

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT ELECTRIQUE

N° :



FILIERE : AUTOMATIQUE

OPTION : ROBOTIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par: TERCHI Nabil

BARKA Noureddine

Intitulé

Commande robuste des systèmes linéaires d'ordre
fractionnaire

Soutenu devant le jury composé de:

Dr Boukhalfa Abdellouhab	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Président
Prof Idir Abdelhakim	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Encadreur
Prof Khatir Khettab	Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Examineur

Année universitaire : 2023 /2024

Remerciements

Je voudrais exprimer ma gratitude à Allah Tout-Puissant pour m'avoir guidé tout au long de ce parcours et m'avoir accordé la force, la patience et la santé nécessaires pour atteindre ce niveau d'études. Je tiens également à remercier sincèrement Prof. IDIR Abdelhakim, mon directeur de recherche à l'université de Mohamed Boudiaf M'SILA, pour son engagement envers notre projet, sa disponibilité constante et son soutien tant sur le plan scientifique qu'humain. Sa confiance en moi, ses encouragements et ses conseils avisés ont été précieux.

Je suis reconnaissant envers tous les membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail modeste.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin tout au long de mes années de recherche et d'études.

Enfin, un immense merci à mes parents et à toute ma famille pour leur amour et leur soutien indéfectibles, particulièrement au cours des deux dernières années.

Noureddine

Dédicaces

Je souhaite dédier ce travail à plusieurs personnes qui ont été d'une grande importance dans mon parcours :

À mon binôme, Noureddine, pour notre collaboration et le travail accompli ensemble.

À ma mère et à mon père, pour leur soutien constant et leur encouragement tout au long de mes études.

À tous mes frères et sœurs, ainsi qu'à ma famille, pour leur amour inconditionnel et leur soutien indéfectible.

À toute la famille Barka, pour leur soutien et leur bienveillance.

À tous mes amis et à toute la promotion 2023, et en particulier à la promotion d'Automatique, pour les moments partagés et le soutien mutuel tout au long de cette aventure académique.

Nabil

Table des Matières

Liste des figures.....	I
Symboles et abréviations.....	II
Introduction Générale.....	III

CHAPITRE I

Systèmes d'ordre Fractionnaire

I.1 Introduction.....	1
I.2 Calcul fractionnaire.....	2
I.2.1 Fonctions utilisées dans le calcul fractionnaire	2
a) La fonction Gamma.....	2
b) Fonction de Mittag-Leffler	3
I.2.2 Définitions fondamentales	3
a) Définition de Grunwald-Letnikov (G-L).....	3
b) Définition de Riemann-Liouville (R-L)	4
c) Définition de Caputo	4
I.2.3 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire	5
I.2.4 Transformation Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	5
a) Intégration fractionnaire	5
b) Dérivation fractionnaire	5
I.3 Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire	6
I.3.1 Équation différentielle d'ordre fractionnaire	6
I.3.2 Représentation d'état d'ordre fractionnaire.....	7
•Systèmes continus.....	7
•Systèmes discrets	8
I.3.3 Stabilité des systèmes fractionnaires	9
I.3.4 Domaines d'application	9
I.3.5 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire	10
I.3.5.1 Méthodes Fréquentielles	10
I.3.5.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation	10
a) Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégrro-différentiels d'ordre fractionnaire :	11
b) Méthode de Carlson.....	11
c) Méthode de Matsuda.....	11
I.3.5.1.2 Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification	12

a) La méthode d'Oustaloup	12
b) Méthode de Charef : Fonction de singularité	13
•Système du premier ordre fractionnaire	13
•Système du second ordre fractionnaire :	13
I.3.5.1 Méthodes Numériques	15
a) Méthode directe de discrétisation.....	15
•Discrétisation utilisant la technique de l'expansion de série entière	15
•Approximation discrète en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue	16
I.4 Conclusion	17

CHAPITRE II

Commande PID et PID fractionnaire

II.1 Introduction	18
II.2 Principe général de la régulation	18
II.2.1 Performances des systèmes réglés [10]	19
II.2.1.1 Rapidité.....	19
II.2.1.2 Précision	19
II.2.1.3 Stabilité	20
II.3 Le correcteur	20
II.4 But de la correction.....	20
II.5 La commande PID classique.....	20
II.5.1 Paramètres d'un régulateur PID	21
II.5.2 Aspects fonctionnels du régulateur PID	22
II.5.2.1 Action Proportionnelle Intégrale Dérivée (PID).....	22
II.5.3 Algorithmes d'ajustement des paramètres de Contrôleur PID.....	23
II.6 Contrôleur $PI\lambda D\mu$ d'ordre fractionnaire	23
II.6.1 Structure de correcteur PID fractionnaire	24
II.6.2 Principe de fonctionnement	25
II.7 La fractionalisation des Correcteurs PI et PID	25
II.8 Approximation d'Oustaloup.....	26
II.8.1 Paramètres du filtre d'Oustaloup	27
II.9 Optimisation par essaim particulaire (PSO)	28
II.9.1. Définition	28
II.9.2. Principe de base de l'algorithme (PSO).....	29
II.9.3. Définition de la position et de la vitesse courante associée à une particule	30

II.9.4. L'organigramme et les étapes de la méthode PSO	31
II.10. Conclusion	33

Chapitre III

Simulations & Applications

III.1. Introduction	34
III.2 Sub-optimal Approximation of FOTFs	34
III.3 Règles d'ajustement des systèmes de premier ordre avec retard	35
III.4 Application 1: Considérons le système FO-LTI non commensurable suivant :.....	36
III.4.1 Commande PID classique appliquée au système fractionnaire	37
III.4.2 Commande PID Fractionnaire appliquée au système fractionnaire	41
III.5 Application 2 : Système fractionnaire avec retard	44
III.5 .1 Commande PID classique appliquée au système fractionnaire avec retard.....	44
III.6 Conclusion	45
Conclusion Générale.....	46
Références bibliographiques.....	47

Liste des figures

Figure II.1: Performances d'un système de commande.....	19
Figure II.2: Stabilité du système.....	20
Figure II.3: Système de commande à retour unitaire classique	20
Figure II.4: Schéma électronique du correcteur Proportionnel Intégral Dérivé....	22
Figure II.5: Système de commande à retour unitaire classique	24
Figure II.6: $PI\lambda D\mu$ (a) Ordre entier, (b) Ordre fractionnaire	25
Figure II.7: Fractionalisation d'un intégrateur.....	26
Figure II.8: Diagrammes de Bode de la fonction $G(s)$ et de ses approximations d'Oustaloup.....	27
Figure II.9: Groupe de : (a) Oiseaux, (b) Poissons	29
Figure II.10: Le cercle virtuel pour un warm de sept particules.....	29
Figure II.11: Schéma de principe du déplacement d'une particule	31
Figure II.12: Organigramme de la méthode PSO	32
Figure III.1 Comparaison des réponses indicielle....	37
III.4.1 Commande PID classique appliquée au système fractionnaire.....	37
Figure III.2 Comparaison des réponses indicielle du modèle FOLPD optimal et du modèle original.....	38
Figure III.3 : Réponses indicielle en boucle fermée sous le contrôleur PID.....	40
Figure. III.4 : Comparaisons des diagrammes de Bode.	40
Figure III.5. Réponse indicielle sous le contrôleur PID fractionnaire optimal.	42
Figure III.6. Comparaison des différents contrôleurs.....	43
Figure III.7. Comparaison des différentes configurations	44
Figure III.8. Réponses indicielles sous les contrôleurs PID fractionnaires optimaux.	45

Symboles et abréviations

- Symboles

Symboles	Signification
$u(t)$	le signal de commande
$r(t)$	la consigne
$x(t)$	le signal de retour
$y(t)$	la grandeur à commander
$C(s)$	la fonction de transfert du correcteur
$G(s)$	la fonction de transfert de système
K_p	le gain proportionnel
K_i	le gain intégral
K_d	le gain dérivé
T_i	la constante d'intégration
T_d	la constante de dérivation
T	constante de temps
L	le retard apparent
Γ	la fonction Gamma
E	La fonction de Mittag-Leffler
D_t^α	Dérivation non entière
I_t^α	Intégration non entière
$PI^\lambda D^\mu$	correcteurs d'ordre fractionnaire
λ	Ordre d'intégration
μ	Ordre de dérivation

- **abréviations**

abréviations	Signification
<i>PID</i>	Proportionnel Intégral Dérivé
<i>FOPID</i>	Fractional Order PID
<i>FOPDT</i>	First Order Plus Dead Time
<i>IAE</i>	Integral Absolute Error
<i>ITAE</i>	Integral Time Absolute Error
FO-LTI	First-Order Linear Time-Invariant
FOTFs	Fractional Order Transfer Function

Introduction Générale

Les systèmes dynamiques linéaires jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines d'ingénierie et de sciences appliquées. Traditionnellement, la modélisation et le contrôle de ces systèmes reposent sur des techniques basées sur des équations différentielles ordinaires d'ordre entier. Cependant, il existe des situations où ces approches traditionnelles montrent leurs limites, notamment lorsque les systèmes présentent des phénomènes de retard, de diffusion ou de mémoire à long terme. C'est là qu'interviennent les systèmes d'ordre fractionnaire.

Les systèmes d'ordre fractionnaire, caractérisés par des opérateurs différentiels ou intégraux d'ordre non entier, offrent une représentation plus précise de nombreux phénomènes physiques et dynamiques [1-5]. Leur utilisation s'est répandue dans divers domaines, tels que la physique, la biologie, l'économie et l'ingénierie. Cependant, le contrôle de ces systèmes présente des défis uniques en raison de leur complexité et de leurs propriétés dynamiques particulières.

La commande robuste émerge comme une approche prometteuse pour traiter ces défis. Contrairement aux méthodes de contrôle classiques, la commande robuste vise à concevoir des systèmes de contrôle capables de maintenir des performances acceptables malgré les incertitudes et les perturbations [6-8]. Dans le contexte des systèmes d'ordre fractionnaire, la commande robuste revêt une importance particulière en raison de la sensibilité accrue de ces systèmes aux variations paramétriques et aux non-linéarités [8-10].

Ce mémoire se concentre sur l'étude de la commande robuste des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire. Notre objectif est de développer des méthodes et des outils permettant de concevoir des régulateurs robustes capables de garantir la stabilité et les performances des systèmes fractionnaires face à diverses sources d'incertitudes. Pour ce faire, nous commencerons par une revue approfondie des fondements théoriques des systèmes d'ordre fractionnaire, ainsi que des techniques de modélisation et d'analyse associées. Nous explorerons ensuite l'état de l'art en matière de commande robuste et présenterons des approches modernes adaptées aux systèmes fractionnaires.

Enfin, nous illustrerons l'efficacité de nos méthodes à travers des études de cas et des simulations numériques. Ce travail contribuera à améliorer notre compréhension de la commande des systèmes d'ordre fractionnaire et ouvrira la voie à de nouvelles applications dans divers domaines technologiques et scientifiques.

CHAPITRE I

Systèmes d'ordre Fractionnaire

CHAPITRE I

Systèmes d'ordre Fractionnaire

I.1 Introduction

L'intérêt pour les systèmes d'ordre fractionnaire s'est manifesté dans de nombreux domaines des sciences appliquées et de l'aménagement. En général, on décrit ces systèmes à l'aide d'équations différentielles d'ordre fractionnaire. Les fonctions de transfert irrationnelles sont représentées dans le domaine fréquentiel. En raison de leur caractère irrationnel, les systèmes d'ordre fractionnaire ont été étudiés de manière marginale. Puisque les solutions analytiques précises ne sont pas disponibles, les méthodes numériques et d'approximation sont couramment employées pour leur résolution, leur analyse et leur mise en œuvre.

Le calcul fractionnaire a un domaine d'applications très vaste [1], par exemples : mécanique, automatique, théorie du contrôle, électricité, viscoélasticité, biologie, équation de diffusion, électromagnétique, etc. [2].

Récemment, un intérêt considérable pour l'utilisation du calcul fractionnaire dans les différents domaines des systèmes et de la commande a été porté [3]. Dans le domaine de commande, des équations différentielles fractionnaire sont régies soit le système à commander soit la loi de commande utilisée. La première idée qui basée sur l'utilisation de la régulateur d'ordre fractionnaire revient à Oustaloup, qui a proposé le commande Robuste d'Ordre Non Entier (CRONE). Notons qu'Oustaloup avait notamment démontré, dans ces travaux, l'avantage du régulateur CRONE par rapport au régulateur PID classique. Un régulateur d'ordre fractionnaire $PI^{\mu}D^{\mu}$ utilisant des actions dérivées et intégrales d'ordre non entier a été proposé plus tard. Et par la suite, beaucoup de régulateur basée sur le calcul fractionnaire ont été développée (pour plus de détails voir [4]).

Dans ce chapitre, nous allons présenter les concepts fondamentaux des opérateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire, en expliquant leurs propriétés et les méthodes d'approximation utilisées pour leur analyse et leur implémentation. Tout d'abord, nous définirons le calcul fractionnaire et les opérateurs d'ordre fractionnaire, en détaillant leurs principales propriétés ainsi que la transformée de Laplace des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. Ensuite, nous introduirons les fonctions les plus couramment utilisées dans le calcul fractionnaire et les opérateurs non entiers, fournissant des solutions aux problèmes liés à ces opérateurs, et nous donnerons les transformées de Laplace correspondantes.

I.2 Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est le champ de l'analyse mathématique et d'application des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et encore nouveau. Ces dernières années l'intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par son application dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie. La représentation mathématique des systèmes fractionnaires dans le domaine temporel et fréquentiel correspond à des équations différentielles à exploiter. Vu l'absence des méthodes mathématiques, les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire étaient jusque-là étudiés de façon marginale seulement, que ce soit en théorie ou en application [5], [6]. Pour des raisons d'analyse, de synthèse, et de simulation de tels systèmes, l'utilisation des fonctions rationnelles pour l'approximation s'avère d'une grande importance. Alors pour analyser et concevoir les systèmes de commande d'ordre fractionnaire il faut les approximer par des fonctions rationnelles [7].

L'opérateur intégrro-différentiel ${}_c D_t^m$ ou t sont les limites de l'opération est défini ainsi:

$${}_c D_t^m \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \dots \dots \dots \Re(\alpha) > 0, \\ 1 \dots \dots \dots \Re(\alpha) = 0, \\ \int_c^t (d\tau)^{-m} \dots \dots \Re(\alpha) > 0, \end{cases} \quad (I.1)$$

où, est l'ordre de l'opération, généralement $\alpha \in \mathbb{R}$

Les définitions de l'opérateur fractionnaire les plus courantes et les plus utilisées sont celles de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov.

Avant de les présenter, nous commencerons par introduire quelques fonctions fondamentales du calcul fractionnaire, qui faciliteront la compréhension de ces définitions.

