dual de L^p).

L'espace $L^p(X)$	Reflexif	Séparable	Espace dual
L^p, $1 < p < \infty$	oui	oui	L^q, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
L^1	non	oui	L^∞
L^∞	non	non	contient strictement L^1

Exercice 1.2. 1) Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, f et g étant deux fonctions appartenant respectivement $L^p(X)$ et $L^q(X)$ où p et q sont positifs, montrer que si on pose $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ on a

$$f \cdot g \in L^r(X) \quad et \quad \|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

2) Soit maintenant $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $pq \geq p + q$, supposons que $(f_n)_{n\geq 0} \in L^p$ et $(g_n)_{n\geq 0} \in L^q$ tels que

$$f_n \overset{L^p}{\to} f \quad et \quad g_n \overset{L^q}{\to} g.$$

Trouver l'espace convenable de sorte que la suite $(f_n g_n)_{n\geq 0}$ converge dans cet espace ?

Solution 1) On a

$$\|fg\|_r^r = \int_X |f|^r |g|^r d\mu \tag{1.3}$$

On a : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = 1$.
D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}(1.3) \Leftrightarrow \|fg\|_r^r &= \int_X |f|^r |g|^r d\mu \\ &\leq (\int_X (|f|^r)^{\frac{p}{r}} d\mu)^{\frac{r}{p}} (\int_X (|g|^r)^{\frac{q}{r}} d\mu)^{\frac{r}{q}} \\ &\leq \|f\|_p^r \|g\|_q^r ,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

On a $f \in L^p \Leftrightarrow f$ est mesurable et $\|f\|_p < \infty$, $g \in L^q \Leftrightarrow g$ est mesurable et $\|g\|_q < \infty$, donc $(f \cdot g)$ est mesurable et $\|fg\|_r < \infty$, ce qui implique que $f \cdot g \in L^r(X)$.
2) On a

$$f_n g_n - fg = (f_n - f)(g_n - g) + (f_n - f)g + f(g_n - g).$$

D'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|f_n g_n - fg\|_r \leq \|(f_n - f)(g_n - g)\|_r + \|(f_n - f)g\|_r + \|f(g_n - g)\|_r .$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\|f_n g_n - fg\|_r \leq \|f_n - f\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q + \|f\|_p \|g_n - g\|_q .$$

Alors on a

$$lim_{n\to+\infty} \|f_n g_n - fg\|_r = 0,$$

ce qui implique que $f_n g_n \xrightarrow{L^r} fg$ pour $r = \frac{pq}{p+q}$.

Chapitre 2

Transformation de Fourier

En analyse, la transformation de Fourier est une extension, pour les fonctions non périodiques, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques. La transformation de Fourier associe à une fonction intégrable définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes, une autre fonction sur $\mathbb{R}$ appelée transformation de Fourier dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation.
La transformée de Fourier représente une fonction par la densité spectrale dont elle provient, en tant que moyenne de fonctions trigonométriques de toutes fréquences. La théorie de la mesure ainsi que la théorie des distributions permettent de définir rigoureusement la transformée de Fourier dans toute sa généralité, elle joue un rôle fondamental dans l'analyse harmonique.
Lorsqu'une fonction représente un phénomène physique, comme l'état du champ électromagnétique ou du champ acoustique en un point, on l'appelle signal et sa transformée de Fourier s'appelle son spectre.
Dans ce chapitre, nous allons étudier la transformée de Fourier des fonctions sommable et aux carré intégrable, et quelques propriétés et applications pour la résolution des équations intégrales et équations aux dérivées partielles.

2.1 Définitions et notations

On note $L^1(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mesurable telles que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty$.

Exemples 2.1. 1) la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, car f est mesurable et

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{1+x^2}\right| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi < +\infty\end{aligned}$$

2) la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$, de façon général, sauf dans le cas de la fonction nulle, les fonctions polynômes n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$.

Définition 2.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f, la fonction complexe de la variable réelle ξ telle que

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Cette intégrale est bien définie puisque $\left|e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)\right| = |f(x)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$.
On écrira symboliquement, $\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(x))(\xi)$.

Proposition 2.1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est bornée, continue, $\widehat{f}(\xi)$ tend vers 0 quand $|\xi| \to +\infty$, et* $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Preuve. On a

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

La fonction sous le signe intégrale est continue pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et est mesurable pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. En outre, on a

$$\left|e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)\right| = |f(x)|, \ \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Le second membre appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et d'après le théorème de continuité pour les fonctions définies par intégrales, la fonction $\widehat{f}$ est continue, par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \left|\widehat{f}(\xi)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx \\ &= \|f\|_1, \ \forall \xi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \left\|\widehat{f}\right\|_\infty &= sup_{\xi \in \mathbb{R}} ess \left|\widehat{f}(\xi)\right| \\ &\leq \|f\|_1 \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\widehat{f}$ est bornée.
• On montre maintenant que $lim_{|\xi| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.
On sait que l'espace des fonctions étagées à support borné sur $\mathbb{R}$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, i.e., $\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \ \exists (\varphi_n)_{n \geq 0}$ suites de support bornée telles que

$$\varphi_n \xrightarrow{L^1} f \Leftrightarrow lim_{n \to +\infty} \|\varphi_n - f\|_1 = 0.$$

Alors on a, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{[\alpha_{k-1},\alpha_k]}(x)$,
ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{[\alpha_{k-1},\alpha_k]}(x)) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{i\alpha_k}{2\pi\xi} (e^{-2\pi i\xi\alpha_k} - e^{-2\pi i\xi\alpha_{k-1}}),
\end{aligned}$$

alors on a

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{1}{\pi} (\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|) \frac{1}{|\xi|}.$$

Si $|\xi| \to \infty$, on a $|\widehat{\varphi}(\xi)| \to 0$, donc

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\varphi}(\xi)\right| + |\widehat{\varphi}(\xi)|.$$

Ce qui implique que $lim_{|\xi|\to+\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right| = 0$,
i.e.,

$$lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

□

Exemple 2.1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte :

$$\pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

.

Solution On a

$$\begin{aligned}
\widehat{\pi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \cdot \pi(x) dx \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \frac{-1}{2\pi i\xi} (e^{-\pi i\xi} - e^{\pi i\xi}) \\
&= \frac{1}{\pi\xi} (\frac{e^{\pi i\xi} - e^{-\pi i\xi}}{2i}),
\end{aligned}$$

donc,
$$\widehat{\pi}(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}, \quad \text{car } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \text{ avec } \theta = \pi\xi.$$

2.1.1 Cas particulier 1 : si f est paire

On sait que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, donc l'intégrale de Fourier s'écrit

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(2\pi x\xi) - i\sin(2\pi x\xi))f(x)dx.$$

Or, les fonctions $x \mapsto f(x)\cos(2\pi x\xi)$ et $x \mapsto f(x)\sin(2\pi x\xi)$ sont respectivement paire et impaire, donc

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(2\pi x\xi)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi x\xi)dx \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(2\pi x\xi)dx = 0.$$

Donc, si f est paire, $\mathcal{F}(f(x))(\xi)$ est un nombre réel et

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi x\xi)dx.$$

2.1.2 Cas particulier 2 : si f est impaire

De la même façon, on montre que si f est impaire, $\mathcal{F}(f(x))(\xi)$ est un nombre imaginaire pur et on a
$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi x\xi)dx.$$

2.2 Transformation de Fourier inverse

On peut obtenir $f(x)$ à partir de $\widehat{f}(\xi)$ par la transformation inverse (dite formule d'inversion de Fourier)

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\xi))(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Et plus généralement, si f n'est pas continue en x_0, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2},$$

où $f(x_0+0)$ et $f(x_0-0)$ sont les limites à droite et à gauche de $f(x)$.

