



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - Msila

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
كلية التكنولوجيا

المسيلة في : ٠٩ ماي ٢٠٢٤



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - Msila

رقم: 121 / 2024

شهادة نشر دروس على الخا

بناءً على إشهاد مسؤول خلية التعليم الإلكتروني بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة رقم: 2024/251

يشهد نائب العميد المكلف بالدراسات والمسائل المرتبطة بالطلبة، بأن الأستاذ: دغم شيكوش ابراهيم (أستاذ محاضر أ') قام بنشر دروس على أرضية التعليم عن بعد Moodle، للمقرر الدراسي (المقياس):

Cours et TD : Vibrations des machines tournantes

مستوى: الأولى ماستر، تخصص: Maintenance industrielle

نائب العميد المكلف بالدراسات
والمسائل المرتبطة بالطلبة

نائب العميد المكلف بالدراسات
والمسائل المرتبطة بالطلبة
سراجح فؤاد



أصدرت هذه الشهادة بطلب من المعني لاستعمالها في حدود ما يسمح به القانون.

المسلة في : ٥٦ ٢٠٢٤

رقم:... 134/2024/GE/...

شهادة إدارية

بخصوص مطبوعة الدروس الخاصة بالأستاذ

لدغم شيكوش إبراهيم

بناءً على محضر اللجنة العلمية لقسم الهندسة الكهربائية رقم 107/2024 المنعقد بتاريخ 04 مارس

2024 والمتضمن تعين الخبراء: الأستاذ دفداد المبروك أستاذ محاضر "أ" بجامعة المسيلة، الأستاذ

شريف بلال جمال الدين أستاذ محاضر "أ" بجامعة المسيلة والأستاذة لطرش سامية أستاذة محاضرة "أ"

"بجامعة سطيف 01 وذلك لتقييم مطبوعة الدروس الخاصة بالأستاذ لدغم شيكوش إبراهيم أستاذ

محاضر "أ" بقسم الهندسة الكهربائية لجامعة المسيلة تحت عنوان "Vibrations des machines" tournantes

وبعد إطلاع رئيس اللجنة العلمية ورئيس القسم على التقارير الواردة و التي كانت كلها

إيجابية، وعليه فإن اللجنة لا ترى مانعاً أن تتخذ سندًا في تدريس طلبة السنة الأولى ماستر صيانة

صناعية، شعبة كهرو ميكانيك ميدان علوم و تكنولوجيا وأن تعتمد في أي تقييم للمسار العلمي للأستاذ

المعني.

رئيس القسم
أ. د. زغلاش سمير



رئيس اللجنة العلمية
أ. د. بوقدة عبد الرحمن

ملاحظة: سلمت هذه الشهادة للمعني(ة) لاستعمالها في حدود ما يسمح به القانون.

République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed BOUDIAF-M'sila



Cours

Spécialité : Master

Maintenances industrielles

Vibrations des machines tournantes

Préparé par :

Dr. Brahim LADGHEM CHIKOUCHE

M'sila 2024

Contenu de la matière :

Chapitre I : Introduction à la dynamique des rotors.

Composants d'un rotor

- Le disque
- L'arbre
- Les paliers
- Le balourd

Chapitre II : Principe de Hamilton.

Chapitre III : Formulation énergétique.

- Energie cinétique du disque.
- Energie cinétique du rotor.
- Energie de déformation du disque.
- Energie de déformation du rotor.
- Travail des forces extérieures, du balourd, des paliers

Chapitre IV : Modélisation du rotor et équations du mouvement.

- Modèle analytique
- Modèle Éléments Finis

Chapitre V : Vitesses critiques – Diagrammes de Campbell.

Chapitre VI : Instabilité.

Chapitre VII : Techniques d'équilibrage des machines tournantes.

Chapitre I : Introduction à la dynamique des rotors

Composants d'un rotor :

- **Le disque**
 - **L'arbre**
 - **Les paliers**
 - **Le balourd**
-

I.1. Historique de la dynamique des rotors

L'histoire de la dynamique des rotors s'étend sur au moins 140 ans. Elle commence avec l'apparition du premier article sur la dynamique des rotors publié en 1869 par William John Macquorn Rankine dans le journal 'The Engineer', dont l'intitulé est 'On the centrifugal force on rotating shafts'. Dans cet article, l'auteur tente d'expliquer le comportement des machines tournantes lors du passage de certaine vitesse dite vitesse critique vapeur en régime supercritique en 1889 en opérant à une vitesse de rotation d'environ sept fois la vitesse critique.

Au début, la préoccupation majeure pour les chercheurs et les concepteurs des machines tournantes était de prédire les vitesses critiques pour éviter la résonance. Dunkerley en 1894, dérive une formule empirique permettant de calculer la plus faible vitesse critique d'un système tournant à plusieurs disques. Il a été le premier qui a utilisé le terme "Vitesse critique" pour la vitesse de rotation de résonance.

Le premier papier entièrement consacré à la dynamique des rotors est celui de Henry Homan Jeffcott (1877-1965), publié en 1919 dans "Philosophical Magazine", intitulé "The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed : the effect of want of balance". Il a confirmé l'existence des vitesses supercritiques stables. Il proposa un modèle connu sous le nom de rotor de Jeffcott mais aussi sur le continent européen de De Laval. Le modèle présenté par Jeffcott est constitué d'un arbre flexible de masse négligeable monté sur appuis simples (rigides) et d'un disque rigide placé en son milieu dont le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre géométrique (présence d'un balourd).

Le modèle à deux degrés de liberté de Jeffcott (déplacements du centre du disque), a été largement étendu par la suite pour prendre en compte l'amortissement interne, les paliers flexibles et l'effet gyroscopique. Ce type de modèle peut être représentatif pour des rotors courts, qui sont plus rigides, comme par exemple un banc d'essai en laboratoire pour exprimer

clairement les phénomènes de bases, mais ne convient pas pour décrire le comportement vibratoire des turbines modernes, qui sont des structures élancées.

Après la deuxième guerre mondiale, le centre de recherche de l'Europe a été déplacé vers les États-Unis où la portée de la dynamique des rotors a été élargie pour tenir compte de divers autres phénomènes. Campbell en 1924, a publié un article dans le journal "ASME" intitulé "The protection of steam-turbine disk wheels from axial vibration", où il détailla les vibrations des turbines à vapeur. Leur diagramme représentant la vitesse critique par rapport aux points de croisement des courbes de fréquences naturelles et les lignes droites proportionnelles à la vitesse de rotation est maintenant largement utilisées et appelé le diagramme de Campbell.

Comme la vitesse de rotation peut augmenter au-dessus de la première vitesse critique, l'apparition des vibrations auto-excitées est devenue un problème grave. Dans certaines circonstances et sur un fonctionnement très particulier, il a été observé sur le comportement dynamique des machines tournantes le phénomène de "oil whip" chez les Anglo-saxons et le "fouet d'huile" chez les Français. Newkirk et Kimball, ont publiés deux articles intitulés "Shaft Whipping" et "Internal friction theory of shaft whirling" respectivement dans la revue "General Electric". Ils ont montré que le frottement interne des matériaux pourrait provoquer un mouvement instable. Ces phénomènes ; "oil whip" et "oil whirl", dans lequel le frottement qui amortit les vibrations provoque habituellement une vibration d'auto-excitation, ont attiré l'attention de nombreux chercheurs. En Aout 1925, Newkirk et Taylor, publient dans cette même revue un article intitulé "Shaft whipping due to oil action in journal bearings". Ils ont étudié une vibration instable appelée "fouet d'huile", due à un film d'huile dans les paliers. Hummel et Newkirk, ont confirmés à travers des études expérimentales, le rôle déstabilisant provoqué par les paliers à film d'huile. Ils ont observé par ailleurs qu'en dessous d'une certaine excentricité de fonctionnement ; c'est à dire lorsque le palier est faiblement chargé ; l'arbre est animé d'un mouvement de précession avec une fréquence proche de la moitié de la vitesse de rotation "half frequency whirl", alors que pour des excentricités plus importantes (i.e. charges importantes), le système redevient stable.

En 1926, Newkirk a observé un tourbillon en précession directe induite par un point chaud sur la surface du rotor, qui a été générée par le contact du rotor et du stator. Cette instabilité du point chaud "hot spot" est appelé l'effet de Newkirk.

Au milieu du 20^{ème} siècle, Hori en 1959, a réussi à expliquer les différentes caractéristiques fondamentales du fouet d'huile. Il a étudié la stabilité des mouvements de l'arbre en tenant en compte des forces de pression dues aux films d'huile. A peu près au même moment, d'autres types de vibrations induites ont attiré l'attention de nombreux chercheurs.

Traditionnellement, le nom "tourbillon / fouet d'huile" a été associée aux problèmes d'instabilité des paliers lubrifiés à huile qui historiquement, ont d'abord été reconnus et analysés. Au cours des dernières décennies, d'autres formes d'instabilités liées aux rotors à fluide ont été identifiées et signalés. C'est pourquoi le mot "huile" a été supprimé et remplacé par le mot générique "fluide", ce qui implique que non seulement l'huile comme un lubrifiant, a été responsable de l'instabilité du rotor. D'autres noms ont également été associés à des

vibrations latérales asynchrones du rotor tel que le "tourbillon". Ces derniers temps, ce nom est devenu populaire pour les paliers à fluide. Comme les phénomènes rapportés ci-dessous, sont cependant très similaires à un tourbillon et/ou à un fouet de fluide, les modèles mathématiques sont similaires. Il semble donc plus logique de choisir un nom commun. C'est pourquoi les vibrations auto-excitées ; décrites ci-dessus ; sont appelés "tourbillon de fluide" et ou "fouet de fluide".

Actuellement, la dynamique des rotors est un domaine de recherche très actif. Plusieurs chercheurs travail non seulement sur la dynamique linéaire des rotors, mais aussi dans la dynamique non linéaire à vitesses variables et dans le control actif des machines tournantes. Chaque année, de nombreuses conférences et séminaires scientifiques sur la dynamique des rotors sont déroulés. Ainsi que le nombre de documents publiés dans des revues scientifiques spécifiques et des livres augmente d'une manière importante.

I.2. Les éléments de rotor

Par définition, un rotor est un élément tournant autour d'un axe fixe. Le champ d'application des rotors est vaste, nous les trouvons dans les satellites géostationnaires animés d'une rotation libre, dans les machines tournantes industrielles qui constituent des structures assez complexes à analyser. Le rôle principal des rotors est de transformer un mode d'énergie selon les applications auxquelles ils sont destinés (l'aéronautique, l'industrie pétrolière, centrale électrique et hydraulique, l'industrie électronique et pharmaceutique...etc.), ils sont souvent composés de plusieurs tronçons et soumis à des sollicitations d'origines diverses.

Les éléments de base d'un rotor sont indiqués dans la figure 1.1 : le disque, l'arbre, les paliers et le balourd.

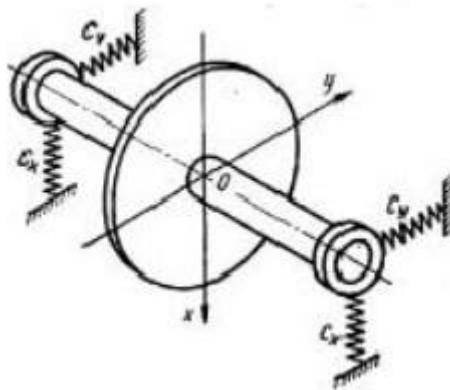


Figure 1.1. Eléments de base d'un rotor

- Les arbres (éléments principaux des machines tournantes).
- Les éléments de support et de positionnement (paliers hydrauliques, paliers à roulement, paliers magnétiques ... etc.).
- Les éléments de transmission de mouvement.
- Les éléments fonctionnels (roues aubages, broches, hélices... etc.).

I.2.a. Le disque

Le disque est supposé rigide et donc caractérisé seulement par son énergie cinétique. La figure 1.2 présente les repères de référence utilisés dans l'étude du rotor. Le repère $R_0(XYZ)$ définit un repère galiléen. $R(xyz)$ est le repère lié au disque. Le système d'axes (xyz) est repéré par rapport à XYZ par les trois angles d'Euler ψ , θ et φ .

Supposons que la position initiale du repère $R(xyz)$ lié au disque, était confondue avec celle du repère $R_0(XYZ)$. Le passage à la position xyz , s'effectue d'abord par une première rotation ψ autour de l'axe Z suivie d'une rotation de θ autour du nouvel axe x_1 ; enfin d'une dernière rotation φ autour de l'axe y .