I.2.1 Fonctions utilisées dans le calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présenterons deux fonctions largement utilisées qui fournissent généralement des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire : la fonction Gamma d'Euler et la fonction de Mittag-Leffler.

a) La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est l'une des fonctions de base utilisées dans le calcul fractionnaire. La définition intégrale de cette fonction est donnée par [8] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} (e^{-t} t^{z-1}) dt, \quad z > 0 \quad (I.2)$$

L'intégration par partie de l'équation (I.2) permet de donner la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z + 1) = z * \Gamma(z) \quad (I.3)$$

Puisque $\Gamma(1) = 1$, en utilisant la relation (I.3), nous obtenons pour $(z=1,2,3,...)$.

$$\Gamma(n + 1) = n * \Gamma(n) = n * (n - 1) = n! \quad (I.4)$$

Notons que l'autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle possède des pôles simples pour $(z = 0, -1, -2, \dots)$. Son expression est :

$$\Gamma(z + 1) = \varphi(z) + \frac{(-1)^0}{0!} \frac{1}{0+z} + \frac{(-1)^1}{1!} \frac{1}{1+z} + \dots \quad (I.5)$$

Avec :

$$\Gamma(z) = \int_1^{+\infty} (e^{-t} t^{z-1}) dt, \quad z > 0$$

À partir de cette dernière équation il est clair que pour des valeurs entières négatives, la fonction Gamma tend vers l'infini.

b) Fonction de Mittag-Leffler

L'autre fonction qui est aussi très important dans le calcul fractionnaire est la fonction de Mittag-Leffler. La forme standard de cette fonction à un paramètre est donnée comme suit [9] :

$$E_\alpha = \sum_K^\infty = 1 \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\alpha > 0) \quad (I.6)$$

Pour $\alpha = 1$, on trouve la fonction exponentielle usuelle suivante :

$$E_1 = \sum_K^\infty = 1 \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{K=0}^{+\infty} = \frac{z^k}{k!} \quad (I.7)$$

I.2.2 Définitions fondamentales

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Parmi les plus notables, on peut mentionner les trois suivantes :

a) Définition de Grunwald-Letnikov (G-L)

Cette définition est peut considérer comme une généralisation de la dérivée classique d'une fonction $f(t)$ d'ordre $n \in \mathcal{R}$ qui prend la forme suivante :

$$D^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (I.8)$$

Avec :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (\text{I.9})$$

Remplaçant le nombre entier n par $\alpha \in \mathcal{R}$, on peut réécrire (I.9) comme suit

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} \quad (\text{I.10})$$

Maintenant on définit la dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre α de G-L comme suit [10] :

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-\alpha}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (\text{I.11})$$

Où h est le pas d'échantillonnage, $[x]$ représente la partie entière de x et $\binom{\alpha}{j}$ appelés coefficient binominaux.

b) Définition de Riemann-Liouville (R-L)

Définition 1 Soient \mathcal{C} et \mathcal{R} les anneaux des nombres complexes et réels respectivement, $\Re(.)$ Symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Soient $\alpha \in \mathcal{C}$ avec $\Re(\alpha) > 0, t_0 > R$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty[$.

$$I^\alpha f(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I.12})$$

Définition 2 Soient $\alpha \in \mathcal{C}$ avec $\Re(\alpha) > 0$, n un entier positif, $t_0 \in \mathcal{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty[$. La dérivée d'ordre fractionnaire α de la fonction de f borne inférieure t_0 est définie par:

$${}_{RL}D_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I.13})$$

Où le nombre entier n est tel que $(n-1) < \alpha < n$.

Remarque: pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite I^α pour I_0^α et D^α pour D_0^α

c) Définition de Caputo

Une autre définition de la dérivée d'ordre fractionnaire est proposée par Caputo comme la forme suivante [11] :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) \triangleq I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{n-\alpha+1}} dt \quad (\text{I.14})$$

Où

$$n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}.$$

Pour t_0 , à partir des deux des équations (I.13) et (I.14), on peut trouver les deux relations suivantes :

$${}^{RL}D^\alpha f(t) = {}^c D^n f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{(k-\alpha)}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (\text{I.15})$$

$${}^{RL}D^\alpha \left(f(t) \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) = {}^c D^n f(t) \quad (\text{I.16})$$

I.2.3 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [12] :

- Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^\alpha f(z)$ est une fonction analytique de z et α
- Pour $\alpha = n$, ou n est un entier, l'opération $D^\alpha f(z)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .
- Pour $\alpha = 0$, l'opération $D^\alpha f(z)$ est l'opérateur identité : $D^0 f(z) = f(z)$
- La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires:
 $D^\alpha f(af(z) + bg(z)) = aD^\alpha f(z) + bD^\alpha g(z)$
- La loi additive (propriété du semi groupe) : $D^\alpha D^\beta f(z) = D^\beta D^\alpha f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z)$ est valable sous certaines contraintes sur la fonction $f(z)$.

I.2.4 Transformation Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

a) Intégration fractionnaire

La transformée de Laplace de l'opérateur d'intégration non entier défini par (I.6) est donné par :

$$L\{I_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s), \alpha > 0 \quad (\text{I.17})$$

Où : $(n - 1) < \alpha < n$.

b) Dérivation fractionnaire

- Au sens de Riemann-Liouville(R-L)

$$L\{D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left\{ {}^{RL}D_t^{(\alpha-k-1)} f(t) \right\}_{t_0} \quad (\text{I.18})$$

Les conditions initiales apparaissant dans (I.18) sont données en fonction d'une dérivée entière évaluée à l'origine.

- Au sens de Caputo

$$L\{L\{^c D_t^\alpha f(t)\}\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(\alpha-k-1)} f^{(k)}(0), \quad \alpha > 0 \quad (\text{I.19})$$

Les conditions initiales apparaissant dans (I.19) sont données en fonction d'une dérivée entière évaluée à l'origine.

- Définition Grunwald-Letnikov(G-L)

$$L\{L\{^G D_t^\alpha f(t)\}\} = s^\alpha F(s) \quad (\text{I.20})$$

Remarque 1 : Les transformées de Laplace des dérivées d'ordre non entier de Riemann Liouville et de Caputo sont équivalentes si et seulement si le système est au repos pour $t < 0$. Elles se réduisent à

$$L\{L\{^G D_t^\alpha f(t)\}\} = L\{L\{^c D_t^\alpha f(t)\}\} = s^\alpha F(s) \quad (\text{I.21})$$

Remarque 2 : La transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue. Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des conditions initiales.

I.3 Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire

Comme pour les systèmes d'ordre entier, il existe différents modèles pour représenter les systèmes d'ordre fractionnaire. On peut principalement citer :

I.3.1 Équation différentielle d'ordre fractionnaire

Un système linéaire mono-variable d'ordre non entier, invariant dans le temps, ayant pour entré $u(t)$ et pour sortie $y(t)$, est décrit par l'équation suivante :

$$a_n D^{a_n} y(t) + \dots + a_0 D^{a_0} y(t) = b_m D^{b_m} u(t) + \dots + b_0 D^{b_0} u(t) \quad (\text{I.21})$$

Si tous les ordres de dérivation sont des multiples entiers de l'ordre de base α , c'est-à-dire, $(a_k, b_k) \in \mathcal{R}^+$, le système est dit commensurable et l'équation (I.21) devient :

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{k\alpha} u(t) \quad (\text{I.22})$$

Si dans (I.22) $\alpha = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{Z}^+$ le système sera d'ordre rationnel.

En appliquant la transformée de Laplace à de telles équations, et en supposant des conditions initiales nulles, nous obtenons des fonctions de transfert avec des puissances d'ordre non entier de la variable complexe de Laplace.

Dans le cas continu, la fonction de transfert d'un système d'ordre commensurable est donnée par l'équation (I.23) :

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k} \quad (\text{I.23})$$

I.3.2 Représentation d'état d'ordre fractionnaire

La représentation d'état d'ordre fractionnaire est similaire à celle du cas entier, à la différence que la dérivée d'ordre 1 est remplacée par la dérivée fractionnaire d'ordre α .

- **Systèmes continus**

Dans le cas linéaire, la représentation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

$$D^\alpha x(t) = [D^\alpha x_1(t) \ D^\alpha x_2(t) \ \dots \ D^\alpha x_n(t)]^T$$

Tel que :

$x(t)$: vecteur d'état de dimension n

$D^\alpha x(t)$: vecteur de la dérivée d'ordre α (avec $\alpha \in R^+$).

Où :

$0 < \alpha < 1, u(t) \in R^m$ est le vecteur colonne d'entrée, $x(t) \in R^n$ est le vecteur colonne d'état, $y(t) \in R^p$ est le vecteur colonne de sortie, $A \in R^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B \in R^{n \times m}$ est la matrice d'entrée, $C \in R^{p \times n}$ est la matrice de sortie, $D \in R^{p \times m}$ est la matrice de transmission directe.

En appliquant la transformée de Laplace et la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo, l'équation (I.24) devient:

$$\begin{cases} X(s) = (s^\alpha I_n - A)^{-1} B U(s) + (s^\alpha I_n - A)^{-1} s^{\alpha-1} x(0) \\ Y(s) = C X(s) + D U(s) \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

Notons que la définition de Caputo est nécessaire si nous voulons que les conditions initiales soient exprimées comme les valeurs des états à l'instant $t = 0$. Dans le cas où les conditions initiales sont nulles, l'équation (I.25) devient:

$$\begin{cases} X(s) = (s^\alpha I_n - A)^{-1} B U(s) \\ Y(s) = C X(s) + D U(s) \end{cases} \quad (I.26)$$

Et la fonction de transfert correspondante à l'équation (I.26) s'écrit :

$$X(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = C(s^\alpha I_n - A)^{-1} B + D \quad (I.27)$$

Où I_n est la matrice identité de dimension $(n \times n)$ et $G(s)$ représente la matrice de transfert de dimension p lignes et m colonnes. Son numérateur et son dénominateur sont des polynômes exprimés en termes de puissance entières de s^α .

Dans le cas non linéaire, la représentation d'état est donnée par

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = \psi(x(t)) \end{cases} \quad (I.28)$$

$f(\cdot)$ et $\psi(\cdot)$: étant les fonctions non linéaires.

D^α : étant l'opérateur de la dérivée d'ordre α .

• Systèmes discrets

De même que pour le cas continu, les systèmes discrets sont représentés dans le cas linéaire ou non linéaire.

Le système linéaire d'ordre fractionnaire est représenté par le modèle d'état linéaire d'ordre

Fractionnaire à temps discret comme suit [13] :

$$\begin{cases} \Delta^\alpha x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (I.29)$$

$$\Delta^\alpha x(k+1) = [\Delta^\alpha x_1(k+1) \quad \Delta^\alpha x_2(k+1) \quad \dots \quad \Delta^\alpha x_n(k+1)]^T$$

Δ^α : étant l'opérateur de la différence d'ordre α , $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Le système non linéaire d'ordre fractionnaire est représenté par le modèle d'état non linéaire d'ordre fractionnaire à temps discret comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = \psi(x(t)) \end{cases} \quad (I.30)$$

$f(.)$ et $\psi(.)$: étant les fonctions non linéaires.

D^α : étant l'opérateur de la dérivée d'ordre α .

I.3.3 Stabilité des systèmes fractionnaires

Les conditions de stabilité des systèmes fractionnaires linéaires à temps invariant diffèrent de celles des systèmes linéaires d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires peuvent avoir des racines dans le demi-plan droit du plan complexe, alors que les systèmes linéaires d'ordre entier sont stables uniquement si toutes leurs racines ont une partie réelle strictement négative.

Désignons par λ_i les valeurs propres de la matrice A . Le système (I.24) est dit stable si la condition :

$$|\arg -\lambda_i| > \alpha \frac{\pi}{2}, 1 \leq i \leq n \quad (\text{I.31})$$

Est satisfaite pour toutes les valeurs propres de [10].

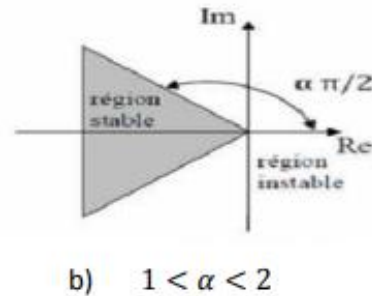
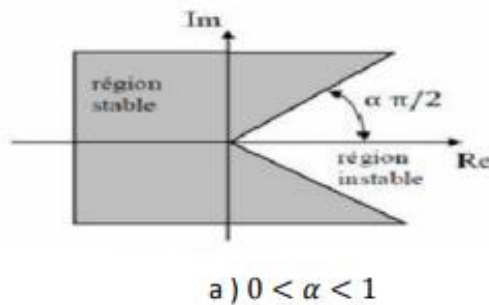
Remarque

- Pour $\alpha = 1$, on trouve la condition de stabilité des systèmes d'ordre entier.
- Pour la représentation fonction de transfert (I.25), désignons par p_i définis comme étant solutions de l'équation $(s^{\alpha-1} - A) = 0$. Ils sont donnés par l'expression (I.30) :

$$p_i = \lambda_i^{\frac{1}{\alpha}}, 1 \leq i \leq n \quad (\text{I.32})$$

Alors, la condition de stabilité dans la sen entrée bornée, sortie bornée est réalisée si la condition :

$$|\arg(p_i)| > \frac{\pi}{2} \quad (\text{I.33})$$



I.3.4 Domaines d'application

L'application de méthodes basées sur les systèmes différentiels fractionnaires et de plus en plus fréquents dans les différents domaines scientifiques elles sont utilisées essentiellement

comme outils de modélisation en mécanique, automatique, rhéologique. Attire d'exemple ces méthodes sont actuellement utilisées pour modéliser le comportement des matériaux, réaliser des composants électriques par des correcteurs fractionnaires et dans le traitement d'image [2],[15].

I.3.5 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire peuvent être divisées en deux catégories (fréquentielles et numériques) [16]:

I.3.5.1 Méthodes Fréquentielles

I.3.5.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation

L'expansion des fractions continues [7], [17] est une méthode d'évaluation des fonctions qui converge souvent beaucoup plus rapidement que le développement en série de puissances, et converge dans un domaine plus large du plan complexe. Le résultat de cette approximation pour une fonction irrationnelle $G(s)$ peut être exprimé sous la forme :

$$G(s) \cong a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} \quad (I.34)$$

$$G(s) = a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} \quad (I.34)$$

Où $a_i(s)$ et $b_i(s)$ sont des fonctions rationnelles de la variable s ou des constantes. L'application de cette méthode résulte en une fonction rationnelle $\hat{G}(s)$, qui est une approximation de la fonction irrationnelle $G(s)$.

D'autre part, pour l'interpolation, les fonctions rationnelles sont parfois supérieures aux polynômes, car elles permettent de modéliser les fonctions par des pôles. Ces techniques sont basées sur l'approximation d'une fonction irrationnelle $G(s)$ par une fonction rationnelle définie par le quotient de deux polynômes de la variable s :

$$G(s) \cong R_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{P_\mu(s)}{Q_v(s)} = \frac{p_0 + p_1 s + \dots + p_\mu s^\mu}{q_0 + q_1 s + \dots + q_v(s)} \quad (I.35)$$

qui passe par les points $(s_i, G(s_i)); \dots (s_{i+m}, G(s_{i+m}))$.