Exercice 2.1. 1) Trouver la transformée de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$
2) En utilisant la transformée de Fourier inverse, calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi x\xi)\sin(2\pi a\xi)}{\xi} d\xi$.
3) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Solution On a

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \cdot f(x)dx \\ &= \int_{-a}^{a} e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\ &= \frac{-1}{2\pi i\xi}(e^{-2\pi i a\xi} - e^{2\pi i a\xi}) \\ &= \frac{1}{\pi\xi}(\frac{e^{2\pi i a\xi} - e^{-2\pi i a\xi}}{2i}) \end{aligned}$$

donc,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}, \quad \text{car } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \text{ avec } \theta = 2\pi a\xi.$$

2) On a d'après la formule d'inversion de Fourier

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)d\xi = f(x),$$

ce qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}} (\cos(2\pi x\xi) + i\sin(2\pi x\xi))\widehat{f}(\xi)d\xi = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ \frac{1}{2}, & |x| = a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

alors on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2\pi x\xi)\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi} d\xi + i\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi x\xi)\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi} d\xi = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ \frac{1}{2}, & |x| = a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \tag{2.1}$$

Or, la fonction $\xi \mapsto \frac{\sin(2\pi x\xi)\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}$ est une fonction impaire, donc la relation (2.1) devient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2\pi x\xi)\sin(2\pi a\xi)}{\xi} d\xi = \begin{cases} \pi, & |x| < a \\ \frac{\pi}{2}, & |x| = a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

3) Pour $x = 0$ et $a = \frac{1}{2\pi}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi = \pi \Rightarrow 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi = \pi$$

i.e.,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

2.3 Propriétés de la transformée de Fourier

1) **Linéarité** Soient $f,\ g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$, alors

$$\mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x))(\xi) = \alpha \widehat{f}(\xi) + \beta \widehat{g}(\xi).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} g(x) dx \\ &= \alpha \widehat{f}(\xi) + \beta \widehat{g}(\xi) \end{aligned}$$

□

2) **Translation** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-2\pi i a \xi} \widehat{f}(\xi),$$

où $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x-a))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x-a) dx, \text{ on pose } y = x - a \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i (y+a) \xi} f(y) dy \\ &= e^{-2\pi i a \xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y \xi} f(y) dy \\ &= e^{-2\pi i a \xi} \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

□

3) **Changement d'échelle** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}^\star$, alors

$$\mathcal{F}(h_\lambda f)(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda}),$$

où $(h_\lambda f)(x) = f(\lambda x)$.

Preuve. On a

$$\mathcal{F}(h_\lambda f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(\lambda x)dx, \text{ il y a deux cas}$$

a) $\lambda > 0$, on pose $\lambda x = y \Leftrightarrow dy = \lambda dx$, alors on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y\frac{\xi}{\lambda}} f(y)\frac{dy}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y(\frac{\xi}{\lambda})} f(y)dy \\
&= \frac{1}{\lambda}\widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda})
\end{aligned}$$

b) $\lambda < 0$, alors on a $\lambda x = y \Leftrightarrow dy = \lambda dx$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) &= \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-2\pi i y\frac{\xi}{\lambda}} f(y)\frac{dy}{\lambda} \\
&= \frac{-1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i y(\frac{\xi}{\lambda})} f(y)dy \\
&= \frac{-1}{\lambda}\widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda}) \\
&= \frac{1}{-\lambda}\widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda}),
\end{aligned}$$

donc on a

$$\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda}).$$

□

4) **Modulation** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\xi_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{F}(e^{2\pi i\xi_0 x} f(x))(\xi) = \widehat{f}(\xi - \xi_0).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{2\pi i\xi_0 x} f(x))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\cdot e^{2\pi i\xi_0 x} f(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(\xi-\xi_0)x} f(x)dx \\
&= \widehat{f}(\xi - \xi_0).
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $lim_{x\to+\infty} f(x) = lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Proposition 2.2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, supposons que f est dérivable et que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors*

$$\mathcal{F}(f'(x))(\xi) = (2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Si en outre, f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n qui sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(x))(\xi) = (2\pi i\xi)^n\widehat{f}(\xi).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f'(x))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f'(x)dx \\
&= [e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} + (2\pi i\xi)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx, \text{ par partie} \\
&= 0 + (2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi), \text{ car } e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x) \in L^1(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

□

• On peut démontrer par la récurrence que

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(x))(\xi) = (2\pi i\xi)^n\widehat{f}(\xi).$$

Proposition 2.3. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est dérivable et l'on a*

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi),$$

si en outre, $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\frac{d^{(n)}}{d\xi^n}\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^n f(x))(\xi).$$

Preuve. On a

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx,$$

comme $\left|-2\pi i x f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right| = 2\pi\,|xf(x)|$ et que par hypothèse $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} -2\pi i x e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx \\ &= \mathcal{F}(-2\pi i x f(x))(\xi).\end{aligned}$$

□

• Plus généralement, si $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ on peut montrer par la récurrence que

$$\frac{d^{(n)}}{d\xi^n}\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^n f(x))(\xi).$$

2.4 Produit de convolution

Soit $f,\ g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $(f \star g) \in L^1(\mathbb{R})$ et on a

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt.$$

La transformée de Fourier du produit de convolution est

$$\mathcal{F}((f \star g)(x))(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi).$$

On peut montrer aussi, que

$$\mathcal{F}^{-1}((f \star g)(x))(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f(x))(\xi) \cdot \mathcal{F}^{-1}(g(x))(\xi).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}((f \star g)(x))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi}(f \star g)(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt\right)dx.\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini, alors on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\cdot\xi} g(x-t)dx\right)dt.$$

On pose $y = x - t \Leftrightarrow dy = dx$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}((f \star g)(x))(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(y+t)\xi} g(y)dy)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi it\cdot\xi} f(t)(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iy\cdot\xi} g(y)dy)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi it\cdot\xi} f(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iy\cdot\xi} g(y)dy \\
&= \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

□

2.5 Formule de Parseval-Plancherel

On a la relation suivante établie par Parseval pour les séries de Fourier et généralisée par Plancherel (1910) aux transformées de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi.$$

Un cas particulier important si $f = g$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)}d\xi,$$

i.e.,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx &= \mathcal{F}[f(x)\overline{g(x)}]_{\xi=0} \\
&= [\widehat{f}(\xi) \star \overline{\widehat{g}(-\xi)}]_{\xi=0} \\
&= [\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t-\xi)}dt]_{\xi=0} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t)}dt.
\end{aligned}$$

□

Exercice 2.2. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{2-2x+x^2}, \quad h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2},$$

sachant que $\widehat{f}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$, déterminer $\widehat{g}(\xi)$ et $\widehat{h}(\xi)$.