Dans ces conditions, le vecteur rotation instantanée du repère $R(xyz)$ est donné par :

$$\vec{\omega}_{R/R_0} = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}x_1 + \dot{\varphi}y \quad (1.1)$$

Où Z , x_1 et y sont des vecteurs unitaires liés aux axes Z , x_1 et y

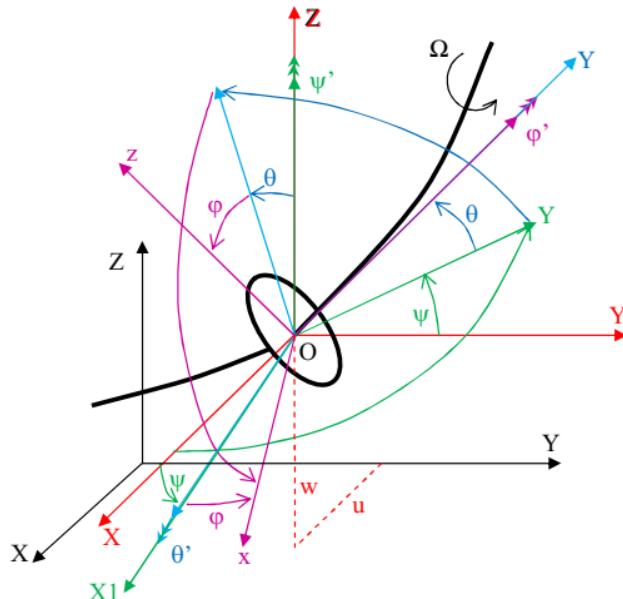


Figure 1.2. Repères liés au disque sur un arbre flexible en rotation

Où ψ , θ et φ sont les angles d'orientation du repère lié au disque par rapport au repère fixe (voir Figure 1.2).

L'énergie cinétique du disque autour de son centre d'inertie O, supposé situé sur l'axe de l'arbre, est calculée dans le repère $R(xyz)$. Dans ce repère, la vitesse angulaire du disque est donnée par :

$$\vec{\omega}_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Soient u et w les coordonnées de O dans R_0 , la coordonnée suivant y est constante. La masse du disque donnée par M_D et son tenseur d'inertie en O avec xyz directions principales d'inertie :

$$I_{IO} = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

L'énergie cinétique du disque est dans ce cas donnée par :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx}\omega_x^2 + I_{Dy}\omega_y^2 + I_{Dz}\omega_z^2) \quad (1.4)$$

L'expression de l'énergie cinétique peut être simplifiée. Les angles θ et ψ sont petits, la vitesse de rotation est constante $\dot{\phi} = \Omega$ et le disque symétrique ($I_{Dx} = I_{Dz}$). Dans ce cas, l'énergie cinétique du disque devient :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (1.5)$$

Terme constant Effet Coriolis

Le terme $I_{Dy} \Omega \dot{\psi} \& \theta$ représente l'effet gyroscopique (Coriolis)

Le terme $\frac{I_{Dy} \Omega^2}{2}$ est constant, et n'a donc pas d'influence dans les équations.

I.2.b. L'arbre

C'est un organe qui porte les roués. Il peut être rigide ou flexible, ces propriétés dépendent de son matériau.

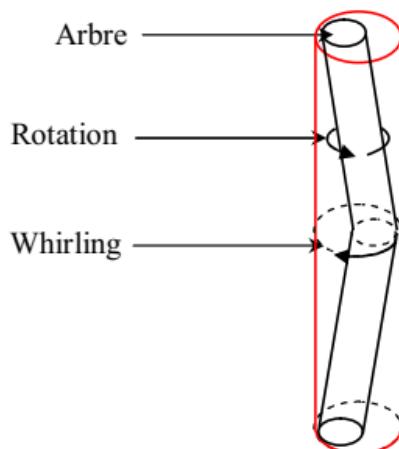


Figure 1.3. Mouvement de l'arbre : Rotation & whirling

L'arbre est considéré déformable dans l'analyse dynamique, cela permet de tenir compte des effets des déformations. Géométriquement, la section de l'arbre peut être constante

ou variable. L'étude en flexion devient complexe pour l'arbre à section variable du fait que le mouvement est décrit par les équations différentielles linéaires à coefficients variables dont les solutions sont les fonctions de Bessel.

L'arbre est représenté par une poutre de section circulaire et caractérisé par ses énergies cinétiques et de déformation. L'expression de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de l'expression de l'énergie cinétique du disque. Pour un élément de longueur L , l'énergie cinétique est donnée par :

$$T_s = \underbrace{\frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy}_{\text{Rotation}} + \underbrace{\rho IL\Omega^2}_{\text{Terme constant}} + \underbrace{2\rho I\Omega \int_0^L \dot{\psi}\theta dy}_{\text{Effet gyroscopique}} \quad (1.6)$$

L'énergie de déformation de l'arbre se calcule à partir de la déformation d'un point de la section droite de l'arbre

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon' \sigma d\tau \quad (1.7)$$

avec $\sigma = E\varepsilon$

E : module de Young.

ε, σ : déformation et contrainte suivant l'axe de l'arbre.

L'expression de la déformation est donnée par :

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (1.8)$$

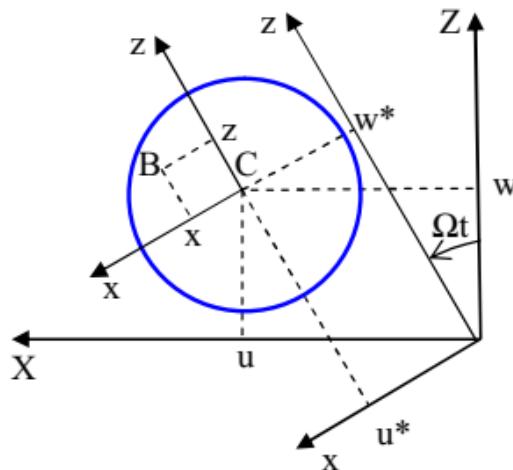


Figure 1.4. Section droite de l'arbre

D'après les expressions de la déformation et de la contrainte l'énergie de déformation, est donnée par :

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (1.9)$$

I.2.c. Le balourd

Le balourd initial est généralement réparti de manière continue et quelconque sur le rotor (voir Figure 1.5)

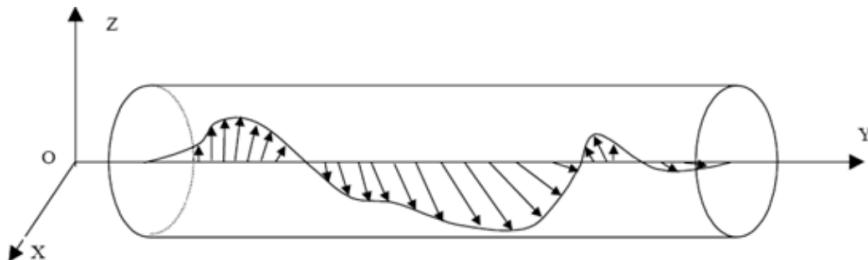


Figure 1.5. Répartition du balourd sur le rotor

Pour modéliser ce balourd, il est décomposé en masses concentrées situées dans différents plans (Figure 1.6). Ces masses sont supposées avoir le même effet que le balourd continu sur le comportement dynamique du rotor.

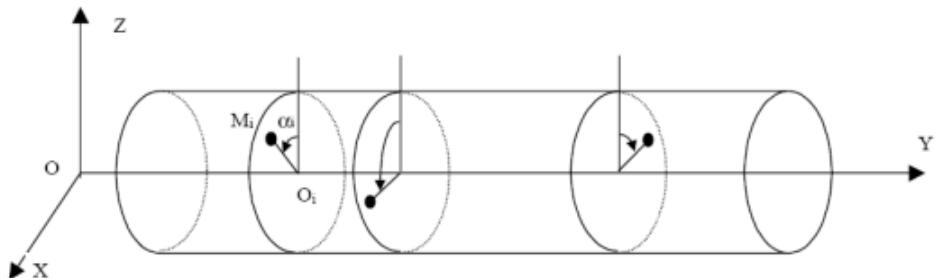


Figure 1.6. Modélisation de la répartition du balourd sur le rotor

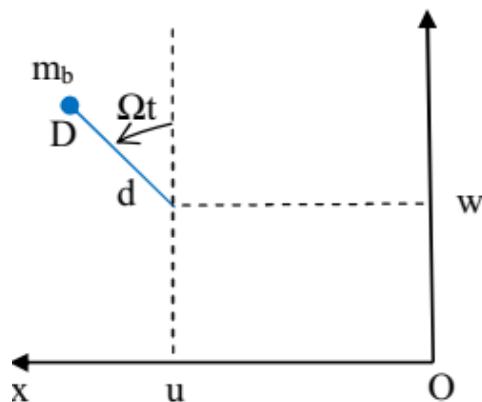


Figure 1.7. Position du balourd

La vitesse du point D (position du balourd) :

$$V = \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos(\Omega t) \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

et son énergie cinétique :

$$T_b = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \cos \Omega t - 2\Omega \dot{w} d \sin \Omega t) \quad (1.11)$$

En éliminant les termes constants et ceux liés à la masse m_u , négligeable devant celle du rotor, l'expression de l'énergie cinétique du balourd devient

$$T_u \approx m_u \Omega d (\dot{u} \cos(\Omega t) - \dot{w} \sin(\Omega t)) \quad (1.12)$$

I.2.d. Les paliers

Un palier comporte des caractéristiques de raideur et d'amortissements dans les deux plans, plus des termes croisés. Les forces induites par ces paliers sont dues au déplacement de l'arbre (repère R) par rapport au support (repère Rs). Elles ne dépendent donc pas du mouvement du repère Rs par rapport au repère R0.

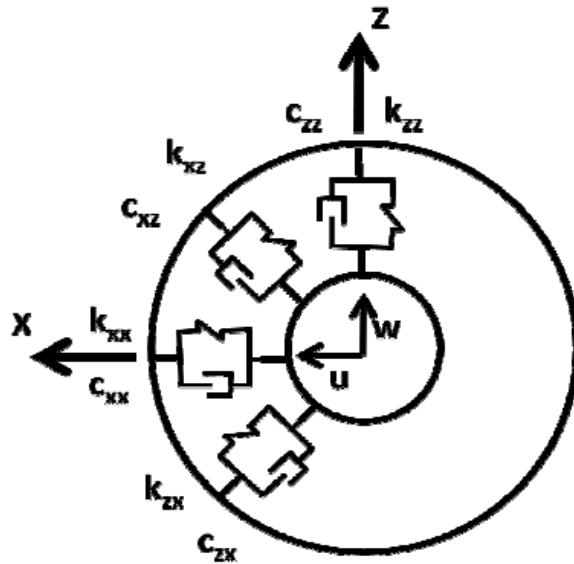


Figure 1.8. Amortissement et raideur du palier

Le travail virtuel des forces extérieures dues aux paliers agissant sur l'arbre se met sous la forme :

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w - c_{zx}\dot{u}\delta w \quad (1.13)$$

$$\delta W = F_u\delta u + F_w\delta w \quad (1.14)$$

I.3. Assemblage des pièces

Les pièces assemblées sur un arbre en rotation déplacent naturellement leurs centres de masse. C'est le cas des turbines, moteurs électriques, ... il est crucial de veiller sur le procédé d'assemblage pouvant faire de deux pièces assemblées un bloc balourdé.

Chapitre II : Principe de Hamilton

II.1. Introduction

Dans le principe de Hamilton pour un système mécanique, les variations possibles sont l'ensemble des déplacements virtuels qui ont été considérés dans le quatrième chapitre. Les positions des points matériels du système à tout moment peuvent être considérées comme déplacées de petites quantités arbitraires δr_i ($i = 1, 2, \dots, n$) à partir des positions r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) qu'elles occuperaient réellement dans le mouvement. Ces déplacements virtuels sont considérés réalisés sans variation de temps, mais ils peuvent eux-mêmes varier avec le temps.