Dans la suite nous présenterons quelques-unes des méthodes les plus connues de ce type.

a) Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégrro-différentiels d'ordre fractionnaire :

En général, une approximation rationnelle de la fonction $G(s) = s^\mu$ tel que $0 < \mu < 1$ (Intégration d'ordre fractionnaire dans le domaine de Laplace) peut être obtenue en utilisant l'expansion des fractions continues des fonctions [18]:

$$G_h = \frac{1}{(1+\frac{1}{s})^\mu} \quad (\text{I.36})$$

$$G_h = (1 + \frac{1}{s})^\mu \quad (\text{I.37})$$

Où $G_h(s)$ est l'approximation pour les hautes fréquences ($\omega T \gg 1$), et $G_1(s)$ l'approximation pour les basses fréquences ($\omega T \ll 1$).

b) Méthode de Carlson

La méthode proposée par Carlson tirée du processus régulier de Newton utilisé pour l'approximation itérative de la racine d'ordre α , peut être considérée comme appartenant à ce groupe [7]. Cette méthode se base sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^\frac{1}{\mu} - G(s) = 0 \quad (\text{I.38})$$

$$H(s) = (G(s))^\mu \quad (\text{I.39})$$

En définissant $\frac{1}{\mu} = m = \frac{q}{2}$ à chaque itération, partant de la valeur initiale $H_0(s) = 1$, une fonction rationnelle approximée peut être donnée par :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)} \quad (\text{I.40})$$

Le modèle d'approximation est obtenu ensuite, en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle par son approximation rationnelle.

c) Méthode de Matsuda

La méthode proposée par [19] est basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire $G(s) = s^\alpha$ par une fonction rationnelle $\hat{G}(s)$ en identifiant le modèle d'approximation à partir de son gain. Le gain est calculé en utilisant M fréquences réparties dans une bande de fréquence $[\omega_0, \omega_M]$ dans laquelle se fait l'approximation. Pour un ensemble

de points sélectionnés $\omega_i, i = 0, 1, 2 \dots M$, l'approximation prend la forme :

$$\hat{G}(s) = a_0 + \frac{s-\omega_0}{a_1(s)+a_2(s)+a_3(s)+\dots} = [a_0; \frac{s-\omega_{i-1}}{a_i}]_{i=1}^M \quad (\text{I.41})$$

Où

$$a_i = f(\omega_i), f_0(\omega) = G(s), f_{i+1}(s) = \frac{s-\omega_i}{f_i(s)-a_i} \quad (\text{I.42})$$

Le modèle d'approximation est obtenu en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle explicite par son approximation.

I.3.5.1.2 Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification

En règle générale, on peut utiliser toutes les techniques d'identification dans le domaine fréquentiel pour obtenir une fonction rationnelle dont la réponse fréquentielle est proche de celle de la fonction irrationnelle initiale. Par exemple, on peut accomplir cela en réduisant au minimum la fonction coût suivante.

$$J = \int W(s) |G(w)\hat{G}(w)|^2 dw \quad (I.43)$$

Où $W(s)$ est une fonction de pondération, $G(w)$ la réponse fréquentielle originale, et $\hat{G}(w)$ est la réponse fréquentielle de la fonction rationnelle approximée. Les deux approches les plus connues sont celles proposées par Oustaloup et Charef.

a) La méthode d'Oustaloup

L'approximation d'Oustaloup d'un dérivateur généralisé, dont l'action différentielle couvre tout l'espace des fréquences, repose sur une distribution récursive d'une infinité de zéros et de pôles réels négatifs (afin d'assurer un comportement à phase minimale) [19, 20]. Dans le cadre d'une synthèse réaliste (pratique) fondée sur un nombre fini de zéros et de pôles, il convient de réduire le comportement différentiel généralisé sur un intervalle fréquentiel borné, choisi selon les besoins de l'application [21].

Ainsi, l'approximation de l'opérateur s^α , $\alpha \in R^+$, dans une bande de fréquence $[\omega_0, \omega_M]$ est donnée par une fonction rationnelle [22] :

$$\hat{G}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1+s/z_k}{1+s/w'_k} \quad (I.44)$$

En utilisant l'ensemble des formules de synthèse suivantes :

$$w'_0 = \alpha^{0,5} \cdot w_u; w_0 = \alpha^{0,5} w_u; \frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \frac{w_{k+1}}{w_k} \quad (I.45)$$

$$\frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \eta > 1; \frac{w_k}{w'_k} = \alpha > 0; N = \frac{\log(\frac{w_N}{w_0})}{\log(\alpha, \eta)}; \mu = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha, \eta)}; \quad (I.46)$$

w_u : étant le gain fréquentiel unité et la fréquence centrale d'une bande de fréquences distribuées géométriquement autour. Soit, $w_u = \sqrt{w_h \cdot w_b} w_h$ et w_b sont la haute et basse fréquence respectivement.

b) Méthode de Charef : Fonction de singularité

La méthode appelée aussi la "Méthode de la fonction de singularité" développée par Charef et al. [12,23], la méthode d'approximation est différente selon que la fonction de transfert d'ordre fractionnaire à approximer soit du premier ou du second ordre.

- **Système du premier ordre fractionnaire**

Pour un système d'ordre fractionnaire du premier ordre :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\beta} \quad (\text{I.47})$$

On peut réécrire la fonction (I.43) comme suit (voir aussi [12]) :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.48})$$

Où $(N + 1)$ est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquences du système. L'équation (I.46) peut être tronquée à un nombre fini N et l'approximation devient :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\beta} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.49})$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :

$$p_i = (ab)^i p_0, i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.50})$$

$$p_i = (ab)^i a p_0, i = 1, 2, 3, \dots, N - 1 \quad (\text{I.51})$$

Avec :

$$p_0 = P_T 10^{\frac{\epsilon p}{20\beta}}, a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\beta)}}, b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\beta}}, \beta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.52})$$

ϵp est l'erreur tolérée en dB .

Avec une pente de $-20 \beta \text{ dB /dec}$ et son approximation par des lignes droites en zig-zig avec des pentes individuelles de -20 dB /dec et 0 dB /dec .

- **Système du second ordre fractionnaire :**

Pour un système de second ordre décrit par l'équation (I.51) :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\xi \frac{s}{w_n} + 1\right)^\beta} \quad (I.53)$$

Avec β un nombre réel positif tel que $0 < \beta < 1$, on peut distinguer deux cas

Cas où $0 < \beta < 0,5$

On peut exprimer la fonction (I.51) comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \left(\frac{s}{w_n} + 1\right)^\eta}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha \frac{s}{w_n} + 1\right)} \quad (I.54)$$

Avec $\alpha = \xi^\beta$ et $\eta = 1 - 2\beta$, ce qui peut aussi être approximé par la fonction,

$$G_e(s) \approx \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha \frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (I.54)$$

Les singularités (pôles P_i et zéros Z_i) sont données par les formules suivantes :

$$p_i = (ab)^{i-1} z_1, i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (I.55)$$

$$z_i = (ab)^{i-1} z_1, i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (I.56)$$

Avec :

$$Z_1 = w_n \sqrt{b}, \quad a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\eta)}}, b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\eta}}, \eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)}$$

ϵp est l'erreur tolérée en dB

L'ordre d'approximation N est calculé en fixant la bande de fréquences de travail, spécifiée par w_{max} telle que: $P_N - 1 < w_{max} < P_N$, ce qui mène à la valeur suivante:

$$N = \text{Partie entière de} \left[\frac{\log\left(\frac{w_{max}}{p_1}\right)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (I.57)$$

$G_e(s)$ Peut alors être écrite sous la forme d'une fonction paramétrique d'ordre $N + 2$:

$$G_e(s) = \frac{b_{m_0} s^N + b_{m_1} s^{N-1} + \dots + b_{m_N}}{s^{N+2} + a_{m_1} s^{N+1} + \dots + a_{m_N}} \quad (I.58)$$

Les coefficients a_{m_i} et b_{m_i} sont calculés à partir des singularités P_i, Z_i ainsi que α et w_n

Pour $0,5 < \beta < 1$

La fonction d'approximation est donnée comme suit:

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha\frac{s}{w_n} + 1\right)\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)} \quad (\text{I.59})$$

Où $\alpha = \xi^\beta$ et $\beta = 1 - 2\beta$, qui développée comme précédemment avec les valeurs singulières suivantes :

$$P_i = (ab)^{i-1} p_1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.60})$$

$$Z_i = (ab)^{i-1} a p_1 \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (\text{I.61})$$

Avec:

$$Z_1 = w_n \sqrt{b}, \quad a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\eta)}}, \quad b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\eta}}, \quad \eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)}$$

ϵp est l'erreur tolérée en dB .

$G_e(s)$ peut alors être écrite sous la forme de la fonction paramétrique (I.58).

I.3.5.1 Méthodes Numériques

Le principe de ces méthodes consiste à approximer le modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret en substituant l'opérateur de Laplace s dans le modèle fractionnaire par son équivalent en temps discret. La discrétisation est une étape nécessaire lorsqu'on utilise des machines fonctionnant en temps discret pour commander ou simuler des modèles continus. Dans le cas des opérateurs d'ordre fractionnaire analogiques, il existe deux méthodes permettant d'obtenir l'équivalent discret de ces opérateurs analogiques [24].

a) Méthode directe de discrétisation

La méthode directe de discrétisation est la première, car elle permet d'approximativement l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire dans le domaine discret. Parmi les techniques de discretisation existantes on peut citer les plus utilisées, la technique de l'expansion en série entière et la technique de l'expansion en fraction continue [25]

- **Discrétisation utilisant la technique de l'expansion de série entière**

La combinaison de la fonction génératrice d'Euler donnée par la règle de discrétisation de l'opérateur dérivateur $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$ et la technique de l'expansion de série entière (PSE) pour

l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire $s^m = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^m$, mène à l'expression suivante [26]

$$s^m \cong T^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} z^{-k} \quad (\text{I.61})$$

Cette équation est l'expression du dérivateur d'ordre fractionnaire de GrundwaldLeitnikov d'ordre m [27]. Alors, la dérivée d'ordre fractionnaire m d'une fonction causale $f(t)$ est obtenue à partir de l'expression (III.14) comme suit:

$$\frac{d^m f(t=nT)}{dt} = T^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} f((n-k)T) \quad (\text{I.62})$$

Où T est la période d'échantillonnage.

L'exécution de la PSE pour l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-m} = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^{-m}$ mène aussi à la formule donnée par Lubich [28] comme suit:

$$s^{-m} \cong T^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} z^{-k} \quad (\text{I.63})$$

Donc, l'intégration d'ordre fractionnaire m d'une fonction causale $f(t)$ est obtenue aussi à partir de l'expression (I.62) par:

$$I^m f(t = nT) = T^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} f((n-k)T) \quad (\text{I.64})$$

Où I^m dénote l'opération d'intégration d'ordre fractionnaire m .

Une autre possibilité pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire analogiques avec la technique de l'expansion de série entière (PSE) est l'utilisation de la règle de Tustin (bilinéaire)

$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ comme une fonction génératrice

- **Approximation discrète en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue**

La technique de l'expansion en fraction continue (CFE) qui approxime une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle a été aussi utilisée pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire. Dans la référence [29], cette technique d'approximation a été appliqué pour le dérivateur et l'intégrateur d'ordre fractionnaire s^m et s^{-m} respectivement, lorsque la fonction génératrice de Tustin donnée par la règle de discrétisation de l'opérateur dérivateur $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ est utilisé. Alors, l'expression suivante a été obtenue:

$$s^{\pm m} = \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^{\pm m} \cong T^{\mp m} \text{CFE} \left[\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^{\pm m} \right] = T^{\mp m} \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})} \quad (\text{I.65})$$

Où T est la période d'échantillonnage, p et q sont les ordres de l'approximation des polynômes P et Q .

I.4 Conclusion

Ce chapitre constitue une introduction aux éléments de base du calcul fractionnaire. Nous y avons présenté quelques définitions mathématiques des opérateurs fractionnaires, ainsi que leurs propriétés et leurs transformées de Laplace. Nous avons également introduit deux classes de méthodes d'approximation pour la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire : les méthodes fréquentielles et les méthodes numériques.

CHAPITRE II

Commande PID et PID fractionnaire

CHAPITRE II

Commande PID et PID fractionnaire

II.1 Introduction

La commande PID (Proportionnelle-Intégrale-Dérivée) est une technique de régulation largement utilisée dans les systèmes de contrôle industriels en raison de sa simplicité de mise en œuvre et de son efficacité pour une large gamme d'applications. Le régulateur PID classique ajuste la sortie d'un système en fonction de l'erreur entre la valeur mesurée et la valeur de consigne, en utilisant une combinaison d'actions proportionnelle, intégrale et dérivée. Malgré sa popularité et sa robustesse, le PID classique présente certaines limitations, notamment en termes de performance face aux systèmes présentant des dynamiques complexes et des comportements non linéaires.

Pour surmonter ces limitations, la commande PID fractionnaire a été introduite. Cette méthode étend le concept de régulation PID en incorporant des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire, offrant ainsi une flexibilité accrue et une capacité améliorée à gérer les systèmes avec des dynamiques complexes et des effets de mémoire. Le contrôleur PID fractionnaire (FOPID) permet d'améliorer les performances du système en termes de rapidité, précision et stabilité, tout en conservant les avantages de la commande PID classique.

Dans ce chapitre, nous explorerons les principes fondamentaux de la régulation, les performances des systèmes réglés, et les concepts clés de la commande PID classique et fractionnaire. Nous commencerons par une revue des principes généraux de la régulation, en soulignant l'importance des performances des systèmes réglés en termes de rapidité, précision et stabilité. En outre, nous aborderons la méthode d'optimisation par essais particuliers (PSO), une technique moderne utilisée pour ajuster les paramètres des régulateurs PID et FOPID afin d'optimiser leurs performances.

II.2 Principe général de la régulation

Il est nécessaire de maintenir certaines dimensions physiques à des valeurs spécifiques dans la plupart des machines industrielles et domestiques, même si des variations externes ou internes peuvent les altérer. Prenons l'exemple du niveau d'eau d'un réservoir, de la température d'une étuve, de la vitesse et de la position des moteurs, qui sont intrinsèquement variables et qui nécessitent donc des mesures appropriées pour réguler ce processus.

Si les perturbations influençant la grandeur à contrôler sont lentes ou négligeables, un simple réglage en boucle ouverte permet d'obtenir et de maintenir la valeur souhaitée (par exemple, l'action

sur un robinet d'eau). Cependant, dans la plupart des cas, ce type de réglage n'est pas suffisant car il ne fournit pas d'information sur la sortie. Il est alors nécessaire de comparer en permanence la valeur mesurée de la grandeur réglée à celle désirée, et d'agir en conséquence sur la grandeur d'action, dite grandeur réglant. Cela constitue une boucle de régulation et, plus généralement, une boucle d'asservissement. Cette boucle nécessite la mise en œuvre d'un ensemble de moyens de mesure, de traitement de signal ou de calcul, d'amplification et de commande d'actionneur, constituant une chaîne de régulation ou d'asservissement. La consigne est maintenue constante et il se produit sur le procédé une modification d'une des entrées perturbatrices. L'aspect régulation est considéré comme le plus important dans le milieu industriel, car les valeurs des consignes sont souvent fixes, néanmoins, pour tester les performances et la qualité d'une boucle de régulation, on s'intéresse à l'aspect asservissement [8, 9].