Solution On a $g(x) = \frac{1}{2-2x+x^2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{(x-1)^2+1}$ i.e., $g(x) = (\tau_1 f)(x)$, donc $\widehat{g}(\xi) = \mathcal{F}((\tau_1 f)(x))(\xi)$ $\Rightarrow \widehat{g}(\xi) = e^{-2\pi i\xi(1)} \cdot \widehat{f}(\xi)$
i.e.,

$$\widehat{g}(\xi) = e^{-2\pi i\xi}\pi e^{-2\pi|\xi|}.$$

• On a $\frac{d}{dx}(\frac{1}{1+x^2}) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow h(x) = \frac{-1}{2}f'(x)$, alors

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(\xi) &= \mathcal{F}(\frac{-1}{2}f'(x))(\xi) \\
&= \frac{-1}{2}\mathcal{F}(f'(x))(\xi) \\
&= \frac{-1}{2}(2\pi i\xi) \cdot \widehat{f}(\xi) \\
&= -i\pi^2\xi e^{-2\pi|\xi|}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.4. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors on a*

$$\mathcal{F}(f^\vee(x))(\xi) = \widehat{f}(-\xi), \quad \text{où } f^\vee(x) = f(-x).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f^\vee(x))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(-x)dx, \quad \text{on pose } y = -x \Leftrightarrow dy = -dx \\
&= -\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-2\pi i(-y)\xi} f(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i y(-\xi)} f(y)dy \\
&= \widehat{f}(-\xi).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$\mathcal{F}(\widehat{f}(\xi))(x) = f(-x).$$

Autrement dit, $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f^\vee$ p. p.

2.6 Exemples usuels

Soit $a > 0$ fixé, c et d deux réels tels que $c < d$.

Calcul direct : En appliquant la définition de la transformée de Fourier on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

(i) $\mathcal{F}(\chi_{[c,d]}(x))(\xi) = \begin{cases} d-c, & \xi = 0 \\ \frac{\sin(\pi(d-c)\xi)}{\pi\xi} e^{-i\pi(c+d)\xi}, & \xi \neq 0 \end{cases}$

en particulier $\mathcal{F}(\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x))(\xi) = \frac{\sin(\pi a\xi)}{\pi\xi}$.

(ii) $\mathcal{F}(e^{-ax}\chi_{]0,+\infty[}(x))(\xi) = \frac{1}{a+2\pi i\xi}$.

(iii) $\mathcal{F}((1-\frac{2|x|}{a})\chi_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(x))(\xi) = 2\frac{sin^2(\frac{\pi a\xi}{2})}{\pi^2 a\xi^2}$.

(iv) $\mathcal{F}(e^{ax}\chi_{]-\infty,0[}(x))(\xi) = \frac{1}{a-2\pi i\xi}$.

(v) $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}$.

(vi) $\mathcal{F}(sign(x)e^{-a|x|})(\xi) = \frac{-4\pi i\xi}{a^2+4\pi^2\xi^2}$.

(vii) $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}$.

(viii) $\mathcal{F}(\frac{1}{ch(ax)})(\xi) = \frac{1}{ch(\frac{\pi^2\xi}{a})}$.

(ix) $\mathcal{F}(\frac{1}{a^2+x^2})(\xi) = \frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|\xi|}$.

Théorème 2.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}(\xi) = 0$, alors $f = 0$ $p.\ p.$*

2.7 Résolution des équations intégrales par la transformée de Fourier

Une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce est une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \tag{2.2}$$

où f et k sont des fonctions données, $k(x,y)$ s'appel le noyau de l'intégrale et $\varphi(x)$ c'est la fonction inconnue. Pour là résoudre il faut que le noyau dépendant de la différence des arguments, i.e., l'équation (2.2) devient

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y)\varphi(y)dy = f(x), \tag{2.3}$$

ce qui implique que

$$\varphi(x) - (k \star \varphi)(x) = f(x).$$

En appliquant la transformée de Fourier, on obtient

$$\widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{k}(\xi) \cdot \widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{f}(\xi), \tag{2.4}$$

avec $\widehat{\varphi}(\xi),\ \widehat{k}(\xi),\ \widehat{f}(\xi)$ les transformées de Fourier de $\varphi(x),\ k(x),\ f(x)$ respectivement. Sous la condition $1-\widehat{k}(\xi)\neq 0$, l'équation (2.4) devient

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\frac{\widehat{f}(\xi)}{1-\widehat{k}(\xi)}.$$

Moyennant la formule d'inversion de Fourier, on obtient

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi ix\xi}\frac{\widehat{f}(\xi)}{1-\widehat{k}(\xi)}d\xi.$$

Exercice 2.3. Résoudre l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x)-\lambda\int_{\mathbb{R}}e^{-|x-t|}\varphi(t)dt=e^{-|x|},\ \lambda\in\mathbb{R}\text{ et }\lambda>0, \tag{2.5}$$

sachant que $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi)=\frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}$.

Solution On pose $f(x)=e^{-|x|}$, donc l'équation (2.5) devient

$$\varphi(x)-\lambda(f\star\varphi)(x)=f(x).$$

En appliquant la transformée de Fourier, on obtient

$$\widehat{\varphi}(\xi)-\lambda(\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{\varphi}(\xi))=\widehat{f}(\xi),$$

ce qui implique que

$$(1-\lambda\widehat{f}(\xi))\widehat{\varphi}(\xi)=\widehat{f}(\xi),$$

donc on a

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\frac{\widehat{f}(\xi)}{1-\lambda\widehat{f}(\xi)},\quad \text{car } \widehat{f}(\xi)\neq\frac{1}{\lambda}.$$

i.e.,

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\frac{2}{(1-2\lambda)+4\pi^2\xi^2}.$$

• Si $(1-2\lambda)\leq 0\Leftrightarrow\lambda\geq\frac{1}{2}$, la fonction

$$\xi\longmapsto\frac{2}{(1-2\lambda)+4\pi^2\xi^2},$$

n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, donc ne peut pas être la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, donc l'équation (2.5) n'admet pas de solution.

• Si $(1-2\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda \in]0, \frac{1}{2}[$, la fonction $\xi \longmapsto \frac{2}{(1-2\lambda)+4\pi^2\xi^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc on a

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(\xi) &= \frac{2}{(1-2\lambda)+4\pi^2\xi^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} \cdot \frac{2\sqrt{1-2\lambda}}{(\sqrt{1-2\lambda})^2+4\pi^2\xi^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}\mathcal{F}(e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x|})(\xi).\end{aligned}$$

i.e.,

$$\mathcal{F}(\varphi(x))(\xi) = \mathcal{F}(\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} \cdot e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x|})(\xi).$$

Puisque la transformée de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R})$, donc on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} \cdot e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x|}.$$