Il convient d'exiger que les déplacements virtuels δr_i soient des fonctions continues et différentiables du temps. C'est alors, il est possible de considérer la variation des positions $r_i + \delta r_i$ comme une variable du système, de la même manière que les vecteurs de position r_i en fonction du temps qui détermine le mouvement réel du système. En utilisant cette approche, la vitesse des particules dans le mouvement varié à tout moment peut être donné par les expressions $\dot{r}_i + \delta \dot{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), où :

$$\delta \dot{r}_i = \frac{d}{dt} \delta r_i \quad (2.1)$$

Il est donc possible de considérer l'énergie cinétique δT du système pour une variation de la position. C'est une variation entre la nouvelle énergie cinétique et celle actuelle dans le même instant t comme suit :

$$\delta T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [(\dot{r}_i + \delta \dot{r}_i)^2 - \dot{r}_i^2] = \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i \delta \dot{r}_i \quad (2.2)$$

II.2. Principe d'Hamilton

L'intégrale de cette énergie cinétique durant tout le mouvement à partir de l'instant initial $t = t_0$ à l'instant final t est obtenue par la technique d'intégration par partie comme suit :

$$\delta T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [(\dot{r}_i + \delta \dot{r}_i)^2 - \dot{r}_i^2] = \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i \delta \dot{r}_i \quad (2.3)$$

$$\int_{t_0}^t \delta T dt = [\sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i \delta \dot{r}_i]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \delta r_i dt \quad (2.4)$$

En introduisant l'hypothèse que les déplacements virtuels sont égaux à zéro aux positions initiale et finale :

$$t = t_0 \text{ et } t = t_1 \Rightarrow \delta r_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Ceci implique que la variation de la position du système est entre les mêmes configurations initiale et finale au même temps que dans l'actuel mouvement. Donc le premier terme de l'équation ci-dessus est égal à zéro. Le terme qui reste peut-être simplifié par l'introduction de l'équation de mouvement pour chaque point matériel :

$$m_i \ddot{r}_i = F_i \text{ avec } i = 1, 2, \dots, n$$

Tel que F_i est la résultante des forces. On peut donc réécrire l'équation précédente comme :

$$\int_{t_0}^t (\delta T + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \delta r_i) dt = 0 \quad (2.5)$$

C'est le principe d'Hamilton pour un système dynamique. On remarque bien que seules les forces qui travaillent dans un déplacement virtuel doivent être incluses dans l'équation ci-dessus. Si ces forces sont en outre conservatrices, ou du moins dérivées d'une fonction potentielle, il est alors possible d'introduire une fonction potentielle U telle que :

$$\delta U = - \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i \quad (2.6)$$

Dans ce cas, et pour les systèmes holonomes soumis aux forces actives \vec{F}_i dérives d'un potentiel $U(\vec{r}_i, t)$ on peut donc introduire la fonction de Lagrange (Lagrangien) en fonction des coordonnées et des vitesses généralisées et du temps sous la forme suivante :

$$L(\vec{q} \ , \dot{\vec{q}} \ , t) = T(\vec{q} \ , \dot{\vec{q}} \ , t) - U(\vec{q} \ , t) \quad (2.7)$$

Le principe d'Hamilton pour un tel système est donné sous la forme :

$$\int_{t_0}^t \delta L dt = 0 \quad (2.8)$$

De plus, si le système est également holonome, de sorte que seuls les mouvements géométriquement possibles doivent être considérés, il est alors possible de réécrire l'équation ci-dessus :

$$\delta \int_{t_0}^t L dt = 0 \quad (2.9)$$

Dans la dérivation du résultat ci-dessus, il a été seulement montré que l'intégrale du lagrangien a une valeur stationnaire par rapport avec les mouvements voisins. Dans la plupart des applications, cependant, il est habituellement trouvé que cette valeur stationnaire est un minimum, bien que des exceptions se produisent. Il est donc important de souligner que le principe d'Hamilton n'est pas toujours un principe strict minimum. On peut également voir à partir de la dérivation ci-dessus que le principe d'Hamilton est essentiellement une forme intégrée de l'équation fondamentale. Une caractéristique importante du principe d'Hamilton,

est qu'il est indiqué sans référence à un système particulier de coordonnées. Enfin, il faut souligner que, bien que le principe de Hamilton soit d'un intérêt théorique considérable, il a peu de valeur pratique applications.

Les paramètres \vec{q} , $\dot{\vec{q}}$, t sont appelés coordonnées Lagrangiennes. Ils déterminent l'état de mouvement instantané du système, tandis que le mouvement dans le temps est déterminé par l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0 \quad (2.10)$$

qui constitue un système d'équations différentielles de second ordre de nombre égal au nombre de degré de liberté k . Hamilton a transformé ces équations pour avoir un système d'équations différentielles de premier ordre, mais cette fois de nombre doublé ($2k$). Pour déterminer l'état de mouvement du système, à la place de la vitesse généralisée $\dot{\vec{q}}$, Hamilton a proposé l'utilisation de la notion de la quantité de mouvement généralisée (moment conjugué ou encore impulsion généralisée), tel que :

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} \quad (2.11)$$

II.3. Fonction de Hamilton (le Hamiltonien)

Les « équations canoniques » de Hamilton constituent une autre façon d'exprimer les équations dynamiques du mouvement d'un système ayant k degrés de liberté, il existe $2k$ équations hamiltoniennes du premier ordre comparé à k équations lagrangiennes du second ordre.

Pour traiter la plupart des problèmes, la méthode hamiltonienne est moins pratique que le lagrangien. Cependant, dans certains domaines les équations de Hamilton et le point de vue hamiltonien sont d'une grande importance. Pour déterminer le mouvement d'un point matériel dans l'espace réel, Hamilton introduit une fonction spéciale dite fonction de Hamilton (ou simplement le Hamiltonien) sous la forme suivante :

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \vec{p}^T \dot{\vec{q}} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \quad (2.12)$$

Qu'on peut aussi l'écrire comme :

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^k p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (2.13)$$

Avec :

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

est la quantité de mouvement généralisée (**moment conjugué**) correspondante à la coordonnée q_j tel que :

- Si q_j est une longueur $\Rightarrow p_j$ est une quantité de mouvement linéaire,
- Si q_j est un angle $\Rightarrow p_j$ est un moment cinétique (moment angulaire).

En vertu de l'expression de l'énergie cinétique est de :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \cdot m \cdot \dot{\vec{q}}$$

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \vec{p}^T \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t) \quad (2.14)$$

Et si on remplace dans l'équation de mouvement de Lagrange on obtient :

$$\dot{\vec{p}} + \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = 0 \text{ et } \frac{\partial L}{\partial \vec{p}} = \dot{\vec{q}} - \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} = 0$$

d'où on tire les équations canoniques de Hamilton suivantes :

$$\vec{F}_q - \dot{\vec{p}} = - \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \quad \text{et} \quad \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \quad (2.15)$$

$$F_{q_j} - \dot{p}_j = \frac{\partial H(q_j, \dot{p}_j, t)}{\partial q_j} \quad \text{et} \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H(q_j, \dot{p}_j, t)}{\partial p_j} \quad (2.16)$$

Qui déterminent $2k$ équations différentielles de premier ordre.

II.4. Règle et procédure pour écrire la fonction et les équations d'Hamilton

- Ecrire la fonction lagrangienne $L = T - U$. Déterminer T et U ,
- Faire les dérivées $p_j = \partial \partial q L_j$,
- Résoudre ces équations simultanément pour chaque q_j en fonction de q_j , p_j , t et éliminer les vitesses généralisées q_j de la fonction hamiltonienne, H , pour avoir H seulement en fonction de q_j , p_j , t ,
- Pour avoir les équations d'Hamilton faire les dérivées :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H(q_j, \dot{p}_j, t)}{\partial p_j} \quad (2.17)$$

et dans chaque fois on obtient q_j . De même, effectuez la différenciation

$$F_{q_j} - \dot{p}_j = \frac{\partial H(q_j, \dot{p}_j, t)}{\partial q_j} \quad (2.18)$$

Nous avons donc $2k$ équations du premier ordre ne sont que les forces généralisées connues, trouvées de la manière habituelle sauf que les forces conservatrices non incluses.

II.5. Cas spéciaux de la fonction H

- **Cas (a)** : si toutes les forces sont conservatives avec celles fonctions de potentiel dans le temps, $F_{q_j} = 0$ et par conséquent :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H(q_j, \dot{p}_j, t)}{\partial p_j} \text{ et } \dot{p}_j = -\frac{\partial H(q_j, \dot{p}_j, t)}{\partial q_j} \quad (2.19)$$

- **Cas (b)** : si dans le système il n'y a pas de coordonnées de mouvement ou bien liaisons (le temps t n'intervient pas dans les équations de transformation).
- **Cas (c)** : si le système est conservatif :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

et si toutes les forces dérivent d'un potentiel :

$$F_{q_j} = 0$$

$$H = T + U = E_T \quad (2.20)$$

- **Cas (d)** : si le système est conservatif :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

et autres forces que les forces potentielles sont appliquées

$$F_{q_j} \neq 0$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d(T + U)}{dt} = \sum_{j=1}^k F_{q_j} \dot{q}_j \quad (2.21)$$

Donc, on dit que la variation dans le temps de l'énergie totale

$$(T + U) = E_T$$

est égale à la puissance fournie par les forces nonpotentielles.

II.6. Principe vibrationnel d'Hamilton

Soit un système holonome à k degrés de liberté dans un champ de forces de potentiel. Dans l'intervalle de temps $t_1 \leq t \leq t_2$ et par l'intermédiaire de l'intégrale :

$$S = \int_{t_2}^{t_1} L dt \quad (2.22)$$

Où L est le Lagrangien du système mécanique considéré et S est appelée action Lagrangienne entre les instants t_1 et t_2 . Sachant que

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, t) \text{ et } q_j = q_j(t)$$

donc l'action S est une fonction qui dépend des fonctions $q_j(t)$ dont elle dépend du mouvement du système.

Ces mouvements $q_j(t)$ peuvent être représentés dans une configuration à $(k+1)$ dimensions de coordonnées $(q_1, q_2, \dots, q_k, t)$. Quelle est, donc, parmi les trajectoires possibles, qu'est réelle ? La réponse est obtenue par le champ de forces actives agissant sur le système.

D'où le principe de Hamilton :

La trajectoire réelle du système mécanique considéré correspond à un extrémum (minimum) de l'action Lagrangienne S par rapport à toutes les trajectoires voisines et possibles qui partent de P_1 vers P_2 . En d'autres termes, parmi toutes les trajectoires possibles, le système pourrait suivre de P_1 (à t_1) vers P_2 (à t_2) une trajectoire pour laquelle l'intégrale (8.17) est extrémale (maximale ou minimal). Ce principe permet d'écrire :

$$\delta S = \int_{t_2}^{t_1} \delta L dt = 0 \quad (2.23)$$

Soit :

$$\delta S = \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] dt = 0 \quad (2.24)$$

Qu'est le principe vibrationnel :

Sachant que :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \Rightarrow \quad (2.25)$$

On porte cette expression dans l'équation (2.24) et sachant que $\delta q_j = 0$ à t_1 et $t_2 \Rightarrow$

$$\delta S = \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt = 0 \quad (2.26)$$

Si on choisit un déplacement quelconque

$$\delta q_d \neq 0 \text{ si } d = j \text{ et } \delta q_d = 0 \text{ si } d \neq j$$

On obtient les équations de Lagrange comme suit

$$\frac{\partial L}{\partial q_d} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_d} \right) = 0 \quad (2.27)$$

Chapitre III : Formulation énergétique

- **Energie cinétique du disque.**
 - **Energie cinétique du rotor.**
 - **Energie de déformation du disque.**
 - **Energie de déformation du rotor.**
 - **Travail des forces extérieures, du balourd, des paliers.**
-

III.1. Energie cinétique du disque

L'énergie cinétique du disque est la somme de l'énergie cinétique de translation et l'énergie cinétique de rotation du centre de masse C :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\vec{V}(C/R_0))^2 + \frac{1}{2} \{\omega\}_R^T [I_C(D)] \{\omega\}_R \quad (3.1)$$

Avec $\vec{V}(C/R_0)$ est le vecteur vitesse absolue de C , exprimé dans R_0 , obtenu en dérivant par rapport au temps le vecteur position \overrightarrow{OC} avec $\phi = \Omega$ constante :

$$\vec{V}(C/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} \right]_{R_0} = \frac{d}{dt} (u \vec{x}_0 + L_1 \vec{y}_0 + w \vec{z}_0) = \dot{u} \vec{x}_0 + \dot{w} \vec{z}_0 \quad (3.2)$$

L'expression de l'énergie cinétique du disque peut être déduite :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (3.3)$$

L'expression (3.3) peut être simplifiée car le disque est symétrique, les angles et sont petits (vibration linéaire) et la vitesse angulaire est constante. L'expression (3.3) devient alors :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (3.4)$$

L'expression (3.4) peut être simplifiée car le disque est symétrique, les angles et sont petits (vibration linéaire) et la vitesse angulaire est constante. L'expression (3.4) devient alors

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (3.5)$$

Le terme $I_{Dy} \Omega \dot{\psi} \theta$ représente l'effet gyroscopique.