II.2.1 Performances des systèmes réglés [10]

Les performances des systèmes réglés définies dans un cahier des charges, sont illustrées par la figure (II.1).

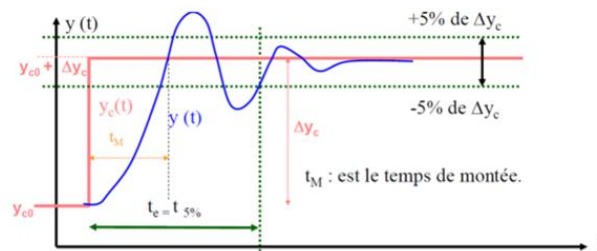


Figure II.1: Performances d'un système de commande

II.2.1.1 Rapidité

La rapidité quantifie le temps de réponse du système. Elle correspond au temps de réaction de la sortie par rapport à la consigne. Le temps mis par la réponse pour ne plus dépasser 5% de la valeur finale. Ce temps est retenu comme critère de rapidité 5%.

II.2.1.2 Précision

La précision quantifie l'erreur lorsque l'équilibre est atteint, Avec l'entrée sortie et la de même nature. Autrement, un système est précis si la sortie suit la consigne en toutes circonstances avec un écart inférieur à la valeur définie dans un cahier des charges.

II.2.1.3 Stabilité

On dit qu'un système est stable lorsque celui-ci tend à revenir à son état d'équilibre pour une consigne constante, la sortie doit être constante.

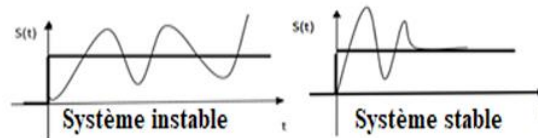


Figure II.2: Stabilité du système

II.3 Le correcteur

Le correcteur constitue la partie « intelligente » de l'asservissement et sa détermination judicieuse confère à l'asservissement ses qualités. Aisé à modifier, le correcteur peut être muni d'une variation automatique de ses paramètres suivant la plage de fonctionnement du procédé, dans le cas où celle-ci évolue lentement [1].

II.4 But de la correction

Le but de la correction est de doter l'asservissement des qualités attendues, par le calcul et l'implantation du correcteur nécessaire. Les opérateurs essentiels du correcteur sont réalisables à partir d'amplificateurs à courant continu et d'éléments résistances/capacités. La réalisation numérique peut se transposer aisément à partir d'un schéma analogique, en conservant la même organisation fonctionnelle et en associant un intégrateur numérique à chaque intégrateur électronique [11, 9].

II.5 La commande PID classique

Aujourd'hui, le correcteur PID est la structure de commande la plus utilisée dans les boucles de rétroaction. Plus de 90% des boucles d'asservissement sont des correcteurs PID. Généralement, le correcteur PID classique est implémenté dans des systèmes de commande à retour unitaire classique donné par la figure (II.3).

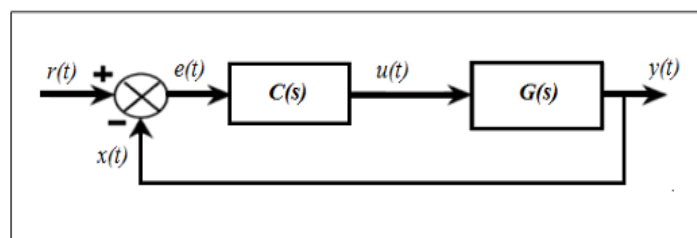


Figure II.3: Système de commande à retour unitaire classique

Où:

$u(t)$: Le signal de commande

$e(t)$: L'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$ et le signal de retour $x(t)$

$y(t)$: La grandeur à commander

$C(s)$: La fonction de transfert du correcteur

$G(s)$: La fonction de transfert de système.

Le comportement du correcteur proportionnel intégral dérivé (PID) classique est décrit par la loi de commande suivante :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{II.1})$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (II.1) avec les conditions initiales nulles, on trouve :

$$\begin{aligned} U(s) &= K_p E(s) + \frac{K_i}{s} E(s) + K_d s E(s) \\ &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d \cdot s \right) E(s) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Avec: $T_i = \frac{K_p}{K_i}$ & $T_d = \frac{K_d}{K_p}$

La fonction de transfert de correcteur PID peut être exprimé par :

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d \cdot s \right) \quad (\text{II.3})$$

Où : $C(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$

Les paramètres du correcteur associés à ces différents termes sont le gain proportionnel K_p , la constante d'intégration T_i et la constante de dérivation T_d . Les trois termes proportionnel, intégral et dérivé possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire [3].

II.5.1 Paramètres d'un régulateur PID

L'idée de base de ce régulateur est de générer une commande $u(t)$ donnée par le régulateur PID [4], dans sa forme classique est décrite par l'équation (II.1)

Elle est composée de la somme de trois termes :

- Le terme proportionnel « P » (proportionnel à l'erreur) :

$$P = K_p e(t) \quad (\text{II.3})$$

- Le terme intégral (proportionnel à l'intégrale de l'erreur) :

$$I = K_i \int_0^t e(t) dt \quad (\text{II.4})$$

- Le terme dérivatif « P » (proportionnel à la dérive de l'erreur)

$$D = K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{II.4})$$

K_p, K_i, K_d : est le gain proportionnel, intégral et dérivé respectivement.

II.5.2 Aspects fonctionnels du régulateur PID

La réalisation de la boucle d'asservissement par un PID comporte deux aspects essentiels :

- Le réglage du régulateur PID, pour lequel la connaissance d'un modèle dynamique du procédé d'une part et les performances désirées d'autre part déterminent le choix de la méthode de synthèse.
- L'implantation du régulateur dans une version analogique ou numérique et dans une configuration série, parallèle ou mixte [1].

II.5.2.1 Action Proportionnelle Intégrale Dérivée (PID)

Les régulateurs rencontrés sur les installations industrielles combinent les effets proportionnel, intégral et dérivée. La fonction de transfert d'un régulateur PID standard, avec filtrage de la dérivée est comme suit [1]

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right) \quad (\text{II.5})$$

K_p, K_i, K_d Sont en fonction des valeurs des résistances et des capacités du montage montré par la figure (II.4)

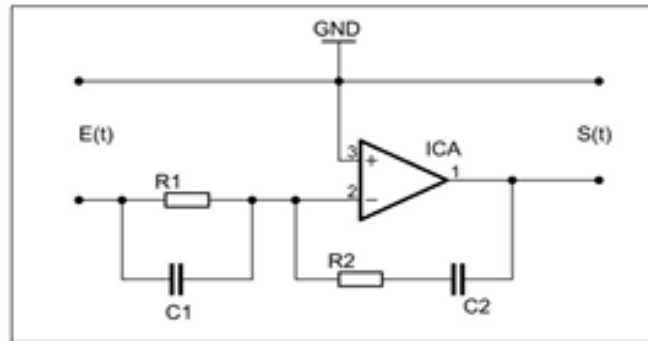


Figure II.4: Schéma électronique du correcteur Proportionnel Intégral Dérivé

II.5.3 Algorithmes d'ajustement des paramètres de Contrôleur PID

Le réglage d'un régulateur PID implique d'influencer les trois paramètres des différentes actions (gain du proportionnel, gain de l'intégral, gain de la dérivée) afin d'obtenir la réponse appropriée en termes de précision, de rapidité, de stabilité et de robustesse à la sortie du procédé. Pour cela, il existe plusieurs méthodes de réglage [8] [16].

Il existe plusieurs méthodes de calcul des paramètres du régulateur PID. Elles sont basées sur les spécifications temporelles comme

- Méthode Ziegler–Nichols (ZN)
- L'algorithme de Wang–Juang–Chan

II.6 Contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

Le contrôleur PID est largement employé dans le domaine industriel en raison de sa simplicité. Cependant, ses performances peuvent être insuffisantes en raison de retards importants dans le modèle du procédé ou de variations des paramètres du procédé. D'autres algorithmes de réglage sont utilisés dans cette situation, tels que le réglage par retour d'état, le réglage par modèle interne, le réglage par régime glissant, et ainsi de suite.

Mais récemment, Podlubny, pour améliorer le comportement du correcteur PID, à proposer le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire, comportant un intégrateur d'ordre λ et un différentiateur d'ordre μ , où λ et μ appartiennent à l'ensemble des nombre réels.

Le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire présente un avantage majeur en ce qu'il peut parfaitement contrôler la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire. Les correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire présentent un autre avantage important : ils sont moins sensibles aux variations des paramètres du système commandé, ce qui améliore leur robustesse. Ceci est parce que les correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire ayant deux degrés de liberté supplémentaires pour mieux ajuster les propriétés dynamiques de systèmes de commande d'ordre fractionnaire. Puisque les ordres λ et μ sont des nombres réels arbitraires, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire est plus flexible et donne l'avantage de mieux régler les propriétés dynamiques des systèmes [35,36]. Des activités de recherche sont dirigées pour définir de nouvelles techniques de réglage des correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire par l'extension de la théorie de la commande classique.

II.6.1 Structure de correcteur PID fractionnaire

Le correcteur PID fractionnaire est implémenté dans des systèmes de commande à retour unitaire classique donné par la figure Fig.IV.1. Où $u(t)$ désigne le signal de commande et $e(t)$ l'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$ et la grandeur à commander $y(t)$, $C(t)$ est la fonction de transfert du correcteur fractionnaire, $G_p(t)$ est la fonction de transfert de système, dans notre cas c'est le moteur à courant continu.

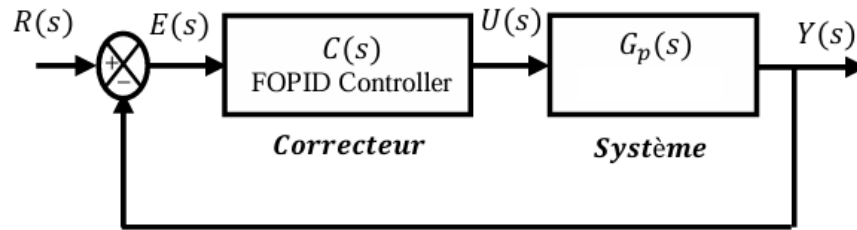


Figure II.5: Système de commande à retour unitaire classique

L'équation de sortie du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire dans le domaine de temps est donnée sous la forme :

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\lambda}(e(t)) + T_d D^\mu(e(t)) \right] \quad (\text{II.6})$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (II.6) avec les conditions initiales nulles, la fonction de transfert de ce correcteur peut être exprimé par :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (\text{II.7})$$

Où les d'intégration K_i et de dérivation K_d sont liés aux paramètres de la forme classique par les relations suivantes :

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (\text{II.8})$$

$$K_d = K_p T_d \quad (\text{II.9})$$

La fonction de transferté $C(s)$ d'un correcteur est :

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s^\lambda} + T_d s^\mu \right) \quad (\text{II.10})$$

En plus de K_p , K_i et K_d le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ possédé deux autre paramétré de réglage λ et μ . Ceci le rend plus flexible et donc une opportunité pour mieux ajuster les propriétés dynamiques des systèmes de commande d'ordre fractionnaire. S'inspirant de l'idée du correcteur $PI^\lambda D^\mu$; plusieurs travaux sur les technique de réglage sont actuellement publiés [33].

II.6.2 Principe de fonctionnement

Par comparaison aux correcteurs classiques, les correcteurs d'ordre fractionnaire possèdent en plus deux autres paramètres notés λ et μ qui présentent l'ordre d'intégration et de dérivation respectivement. Suivant la variation de ces deux paramètres, on peut distinguer différentes possibilités des correcteurs d'ordre fractionnaire. [30]

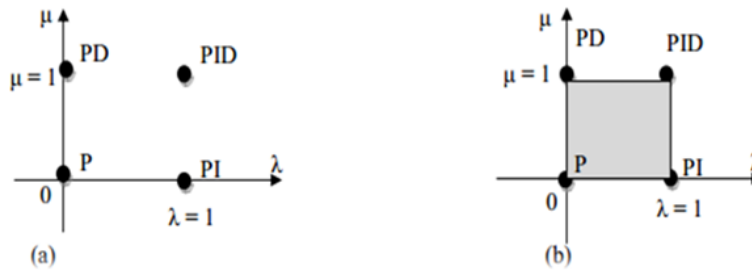


Figure II.6: $PI^\lambda D^\mu$ (a) Ordre entier, (b) Ordre fractionnaire

D'après cette figure, on peut donner les cas suivants :

- Lorsque $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, on a un correcteur P classique.
- Lorsque $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, on a un correcteur PI classique.
- Lorsque $\lambda = 0$ et $\mu = 1$, on a un correcteur PD classique.
- Lorsque $\lambda = 1$ et $\mu = 1$, on a un correcteur PID classique.
- Lorsque $0 < \lambda < 1$ et $\mu = 1$, on a un correcteur PI fractionnaire.
- Lorsque $\lambda = 0$ et $0 < \mu < 1$, on a un correcteur PD fractionnaire.
- Lorsque $0 < \lambda < 1$ et $0 < \mu < 1$, on a un correcteur PID fractionnaire.

D'après ces résultats, on constate que les correcteurs classiques sont des cas particuliers des correcteurs d'ordre fractionnaires.

II.7 La fractionalisation des Correcteurs PI et PID

La fractionalisation de PI classique ainsi que PID classique est obtenue en modifiant le terme intégrateur dans les fonctions de transferts des correcteurs précédent. L'intégrateur $1/s$ est fractionalisé comme suit [38, 39] :

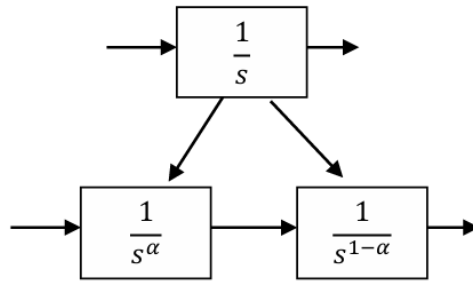


Figure II.7: Fractionalisation d'un intégrateur

Tel que :

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{s^{(1-\alpha)}}$$

Avec α est un nombre réel: $0 < \alpha < 1$.

La fonction de transfert d'un correcteur classique PI est :

$$C_{PI}(p) = K_p + \frac{1}{T_i p} \quad (\text{II.11})$$

La fonction de transfert d'un correcteur PI fractionnalisé est donnée comme suite :

$$C_{PIf} = \frac{1}{p^\alpha} \frac{1}{p^{\alpha-1}} \left(\frac{k_p \tau_i p + 1}{\tau_i} \right) \quad (\text{II.12})$$

Avec $0 < \alpha < 1$

Soit la fonction de transfert d'un correcteur classique PID donné par la fonction suivante :

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (\text{II.13})$$

Le correcteur PID fractionnalisé est défini par la fonction suivante [26] :

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} \left(\frac{(k_p T_d T_i s^2 + k_p T_i s + k_p)}{T_i} \right) \\ &= \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{s^{(1-\alpha)}} \left(\frac{(k_p T_d T_i s^2 + k_p T_i s + k_p)}{r_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Avec $0 < \alpha < 1$

II.8 Approximation d'Oustaloup

Dans ce mémoire de fin d'études, nous avons utilisé la méthode d'Oustaloup pour approximer l'ordre intégral ou dérivateur fractionnaire.