2.8 Extension de la transformée aux fonctions de carré intégrable

La définition de la transformée de Fourier donnée par la formule $\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx$ n'est pas directement applicable à une fonction quelconque de $L^2(\mathbb{R})$. Toute fois, cette définition convient lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et on démontre que $\widehat{f}$ appartient aussi à $L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \left\|\widehat{f}\right\|_2$. Cette isométrie de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ s'étend en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$ et cette extension permet de définir la transformée de Fourier (on peut aussi l'appeler la transformée de Fourier-Plancherel) pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 2.2. ***(Théorème de Plancherel)*** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a*

$$\|f\|_2 = \left\|\widehat{f}\right\|_2.$$

L'extension de la transformation de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$ se fait en utilisant la densité $(L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et la complétion de $L^2(\mathbb{R})$. C'est une application du résultat de topologie suivant

Lemme 2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, F complet, et G un sous-espace vectoriel dense dans E. Si u est une application linéaire continue de G dans F, alors il existe un prolongement unique $\widetilde{u}$ linéaire continue de E dans F et la norme de $\widetilde{u}$ est égal à la norme de u.*

D'après le théorème de Plancherel (Théorème 2.2) $\mathcal{F}$ est une isométrie de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En appliquant le Lemme ci-dessus avec $E = F = L^2(\mathbb{R})$ et $G = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on obtient le théorème suivant

Théorème 2.3. *(**Théorème de Plancherel-Riesz**) Il existe une automorphisme unique, qu'on note aussi $\mathcal{F}$, de $L^2(\mathbb{R})$ qui prolonge canoniquement l'isométrie*

$$\begin{array}{rcl} L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

De plus pour tout $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, on a

1. $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f \ p.\ p.$
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi$ *Formule de Parseval-Plancherel.*
3. $lim_{A\to+\infty} \|\varphi_A - \mathcal{F}(f)\|_2 = 0$ *où* $\varphi_A(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\chi_{[-A,A]}(x)dx.$
4. $lim_{A\to+\infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0$ *où* $\psi_A(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\chi_{[-A,A]}(\xi)d\xi.$

Exercice 2.4. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(\pi x)e^{-\pi x^2}.$$

1) Calculer $\widehat{f}(\xi)$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin(\pi x)}{\pi x})^2 dx$
2) Calculer $\widehat{g}(\xi)$, on rappelle que $\mathcal{F}(\pi x e^{-\pi x^2})(\xi) = -i\pi\xi e^{-\pi\xi^2}$.

Solution 1) On sait d'après l'exemple 2.1 que la transformée de Fourier de la fonction porte $\pi(x)$ est

$$\widehat{\pi}(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

Donc on a

$$\mathcal{F}(\widehat{\pi}(x))(\xi) = \pi(-\xi),$$

ce qui implique que

$$\mathcal{F}(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x})(\xi) = \pi(\xi) \quad \text{car } \pi \text{ est paire.}$$

• On a d'après la formule de Parseval-Plancherel

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\frac{\sin(\pi x)}{\pi x})^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} (\pi(\xi))^2 d\xi \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1)^2 d\xi \\ &= 1. \end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(\pi x)e^{-\pi x^2} \\ &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \pi x e^{-\pi x^2} \\ &= f(x) \cdot h(x), \quad \text{avec } h(x) = \pi x e^{-\pi x^2}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \mathcal{F}(f(x) \cdot h(x))(\xi) \\ &= \widehat{f}(\xi) \star \widehat{h}(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi - y)\widehat{h}(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \pi(\xi - y)(-i\pi y e^{-\pi y^2})dy \\ &= -i\pi \int_{\xi-\frac{1}{2}}^{\xi+\frac{1}{2}} y e^{-\pi y^2} dy \\ &= -\frac{i}{2}(e^{-\pi\xi^2+\pi\xi-\frac{\pi}{4}} - e^{-\pi\xi^2-\pi\xi-\frac{\pi}{4}}). \end{aligned}$$

i.e.,

$$\widehat{g}(\xi) = -ie^{-\pi\xi^2-\frac{\pi}{4}} sh(\pi\xi).$$

Théorème 2.4. *1. Si $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.*

2. Si $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)$.

2.9 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ d'une dérivée

Théorème 2.5. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$*
• Si f est continue de classe C^1 par morceau et telle que $f' \in L^2(\mathbb{R})$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(f'(x))(\xi) = (2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi).$$

• Si de plus f est de classe C^m par morceau où $m \in \mathbb{N}^\star$ et telle que les dérivées $f^{(k)}$ jusqu'à l'ordre m inclus sont de carré intégrable, alors pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour tout $1 \leq k \leq m$, on a

$$\mathcal{F}(f^{(k)}(x))(\xi) = (2\pi i\xi)^k \widehat{f}(\xi).$$

Exercice 2.5. La transformée de Fourier de la fonction dérivée est-il applicable à la fonction $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$.

Solution On a $f'(x) = 0 \; p.\, p.$, donc $\widehat{f'}(\xi) = 0$.
D'autre part, on a d'après l'exemple usuel $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]}(x))(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$, alors

$$(2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi) = 2i\sin(2\pi\xi),$$

i.e.,

$$\widehat{f'}(\xi) \neq (2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi), \quad \text{car}$$

f n'est pas dérivable aux points (1) et (-1).

2.10 Application à la résolution des équations aux dérivées partielles

2.10.1 E'quation de la chaleur

Soit une tige homogène (très mince) et de longueur infinie, isolée de l'extérieur. On se donne à l'instant $t = 0$ la répartition $u_0(x) = u(0, x)$ de la température en chaque point de la tige $(x \in \mathbb{R})$ et on cherche à déterminer son évolution $u(t, x)$ sachant qu'elle vérifie ce qu'on appelle l'équation de la chaleur

$$(c) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (t, x) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

• On suppose que $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, et on cherche une fonction $u(t, x) \in C^{1,2}(]0, +\infty[\times\mathbb{R})$.
• On suppose que pour $t > 0$ fixé, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x)| \, dx < +\infty, \ \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right| dx < +\infty, \ \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \right| dx < +\infty,$$

de sorte que les fonctions $x \mapsto u(t, x)$, $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$, $x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ ont pour chaque valeur de $t > 0$ fixée une transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace x.
• On suppose de plus que pour $t > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = \frac{\partial}{\partial t}(\int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx).$$

On pose pour $t \geq 0$ fixé

$$\widehat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} u(t, x) dx.$$

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace x, on obtient

$$\mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = 0,$$

ce qui implique que

$$\mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t})(\xi) - \mathcal{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(\xi) = 0,$$

donc on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dx - (2\pi i\xi)^2 \widehat{u}(t,\xi) = 0,$$

i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(t,\xi) + 4\pi^2\xi^2\widehat{u}(t,\xi) = 0. \tag{2.6}$$

Ainsi, $\forall \xi \in \mathbb{R}$ fixé, $\widehat{u}$ est solution de l'équation différentielle par rapport au temps t, donc

$$\widehat{u}(t,\xi) = ce^{-4\pi^2\xi^2 t}.$$

Pour $t = 0 \Rightarrow \widehat{u}(0,\xi) = c = \widehat{u}_0(\xi)$, donc la solution est

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{u}_0(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}.$$

La formule d'inversion de Fourier donne

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}_0(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t})(x) \\
&= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}_0(\xi))(x) \star \mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi^2\xi^2 t})(x) \\
&= u_0(x) \star \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad \text{car } \mathcal{F}(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}})(\xi) = e^{-4\pi^2\xi^2 t} \\
&= (u_0 \star \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}})(x),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)dy.$$

Exercice 2.6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\pi x^2}$
1) Vérifier que f est la solution de l'équation différentielle

$$f'(x) + 2\pi x f(x) = 0 \tag{2.7}$$

2) En appliquant la transformée de Fourier a (2.7), montrer que $\widehat{f}(\xi)$ est une solution d'une équation différentielle $\widehat{(2.7)}$ du premier ordre qu'on déterminera.
3) Résoudre $\widehat{(2.7)}$ et déterminer $\widehat{f}(\xi)$, sachant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}dx = 1$.