III.2. Energie cinétique de l'arbre

L'arbre est représenté par une poutre continue de section circulaire constante, caractérisé par une énergie cinétique et une énergie de déformation. La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de celle du disque en intégrant sur la longueur de l'arbre. Sur la figure 3.1, on présente un élément d'arbre considéré comme un disque élémentaire. L'énergie cinétique de l'arbre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} T_a &= \int_0^L \left(\frac{1}{2} m_a (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{ax} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{ay} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \rho S \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \end{aligned} \quad (3.6)$$

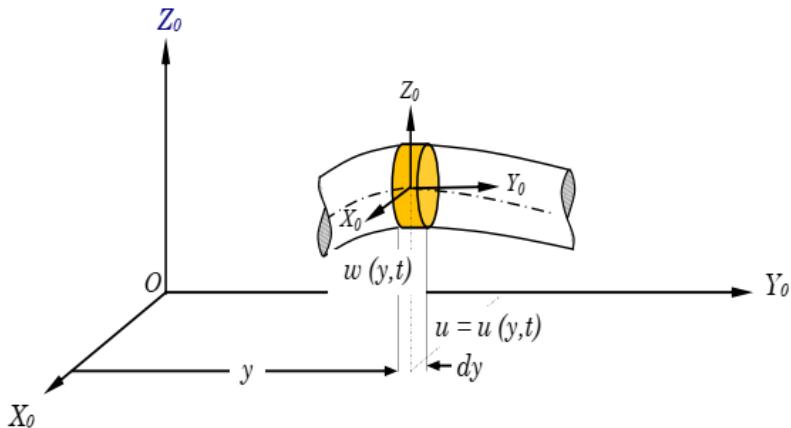


Figure 3.1. Elément d'arbre en flexion

Où ρ est la masse volumique de l'arbre, m_a est la masse par unité de longueur de l'arbre, S est l'aire de la section droite de l'arbre et $I = \pi R_1^4 / 4$ est le moment d'inertie diamétral, R_1 est le rayon de l'arbre.

- La première intégrale de (3.6) est l'expression classique de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion.
- La seconde intégrale de (3.6) correspond à l'effet secondaire de l'inertie de rotation.
- Le terme $\rho I L \Omega^2$ est constant et a une contribution nulle dans les équations du mouvement.
- La dernière intégrale de (3.6) représente l'**effet gyroscopique**.

III.3. Energie de déformation de l'arbre

Le point O_1 de la figure 3.2 est le centre géométrique d'une section de la poutre à l'état déformée, $B(x, z)$ est un point de cette section droite, \dot{u} et \dot{w} sont les déplacements du centre O_1 par rapport aux axes (O, X) et (O, Z) . La déformation longitudinale du point B s'écrit :

$$\varepsilon_{yy} = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (3.7)$$

L'énergie de déformation de l'arbre a comme expression

$$U_a = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} dV \quad (3.8)$$

Avec V est le volume de la poutre, σ_{yy} est la contrainte longitudinale. La relation entre la contrainte et la déformation est :

$$\sigma_{yy} = E \varepsilon_{yy} \quad (3.9)$$

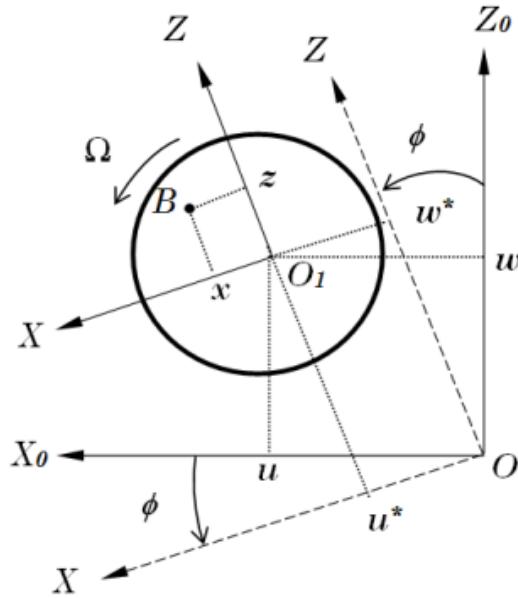


Figure 3.2. Section droite de l'arbre, mouvement dans le plan (O, X_0, Z_0)

Compte tenu de (3.9), l'expression (3.8) devient :

$$U_a = \frac{1}{2} E \int_V \varepsilon_{yy}^2 dV \quad (3.10)$$

En tenant compte de l'expression (3.7), l'énergie de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} U_a &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_{s_a}^L \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 ds dy \\ &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_{s_a}^L \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] ds dy \end{aligned} \quad (3.11)$$

Par suite de la symétrie de la section de l'arbre, l'intégrale correspondant au troisième terme de (3.11) est nulle. En introduisant les inerties diamétrales de la section droite par rapport à ($0, X$) et à ($0, Z$) on a :

$$I_x = \int_s z^2 ds \quad (3.12)$$

$$I_z = \int_s x^2 ds \quad (3.13)$$

et l'énergie de déformation de l'arbre a donc comme expression :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.14)$$

De préférable exprimer U_a en fonction des déplacements u et w . Le passage de u , w à \dot{u} , \dot{w} s'écrit (voir Figure 3.2) :

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \quad (3.15)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \quad (3.16)$$

En tenant en compte de (3.15) et (3.16), l'expression (3.14) devient alors :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.17)$$

Finalement, pour le cas le plus courant d'un arbre symétrique ($I_x = I_z = I$) l'énergie de déformation se simplifie à :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.18)$$

III.4. Energie cinétique du balourd

Le balourd (figure 3.3) est dû à une masse m_b située à la distance d du centre géométrique C du disque et son énergie cinétique doit être calculée. La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe (O , Y) et sa coordonnée selon cet axe est constante. Dans le repère R_0 , les coordonnées de la masse m_b sont :

$$O\vec{D} = O\vec{C} + C\vec{D} = \begin{Bmatrix} u + d \sin \Omega t \\ cte \\ w + d \cos \Omega t \end{Bmatrix}_{R_0} \quad (3.19)$$

D'où la vitesse absolue :

$$\vec{V}(D/R_0) = \left[\frac{d\vec{OD}}{dt} \right]_{R_0} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{Bmatrix}_{R_0} \quad (3.20)$$

et l'énergie cinétique sera :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b \left[\vec{V}(D/R_0) \right]^2 = \frac{1}{2} m_b (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d(\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t)) \quad (3.21)$$

Le terme $m_b \Omega^2 d^2 / 2$ est constant et donc sans influence sur les équations du mouvement. La masse m_b est négligée devant celle du disque, alors l'énergie cinétique du balourd peut se mettre sous la forme :

$$T_b \approx m_b \Omega d(\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (3.22)$$

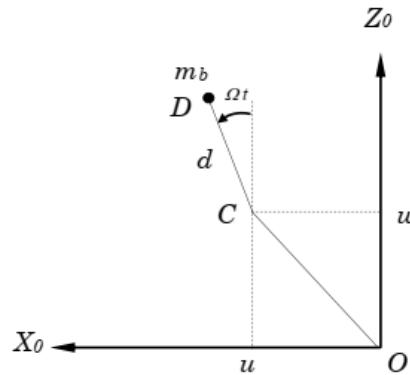


Figure 3.3. Paramétrage du balourd élémentaire

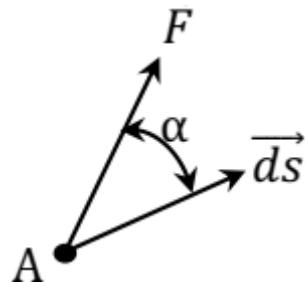
III.5. Travail des forces extérieures, du balourd, des paliers

Considérons un point matériel en A décrit une trajectoire curviligne sous l'action une force F variable en module et en direction. Le déplacement réalisé par A et \vec{ds} formant un angle α avec la force \vec{F} . Tel que :

$$\vec{ds} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (3.23)$$

Le travail mécanique élémentaire δA réalisé par cette force est le produit **scalaire** du vecteur force \vec{F} par le vecteur déplacement \vec{ds} , on écrit alors :

$$\delta A = (\vec{F}, \vec{ds}) = F \cdot ds \cdot \cos(\vec{F}, \vec{ds}) = F \cdot ds \cdot \cos \alpha = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (3.24)$$



Pour le $i^{ème}$ point matériel de masse m_i d'un système mécanique, la résultante de toutes les forces est la somme de la résultante des forces extérieures \vec{F}_i^{ext} , et celle des forces intérieures, \vec{F}_i^{int} , écrite comme suit :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{Ext} + \vec{F}_i^{Int} \quad (3.25)$$

En vertu de la loi de la dynamique, on a :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{Ext} + \vec{F}_i^{Int} = m_i \vec{a}_i \quad (3.26)$$

tel que a_i est son accélération. Ainsi donc et en vertu de la troisième loi de Newton, les forces intérieures agissant dans une même solide se font mutuellement équilibre. Alors on aura $\vec{F}_i^{int} = 0$. L'équation (4.8) se ramène à :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{Ext} = m_i \vec{a}_i \Rightarrow \vec{F}_i^{Ext} - m_i \vec{a}_i = 0 \quad (3.27)$$

(Principe de D'Alembert)

Or on peut deviser la résultante des forces extérieures en force actives connues, \vec{F}_i^A et la résultante des réactions de liaisons (forces réactives ou passives), \vec{R}_i , tel que :

$$\vec{F}_i^{Ext} = \vec{F}_i^A + \vec{R}_i = m_i \vec{a}_i \quad (3.28)$$

On peut encore écrire :

$$\vec{F}_i^A + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i = 0 \quad (3.29)$$

Si on multiplie cette dernière équation par le vecteur de déplacement virtuel, $\delta \vec{r}_i$ ou par le vecteur de vitesse virtuelle, $\dot{\delta \vec{r}}_i$ et pour tous les points matériels du système on obtient : Le principe des travaux virtuels

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^A + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.30)$$

Le principe des puissances virtuelles :

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^A + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \dot{\vec{r}}_i = 0 \quad (3.31)$$

Si les liaisons sont considérées parfaites, donc : Les travaux virtuels des réactions des liaisons

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.32)$$

Les puissances virtuelles des réactions des liaisons

$$\delta P_i = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i = 0 \quad (3.33)$$

Ce qui ramène à :

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^A - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^A - m_i \vec{a}_i) \delta \dot{\vec{r}}_i = 0 \quad (3.34)$$

III.7. Principe des travaux virtuels

Soit un système mécanique de n points matériels soumis à des liaisons stationnaires, bilatérales et parfaites. Considérons un point de ce système soumis à l'action de plusieurs forces $F_1, F_2 \dots F_n$. On suppose un déplacement virtuel (hypothétique), δs , qui représente un déplacement infiniment petit du premier ordre différent au déplacement réel, ds . Le travail de chacun des forces $F_1, F_2 \dots F_n$ réalisé le long des déplacements virtuels δs , est appelé travail virtuel donné comme suit:

$$\begin{aligned}\delta A &= F_1 \cos \alpha_1 \delta s + F_2 \cos \alpha_2 \delta s + \dots + F_n \cos \alpha_n \delta s \\ &= (F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + \dots + F_n \cos \alpha_n) \delta s\end{aligned}\quad (3.35)$$

Ce point se trouve en équilibre, si seulement si, les travaux virtuels des forces appliquées s'annulent pour tout déplacement virtuel de ce point. Dans le cas des corps rigides est en équilibre, la somme des travaux virtuels des forces extérieures appliquées au corps rigide (ou un système de n points matériels) est nulle pour tout déplacement virtuel à partir de la position d'équilibre considérée. Et on écrit :

$$\begin{aligned}\delta A &= \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i, \overrightarrow{\delta r_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n (F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z) = 0\end{aligned}\quad (3.36)$$

En utilisant les relations de transformation entre coordonnées cartésiennes et coordonnées généralisées suivantes : Soit un système de n points matériels ($i=1,n$) de k degrés de liberté. On a donc k coordonnées généralisées, q_j ($j=1,k$). Les relations de transformation sont comme suit

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.37)$$

$$\delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.38)$$

$$\delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.39)$$

Les travaux virtuels de toutes les forces actives dans le système sont :

$$\begin{aligned}\delta A &= \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(X_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j + Y_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j + Z_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j\end{aligned}\quad (3.40)$$

Mathématiquement on peut permuter entre les deux sommes par rapport à i et par rapport à j , on découle alors à :

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^k Q_{ij} \delta q_j \quad (3.41)$$

Où Q_{ij} est appelée force généralisée correspondante à la coordonnée généralisée q_j , elle est exprimée :

$$Q_{ij} = \sum_{j=1}^k \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \quad (3.42)$$

On a donc pour un point matériel quelconque :

$$\delta A = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_k \delta q_k \quad (3.41)$$

Chapitre IV : Modélisation du rotor et équations du mouvement

- **Modèle analytique**
 - **Modèle Éléments Finis**
-

Connue depuis les années 1950, la méthode des éléments finis a vit son apparition pour le calcul de contraintes et n'a cessé de se développer. Aujourd'hui, son champ d'application dépasse le cadre du génie mécanique. Désormais, elle est utilisée pour résoudre des problèmes d'écoulement de fluides ou de transferts de chaleur, d'électromagnétisme ou d'hydrologie.