II.8.1 Paramètres du filtre d'Oustaloup

Pour comprendre comment les paramètres du filtre, à savoir l'ordre et la bande de fréquence, influencent la qualité de l'approximation, considérons l'exemple suivant de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire : $G(s) = \frac{1}{s^{0.5}}$. Les différentes approximations d'Oustaloup de cette fonction pour différents paramètres sont :

Pour un ordre de $N = 5$ dans une bande de fréquence de $[0.01; 100]$ rad/s:

$$\frac{1}{s^{0.5}} \approx \frac{0.1s^5 + 7.497s^4 + 76.85s^3 + 121.8s^2 + 29.85s + 1}{s^5 + 29.85s^4 + 121.8s^3 + 76.85s^2 + 7.497s + 0.1}$$

Pour un ordre de $N = 5$ dans une bande de fréquence de $[0.001; 1000]$ rad/s:

$$\frac{1}{s^{0.5}} \approx \frac{0.03162s^5 + 16.92s^4 + 537.1s^3 + 1072s^2 + 134.4s + 1}{s^5 + 134.4s^4 + 1072s^3 + 537.1s^2 + 16.92s + 0.03162}$$

Pour un ordre de $N = 7$ dans une bande de fréquence de $[0.01; 100]$ rad/s:

$$\frac{1}{s^{0.5}} \approx \frac{0.1s^7 + 9.834s^6 + 204.5s^5 + 1079s^4 + 1499s^3 + 548.7s^2 + 50.94s + 1}{s^7 + 50.94s^6 + 548.7s^5 + 1499s^4 + 1079s^3 + 204.5s^2 + 9.834s + 0.1}$$

Les diagrammes de Bode de $G(s)$ et de ses approximations d'Oustaloup sont montrés dans la figure II.7 .

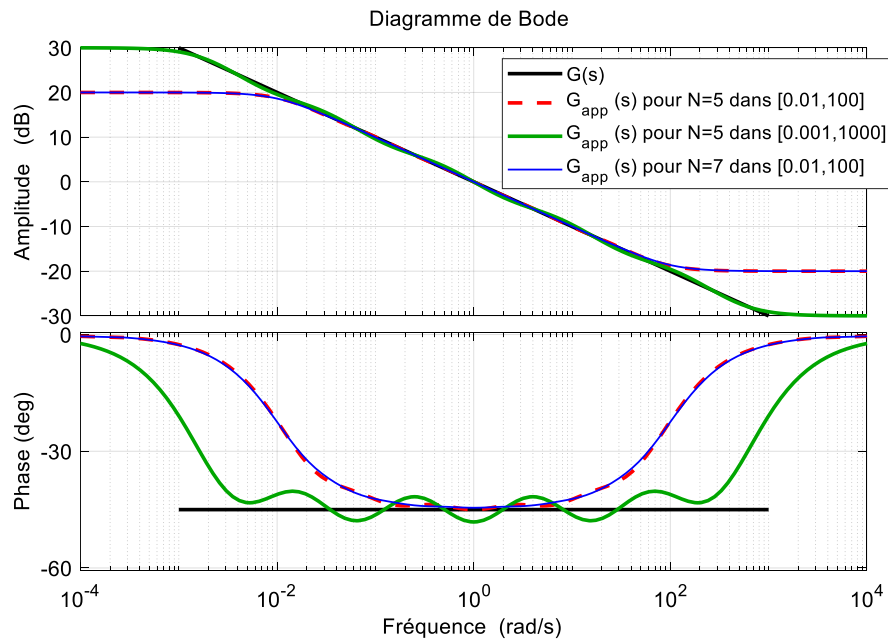


Figure II.8: Diagrammes de Bode de la fonction $G(s)$ et de ses approximations d'Oustaloup

À partir de la figure ci-dessus, nous pouvons observer les points suivants :

- En général, le filtre d'Oustaloup donne une approximation précise des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire dans la bande de fréquence souhaitée.
- En dehors de la bande de fréquence d'Oustaloup, la fonction de transfert approximée présente une amplitude et une phase différentes de celles de la fonction réelle.
- La phase de la fonction approximée est plus sensible que l'amplitude, où nous observons qu'elle ne correspond pas à la phase de la fonction réelle près des fréquences de transition ω_b et ω_h .
- L'élargissement de la bande de fréquence entraîne des erreurs d'approximation où les valeurs de la phase et de l'amplitude de la fonction approximée commencent à osciller autour des valeurs de la phase et de l'amplitude de la fonction réelle.
- L'augmentation de l'ordre du filtre diminue les erreurs d'approximation dans la bande de fréquence, mais augmente le temps de calcul.

II.9 Optimisation par essaim particulaire (PSO)

II.9.1. Définition

L'optimisation par essaim de particules (OEP) ou (particle swarm optimization) (PSO) en anglais, est une technique d'optimisation parallèle développée par Kennedy et Eberhart, comme une alternative aux algorithmes génétiques standards. Ces algorithmes sont inspirés des essaims d'insectes ou des bancs de poissons ou des nuées d'oiseaux Figure (II.8) et de leurs mouvements coordonnés. En effet, tout comme ces animaux se déplacent en groupe pour trouver la source de nourriture ou éviter les prédateurs, les algorithmes à essaim de particules recherchent des solutions pour un problème d'optimisation [28].

Les individus de l'algorithme sont appelés particules et la population est appelée essaim. Dans cet algorithme, une particule décide de son prochain mouvement en fonction de sa propre expérience, qui est dans ce cas la mémoire de la meilleure position qu'elle a rencontrée, et en fonction de son meilleur voisin. Ce voisinage peut être défini spatialement en prenant par exemple la distance euclidienne entre les positions de deux particules ou sociométrique ment (position dans l'essaim de l'individu) [29].

Les nouvelles vitesses et directions de la particule seront définies en fonction de trois tendances : la propension à suivre son propre chemin, sa tendance à revenir vers sa meilleure position atteinte et sa tendance à aller vers son meilleur voisin.



Figure II.9: Groupe de : (a) Oiseaux, (b) Poissons

II.9.2. Principe de base de l'algorithme (PSO)

Dans le PSO, on appelle (particule) chaque individu de la population, tandis que la population est appelée (swarm). Il est important de souligner que les mouvements des autres particules dans la même population peuvent être utilisés par la particule pour ajuster sa position et sa vitesse pendant le processus d'optimisation. Chaque individu se sert des informations locales qu'il peut obtenir sur le déplacement de ses voisins les plus proches pour prendre sa décision de déplacement. Il suffit de règles très simples telles que « être près des autres », « aller dans la même direction », « aller à la même vitesse » pour maintenir la cohésion du groupe dans son ensemble.

L'espace de recherche est défini comme « voisinage », différentes topologies sont considérées : Topologie en (étoile, rayon, circulaire,.), le plus utilisé est le circulaire tel que schématisé sur la figure (III.7) [30]

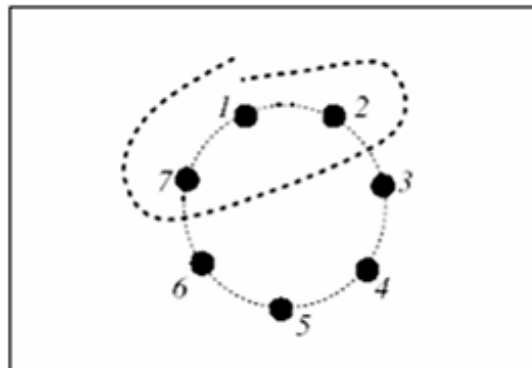


Figure II.10: Le cercle virtuel pour un swarm de sept particules. Le groupe d'information de taille trois de la particule 1 est composé des particules 1, 2 et 7

II.9.3. Définition de la position et de la vitesse courante associée à une particule

Les particules sont caractérisées par deux caractéristiques principales : leur position et leur vitesse. La position de chaque particule correspond à un point dans l'espace de recherche, ce qui peut être une solution potentielle au problème d'optimisation. La vitesse est utilisée pour définir la direction vers une position nouvelle. Les propriétés des particules changent à chaque itération. Elles sont mises à jour par les équations (III.9) [31]

$$\begin{cases} v_{ij}^{k+1} = \omega \cdot v_{ij}^k + c_1 \cdot rand_1(p_{bestij} - x_{ij}^k) + c_2 \cdot rand_2(g_{bestj} - x_{ij}^k) \\ x_{ij}^{k+1} = x_{ij}^k + v_{ij}^{k+1} \end{cases} \quad (II.15)$$

$$i = 1, 2 \dots \dots, N_p, j = 1, 2 \dots \dots, N_d$$

$$k = 1, 2 \dots \dots, iter_{max} : \text{désigne le rang de l'itération.}$$

Où:

- N_p : Nombre de particules de l'essaim.
- N_d : Nombre de variables du problème (c-à-d dimension d'une particule)
- $iter_{max}$: Nombre maximal d'itération.
- v_{ij}^k : La vitesse de la $j^{ème}$ composante de la $i^{ème}$ particule de l'essaim, à la $k^{ème}$ itération.
- p_{bestij} : La $j^{ème}$ composante de la meilleure position occupée par la $i^{ème}$ particule de l'essaim, enregistrée dans les itérations précédentes (particule best).
- g_{bestj} : La $j^{ème}$ composante de la meilleure position occupée par la meilleure particule globale de l'essaim (global best).
- x_{ij}^k : La $j^{ème}$ coordonnée de la position actuelle de la particule i , à la $k^{ème}$ itération.
- ω : est une pondération qui change à chaque itération. Elle est calculée par l'expression :

$$\omega(iter) = \omega_{max} - \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{iter_{max}} \cdot iter$$

$iter$: Le rang de l'itération actuelle.

ω_{max} : La valeur initiale de la pondération, on la prend généralement égale à 0.9

ω_{min} : Valeur finale de la pondération, elle est comprise entre 0.3 et 0.4.

c_1 et c_2 Sont les coefficients d'accélération elles caractérisent la capacité de la particule à chercher dans un autre endroit de l'espace de recherche, ou bien à affiner sa recherche à l'endroit où elle se trouve. En général, on choisit c_1 et c_2 tels que $c_1 + c_2 < 4$.

$rand_1$ et $rand_2$ Sont deux nombres aléatoires compris entre 0 et 1 [32].

L'analyse de l'équation (II.15), schématisée par la figure (II.10), montre que l'évolution de la vitesse d'une particule est la somme de trois termes et mène aux constatations suivantes:

- **Le premier terme v_{ij}** : c'est la direction précédente, elle signifie que la particule continue d'évoluer dans le même sens, sans tenir compte ni de P_{best} ni de g_{best} (elle avance en aveugle).
- **Le deuxième terme $(P_{best\ ij} - x_{ij}^k)$** : indique la direction vers la meilleure position déjà occupée par la particule x_{ij}^k (elle fait confiance à sa propre expérience) .
- **Le troisième terme $(g_{bestj} - x_{ij}^k)$** : indique la direction vers la meilleure position déjà occupée par l'ensemble de l'essaim (elle fait confiance au groupe).

Ensuite chacun de ces trois termes est pondéré par un coefficient qui permet de favoriser l'un ou l'autre de ces trois termes puisqu'à la fin. On fait leur somme. Voir La figure (II.10)

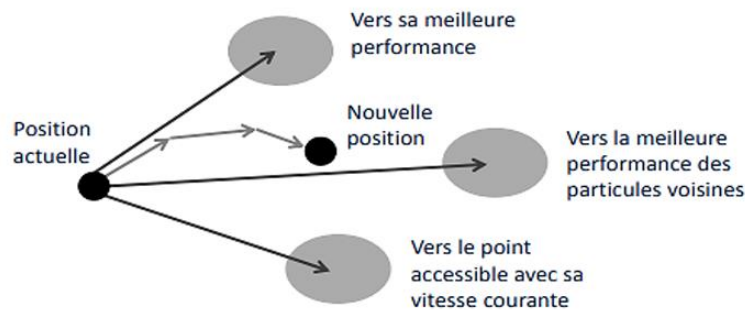


Figure II.11: Schéma de principe du déplacement d'une particule

Pour réaliser son prochain mouvement, chaque particule combine trois tendances : suivre sa vitesse propre, revenir vers sa meilleure performance, aller vers la meilleure performance de ses informatrices.

II.9.4. L'organigramme et les étapes de la méthode PSO

L'algorithme de d'optimisation par Essaim de Particules PSO peut être décrit comme suit:

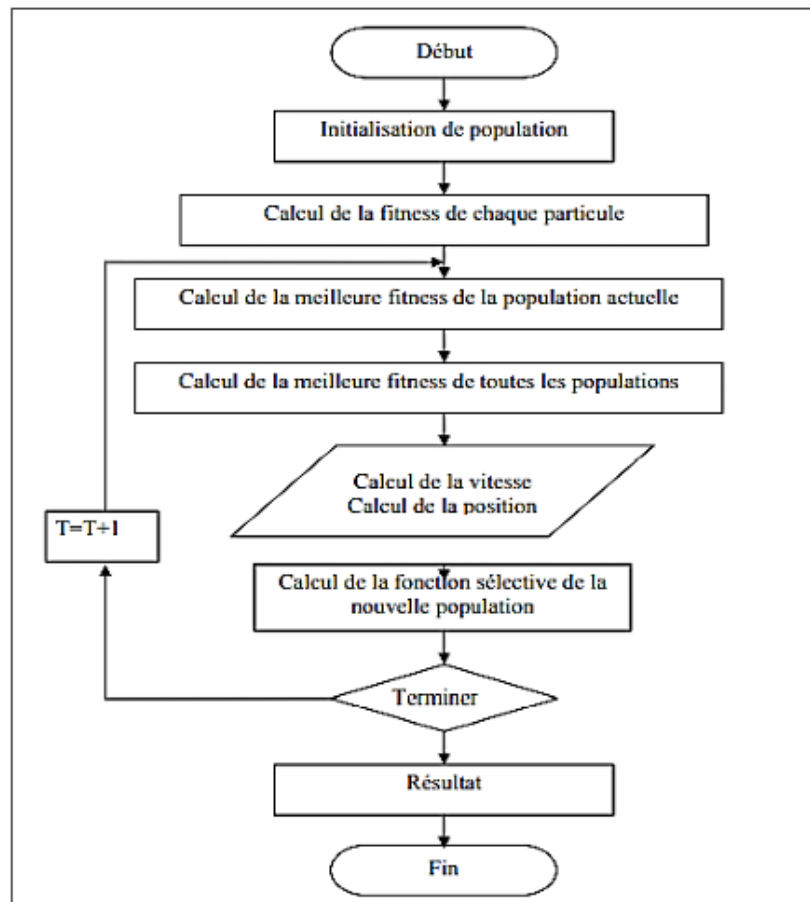


Figure II.12: Organigramme de la méthode PSO

1^{ère} étape: Initialisation des coefficients c_1 et c_2 , le coefficient d'inertie (w)

2^{ème} étape: La création de la population initiale aléatoirement et le calcul de la fitness de chaque particule (P_{besti}): la meilleure position de la particule i dans la population actuelle ; (P_{gbest}): la meilleure position dans toute les populations (la meilleure des meilleures).