Solution 1) On a

$$\begin{aligned} f'(x) + 2\pi x f(x) &= -2\pi x e^{-\pi x^2} + 2\pi x e^{-\pi x^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2) En appliquant la transformée de Fourier, on obtient

$$\mathcal{F}(f'(x) + 2\pi x f(x)) = 0,$$

ce qui implique que

$$\mathcal{F}(f'(x))(\xi) + 2\pi \mathcal{F}(x f(x))(\xi) = 0, \quad \text{car } \mathcal{F} \text{ est linéaire}$$

i.e.,

$$(2\pi i \xi)\widehat{f}(\xi) + 2\pi(\frac{-1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)) = 0,$$

alors l'équation $\widehat{(2.7)}$ devient comme suit

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) + 2\pi\xi\widehat{f}(\xi) = 0.$$

3) On a $\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) + 2\pi\xi\widehat{f}(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = -2\pi\xi\widehat{f}(\xi)$, ce qui implique que $\frac{d\widehat{f}(\xi)}{\widehat{f}(\xi)} = -2\pi\xi d\xi \Rightarrow \int \frac{d\widehat{f}(\xi)}{\widehat{f}(\xi)} = \int -2\pi\xi d\xi \Rightarrow \ln(\frac{\widehat{f}(\xi)}{c}) = -\pi\xi^2$,
i.e.,

$$\widehat{f}(\xi) = ce^{-\pi\xi^2}.$$

Pour $\xi = 0$, on a $\widehat{f}(0) = c$ et $\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$,
ce qui implique que

$$\begin{aligned} c &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx \\ &= 1, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}.$$

CHAPITRE 3

TRANSFORMATION DE LAPLACE

Une des méthodes les plus efficaces pour résoudre certains équations différentielles est d'utiliser la transformation de Laplace . La transformation de Laplace transforme des fonctions $f(x)$ en d'autres fonctions $F(s)$, on écrit

$$F = \mathcal{L}(f) \quad \text{ou} \quad F(s) = \mathcal{L}(f(x))(s).$$

La transformation de Laplace inverse transforme $F(s)$ en $f(x)$, on écrit

$$f = \mathcal{L}^{-1}(F) \quad \text{ou} \quad f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(x).$$

On verra plus loin sur quelles fonctions ces transformations sont définies. La propriété essentielle est que, sous certaines conditions,

$$\mathcal{L}(f'(x))(s) = s \cdot F(s).$$

Ainsi, les équations différentielles deviennent des équations algébriques.

3.1 Fonctions C_L

La classe des fonctions réelles C_L est formée des fonctions causales continues par morceaux et d'ordre exponentielle.

• Une fonction est causale si elle est nulle pour $x < 0$, $f(x) = 0$ si $x < 0$.

• Elle continue par morceaux si elle n'admet que des points de discontinuités de première espèce (admettant une limite à gauche et une limite à droite).

• Elle est d'ordre exponentielle si elle est bornée par une exponentielle i.e., s'il existe des constantes réelles $M \geq 0$ et α telles que

$$|f(x)| \leq Me^{\alpha x}, \quad \forall x \geq x_0.$$

• Les fonctions usuelles $\sin(\omega x)$, x^2, e^x ne sont pas causales, une façon de créer des fonctions causales est d'utiliser la fonction de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Par exemple la fonction $f(x) = e^x$ n'est pas une fonction causale, mais si en multiplier par $H(x)$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x H(x) \\ &= \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

3.2 Définition de transformation de Laplace

Définition 3.1. La transformation de Laplace d'une fonction de C_L est définie par

$$\mathcal{L}(f(x))(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

s est ici une variable complexe (fréquence) et $F(s)$ une fonction complexe.

Remarques 3.1. 1) F est définie par une intégrale impropre qui ne converge pas toujours si $f \notin C_L$.
2) Si f est discontinue en 0, la borne inférieure de l'intégrale devrait être notée 0^+.

Exercice 3.1. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes

$$1)\ f(x) = H(x)e^{2x} = \begin{cases} e^{2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \qquad 2)\ g(x) = H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Solution 1) Soit $F(s) = \mathcal{L}(f(x))(s)$, donc

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(2-s)x} dx \\ &= \frac{1}{2-s} [e^{(2-s)x}]_0^{+\infty}. \end{aligned}$$

Soit $s = \alpha + i\beta \Rightarrow e^{(2-s)x} = e^{(2-\alpha)x}e^{-i\beta x}$, donc

$$lim_{x\to+\infty}\left|e^{(2-s)x}\right| = lim_{x\to+\infty}e^{(2-\alpha)x} = 0 \text{ si } \alpha > 2, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2-s}[e^{(2-s)x}]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2-s}(0-1) \\ &= \frac{1}{s-2}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$F(s) = \frac{1}{s-2}, \quad Re(s) > 2.$$

2) Soit $G(s) = \mathcal{L}(g(x))(s)$, donc

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx}H(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-sx}dx \\ &= \frac{-1}{s}[e^{-sx}]_0^{+\infty}. \end{aligned}$$

Soit $s = \alpha + i\beta \Rightarrow e^{-sx} = e^{-\alpha x}e^{-i\beta x}$, donc

$$lim_{x\to+\infty}\left|e^{-sx}\right| = lim_{x\to+\infty}e^{-\alpha x} = 0 \text{ si } \alpha > 0, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{-1}{s}[e^{-sx}]_0^{+\infty} \\ &= \frac{-1}{s}(0-1) \\ &= \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$G(s) = \frac{1}{s}, \quad Re(s) > 0.$$

Théorème 3.1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que*

(i) $f(x) = 0, \ \forall x < 0,$

(ii) *f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,*

(iii) *il existe des constantes $M \geq 0$ et r telles que*

$$\forall x \geq x_0; |f(x)| \leq Me^{rx}.$$

Alors, la transformée de Laplace de f existe pour tout $Re(s) > r$.