Elle est considérée comme une généralisation et amélioration de la méthode de Rayleigh Ritz qui Permet de traiter facilement des systèmes d'équation complexes ou de hauts degrés causés par une complexité des formes géométrique et de la condition aux limites. Son principe est le même dans tous les cas de figures : dans un premier temps la structure étudiée est maillée c'est à dire divisée en petits éléments de géométries simples, puis dans un second temps un ou plusieurs champs (déplacement, contrainte, température, pression, ou autre) sont approchés localement, sur chaque élément du maillage, par des fonctions de forme (ou fonctions d'interpolation).

En dynamique des structures, l'utilisation des éléments finis permet de transformer les équations aux dérivées partielles modélisent le mouvement en des équations différentielles temporelles (on passe du cas continu au cas discret pour les variables spatiales).

La mise en équations d'un système de solides, reliés par des éléments flexibles (de raideurs connues) et des amortisseurs (de constantes données) fournit une modélisation exacte du système. La modélisation en système continu (masse et rigidité réparties sur tout l'élément) fournit des résultats analytiques en s'appuyant sur la mécanique des milieux continus. Ses formulations ont à des cas élémentaires. Les vibrations d'une structure plus complexe, admettant un nombre élevé de degrés de liberté (ddl), nécessitent une méthode générale, modulable et programmable.

La méthode des éléments finis (MEF) décompose une structure en éléments simples élémentaires, de type poutre, plaque, rotor... Le comportement vibratoire de l'élément est ramené à celui des nœuds. Ensuite on connecte les différents éléments (maillage) en respectant les conditions de continuité.

On peut alors extraire les matrices de masse et de raideur de la structure complète et déduire les pulsations propres du système non amorti et ses modes normaux. Cet outil de simulation de systèmes mécaniques permet de mieux comprendre le comportement d'un rotor.

L'effet gyroscopique doit être pris en compte et des méthodes de résolution spécifiques peuvent être avantageusement employées.

Partie théorique

La méthode principale est dérivée du livre « *Rotordynamics Prediction in Engineering* » de Lalanne et Ferraris dont les étapes sont les suivantes :

- La structure est discrétisée en éléments de dimensions finies appelés éléments finis qui sont réunis en des points situés sur leur contour appelés points nœuds ou noeuds,
- A partir d'hypothèses raisonnables sur le vecteur déplacement d'un point de l'élément i , on calcule l'énergie cinétique T_i , l'énergie de déformation U_i et la fonction de dissipation de l'élément en fonction des déplacements des points nœuds.
- Si la structure est composée de N éléments alors, l'énergie totale est la somme des énergies élémentaires des N éléments

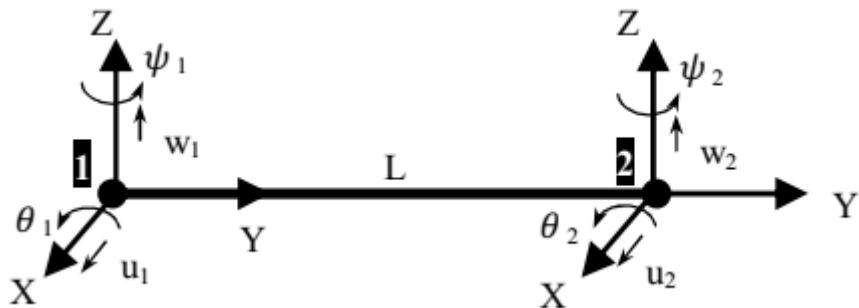


Figure 4.1. Modèle de poutre en flexion

L'élément sur la figure 4.1 représente un élément fini en flexion à deux nœuds et 4 ddl par nœud. Les deux flexions principales dans les deux plans perpendiculaires (y, x) et (y, z) et définies par les deux flèches u et w et les deux pentes θ et ψ respectivement.

Le vecteur des déplacements nœuds est :

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^T \quad (4.1)$$

Avec

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{et} \quad \psi = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Les mouvements le long et autour des axes X et Z sont respectivement :

$$\delta u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^T \quad (4.2)$$

$$\delta w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T \quad (4.3)$$

L'élément fini est construit à partir de :

$$u = N_1(y)\delta u \quad (4.4)$$

$$w = N_2(y)\delta w \quad (4.5)$$

Où N_1 et N_2 sont des fonctions de forme d'une poutre en flexion, avec :

$$N_1 = \left[1 - 3\left(\frac{y}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{L}\right)^3; -y + 2\left(\frac{y^2}{L}\right) - \left(\frac{y^3}{L^2}\right); 3\left(\frac{y}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{L}\right)^3; \left(\frac{y^2}{L}\right) - \left(\frac{y^3}{L^2}\right) \right] \quad (4.6)$$

$$N_2 = \left[1 - 3\left(\frac{y}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{L}\right)^3; y - 2\left(\frac{y^2}{L}\right) + \left(\frac{y^3}{L^2}\right); 3\left(\frac{y}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{L}\right)^3; -\left(\frac{y^2}{L}\right) + \left(\frac{y^3}{L^2}\right) \right] \quad (4.7)$$

IV.1. L'énergie cinétique

Le rotor tourne à une vitesse Ω . Son énergie cinétique est donnée en fonction de ses caractéristiques physiques par :

$$\begin{aligned} T = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\delta \dot{u}^T N_1^T N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T N_2^T N_2 \delta \dot{w}] dy \\ & + \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy \\ & - 2\rho I \Omega \int_0^L \delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy + \rho I L \Omega^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

IV.2. L'énergie de déformation

L'énergie de déformation prenant en compte l'effet du cisaillement dû aux forces axiales, est donnée par :

$$\begin{aligned} U = & \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \\ & + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta u + \delta w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w \right] dy \end{aligned} \quad (4.9)$$

IV.3. Effets des paliers

Les paliers jouent le rôle de forces extérieures agissant sur le rotor. Ils sont caractérisés par leurs raideurs et amortissements.

$$F_u = -k_{xx}u - k_{xz}w - c_{xx}\dot{u} - c_{xz}\dot{w} \quad (4.10)$$

$$F_w = -k_{zz}w - k_{zx}u - c_{zz}\dot{w} - c_{zx}\dot{u} \quad (4.11)$$

Qui sous forme matricielle s'écrivent

$$[F] = -[K]\delta - [C]\ddot{\delta} \quad (4.12)$$

avec

$$Raideur\ palier\ [K] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$Amortissement palier [C] = \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

IV.4. Equations du mouvement du rotor

IV.4.a. Pour l'arbre

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \delta} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} = (M + M_S) \ddot{\delta} + C \dot{\delta} \quad (4.15)$$

Avec les matrices masse et effet gyroscopique sont détaillées ci-dessous. La matrice masse est symétrique. La matrice C est antisymétrique.

- Matrice masse de l'arbre est $[M] + [M_S]$ avec :

$$[M] = \frac{\rho SI}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$[M_S] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Matrice masse de chaque disque

$$[M_d] = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dxa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dzd} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Matrice de raideur

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & -2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 12L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$[G] = \frac{\rho I_y \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$[C]_p = \begin{bmatrix} C_{xx}^i & 0 & C_{xz}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{zx}^i & 0 & C_{zz}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$[K]_p = \begin{bmatrix} K_{xx}^i & 0 & K_{xz}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{zx}^i & 0 & K_{zz}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

- Effet du balourd :

L'énergie cinétique du balourd i qui participe à la construction du vecteur force d'excitation étant

$$T_B = m_i r_i \dot{\phi} [\dot{u} \cos(\phi + \alpha_i) - \dot{w} \sin(\phi + \alpha_i)] \quad (4.23)$$

L'application des équations de Lagrange permet de déterminer les efforts dus au balourd i :

$$\begin{cases} F_u = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{u}} \right) = m_i r_i \dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha_i) \\ F_w = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{w}} \right) = m_i r_i \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha_i) \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\begin{cases} F_u = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{u}} \right) = m_i r_i \dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha_i) \\ F_w = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{w}} \right) = m_i r_i \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha_i) \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_i r_i \cos \alpha_i \\ -m_i r_i \sin \alpha_i \end{Bmatrix} \dot{\phi}^2 \sin \phi + \begin{Bmatrix} m_i r_i \sin \alpha_i \\ m_i r_i \cos \alpha_i \end{Bmatrix} \dot{\phi}^2 \cos \phi \quad (4.26)$$

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_i r_i \cos \alpha_i \\ -m_i r_i \sin \alpha_i \end{Bmatrix} \Omega^2 \sin \phi + \begin{Bmatrix} m_i r_i \sin \alpha_i \\ m_i r_i \cos \alpha_i \end{Bmatrix} \Omega^2 \cos \phi \quad (4.27)$$

Or

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\psi \\ F_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_i r_i \Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha_i) \\ m_i r_i \Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha_i) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

- Effet de la fondation sur le rotor

L'introduction de ce système dans l'ensemble des équations se fait comme suit :

$$M_p \ddot{u}_p = -K_{xx}^s u_p - K_{xx}(u_p - u) - K_{xz}^s w_p - K_{xz}(w_p - w) - C_{xx}^s \dot{u}_p - C_{xx}(\dot{u}_p - \dot{u}) - C_{xz}^s \dot{w}_p - C_{xz}(\dot{w}_p - \dot{w}) \quad (4.29)$$

$$M_p \ddot{w}_p = -K_{zz}^s w_p - K_{zz}(w_p - w) - K_{zx}^s u_p - K_{zx}(u_p - u) - C_{zz}^s \dot{w}_p - C_{zz}(\dot{w}_p - \dot{w}) - C_{zx}^s \dot{u}_p - C_{zx}(\dot{u}_p - \dot{u}) \quad (4.30)$$

D'où :

$$M_p \ddot{u}_p - K_{xx} u + (K_{xx}^s + K_{xx}) u_p - K_{xz} w + (K_{xz}^s + K_{xz}) w_p - C_{xx} \dot{u} + (C_{xx}^s + C_{xx}) \dot{u}_p - C_{xz} \dot{w} + (C_{xz}^s + C_{xz}) \dot{w}_p = 0 \quad (4.31)$$

$$M_p \ddot{w}_p - K_{zz} w + (K_{zz}^s + K_{zz}) w_p - K_{zx} u + (K_{zx}^s + K_{zx}) u_p - C_{zz} \dot{w} + (C_{zz}^s + C_{zz}) \dot{w}_p - C_{zx} \dot{u} + (C_{zx}^s + C_{zx}) \dot{u}_p = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = (K_C + K_F) \delta \quad (4.33)$$

K_C prend en compte l'effet de cisaillement, K_F est due aux forces axiales.

IV.4.b. Pour le disque

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \delta} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = M_d \ddot{\delta} + C_d \dot{\delta} \quad (4.34)$$

$$M_d = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$C_d = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

A partir des équations de l'arbre, du disque et des paliers l'équation du mouvement du rotor s'écrit sous la forme :

$$M \ddot{\delta} + C(\Omega) \dot{\delta} + K \delta = 0 \quad (4.37)$$

La matrice masse contient la masse du rotor et des disques. La matrice raideur contient la raideur de l'arbre et des paliers. C contient l'effet gyroscopique de l'arbre et des disques et la matrice amortissement des paliers.

L'assemblage des vecteurs déplacements de tous les nœuds du rotor en éléments finis donne le vecteur déplacement global $\{X\}$ et les matrices globales. Dans ce cas l'équation du mouvement du rotor devient :

$$[M]\{\ddot{X}\} + (\Omega[C_g] + [C_p])\{\dot{X}\} + ([K_r] + [K_p])\{X\} = 0 \quad (4.38)$$

Chapitre V : Vitesses critiques- Diagrammes de Campbell

Pour la détermination du diagramme de Campbell qui représente l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, le rotor doit tout d'abord être étudiée en mouvement libre.