3^{ème} étape: Le calcul de la nouvelle vitesse et nouvelle position de chaque particule

4^{ème} étape: Le calcul de la meilleure fitness de la population initiale et comparer avec précédente pour trouver la meilleure de toute les populations (P_{gbest}).

5^{ème} étape: Incrémentation du nombre d'itération $t=t+1$.

6^{ème} Étape: Si un critère d'arrêt est satisfait alors passer à l'étape suivante. Autrement, aller à la 3^{ème} étape.

7^{ème} étape : La position enregistrée dans (P_{gbest}) est la solution optimale.

II.10. Conclusion

Ce chapitre a fourni une compréhension approfondie des principes fondamentaux de la régulation, en mettant en lumière les performances des systèmes réglés en termes de rapidité, précision et stabilité. Nous avons exploré les concepts clés de la commande PID classique et fractionnaire, soulignant les avantages et les limitations de chacune. En particulier, nous avons démontré comment la commande PID fractionnaire offre une flexibilité accrue pour les systèmes complexes. Enfin, nous avons introduit la méthode d'optimisation par essaims particulaires (PSO) comme une technique efficace pour ajuster les paramètres des régulateurs PID et FOPID, optimisant ainsi leurs performances pour répondre aux exigences spécifiques des applications industrielles.

Chapitre III :

Simulations & Applications

Chapitre III :

Simulations & Applications

III.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter deux exemples de simulation, d'un système fractionnaire et d'un système fractionnaire avec retard en utilisant les algorithmes de commande *PID* d'ordre entier et d'ordre fractionnaire présenté dans les chapitres I & II . Nous montrons aussi que la supériorité de contrôleur fractionnaire.

III.2 Approximation sous-optimale des FOTFs

Dans cette section, nous considérons les systèmes généralisés linéaires à temps invariant (FO-LTI) avec des ordres fractionnaires non commensurables comme suit :

$$G(s) = \frac{b_m s^{\gamma_m} + b_{m-1} s^{\gamma_{m-1}} + \dots + b_1 s^{\gamma_1} + b_0}{a_n s^{\eta_n} + a_{n-1} s^{\eta_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\eta_1} + a_0} \quad (\text{III. 1})$$

Utiliser les schémas d'approximation susmentionnés pour un seul s^r puis pour le système général FO-LTI (III.1) pourrait être très fastidieux, conduisant à un modèle de très haut ordre. Dans cette section, nous proposons d'utiliser un algorithme numérique pour obtenir une bonne approximation de la fonction de transfert globale (III.1) en utilisant une fonction de transfert rationnelle d'ordre entier à dimension finie avec un terme de retard possible, et illustrons comment utiliser le modèle d'ordre entier approximé pour la conception d'un contrôleur d'ordre entier.

Notre objectif maintenant est de trouver un modèle d'ordre entier approximatif avec un ordre relativement bas, éventuellement avec un retard temporel sous la forme suivante :

$$G_{r/m,\tau}(s) = \frac{\beta_1 s^r + \dots + \beta_r s + \beta_{r+1}}{s^m + \alpha_1 s^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} s + \alpha_m} e^{-\tau s} \quad (\text{III. 2})$$

Une fonction objectif pour minimiser la norme H_2 du signal d'erreur de réduction $e(t)$ peut être définie comme suit :

$$J = \min_{\theta} \|\hat{G}(s) - G_{r/m,\tau}(s)\|_2, \quad (\text{III. 3})$$

où θ est l'ensemble des paramètres à optimiser de manière à ce que :

$$\theta = [\beta_1, \dots, \beta_r, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \tau] \quad (\text{III. 4})$$

Pour une évaluation aisée du critère J , le terme retardé dans le modèle d'ordre réduit $G_{r/m,\tau}(s)$ peut être davantage approximé par une fonction rationnelle $\hat{G}_{r/m}(s)$ en utilisant la technique d'approximation de Padé [47]. Ainsi, le critère révisé peut alors être défini par :

$$J = \min_{\theta} \|\hat{G}(s) - \hat{G}_{r/m}(s)\|_2 \quad (\text{III. 5})$$

et le calcul de la norme H_2 peut être évalué de manière récursive en utilisant l'algorithme .

Supposons que pour une fonction de transfert stable du type $E(s) = \hat{G}(s) - \hat{G}_{r/m}(s) = B(s)/A(s)$, les polynômes $A_k(s)$ et $B_k(s)$ peuvent être définis de telle sorte que :

$$A_k(s) = a_0^k + a_1^k s + \dots + a_k^k s^k, B_k(s) = b_0^k + b_1^k s + \dots + b_{k-1}^k s^{k-1} \quad (\text{III. 6})$$

Les valeurs de a_i^{k-1} et b_i^{k-1} peuvent être évaluées de manière récursive à partir de :

$$a_i^{k-1} = \begin{cases} a_{i+1}^k, & i \text{ even} \\ a_{i+1}^k - \alpha_k a_{i+2}^k, & i \text{ odd} \end{cases} \quad i = 0, \dots, k-1 \quad (\text{III. 7})$$

Et

$$b_i^{k-1} = \begin{cases} b_{i+1}^k, & i \text{ even} \\ b_{i+1}^k - \beta_k a_{i+2}^k, & i \text{ odd} \end{cases} \quad i = 1, \dots, k-1, \quad (\text{III. 8})$$

Où $\alpha_k = a_0^k/a_1^k$ et $\beta_k = b_1^k/a_1^k$.

La norme H_2 du signal d'erreur de réduction approximatif $\hat{e}(t)$ peut être évaluée à partir de :

$$J = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^2}{2\alpha_k} = \sum_{k=1}^n \frac{(b_1^k)^2}{2a_0^k a_1^k}. \quad (\text{III. 9})$$

Le modèle d'ordre réduit de norme H_2 sous-optimal pour le modèle original de haut ordre à ordre fractionnaire peut être obtenu en utilisant la procédure suivante [47]:

1. Sélectionnez un modèle réduit initial $\hat{G}^{r/m0}(s)$
2. Évaluez une erreur $\|\hat{G}(s) - \hat{G}_{r/m}^0(s)\|_2$ à partir de l'équation (III. 9).
3. Utilisez un algorithme d'optimisation (par exemple, l'algorithme de Powell [48]) pour itérer une étape afin d'obtenir un modèle estimé $\hat{G}_{r/m}^1(s)$. plus précis.
4. Définissez $\hat{G}_{r/m}^0(s) \leftarrow \hat{G}_{r/m}^1(s)$, revenez à l'étape 2 jusqu'à l'obtention d'un modèle réduit optimal $\hat{G}_{r/m}^*(s)$.
5. Extrayez le retard de $\hat{G}_{r/m}^*(s)$, le cas échéant.

Nous appelons la procédure ci-dessus sous-optimale car la méthode d'Oustaloup est utilisée pour chaque terme s^γ dans l'équation (III. 1), et l'approximation de Padé est utilisée pour les termes de retard pur.

III.3 Règles d'ajustement des systèmes de premier ordre avec retard

De nombreux algorithmes classiques de réglage PID sont proposés en partant du principe que le processus ou système peut être bien modélisée par un modèle de premier ordre avec temps mort (FOPDT).

Le modèle FOPDT est exprimé par

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1} e^{-Ls} \quad (\text{III. 10})$$

Basé sur un tel modèle typique, de nombreux algorithmes de réglage de contrôleur PID peuvent être utilisés pour concevoir des contrôleurs PID d'ordre entier, de bonnes références peuvent être trouvées dans [49]. Par exemple, la formule de réglage classique de Ziegler–Nichols et l'algorithme de Wang–Juang–Chan [50] peuvent être utilisés pour concevoir des contrôleurs PID optimaux selon le critère ITAE.

$$\begin{cases} K_p = \frac{(0.7303 + 0.5307T/L)(T + 0.5L)}{K(T + L)} \\ T_i = T + 0.5L \\ T_d = \frac{0.5TL}{T + 0.5L} \end{cases} \quad (\text{III. 11})$$

Par conséquent, les procédures suivantes peuvent être utilisées pour concevoir des contrôleurs PID pour une classe de système d'ordre fractionnaire :

1. Si le système peut être bien approximé par un modèle FOPDT, alors trouvez ses paramètres clés T , L et K .
2. Concevez un contrôleur PID avec, par exemple, l'algorithme de Wang–Juang–Chan.
3. Observez le comportement en boucle fermée sous ce contrôleur. Si le comportement n'est pas satisfaisant, essayez un autre algorithme de réglage.

III.4 Application 1: Considérons le système FO-LTI non commensurable suivant :

$$G(s) = \frac{1}{s^{2.6} + 2.2s^{1.5} + 2.9s^{1.3} + 3.32s^{0.9} + 1}, \quad (\text{III. 12})$$

Un modèle d'ordre extrêmement élevé (HOA : High Order Approximation) peut être obtenu avec le filtre d'Oustaloup, de sorte que :

$$\begin{aligned} G_{HOA}(s) &= \frac{0.01585 s^{20} + 39.38 s^{19} + 3.71e04 s^{18} + 1.66e07 s^{17} + 3.596e09 s^{16} + 3.515e11 s^{15} \\ &\quad + 1.721e13 s^{14} + 4.398e14 s^{13} + 5.696e15 s^{12} + 3.434e16 s^{11} + 1.049e17 s^{10} + 1.68e17 s^9 \\ &\quad + 1.366e17 s^8 + 5.173e16 s^7 + 9.902e15 s^6 + 9.895e14 s^5 + 4.963e13 s^4 + 1.124e12 s^3 \\ &\quad + 1.227e10 s^2 + 6.368e07 s + 1.259e05}{s^{22} + 1989 s^{21} + 1.394e06 s^{20} + 4.299e08 s^{19} + 5.985e10 s^{18} + 4.079e12 s^{17} + 1.437e14 s^{16} \\ &\quad + 2.69815 s^{15} + 2.772e16 s^{14} + 1.685e17 s^{13} + 6.224e17 s^{12} + 1.378e18 s^{11} + 1.773e18 s^{10} \\ &\quad + 1.281e18 s^9 + 5.154e17 s^8 + 1.192e17 s^7 + 1.628e16 s^6 + 1.299e15 s^5 + 5.683e13 s^4 + 1.207e12 s^3 \\ &\quad + 1.275e10 s^2 + 6.488e07 s + 1.267e05} \end{aligned}$$

Et l'ordre de l'approximation rationnelle du modèle d'ordre original est le 22 pour $N = 5$. Pour des valeurs plus grandes de N , l'ordre de l'approximation rationnelle peut être beaucoup plus élevé. Par exemple, l'ordre de l'approximation peut atteindre respectivement le 30^{ème} et le 38^{ème} ordre pour les sélections $N = 7$ et $N = 9$, avec des coefficients extrêmement grands.

Les résultats de réduction de modèle approximatifs optimaux obtenus sont énumérés comme suit ($N = 5$; $w_1 = 1e - 3$; $w_2 = 1e3$).

$$G_2(s) = \frac{-0.298 s^2 + 0.9992 s + 0.1929}{s^3 + 7.597s^2 + 2.146s + 0.1942} \quad (\text{III.14})$$

Continuous-time transfer function.

$$G_3(s) = \frac{-0.01905 s^3 + 0.3121 s^2 + 2.261 s + 0.3235}{s^4 + 10.47s^3 + 17.16s^2 + 4.183s + 0.3256} \quad (\text{III.15})$$

$$G_4(s) = \frac{-0.04183 s^4 + 0.3479 s^3 + 1.544 s^2 + 5.474 s + 0.7693}{s^5 + 8.236s^4 + 31.09s^3 + 42.17s^2 + 10.04s + 0.7744} \quad (\text{III.16})$$

Les réponses indiciaires peuvent être comparées dans la Figure 3.1, et il peut être constaté que l'approximation des différents ordres sont satisfaisantes.

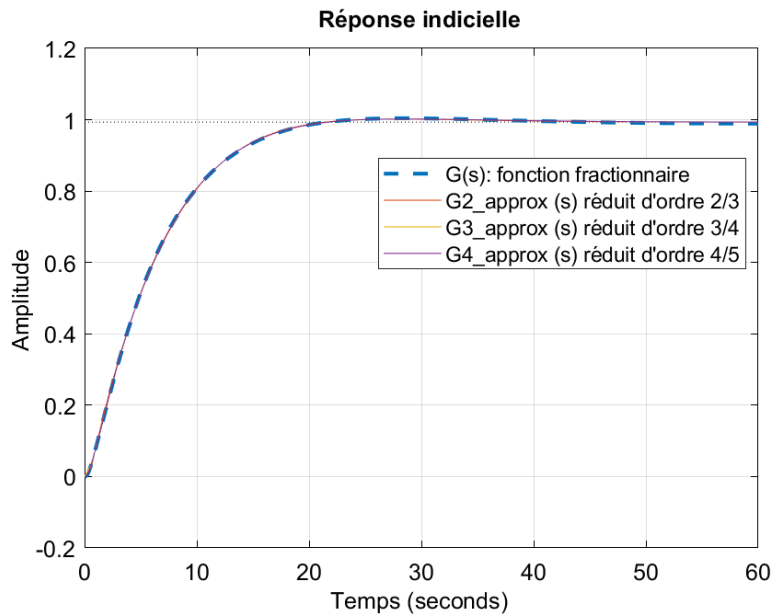


Figure III.1 Comparaison des réponses indiciaires

On peut constater qu'avec les modèles d'ordre inférieur obtenus, la réponse du système peut ne pas changer beaucoup. L'algorithme d'ajustement sous-optimal présenté peut être utile dans une classe d'approximation de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

III.4.1 Commande PID classique appliquée au système fractionnaire

Approchons-le d'abord avec la méthode d'Oustaloup, puis ajustons-le avec une structure de modèle fixe connue sous le nom de modèle de premier ordre avec retard (FOPDT), où

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1} e^{-Ls} \quad (\text{III. 17})$$

Avec:

K : Le gain statique

L : Constante de temps retard

T : Constante de temps

Le modèle FOPDT optimal obtenu est le suivant :

$$G_r(s) = 0.1836 \frac{e^{-0.827s}}{s+0.1836}. \quad (\text{III.18})$$

Un contrôleur PID peut être conçu avec l'algorithme de Wang-Juang-Chan dans (III. 19)

$$K_p = \frac{(0.7303 + 0.5307T/L)(T + 0.5L)}{K(T + L)}, \quad T_i = T + 0.5L, \quad T_d = \frac{0.5TL}{T + 0.5L}. \quad (\text{III. 19})$$

La comparaison de la réponse indicielle en boucle ouverte est montrée à la Figure III.2. On peut observer que l'approximation est assez efficace

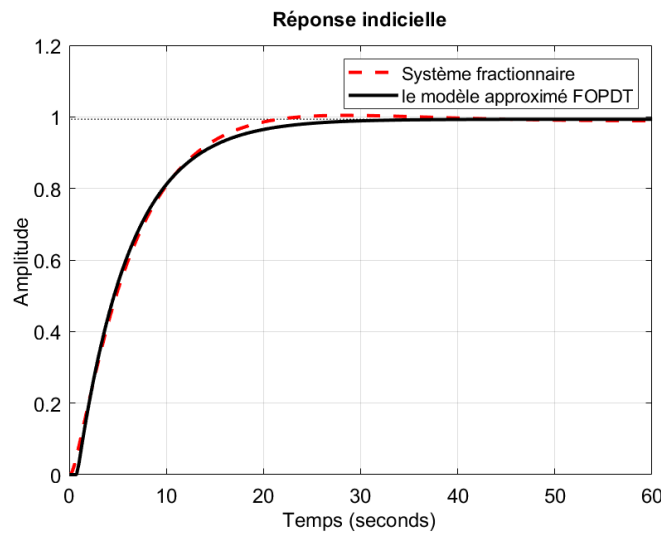


Figure III.2 Comparaison des réponses indicielle du modèle FOLPD optimal et du modèle original

Considérons maintenant la conception d'un contrôleur PID à ordre entier pour le modèle réduit de manière optimale $G_r(s)$ et voyons si le contrôleur conçu fonctionne toujours pour le système original. Le contrôleur PID à ordre entier à concevoir est sous la forme suivante :

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

$$T_i = \frac{K_p}{K_i}, T_d = \frac{K_d}{K_p}$$

Avec T_i et T_d sont les constantes d'intégration et dérivation respectivement.