Preuve. On a

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx = \int_0^{x_0} e^{-sx} f(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx.$$

L'intégrale $\int_0^{x_0} e^{-sx} f(x)dx$ existe car f est continue par morceaux. Concernant l'autre intégrale, notons que

$$\begin{aligned} \left|e^{-sx} f(x)\right| &= \left|e^{-(\alpha+i\beta)x} f(x)\right| \\ &= e^{-\alpha x} \left|f(x)\right| \\ &\leq Me^{-(\alpha-r)x}. \end{aligned}$$

Or $\int_{x_0}^{+\infty} Me^{-(\alpha-r)x}dx$ converge car $Re(s) = \alpha > r$, donc d'après le critère de comparaison des intégrales généralisées, l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} \left|e^{-sx} f(x)\right| dx$ converge aussi, ce qui entraine que $\int_{x_0}^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx$ existe. Par conséquent $\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx$ existe dans le demi-plan

$$\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > r\}.$$

$\square$

Exercice 3.2. Calculer la transformée de Laplace de

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x^n, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Solution On a

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot x^n dx = I_n,$$

une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= [-\frac{x^n}{s} e^{-sx}]_0^{+\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot e^{-sx} dx \\ &= \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot e^{-sx} dx, \quad \text{car } lim_{x\to+\infty}(-\frac{x^n}{s} e^{-sx}) = 0, \text{ si } \alpha > 0 \text{ avec } s = \alpha + i\beta, \end{aligned}$$

i.e.,

$$I_n = \frac{n}{s} \cdot I_{n-1}.$$

Par la récurrence, on obtient

$$I_n = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \times ... \times \frac{1}{s} \cdot I_0,$$

et

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx \\ &= \frac{1}{s}, \text{ si } \alpha > 0. \end{aligned}$$

Donc

$$I_n = \frac{n}{s} \times \frac{n-1}{s} \times ... \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s}, \quad Re(s) > 0,$$

i.e.,

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad Re(s) > 0.$$

3.3 Propriétés de la transformée de Laplace

1) Linéarité La transformée de Laplace est une application linéaire. Plus précisément, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pour toutes fonctions f, g d'abscisses de sommabilité respectives r, σ, alors

$$\mathcal{L}(\alpha f(x) + \beta g(x))(s) = \alpha F(s) + \beta G(s),$$

où $F(s) = \mathcal{L}(f(x))(s),\ G(s) = \mathcal{L}(g(x))(s)$ et $Re(s) > \max(r, \sigma)$.

Preuve. En effet, si les fonctions f et g admettent les transformées de Laplace

$$\mathcal{L}(f(x))(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx, \quad \mathcal{L}(g(x))(s) = G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x) dx,$$

alors on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha f(x) + \beta g(x))(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx + \beta \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x) dx \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s). \end{aligned}$$

• Si les abscisses de sommabilité de f et g sont respectivement r et σ, alors le domaine de sommabilité sur lequel $\alpha f + \beta g$ est défini est $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \max(r, \sigma)\}$. $\square$

2) Translation Si $\mathcal{L}(f(x))(s) = F(s)$ avec $Re(s) > r$, alors

$$\mathcal{L}(\tau_a f)(s) = e^{-as} F(s), \quad Re(s) > r.$$

Où $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$.

Preuve. Posons $g(x) = \begin{cases} f(x-a), & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(g(x))(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x) dx \\
&= \int_0^{a} e^{-sx} g(x) dx + \int_a^{+\infty} e^{-sx} g(x) dx \\
&= \int_a^{+\infty} e^{-sx} f(x-a) dx,
\end{aligned}$$

on pose $x - a = t \Leftrightarrow dt = dx$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(g(x))(s) &= e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \\
&= e^{-as} F(s).
\end{aligned}$$

□

Exercice 3.3. Trouver la transformée de Laplace de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < a \\ 2, & x > a \end{cases}.$$

Solution On a $f(x) = H(x) + H(x-a)$, où $H(x)$ est la fonction de Heaviside, et soit $F(s) = \mathcal{L}(f(x))(s)$, donc $F(s) = \mathcal{L}(H(x))(s) + \mathcal{L}(\tau_a H)(s)$,
i.e.,

$$F(s) = \frac{1}{s} + e^{-as} \cdot \frac{1}{s}, \quad Re(s) > 0.$$

3) Propriété Si $F(s) = \mathcal{L}(f(x))(s)$, alors

$$\mathcal{L}(f(x)e^{-\alpha x})(s) = F(s+\alpha), \quad Re(s+\alpha) > r.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(x)e^{-\alpha x})(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) e^{-\alpha x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+s)x} f(x) dx \\
&= F(s+\alpha).
\end{aligned}$$

□

4) Changement d'échelle Si $\mathcal{L}(f(x))(s) = F(s)$, alors

$$\mathcal{L}(f(\lambda x))(s) = \frac{1}{\lambda}F(\frac{s}{\lambda}),\ \lambda > 0.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(\lambda x))(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(\lambda x)dx, \quad \text{on pose } t = \lambda x \Leftrightarrow dt = \lambda dx \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{\lambda}t} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\lambda}F(\frac{s}{\lambda}).
\end{aligned}$$

□

4) Conjugaison complexe Si $\mathcal{L}(f(x))(s) = F(s)$, alors

$$\mathcal{L}(\overline{f(x)})(s) = \overline{F}(\overline{s})$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\overline{f(x)})(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx}\overline{f(x)}dx \\
&= \overline{\int_0^{+\infty} e^{-\overline{s}x} f(x)dx} \\
&= \overline{F}(\overline{s}).
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1. *La transformée de Laplace d'une fonction localement sommable f, est une fonction holomorphe dans le domaine de sommabilité $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > r\}$ et on a la formule*

$$F^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} (-x)^n f(x)e^{-sx}dx = (-1)^n \mathcal{L}(x^n f(x))(s).$$

Exercice 3.4. Déterminer la transformée de Laplace de x^n, d'après la Proposition précédente.

Solution On a

$$\mathcal{L}(x^n f(x))(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad \text{ici } f(x) = 1,$$

donc on a

$$\mathcal{L}(x^n)(s) = (-1)^n (\frac{1}{s})^{(n)}, \quad Re(s) > 0.$$

En utilisant la dérivée successive d'ordre n, on peut démontrer par la récurrence que

$$(\frac{1}{s})^{(n)} = \frac{n!}{(-1)^n s^{n+1}},$$

i.e.,

$$\mathcal{L}(x^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad Re(s) > 0.$$

3.4 Transformée de la dérivée

Théorème 3.2. *Si f' est continue par morceaux sur tout fermé $[0, x_0]$ et si $\mathcal{L}(f(x))(s) = F(s)$ et s'il existe $M > 0$ et r telles que $|f(x)| \leq Me^{rx}$, $\forall x \geq x_0$ alors*

$$\mathcal{L}(f'(x))(s) = sF(s) - f(0^+), \quad Re(s) > r.$$

Preuve. On a

$$\mathcal{L}(f'(x))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x)dx,$$

en intégrant par parties on obtient

$$\mathcal{L}(f'(x))(s) = [e^{-sx} f(x)]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx.$$

Comme $lim_{x\to+\infty} e^{-sx} f(x) = 0$, car

$$\begin{aligned} lim_{x\to+\infty} \left|e^{-sx} f(x)\right| &= lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha x} |f(x)|, \quad s = \alpha + i\beta \\ &\leq lim_{x\to+\infty} M e^{(r-\alpha)x} = 0, \quad \text{avec } Re(s) > r \end{aligned}$$

donc, $[e^{-sx} f(x)]_0^{+\infty} = -f(0^+)$
$f(0^+)$ représentant la limite à droite de $f(x)$ quand $x \to 0$.
D'où

$$\mathcal{L}(f'(x))(s) = sF(s) - f(0^+), \quad Re(s) > r.$$

□

Généralisation Si f'' vérifie à son tour les hypothèses du théorème, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f''(x))(s) &= s\mathcal{L}(f'(x))(s) - f'(0^+) \\ &= s(sF(s) - f(0^+)) - f'(0^+), \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{L}(f''(x))(s) = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+).$$