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1 q_1 = 0 \quad (5.1)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2 q_2 = 0 \quad (5.2)$$

Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$q_1(t) = Q_1 e^{rt} ; \quad q_2(t) = Q_2 e^{rt} \quad (5.3)$$

En rapportant (5.3) dans (5.1) et dans (5.2), on obtient :

$$\begin{bmatrix} mr^2 + c_1 r + k_1 & -a\Omega r \\ a\Omega r & mr^2 + c_2 r + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Pour une solution non propre de (5.4), le déterminant doit être nul, d'où le polynôme caractéristique d'ordre 4 suivant :

$$m^2 r^4 + m(c_1 + c_2)r^3 + (k_1 m + k_2 m + c_1 c_2 + a^2 \Omega^2)r^2 + (k_2 c_1 + k_1 c_2)r + k_1 k_2 = 0 \quad (5.5)$$

En général, les valeurs des coefficients d'amortissements c_1 et c_2 sont telles que les racines de (5.5) sont des paires de quantités complexes conjuguées qui se mettent sous la forme :

$$r(\Omega) = \sigma(\Omega) + j\omega(\Omega) \quad (5.6)$$

Avec $r(\Omega)$ et la fréquence complexe, $\omega(\Omega)$ est la fréquence propre du mouvement libre du système, $\sigma(\Omega)$ est le taux de décroissance (c'est-à-dire, le taux à lequel l'amplitude diminue dans le temps) qui change de signe : une valeur négative de σ_i caractérise un mouvement qui

diminue dans le temps (mouvement stable), tandis qu'une valeur positive caractérise une croissance exponentielle du mouvement dans le temps (mouvement instable).

La figure 5.1 représente l'évolution des fréquences propres du rotor en fonction de la vitesse de rotation $N = 30\Omega/\pi$ pour différentes valeurs du facteur d'amortissement ξ . Sur cette figure, on remarque que pour $\xi = 0.0002$, deux vitesses critiques 2759 tr/min et 3431 tr/min (points A et B). Pour $\xi = 0.015$, on remarque que l'évolution est différente et les vitesses critiques diminuent.

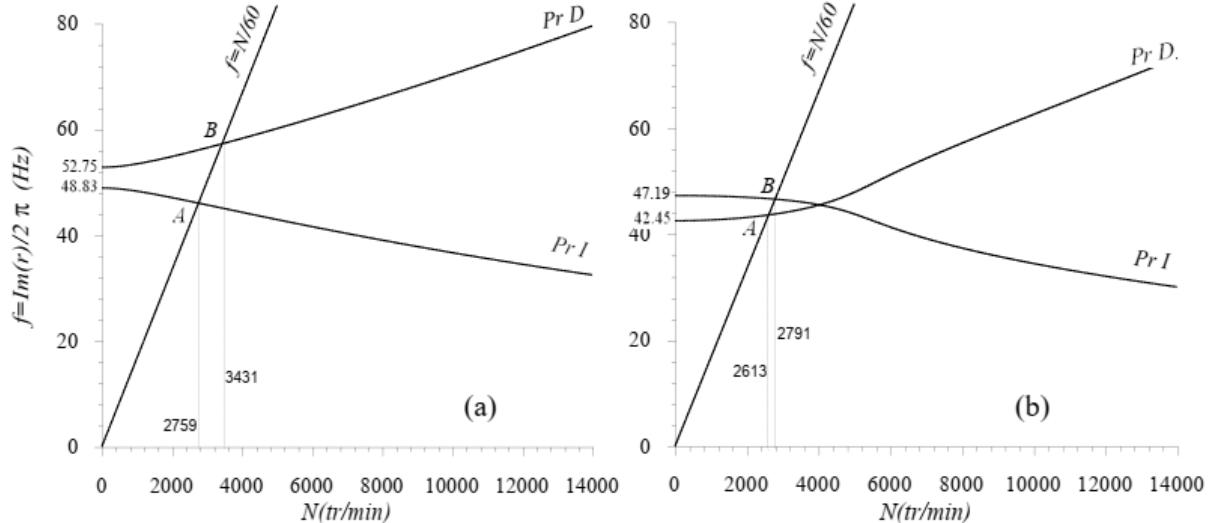


Figure 5.1. Diagramme de Campbell du modèle étudié, (a) : $\xi = 0.0002$, (b) : $\xi = 0.015$

La figure 5.2 représente la variation du taux de décroissance σ en fonction de la vitesse de rotation N pour différentes valeurs du facteur d'amortissement ξ . On remarque une distinction de la variation du taux de décroissance avec l'augmentation du facteur d'amortissement ξ et que toutes les valeurs du taux de décroissances sont négatives. Ces valeurs négatives de σ caractérisent un mouvement qui diminue dans le temps, alors le rotor est stable.

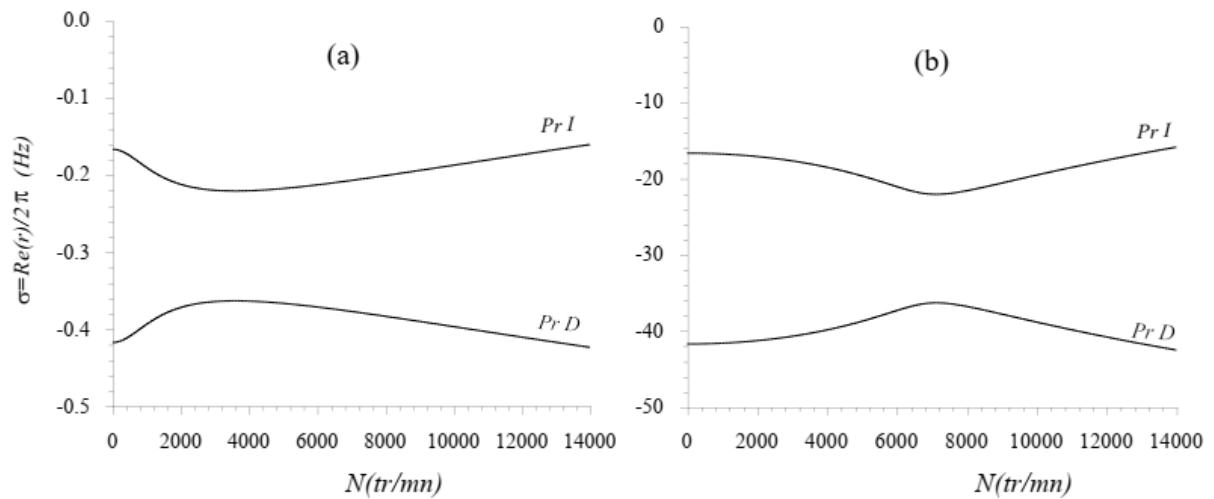


Figure 5.2. Taux de décroissance du modèle étudié, (a) : $\xi = 0.0002$, (b) : $\xi = 0.015$

La figure 5.3 représente la variation du sens de précession du centre géométrique du disque en fonction de la vitesse de rotation. Précession peut être définie comme un changement de direction de l'axe de rotation. Il existe deux types de précession : précession directe et inverse. Pour la précession directe le centre géométrique de rotor tourne dans le même sens de rotation et vice versa pour la précession inverse. On observe en particulier dans cette figure que les changements de sens de précession ne se produisent pas au passage des vitesses critiques.

Lorsque le rotor tourne à des vitesses très grandes, la trajectoire du centre du tourillon devient circulaire.

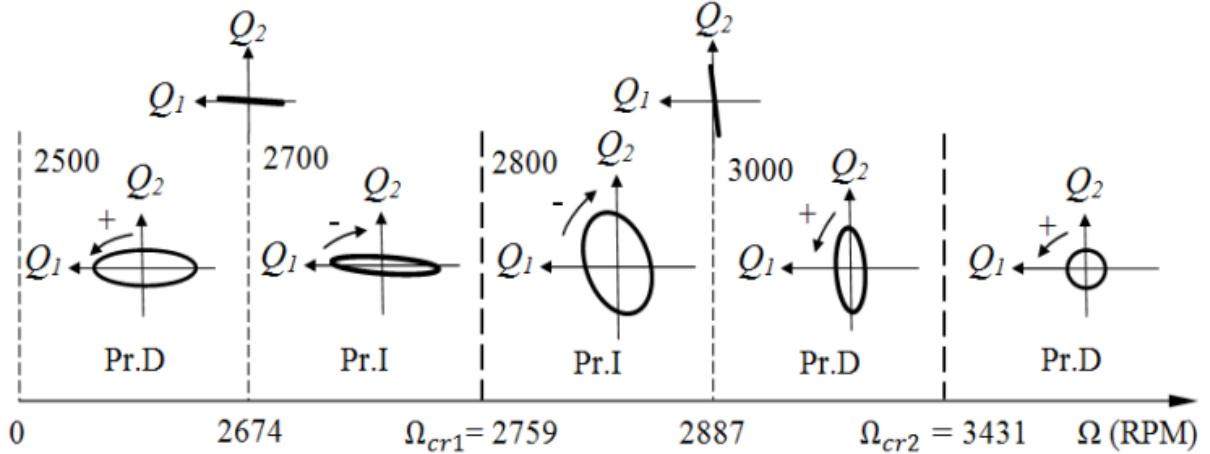


Figure 5.3. Variation du sens de la précession en fonction de la vitesse de rotation

Réponse due au balourd

Dans le cas de la présence d'une force d'excitation du balourd, l'étude de la solution particulière se fait en considérant le système (5.7) et (5.8) avec second membre.

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1 q_1 = m_b d\phi(l_1) \Omega^2 \sin \Omega t \quad (5.7)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2 q_2 = m_b \phi(l_1) d\Omega^2 \cos \Omega t \quad (5.8)$$

Comme le système est amorti, la réponse n'est en général pas en phase avec la force du balourd, les solutions sont cherchées sous la forme :

$$q_1(t) = A_1 \sin \Omega t + B_1 \cos \Omega t, \quad q_2(t) = A_2 \sin \Omega t + B_2 \cos \Omega t \quad (5.9)$$

Ces expressions (5.9) sont reportées dans les équations du mouvement (5.7) et (5.8) et chaque équation conduit à deux équations traduisant l'égalité des facteurs de $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$. Cela donne un ensemble d'équations algébrique linéaire qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -c_1\Omega & 0 & a\Omega^2 \\ c_1\Omega & k_1 - m\Omega^2 & -a\Omega^2 & 0 \\ 0 & -a\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 & -c_2\Omega \\ a\Omega^2 & 0 & c_2\Omega & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m^* d\Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ m^* d\Omega^2 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Pour une valeur de Ω , la résolution de (5.10) donne $Q_1(\Omega)$ et $Q_2(\Omega)$ à partir de :

$$Q_1(\Omega) = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \quad ; \quad Q_2(\Omega) = \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \quad (5.11)$$

La résolution du système algébrique linéaire (5.10) s'effectue par la méthode directe de **Gauss-Jordan**. La figure 5.3 représentent l'évolution de l'amplitude de la réponse au balourd en fonction de la vitesse de rotation du rotor $N = 30\Omega/\pi$ pour deux valeurs du facteur d'amortissement ξ . Sur cette figure, on remarque que pour $\xi = 0.0002$, deux pics correspondants aux vitesses critiques 2759 tr/min et 3431 tr/min. Ce sont les mêmes vitesses critiques obtenues par le diagramme de Campbell (Figure 5.3.a, points A et B). Pour l'autre réponse ($\xi = 0.015$), on remarque la diminution des amplitudes des pics correspondants aux vitesses critiques 2613 tr/min et 2791 tr/min (Figure 5.7.b, points A et B).