Sur la base de cet algorithme de réglage (Eq.III.19), un contrôleur PID peut être conçu pour $G_r(s)$ comme suit :

$$\text{On a : } K = 0.9934, L = 0.8275 \text{ et } T = 5.4094.$$

D'après l'algorithme donné en (eq.III.19) nous trouverons les paramètres de correcteur PID d'ordre entier :

$$K_p = 3.9471, T_i = 5.8232 \text{ et } T_d = 0.3843.$$

Le contrôleur PID peut être conçu comme :

$$G_c(s) = 3.9474 \left(1 + \frac{1}{5.8232s} + 0.3843s\right).$$

Les fonctions de transferts de modèle d'ordre extrêmement élevé obtenu avec le filtre d'Oustaloup du système fractionnaire et le correcteur d'ordre entier, ainsi le système fractionnaire avec le correcteur d'ordre entier sont données par les équations ci-dessous :

système d'ordre élevé $G_{HOA+PID}(s)$

$$\begin{aligned} & 0.02404 s^{22} + 59.8 s^{21} + 5.643e04 s^{20} + 2.533e07 s^{19} + 5.521e09 s^{18} + 5.475e11 s^{17} \\ & + 2.75e13 s^{16} + 7.354e14 s^{15} + 1.039e16 s^{14} + 7.488e16 s^{13} + 2.985e17 s^{12} + 6.921e17 s^{11} \\ & + 9.415e17 s^{10} + 7.317e17 s^9 + 3.118e17 s^8 + 7.565e16 s^7 + 1.069e16 s^6 + 8.683e14 s^5 \\ & + 3.81e13 s^4 + 8.102e11 s^3 + 8.571e09 s^2 + 4.366e07 s + 8.533e04 \\ = & \frac{0.02404 s^{22} + 59.8 s^{21} + 5.643e04 s^{20} + 2.533e07 s^{19} + 5.521e09 s^{18} + 5.475e11 s^{17} + 2.75e13 s^{16} + 7.354e14 s^{15} + 1.039e16 s^{14} + 7.488e16 s^{13} + 2.985e17 s^{12} + 6.921e17 s^{11} + 9.415e17 s^{10} + 7.317e17 s^9 + 3.118e17 s^8 + 7.565e16 s^7 + 1.069e16 s^6 + 8.683e14 s^5 + 3.81e13 s^4 + 8.102e11 s^3 + 8.571e09 s^2 + 4.366e07 s + 8.533e04}{s^{23} + 1989 s^{22} + 1.394e06 s^{21} + 4.29e08 s^{20} + 5.988e10 s^{19} + 4.084e12 s^{18} + 1.442e14 s^{17} + 2.726e15 s^{16} + 2.845e16 s^{15} + 1.789e17 s^{14} + 6.973e17 s^{13} + 1.677e18 s^{12} + 2.466e18 s^{11} + 2.222e18 s^{10} + 1.247e18 s^9 + 4.311e17 s^8 + 9.193e16 s^7 + 1.199e16 s^6 + 9.252e14 s^5 + 3.93e13 s^4 + 8.229e11 s^3 + 8.636e09 s^2 + 4.379e07 s + 8.533e04} \end{aligned}$$

$$G_{sysfrac+PID}(s) = \frac{1.517 s^2 + 3.9471 s + 0.67783}{s^{3.6} + 3.3 s^{2.5} + 2.9 s^{2.3} + 1.517 s^2 + 3.32 s^{1.9} + 4.9471 s + 0.67783}$$

Enfin, la réponse en échelon du système FO-LTI original avec le contrôleur PID conçu ci-dessus est montrée dans la Figure (III.3).

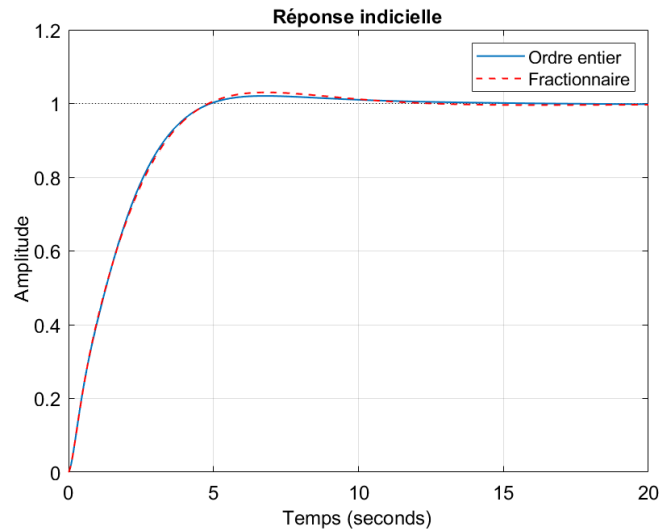


Figure III.3 : Réponses indicielle en boucle fermée sous le contrôleur PID.

On peut voir que les deux systèmes sont assez proches. Par conséquent, nous croyons que la méthode présentée peut être utilisée pour la conception de contrôleurs à ordre entier pour des systèmes FO-LTI généraux.

Les diagrammes de Bode en boucle ouverte peuvent être obtenus comme indiqué à la Figure (III.4).

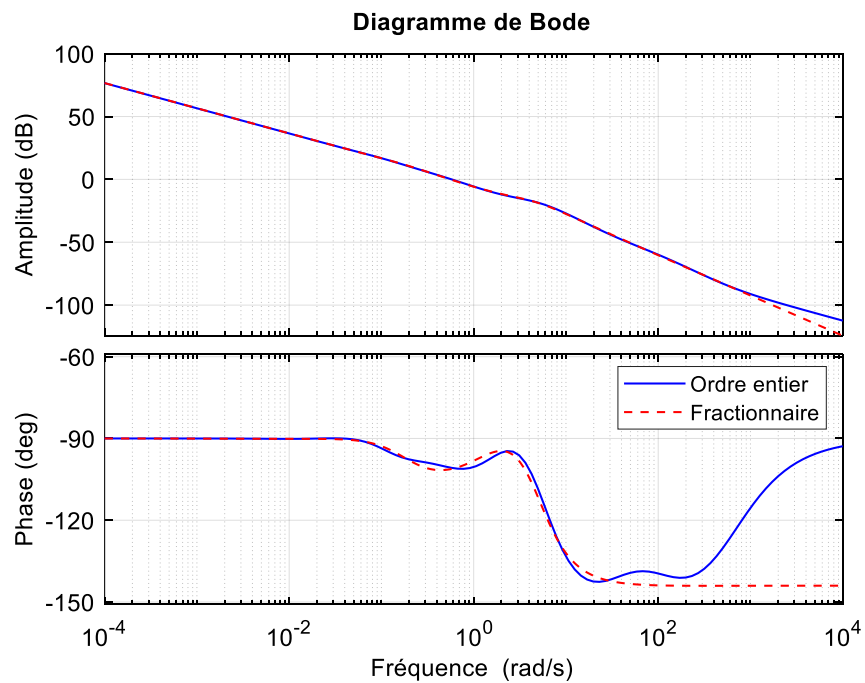


Figure. III.4 : Comparaisons des diagrammes de Bode.

III.4.2 Commande PID Fractionnaire appliquée au système fractionnaire

L'approche d'optimisation numérique présentée dans la section 3.3 peut également être étendue aux problèmes de conception de contrôleurs PID à ordre fractionnaire pour des modèles de système à ordre fractionnaire donnés. Cette idée est d'abord démontrée à travers un simple exemple. Ensuite, des procédures de conception universelles sont présentées pour tous les systèmes linéaires à ordre fractionnaire.

Pour optimiser les paramètres de correcteur fractionnaire (FOPID) tout en veillant à ce qu'ils restent dans des bornes spécifiées nous avons utilisé une fonction Matlab `fminsearchbnd` qui étend `fminsearch` pour gérer les contraintes de bornes spécifiées.

La syntaxe est : `[x, fval] = fminsearchbnd(fun, x0, lb, ub)`.

Description des paramètres

- **fun**: La fonction à minimiser.
- **x0**: L'estimation initiale des paramètres.
- **lb**: Les bornes inférieures des paramètres.
- **ub**: Les bornes supérieures des paramètres.

Valeurs de retour

- **x**: Le vecteur de paramètres qui minimise la fonction.
- **fval**: La valeur minimale de la fonction.

Dans notre cas : Supposons que le temps de simulation est de 8 secondes, et aussi que les paramètres du contrôleur PID fractionnaire sont tous inférieurs à 30, et que les ordres fractionnaires sont dans l'intervalle (0, 2). Il est recommandé d'utiliser la fonction `fminsearchbnd()` pour trouver le contrôleur PID fractionnaire optimal.

Le contrôleur PID fractionnaire optimal est :

$$G_{FOPID}(s) = 30 + 2.8766s^{-1.1483} + 13.7401s^{0.8928}$$

La fonction de transfert corrigée est :

$$G_{BF}(s) = \frac{13.745 s^{2.0407} + 30 s^{1.148} + 2.8786}{s^{3.748} + 3.3 s^{2.648} + 2.9 s^{2.448} + 3.32 s^{2.048} + 13.745 s^{2.0407} + 31 s^{1.148} + 2.8786}$$

Les réponses des systèmes sous ce contrôleur et celui obtenu dans l'exemple précédent sont présentées comme montré dans la Figure (III.5). On peut voir que le contrôleur PID à ordre fractionnaire est meilleur que celui à ordre entier.

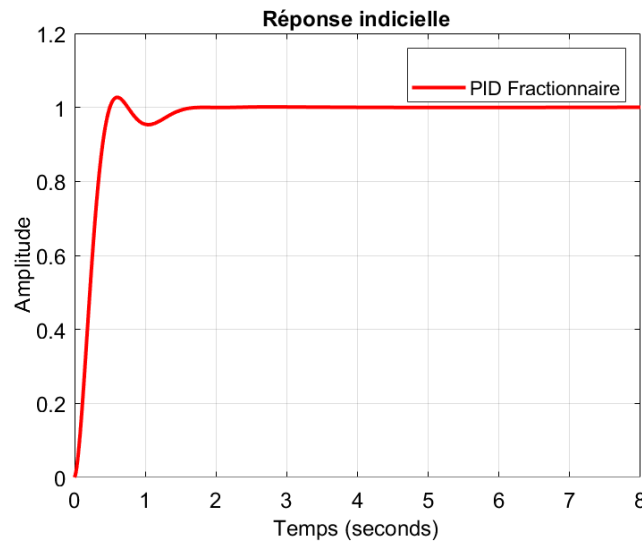


Figure III.5. Réponse indicielle sous le contrôleur PID fractionnaire optimal.

La fonction Matlab `'fpidtune'` peut également être utilisée pour concevoir le contrôleur PID d'ordre entier optimal ou d'ordre fractionnaire optimal. `'fpidtune'` est une fonction MATLAB utilisée pour concevoir et régler des contrôleurs PID à ordre fractionnaire. Elle appartient généralement à une boîte à outils spécialisée comme FOMCON (Fractional-Order Modeling and Control) ou d'autres boîtes à outils dédiées au contrôle à ordre fractionnaire.

La syntaxe est **[Gc, info] = fpidtune(G, type, crossover_freq, varargin)**

Description des paramètres

- **G**: La fonction de transfert de système que vous souhaitez contrôler.
- **type**: Le type de contrôleur PID à concevoir. Il peut s'agir de 'P', 'PI', 'PD', 'PID', 'FOPID', etc.
- **crossover_freq**: La fréquence de croisement désirée en radians par seconde.
- **varargin**: Paramètres optionnels supplémentaires pour spécifier des marges de gain et de phase, par exemple:
 - 'GainMargin': La marge de gain désirée.
 - 'PhaseMargin': La marge de phase désirée.

Valeurs de retour

- **Gc**: Le contrôleur PID à ordre fractionnaire conçu.
- **info**: Informations sur le réglage, y compris les marges de gain et de phase atteintes, les fréquences de croisement, etc

En appliquant la fonction Matlab "fpidune", nous trouverons les paramètres de correcteur PID d'ordre fractionnaire suivants :

$$Kp = 28,8474, Ki = 3.1758, Kd = 15.0266, \lambda = 1.1041 \text{ et } \mu = 0.8568.$$

Le contrôleur PID fractionnaire optimal est :

$$G_{FOPID}(s) = 28,8474 + \frac{3.1758}{s^{1.1041}} + 15.0266 s^{0.8568}$$

Le contrôleur PID d'ordre entier optimal est :

$$G_{PID}(s) = 30 + \frac{3.9413}{s} + 20.1348s.$$

Les réponses indicielles en boucle fermée sous les deux contrôleurs sont présentées dans la Figure (III.6) On peut constater que la réponse en boucle fermée sous le contrôleur PID fractionnaire est bien meilleure que celle du contrôleur PID conventionnel pour le modèle de système à ordre fractionnaire.

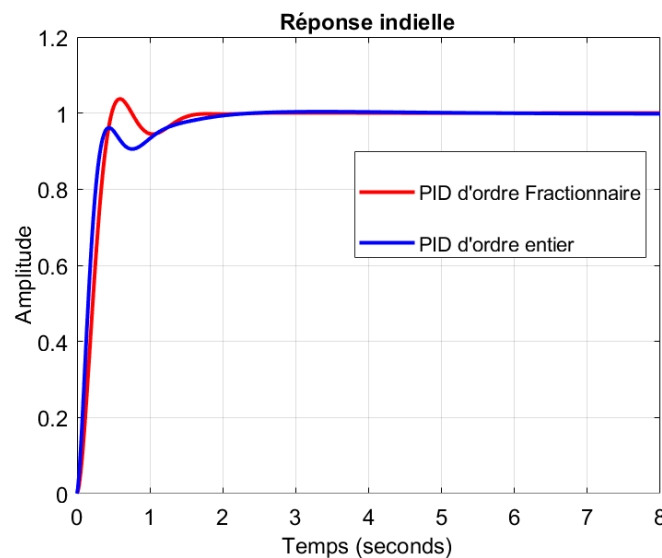


Figure III.6. Comparaison des différents contrôleurs

Les réponses indicielles en boucle fermée pour les trois configurations (**modèle fractionnaire + correcteur fractionnaire**, **modèle fractionnaire approximé + correcteur fractionnaire approximé** et **modèle fractionnaire approximé + correcteur d'ordre entier**) sont présentées dans la Figure (III.7).