• On peut démontrer par la récurrence que

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(x))(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - ... - s f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+).$$

Cas particulier Si $f(0^+) = f'(0^+) = ... = f^{(n-1)}(0^+) = 0$, on a

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(x))(s) = s^n F(s).$$

Remarque 3.1. En général, si $f(x)$ est discontinue aux points $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$, alors

$$\mathcal{L}(f'(x))(s) = sF(s) - f(0^+) - \sum_{k=1}^{n} e^{-sx_k}(f(x_k^+) - f(x_k^-)).$$

Proposition 3.2. *Si* $\mathcal{L}(f(x))(s) = F(s)$*, alors*

$$\mathcal{L}(\int_0^x f(t)dt)(s) = \frac{F(s)}{s}, \quad Re(s) > \max(0, r).$$

Preuve. Posons $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. D'après le précédent on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g'(x))(s) &= s\mathcal{L}(g(x))(s) - g(0^+) \\ &= s\mathcal{L}(g(x))(s), \end{aligned}$$

car $g(0) = 0$, or $g'(x) = f(x)$, d'où $\mathcal{L}(g(x))(s) = \mathcal{L}(f(x))(s)$, on en déduit que $s\mathcal{L}(g(x))(s) = \mathcal{L}(f(x))(s)$.
i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\int_0^x f(t)dt)(s) &= \frac{\mathcal{L}(f(x))(s)}{s} \\ &= \frac{F(s)}{s}. \end{aligned}$$

□

3.5 Transformation de Laplace inverse

Soit $F(s)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(x)$. On appelle transformée de Laplace inverse, ou original de $F(s)$, la fonction $f(x)$, on note $f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(x)$.

Exemple 3.1. 1) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2})(x) = xH(x)$.
2) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+4})(x) = \cos(2x)H(x),$ car $\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$.

• On démontre que si les fonctions f considérées possèdent les propriétés énoncées au début du chapitre, i.e.,
• Une fonction causale.
• Continue par morceaux sur tout fermé $[0, x_0]$.
• D'ordre exponentiel.
L'original $f(x)$ d'une fonction $F(s)$ est unique sur tout sous-ensemble où il est continu.
La recherche de l'original conduit à étudier les propriétés de l'application $F(s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\to} f(x)$, appelée transformation de Laplace inverse.

3.6 Propriétés de la transformation de Laplace inverse

1) Linéarité L'inverse d'une application linéaire étant linéaire

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s))(x) = \alpha\mathcal{L}^{-1}(F(s))(x) + \beta\mathcal{L}^{-1}(G(s))(x).$$

• D'une façon générale pour obtenir l'original d'une fraction rationnelle $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, on utilise sa décomposition en éléments simples.

Exercice 3.5. Trouver l'original de $F(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2+4)}$.

Solution La décomposition de $F(s)$ s'écrit

$$\frac{s+1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{cs+d}{s^2+4},$$

le calcul donne $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $c = \frac{-1}{4}$, $d = \frac{-1}{4}$,
d'où

$$f(x) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2})(x) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s})(x) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+4})(x) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+4})(x),$$

i.e.,

$$f(x) = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{8}\sin(2x))H(x).$$

2) Original de $F(as)$, $a > 0$ Soit $f(x)$ l'original de $F(s)$, i.e., $f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(x)$, on a

$$\begin{aligned} F(as) &= \int_0^{+\infty} e^{-asx} f(x)dx, \quad y = ax \Leftrightarrow dy = adx \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-sy} f(\frac{y}{a})dy, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} F(as) &= \frac{1}{a}\mathcal{L}(f(\frac{x}{a}))(s) \\ &= \mathcal{L}(\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}))(s), \end{aligned}$$

i.e.,

$$\mathcal{L}^{-1}(F(as))(x) = \frac{1}{a}f(\frac{x}{a}).$$

3) Original de $F(s+a)$ Soit $f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(x)$, on a

$$\begin{aligned} F(s+a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)x} f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-sx}(e^{-ax}f(x))dx \\ &= \mathcal{L}(e^{-ax}f(x))(s), \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s+a))(x) = e^{-ax}f(x).$$

Exemple 3.2. 1) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s+a}{(s+a)^2+a^2})(x) = e^{-ax}\cos(ax),\ x \geq 0$
2) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{a}{(s+a)^2+a^2})(x) = e^{-ax}\sin(ax),\ x \geq 0$

Exercice 3.6. Trouver l'original de $F(s) = \frac{s}{s^2+s+1}$

Solution On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{s}{s^2+s+1} &= \frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

donc

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}})(x) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}})(x),$$

i.e.,

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x),\ x \geq 0.$$

4) Original de $F(s) \times G(s)$

Théorème 3.3. *Si* $\mathcal{L}^{-1}(F(s))(x) = f(x)$ *et* $\mathcal{L}^{-1}(G(s))(x) = g(x)$*, alors*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s) \times G(s))(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt,$$

l'intégrale $\int_0^x f(t)g(x-t)dt$ *est appelée produit de convolution de* f *par* g *est notée* $(f\star g)(x)$

• On vérifie facilement que $(f\star g)(x)=(g\star f)(x)$.

Exercice 3.7. Trouver l'original de $F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}$

Solution Soit $f(x)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))(x)$, on a

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2})(x)=x \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s+1})(x)=e^{-x},$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2(s+1)})(x) &= \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1})(x)\\ &= \int_0^x te^{-(x-t)}dt,\end{aligned}$$

i.e.,

$$f(x)=e^{-x}+x-1,\ x\geq 0.$$

3.7 Tableaux de quelques fonctions usuelles

Le tableaux ci-dessous donne quelques transformées de Laplace des fonctions usuelles.

$f(x)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))(x)$	$F(s)=\mathcal{L}(f(x))(s)$
$H(x)$	$\frac{1}{s}, \quad Re(s)>0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}, \quad Re(s)>a$
$\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad Re(s)>0$
$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad Re(s)>0$
$x^\alpha,\ \alpha>-1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad Re(s)>0$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad Re(s)>0$
$f(ax)$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
$e^{-ax}f(x)$	$F(s+a)$
$f(x-a)H(x-a)$	$e^{-as}F(s)$

3.8 Application de la transformation de Laplace aux équations différentielles

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_ny^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+...+a_0y(x)=f(x).$$

Soit $\mathcal{L}(y(x))(s) = Y(s)$, alors

$$\mathcal{L}(y'(x))(s) = sY(s) - y(0) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(y''(x))(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0),$$

et plus généralement

$$\mathcal{L}(y^{(n)}(x))(s) = s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - ... - y^{(n-1)}(0).$$

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle précédente, on obtient donc, par suite de la linéarité

$$(a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0)Y(s) + \phi(s) = F(s),$$

équation dans laquelle $\phi(s)$ représente un polynôme de degré $(n-1)$ en s contenant $y(0), y'(0), ..., y^{(n-1)}(0)$. On en déduit

$$Y(s) = \frac{F(s) - \phi(s)}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0},$$

et par conséquent, en appliquant la transformation inverse

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(x).$$

Exercice 3.8. Trouver la solution de l'équation différentielle suivante

$$y'' - 2y' + y = xe^x, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0. \tag{3.1}$$