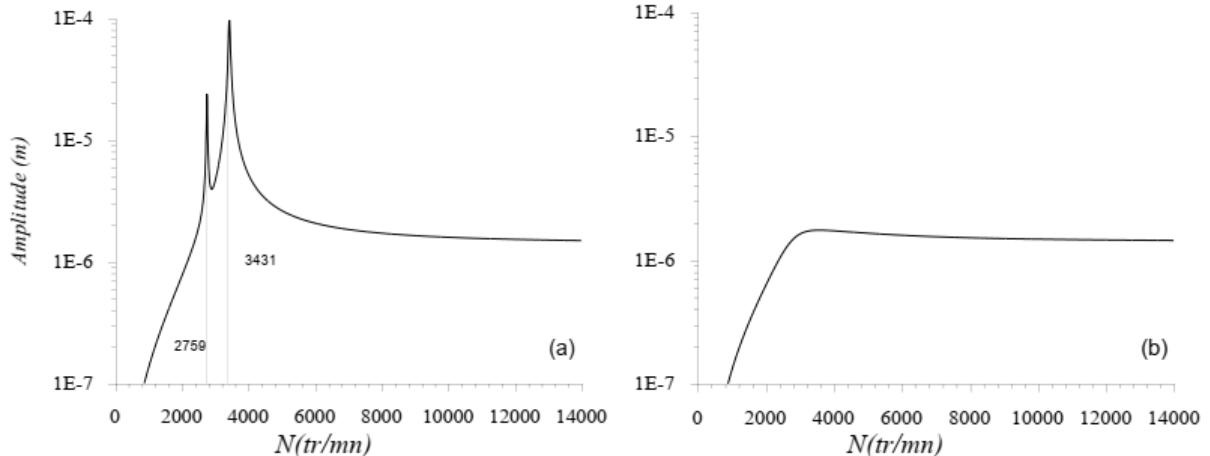


Figure 5.3. Amplitude de la réponse au balourd du modèle étudié, (a) : $\xi = 0.0002$, (b) : $\xi = 0.015$

Influence de la rigidité et l'amortissement sur la stabilité du rotor

Supposons que les caractéristiques de rigidité et d'amortissement sont les suivantes :

$$k_{xx} = 2 \times 10^5 N/m, k_{zz} = 5 \times 10^5 N/m, k_{xz} = -k_{zx} = 4 \times 10^5 N/m,$$

$$c_{xx} = C_{zz} = 10^2, c_{xz} = C_{zx} = 0$$

Les équations de mouvement libre (5.1) et (5.2) deviennent :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c\dot{q}_1 + k_1 q_1 + k_{12} q_2 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c\dot{q}_2 + k_2 q_2 + k_{21} q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= k + k_{XX}\phi^2(l_2) = 1.34 \times 10^6 \text{ N/m} \\
k_2 &= k + k_{ZZ}\phi^2(l_2) = 1.57 \times 10^6 \text{ N/m} \\
k_{12} &= k_{XZ}\phi^2(l_2) = 3 \times 10^4 \text{ N/m} \\
k_{21} &= k_{ZX}\phi^2(l_2) = -3 \times 10^4 \text{ N/m} \\
c &= c_{XX}\phi^2(l_2) = c_{ZZ}\phi^2(l_2) = 75 \text{ Ns/m}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Les solutions des équations en mouvement libre (5.12) ont la même forme (5.9) ; en rapportant (5.9) dans (5.12), on obtient :

$$\begin{bmatrix} mr^2 + cr + k_1 & -a\Omega r + k_{12} \\ a\Omega r + k_{21} & mr^2 + cr + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.14}$$

D'où le polynôme caractéristique suivant :

$$r^4 + \frac{2c}{m}r^3 + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} + \frac{c^2}{m^2} + \frac{a^2\Omega^2}{m^2} \right)r^2 + \left(\frac{ck_1}{m^2} + \frac{ck_2}{m^2} + \frac{a}{m^2}(k_{21} - k_{12})\Omega \right)r + \frac{k_1k_2 - k_{12}k_{21}}{m^2} = 0 \tag{5.15}$$

Pour voir l'influence de la rigidité du palier sur la stabilité du rotor, la figure 5.4 représente le diagramme de Campbell et le taux de décroissance en fonction de la vitesse de rotation N . On remarque que ce système devient instable pour $N > 1395$ tr/min, cette vitesse ; dite vitesse seuil d'instabilité ; correspond au changement de signe du taux de décroissance d'une valeur négative à une valeur positive. Le rotor est instable à partir de cette vitesse.

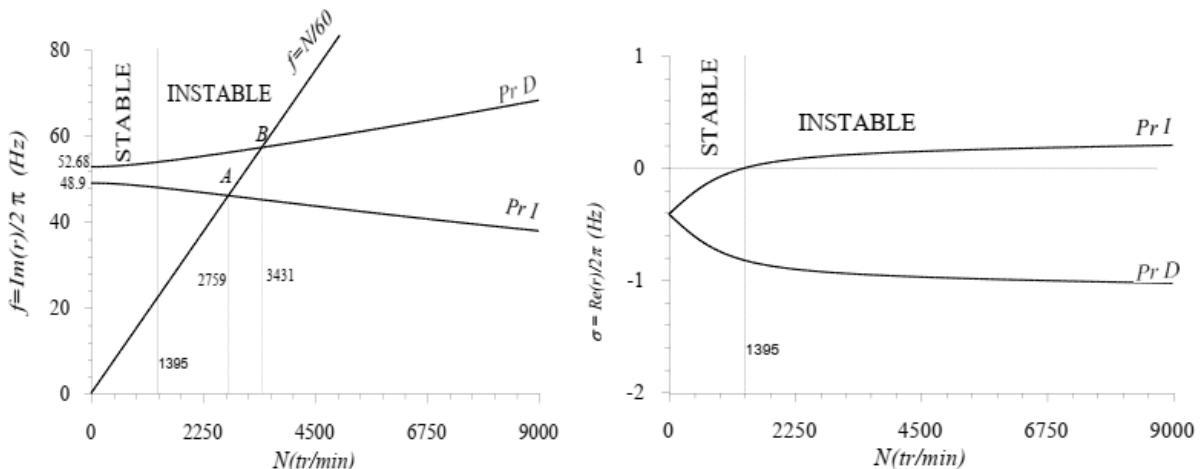


Figure 5.4. Influence de la rigidité du palier hydrodynamique sur la stabilité du rotor

Chapitre VI : Instabilité

Les termes ‘oil whirl’, et ‘vibrations auto-excitées’ définissent tous l’instabilité. Selon Muszynska, une machine tournante est stable si son rotor effectue un mouvement de rotation pur autour d’un axe à une vitesse de rotation et ce mouvement n’est pas accompagnée par d’autres modes de vibrations du rotor, de ses éléments ou d’autres parties fixes de la machine, leurs amplitudes de vibration ne dépassent pas des valeurs acceptables admis. La machine stable en rotation est à l’abri de forces perturbatrices externes. C'est-à-dire, toute perturbation aléatoire ne peut pas changer radicalement son comportement. Selon Roland : un ensemble rotor-liaisons, soumis à une action qui crée une perturbation peut, après sa suppression, revenir ou non à son état initial ; il peut y revenir avec ou sans oscillation : on dit alors qu’il est stable ; il peut s’écartier de son état initial en oscillant ou sans osciller : on dit qu’il est instable. Ces définitions de l’instabilité sont générales. Lalanne et Ferraris, donnent une définition plus précise : Lorsque le rotor n’est pas soumis à des forces extérieures et est en mouvement libre sous l’action de conditions initiales, son mouvement peut croître indéfiniment avec le temps : le rotor est instable.

Il existe plusieurs critères de stabilité à savoir, le critère de **Nyquist**, le critère de **Lyapunov** et le critère de **Routh-Hurwitz**. Ce dernier est très bien adapté aux systèmes à faible nombre de degrés de liberté. Il s’applique au Polynôme caractéristique à coefficients réels ou complexes. Les fréquences du système sont les racines de l’équation caractéristique à coefficients réels ($m = 2n$) :

$$P_m(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_{m-1} s + a_m = 0 \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (6.1)$$

La matrice [H] suivante est construite :

$$[H] = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & a_{2m-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & a_{2m-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2m-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2m-4} \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2m-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & a_m \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Où les sous déterminants suivants sont définis :

$$h_1 = a_1 \quad h_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad h_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad \dots \quad h_m = |H|$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le système soit stable est que tous les coefficients a_0, \dots, a_m doivent être positifs et aussi tous les sous déterminants h_1, \dots, h_m doivent être positifs. Le critère de Routh-Hurwitz peut également être appliqué à un polynôme caractéristique à coefficients complexes :

$$P_m(s) = (a_0 + ib_0)s^m + (a_1 + ib_1)s^{m-1} + \dots + (a_{m-1} + ib_{m-1})s + (a_m + ib_m) = 0 \quad a_i \in R \quad (6.3)$$

La solution devient stable lorsque toutes les racines s ont des coefficients positifs de leurs parties imaginaires. La condition nécessaire et suffisante est :

$$m=1 \quad (-1)^1 \Delta_2 = - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \succ 0 \quad ; \quad m=2 \quad (-1)^2 \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} \succ 0$$

\vdots

$$m=m \quad (-1)^m \Delta_{2m} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_{m-1} & a_m \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m \end{vmatrix} \succ 0$$

Chapitre VII : Techniques d'équilibrage des machines tournantes

VII.1. Principes généraux de l'équilibrage

VII.1.a. Masse et Force

On peut assimiler le balourd à une force centrifuge F , tournante générée par une masse de déséquilibre m , située à la distance r du centre de gravité G de l'arbre tournant à la vitesse ω . La valeur de cette force est :

$$F = m r \omega^2$$

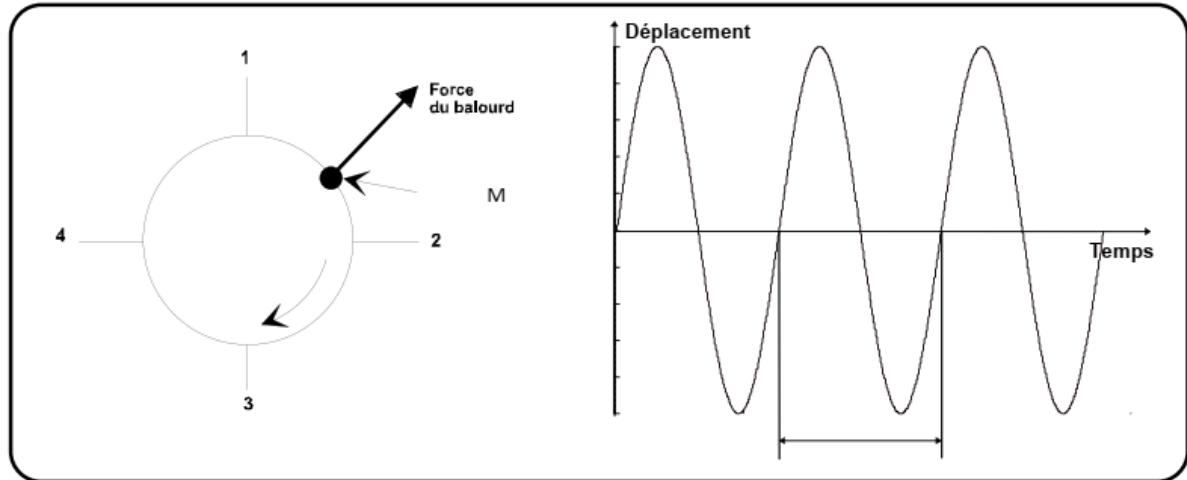
Pour une vitesse de rotation donnée, et pour un rayon donné, il y a donc une relation linéaire entre la masse de déséquilibre et la force de balourd correspondant. La procédure d'équilibrage nécessiterait de déterminer cette force et de repérer la position radiale de la masse du déséquilibre. Cependant, la force n'est pas mesurable, nous allons donc nous intéresser au mouvement de palier qu'elle génère (vibration), qui pour sa part est mesurable de manière simple.

VII.1.b. Vibration

Sous l'effet du balourd, le palier aura un mouvement autour de sa position d'équilibre (représentée par sa position, machine à l'arrêt). Projété sur un axe, ce mouvement aura l'allure indiquée sur la figure 7.1. Les repères 1, 2, 3 et 4 indiquent les correspondances entre la position verticale du palier et la position angulaire de la masse de déséquilibre. Ce mouvement est la

vibration du palier générée par le balourd. Il est périodique et sinusoïdal, à la période d'un tour, ou à la fréquence de rotation f_0 .

En conclusion, l'amplitude de la vibration générée par le balourd est directement proportionnelle au balourd, c'est-à-dire à la masse de déséquilibre.



VII.1.c. Notion de phase

Nous allons maintenant s'intéresser au repérage de la position radiale de la masse du déséquilibre. Il serait intéressant de connaître la position de l'arbre lorsque, par exemple, la vibration passe par un maximum. On utilise pour cela un top-tour. L'objectif d'un « top tour » est de générer une référence de rotation d'un arbre. On peut réaliser celle-ci par la mise en place d'un scotch brillant à un endroit donné de la périphérie de l'arbre, utilisé comme repère de position ; une cellule photoélectrique placée radialement à l'arbre délivrera alors une impulsion électrique à chaque passage du scotch (figure 7.2).

La mesure simultanée de l'amplitude de la vibration générée par le balourd et des impulsions générées par le top tour permet de déterminer le décalage temporel séparant ces deux signaux.

Afin d'adapter cette information de décalage temporel à une position radiale de l'arbre, on ramène la durée d'un tour (période) à un angle de 360° . Le « retard » de la vibration par rapport au top tour correspondra alors à un angle, en degrés ; c'est ce que l'on appelle la phase entre le top tour et la vibration mesurée.

En conclusion, la mesure de la phase de la vibration générée par le balourd, par rapport à un top tour, donne une information de repérage de position de la masse de déséquilibre. Cette position angulaire est décalée d'un « angle » donné par rapport à la phase mesurée.

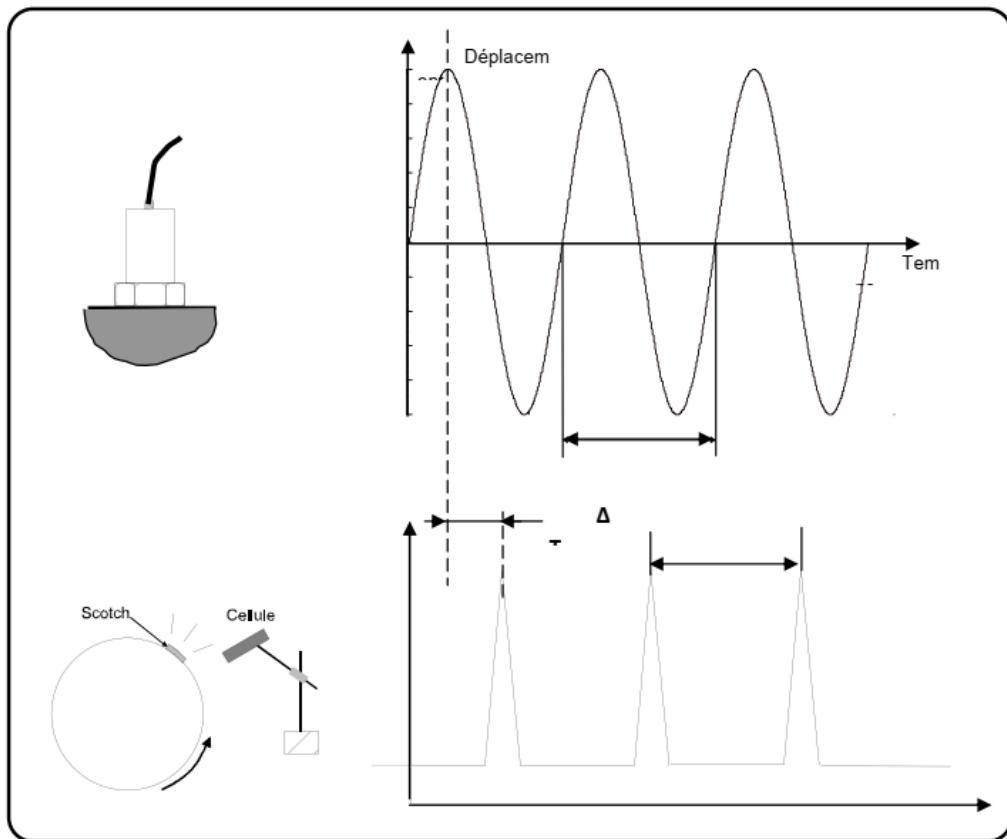


Figure 7.2. Décalage temporel vibration/top tour

Dans ce qui suit chaque mesure de vibration V est constituée d'une mesure d'amplitude v et d'une mesure de phase φ .

VII.2. Pratique de l'équilibrage

VII.2.a. Equilibrage sur machine

L'équilibrage sur machine à équilibrer est pratiqué lorsque l'origine du balourd est la rupture ou tout au moins la détérioration d'une partie du rotor, il est évident qu'il faut d'abord le remettre en état avant de l'équilibrer, il faut donc le démonter. De plus si le balourd a créé des vibrations très importantes, il y a des risques que les roulements ou la structure aient été endommagés.

VII.2.b. Equilibrage sur site

L'équilibrage d'un rotor tournant sur ses propres paliers, sans être démonté, est appelé équilibrage sur site. Il s'agit de la méthode d'équilibrage la plus pratiquée par le personnel de la maintenance. En effet ce type d'équilibrage offre de nombreux avantages par rapport à l'équilibrage en atelier :

- Le rotor est équilibré dans des conditions de fonctionnement normales (charges, températures, vitesse ...).
- Le démontage, le réassemblage et le réalignement ne sont pas nécessaires.
- Les temps d'arrêt sont considérablement réduits

L'information nécessaire pour réaliser l'équilibrage provient des mesures de vibrations des paliers supportant le déséquilibre du rotor. Les valeurs obtenues servent au calcul de la masse de correction requise pour réduire le déséquilibre et les vibrations qui en résultent. Les mesures sont effectuées au moyen d'un appareillage portatif incluant au minimum un analyseur de vibration, un accéléromètre, une sonde photoélectrique et un programme d'équilibrage.

VII.2.c. Equilibrage en un plan

a. Principe

C'est le type d'équilibrage qu'il faut réaliser lorsque l'on a un rotor de type disque. Le critère habituellement utilisé est le suivant [Figure 6.10] :

$$\blacksquare \frac{L}{D} \leq 0.5 \quad \blacksquare \omega \leq 1000$$

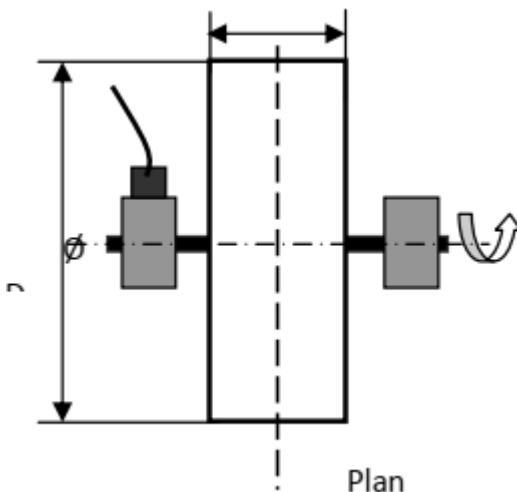


Figure 7.3. Caractéristiques d'un rotor de type disque

Si la vitesse de rotation est plus importante ou si le disque présente un voilage (disque incliné par rapport à l'axe), il est conseillé de faire un équilibrage 2 plans. Pour ce type d'équilibrage, il faut :

- 1 lancer à vide.
- 1 lancer avec une masse d'essai.
- Des masses de correction (installées dans le plan radial le plus proche possible du plan médian).

b. Pratique

Lancer 1

- Lancer le rotor à la vitesse d'équilibrage.
- Mesurer le module et la phase de vibration due au balourd initial : $\vec{V}_1(v_1, \varphi_1)$.
- Arrêter le rotor.

Lancer 2

- Fixer sur le rotor à un emplacement prédéfini (r_e, φ_e) une masse d'essai de valeur connue dans le plan prévu pour la compensation.
- Lancer le rotor à la vitesse d'équilibrage.
- Mesurer le module et la phase de vibration due au balourd résultant : $\vec{V}_2(v_2, \varphi_2)$.
- Arrêter le rotor.

Le premier lancer permet la mesure de l'état initial de la machine, correspondant au déséquilibre à compenser : amplitude vibratoire v_1 , phase φ_1 (figure 7.4).

La mise en place de la masse d'essai m_e (permettant l'étalonnage masse/amplitude vibratoire) fournit une nouvelle mesure donnant v_2 et φ_2 , amplitude et phase de l'état (balourd initial + masse d'essai).

Par différence vectorielle, on déduit : $\vec{V}_e = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ (\vec{V}_e vibration due à la masse d'essai seule). La relation amplitude vibratoire/masse est alors connue (module de \vec{V}_e ramené à la masse d'essai m_e).

- Le calcul de la masse de correction : $m_c = m_e \times V_e / V_c$
- La position angulaire du balourd est repérée par l'angle φ_c entre \vec{V}_e et \vec{V}_c le sens positif étant celui de la rotation de l'arbre (figure 7.5).
- La masse d'équilibrage m_c doit être positionnée sur le même rayon que la masse d'essai m_e .

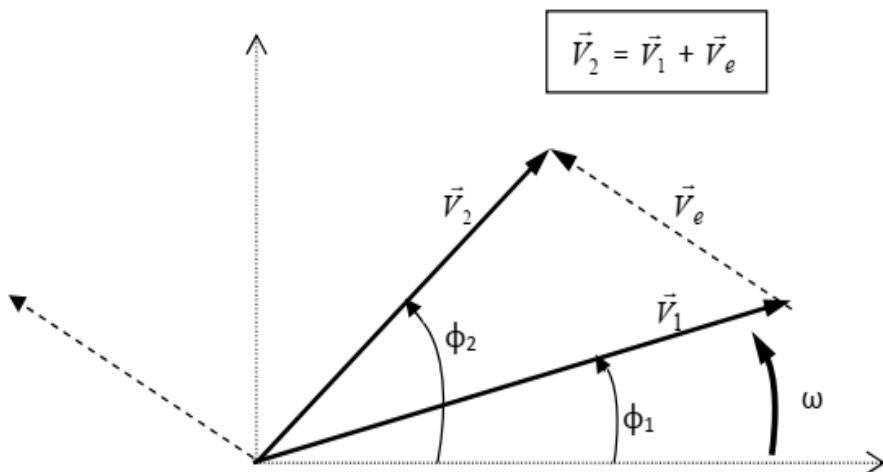


Figure 7.4. Equilibrage d'un rotor de type disque

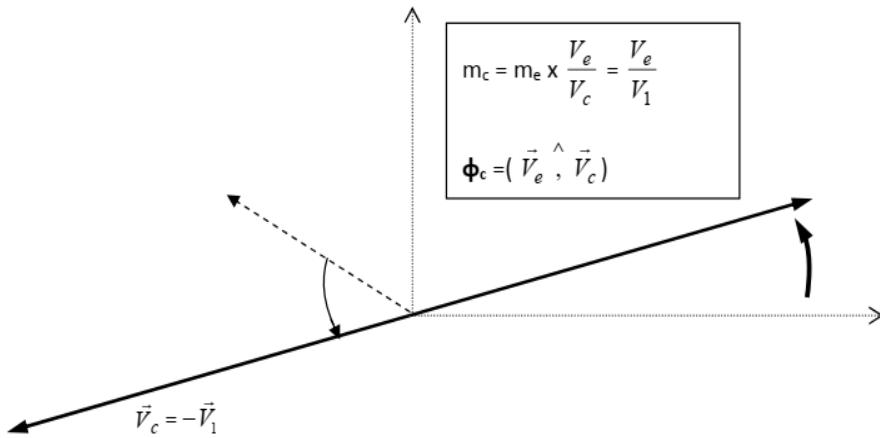


Figure 7.5. Détermination de la position et de la masse d'équilibrage

VII.3. Qualité de l'équilibrage

Il est inutile et souvent onéreux de pousser trop loin la précision d'un équilibrage. La limite peut être prescrite par le constructeur. Dans le cas contraire, il est possible de se reporter au texte de certaines normes. Ce critère, noté par la lettre G, est défini par : $G = e \omega$.

e : excentricité de centre de gravité exprimée en mm.

ω : Vitesse de rotation en rd/s

En reprenant la formule vue en § VI.4 ($m \cdot r = M \cdot e$), nous pouvons écrire :

$$G = m/M \cdot r \cdot \omega$$

Avec :

m : masse de correction pour annuler la vibration résiduelle.

r : distance entre la masse m et l'axe de rotation en mm.

M : masse du rotor dans la même unité que m

ω : vitesse de rotation en rad/s

Références bibliographiques

- 1- Ezzeddine Ftoutou, Mnaouar Chouchane, Etude Dynamique des Rotors en Flexion par Eléments Finis, Éditions Universitaires Européenes, 2013.
- 2- Alain Boulenger, Christian Pachaud, Aide-mémoire : Surveillance des Machines par Analyse des Vibrations, L'usine Nouvelle/Dunod, 2009.
- 3- De-Langre Chaigne, Dynamique et vibrations, Editeur : ECOLE POLYTECHNIQUE, 2008.
- 4- Christian Soize, Dynamique des Structures Element de Base et Concepts Fondamentaux, Editeur : ELLIPSES MARKETING, 2001.
- 5- Lalanne m., Ferraris G., *Rotordynamics prediction in engineering*, John Wiley & sons, 1990, 198p