Solution Soit $\mathcal{L}(y(x))(s) = Y(s)$, donc $\mathcal{L}(y'(x))(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$, $\mathcal{L}(y''(x))(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s$.
En appliquant la transformation de Laplace à l'équation (3.1), on obtient

$$\mathcal{L}(y''(x))(s) - 2\mathcal{L}(y'(x))(s) + \mathcal{L}(y(x))(s) = \mathcal{L}(xe^x)(s),$$

ce qui implique que

$$s^2Y(s) - s - 2sY(s) + 2 + Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2},$$

i.e.,

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^4} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1},$$

en appliquant la transformation de Laplace inverse, on obtient

$$y(x) = e^x(\frac{1}{6}x^3 - x + 1).$$

3.9 Résolution des équations intégrales

La transformée de Laplace permet d'étudier un grand nombre d'équations intégrales.
• Une équation intégrale de Volterra de seconde espèce est une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt = g(x),$$

où $g,\ k$ sont des fonctions connues et φ une fonction inconnue, la fonction k est le noyau de cette équation. On considère le cas où le noyau dépend seulement de la différence $x - t$, i.e., $k(x,t) = k(x-t)$ avec k à support dans $\mathbb{R}_+$. Soient F, G et K les transformées de Laplace respectives de $\varphi,\ g$ et k. En appliquant aux deux membres de l'équation ci-dessus la transformée de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}(\varphi(x))(s) - \mathcal{L}\left(\int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt\right)(s) = \mathcal{L}(g(x))(s),$$

alors on a

$$\mathcal{L}(\varphi(x))(s) - \mathcal{L}\left((k\star\varphi)(x)\right)(s) = \mathcal{L}(g(x))(s),$$

d'où

$$F(s) - K(s)F(s) = G(s),$$

par conséquent

$$F(s) = \frac{G(s)}{1-K(s)}, \quad K(s) \neq 1.$$

L'original $\varphi(x)$ de $F(s)$ est la solution de l'équation intégrale.

Exercice 3.9. Déterminer la solution de l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x) - \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt = x^2. \tag{3.2}$$

Solution Soit $F(s) = \mathcal{L}(\varphi(x))(s)$.
L'équation (3.2) s'écrit sous la forme

$$\varphi(x) - \sin(x)\star\varphi(x) = x^2, \quad x \geq 0.$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres, on a

$$F(s) - \frac{1}{s^2+1}F(s) = \frac{2}{s^3}, \quad Re(s) > 0,$$

i.e.,

$$F(s) = \frac{2}{s^5} + \frac{2}{s^3}, \quad Re(s) > 0.$$

Par conséquent

$$\varphi(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(x) = \frac{1}{12}x^4 + x^2.$$

3.10 Résolution des équations aux dérivées partielles

La méthode de la transformée de Laplace peut-être utilisé pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles comme le montre l'exemple suivant

Exemple 3.3. Résoudre l'équation suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ avec}$$

$$u(x,0) = \sin(x),\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0,\ 0 < x < \pi,\ t > 0.$$

Solution Soit $U(x,s) = \mathcal{L}(u(x,t))(s)$ la transformée de Laplace de $u(x,t)$. On a

$$\mathcal{L}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t})(s) = \mathcal{L}(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2})(s). \tag{3.3}$$

On a $\mathcal{L}(\frac{\partial u}{\partial t})(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dt$ et puisque $\mathcal{L}(f'(x))(s) = sF(s) - f(0)$, alors

$$\mathcal{L}(\frac{\partial u}{\partial t})(s) = sU(x,s) - u(x,0) = sU(x,s) - \sin(x),$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(s) &= \mathcal{L}(\frac{\partial v}{\partial x})(s),\ v = \frac{\partial u}{\partial x} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} dt \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} e^{-st} v(x,t) dt \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dt \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x,t) dt \\
&= \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2},
\end{aligned}$$

alors l'équation (3.3) devient

$$\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} = sU(x,s) - \sin(x),$$

i.e.,

$$\frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - sU(x,s) = -\sin(x).$$

C'est une équation différentielle de second ordre à coefficient constant, alors la solution est

$$U(x,s) = y_H(x) + y_p(x).$$

L'équation homogène est

$$(H):\ \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - sU(x,s) = 0,$$

l'équation caractéristique est $r^2 - s = 0 \Rightarrow r_1 = \sqrt{s},\ r_2 = -\sqrt{s}$, donc on a

$$y_H(x) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x},\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R} \text{ et } y_p(x) = \frac{\sin(x)}{1+s},$$

alors la solution générale est

$$U(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{\sin(x)}{1+s},\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

On a $U(0,s) = c_1 + c_2$ et $U(\pi,s) = c_1 e^{\sqrt{s}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{s}\pi}$, d'autre part on a
$U(0,s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(0,t) dt = 0$,
i.e.,

$$c_1 + c_2 = 0. \tag{3.4}$$

Et $U(\pi, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}u(\pi, t)dt = 0$
i.e.,

$$c_1 e^{\sqrt{s}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{s}\pi} = 0. \tag{3.5}$$

De l'équation (3.4) et l'équation (3.5), on obtient

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Alors la solution générale est

$$U(x, s) = \frac{\sin(x)}{1+s}.$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, alors on a

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}(U(x,s))(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}(\frac{\sin(x)}{1+s})(t) \\ &= e^{-t}\sin(x). \end{aligned}$$

Exercice 3.10. Soit la fonction Gamma

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0.$$

1) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.
2) Calculer la transformée de Laplace de la fonction $x^\alpha H(x)$, où $H(x)$ est la fonction de Heaviside et $\alpha > -1$.
3) Déduire $\mathcal{L}(x^n H(x))(s)$.
4) Calculer $\mathcal{L}(\sqrt{x})(s)$.

Solution 1) On a

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt \\ &= [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \text{ par partie} \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)\times ... \times 2\times 1\times \Gamma(1), \end{aligned}$$

et $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, ce qui implique que $\Gamma(n+1) = n!$.
2) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x^\alpha H(x))(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot x^\alpha dx, \text{ on pose } sx = t \Leftrightarrow dt = sdx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} (\frac{t}{s})^\alpha \frac{dt}{s} \\
&= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \cdot \Gamma(\alpha + 1).
\end{aligned}$$

3) Si $\alpha = n$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x^n H(x))(s) &= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}$$

4) Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sqrt{x})(s) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{s^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt, \text{ on pose } t = x^2 \Leftrightarrow dt = 2xdx \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\
&= 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{L}(\sqrt{x})(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}.$$

Bibliographie

[1] J. Bass. *Cours de Mathématiques, tome1*. Edition Masson et Cie-Paris, 1964.

[2] N. Boccara. *Intégration*. Ellipses, 1995.

[3] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, Paris, 1999.

[4] E. H. Laamri. *Mesure, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions*. Dunod, Paris, 2001.

[5] A. Lesfari. *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*. Ellipses, 2012.

[6] F. Roddier. *Distributions et transformation de Fourier*. Ediscience, 1971.