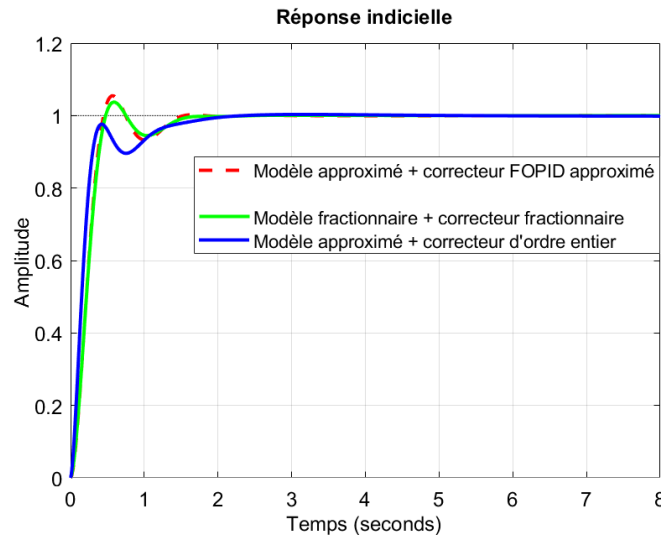


Figure III.7. Comparaison des différentes configurations

On constate que les réponses en boucle fermée pour le contrôleur PID fractionnaire et le PID fractionnaire approximé appliqués au système fractionnaire et au système fractionnaire approximé sont assez proches et nettement meilleures que les résultats obtenus en appliquant le contrôleur d'ordre entier.

III.5 Application 2 : Système fractionnaire avec retard

Considérant le système fractionnaire suivant :

$$G(s) = \frac{1}{0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1} e^{-s}.$$

III.5 .1 Commande PID classique appliquée au système fractionnaire avec retard

FOPID-ITAE

$$G_{FOPID}(s) = 0.45966 + \frac{0.5761}{s^{0.99627}} + 0.49337s^{1.3792}.$$

Et

$$G_{PID}(s) = 0.0795 + \frac{0.5206}{s} + 0.3587s.$$

Les réponses indicielles en boucle fermée sous les trois contrôleurs sont présentées dans la Figure (III.8).

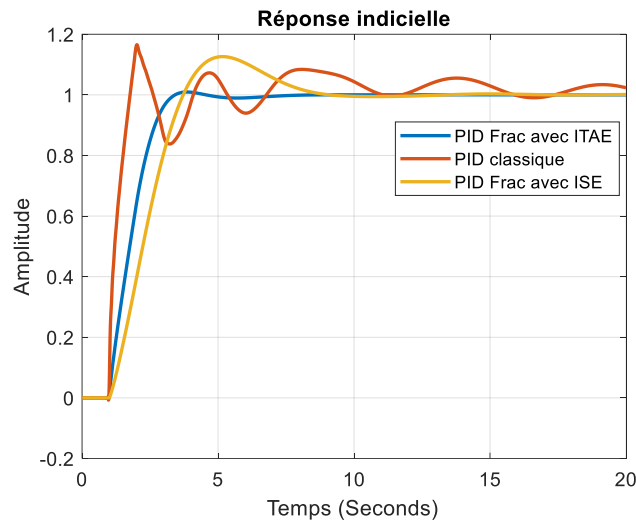


Figure III.8. Réponses indicielles sous les contrôleurs PID fractionnaires optimaux.

On peut constater que la réponse indicielle sous le contrôleur PID Frac-ITAE est satisfaisante, tandis que celle sous le contrôleur PID Frac-ISE est très médiocre, car le signal d'erreur est traité de manière égale à tous les instants. Par conséquent, dans la pratique, le critère ITAE est fortement recommandé. On observe également que le contrôleur PID à ordre entier optimal ne peut pas contrôler la plante de manière satisfaisante.

III.6 Conclusion

Le chapitre démontre clairement que les contrôleurs PID d'ordre fractionnaire sont supérieurs aux contrôleurs PID d'ordre entier pour les systèmes FO-LTI, y compris ceux avec retard. Les techniques d'approximation sous-optimale et les méthodes d'optimisation numérique sont efficaces pour concevoir des contrôleurs PID d'ordre fractionnaire qui améliorent les performances des systèmes fractionnaires.

Conclusion Générale

L'étude présentée dans ce mémoire démontre de manière claire et convaincante la supériorité des contrôleurs PID d'ordre fractionnaire par rapport aux contrôleurs PID d'ordre entier pour les systèmes linéaires à temps invariant fractionnaires (FO-LTI), y compris ceux présentant des délais. Grâce à l'utilisation de techniques d'optimisation numérique et de méthodes d'approximation sous-optimale, il a été possible de concevoir des contrôleurs PID d'ordre fractionnaire qui améliorent significativement les performances des systèmes en termes de précision, de stabilité et de réactivité.

Les études de cas et les simulations effectuées montrent que les contrôleurs PID fractionnaires permettent une meilleure précision, une stabilité accrue et une réactivité optimisée dans divers scénarios. Ces résultats soulignent leur pertinence pour des applications industrielles et de recherche avancée. La mise en œuvre de ces techniques offre des solutions robustes et flexibles face aux défis complexes des systèmes de contrôle modernes. De plus, les techniques d'approximation d'Oustaloup se sont révélées efficaces pour la conception de contrôleurs PID d'ordre fractionnaire, permettant ainsi des améliorations significatives des performances des systèmes FO-LTI et démontrant leur potentiel pour des applications pratiques.

L'importance de cette recherche réside également dans sa capacité à proposer des approches novatrices pour le contrôle des systèmes fractionnaires, ouvrant la voie à de nouvelles possibilités dans le domaine de l'ingénierie et des sciences appliquées. Les résultats obtenus peuvent être utilisés comme base pour des développements futurs, visant toujours à améliorer les performances des systèmes de contrôle dans des environnements de plus en plus complexes et exigeants.

En conclusion, cette étude met en lumière les avantages des contrôleurs PID d'ordre fractionnaire et l'efficacité des techniques d'optimisation numérique et d'approximation sous-optimale pour améliorer les performances des systèmes FO-LTI. Ces contributions sont essentielles pour le développement de solutions de contrôle avancées, adaptées aux besoins des industries modernes et des recherches académiques.

Références bibliographiques

- [1] HADJ HAFSI Mohammed et Hadi Kouider, mémoire de fin d'études, Université de M'Sila, juin 2020 ;
- [2] R Hilfer, "Applications of Fractional Calculus in Physics," World scientific, vol. 35, no.02, pp. 87-130, 2000.
- [3] A McBride, J Sabatier, O.P Agrawal, and J.T Machado, "Advances in fractional calculus: theoretical developments and applications in physics and engineering," Springer, pp. 613-615, 2008.
- [4] A Ben Messaoud, S Talmoudi, and M Ksour, "Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire par des modèles extrêmes d'ordre entier," in Conférence Internationale des Energies Renouvelables (CIER-2016), Hammamet, Tunisie, 2016, pp. 134-140.
- [5] Khatir Khettab, "Techniques avancées pour la synthèse et l'amélioration des performances des systèmes de commande adaptative d'ordre fractionnaire pour les processus incertains", Université de Skikda, 2016.
- [6] Yassine Bensafia, "Utilisation des filtres fractionnaires pour la conception de régulateurs adaptative", Université de Skikda, 2016.
- [7] Ladaci S. "Contribution à la Commande Adaptative d'Ordre Fractionnaire," Thèse de Doctorat, Département d'Electronique, Université Mentouri de Constantine, 2007.
- [8] C.A Monje, Y.Q Chen, Vinagre B.M, D Xue, and V Feliu, Fractional-order systems and controls : fundamentals and applications. London: Springer, 2010.
- [9] D Matignon and B d'Andréa Novel, "Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems," Computational engineering in systems applications, vol. 2, pp. 952-956 1996.
- [10] R Caponetto, G Dongola, and L Fortuna, Fractional order systems: modeling and control applications: World Scientific, 2010.
- [11] K.B Oldham and J Spanier, The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.: Elsevier Science, 1974, vol. 111.
- [12] Charef A. "Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional $PI\lambda D\mu$ controller," IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 153, pp. 714-720, 2006.

- [13] K.Tadeuzs. "Selected problems of fractional systems theory", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011
- [14] R. Caponetto, G. Dongola, and L. Fortuna. Fractional order systems: modeling and control applications, volume 72. World Scientific Pub Co Inc, 2010. (Cité pages 47 et 59.).
- [15] Sabatier J.,Agrawal O.P.,"Tenreiro Machado J.A.,,,Advances in fractional calculus," Springer, 2007.
- [16] Colbaugh R., Glass K., Seraji H., "Adaptive tracking control of manipulators: Theory and experiments, " Robotics & Computer-Integrated Manufacturing; pp 209–216, 1996.
- [17] Monje A.,Chen Y.-Q."Fractional-order Systems and Controls, Fundamentals and Applications", pp. 193-194, Springer, 2010.
- [18] I. Petras, I. Podlubny, P. O’Leary, L. Dorcak, and B. M. Vinagre, Analogue Realization of Fractional Order Controllers,” Fakulta Berg , TU Kosice, 2002.
- [19] Oustaloup A. "La Commande CRONE, " Hermès science publications, Paris, 1991.
- [20] Oustaloup A. "La Dérivation Non Entière, " Hermès, Paris, 1995.
- [21] Oustaloup A., Mathieu B., Lanusse P. "The CRONE control of resonant plants: application to a flexible transmission, " European J. Contr., Vol. 1, pp. 113–121, 1995.
- [22] Oustaloup A., Moreau X., Nouillant M. "The CRONE suspension, " Control Eng. Practice, Vol. 4, No. 8, pp. 1101–1108, 1996.
- [23] Charef A., Sun. H.H., Tsao .Y.Y., Onaral. B. "Fractal system as represented by singularity function," IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. 37, No. 9, pp.1465 1470, 1992.
- [24] Aoun M., Malti R., Levron F., Oustaloup A. " Numerical Simulations of Fractional Systems: An Overview of Existing Methods and Improvements".Nonlinear Dynamics, Vol. 38, pp. 117–131, 2004.
- [25] Elwakil, A. S. “Fractional-order circuits and systems: An emerging interdisciplinary research area”, IEEE Circuit and Systems Magazine, 4th quarter 2010.
- [26] Petras I., Podlubny I., O"Leary P., Dorcak L., Vinagre B.M. " Analogue Realization of Fractional Order Controllers, " Fakulta Berg , TU Kosice, 2002
- [27] Podlubny I. "Fractional Order Systems and $PI\lambda D\mu$ Controllers," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 1, pp. 208-214, 1999.

- [28] T. BENSOUICI, "Implémentation numérique RIF de dérivateur et d'intégrateur d'ordre Fractionnaire Variable", Mémoire de Magister, Département d'électronique, université Mentouri de Constantine, 2007.
- [29] Van Amerongen J., Ten Cate A.U.; 'Model reference adaptive controller for ships, *Automatica*, Vol. 11, pp. 441-449, 1975.
- [30] Ayeb Fakhreddine "Conception et implémentation d'une commande PID numérique d'un moteur à courant continu. " Mémoire de Master Option Informatique Industrielle :, Université de LARBI BEN MHIDI DOUM EL BOUAGUI , 2013/2014
- [31] Bensaoula Mohamed Amine, "Conception du Contrôleur PID pour le Moteur à Courant Continu (MCC) à Excitation indépendante Simulation sous Matlab/Simulink", Mémoire de Master Option: Electromécanique, Université de BADJI MOKHTAR 2019
- [32] Ghania Boukerche, " Etude et Synthèse d'un Contrôleur PI et Application", Mémoire de Magister Option: Commande des Systèmes industriels, Université de BADJI MOKHTAR 2017
- [33] Menoun Idhir, Rehrah Ferhat , "Etude comparative des régulateurs PID et Flou Application à un moteur à courant continu (MCC) ", Mémoire de Master Option : Automatisme Industriels, Université Abderrahmane Mira - Bejaïa, 2011/2012.
- [34] Jean-Marie Flaus, La régulation industrielle; "régulateur PID, Prédictifs et flous" Edition HERMES, Paris 1994.
- [35] Dif Nihad Triki Razika, "Synthèse d'un contrôleur PID pour la commande d'une MCC", Mémoire de Master Option: Informatique Industrielle, Université de Larbi BenM'hidi-Oum El Bouaghi, 2010/2011.
- [36] ZOGHMAR Mahieddine, HABCHI Aboubakar seddik "Étude comparative entre deux régulateurs PID et FLC appliqués à la Machine à Courant Continu", Mémoire de Master Option: Automatique, UNIVERSITE LARBI BEN MHIDI DE OUM ELBOUAGHI, 2011/2012
- [37] Idir, A., Khettab, K., & Bensafia, Y. (2022). Design of an optimally tuned fractionalized PID controller for dc motor speed control via a henry gas solubility optimization algorithm. *Int. J. Intell. Eng. Syst*, 15(2), 59.
- [38] Idir, A., Kidouche, M., Bensafia, Y., Khettab, K., & Tadjer, S. A. (2018). Speed control of DC motor using PID and FOPID controllers based on differential evolution and PSO. *Int. J. Intell. Eng. Syst*, 20, 21.

- [39] Bagley R.L., Torvik P.J. "On the appearance of the fractional derivatives in the behavior of real materials," J. Applied Mechanics, Vol. 41, pp. 294–298, 1984.
- [40] Bensafia, Y., Khettab, K., & Idir, A. (2022). A novel fractionalized PID controller using the sub-optimal approximation of FOTF. *Algerian Journal of Signals and Systems*, 7(1), 21-26..
- [41] Idir, A., Akroum, H., Tadjer, S. A., & Canale, L. (2023, June). A comparative study of integer order PID, fractionalized order PID and fractional order PID controllers on a class of stable system. In 2023 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2023 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe) (pp. 1-6). IEEE..
- [42] Slimani Linda. Contribution à l'application de l'optimisation par des méthodes métaheuristiques à l'écoulement de puissance optimal dans un environnement de l'électricité dérégulé. Thèse de doctorat de l'université de Batna faculté de science de l'ingénieur département d'électrotechnique, 2009.
- [43] Ioan Cristian TRELEA, "L'essaim de particule vu comme un système dynamique : convergence et choix des paramètres", conf, L'OEP essaim de particules, Paris, 2003.
- [44] Maurice Clerc, L'optimisation par essaim particulaire, Tutorial pour PSO 2003-
http://www.particlelesswarm.net/oep_2003
- [45] R Qi, B Hu, P.H Cournede « PSOTS: A Particle Swarm Optimization Toolbox in Scilab » 978- 1-4244-4453-3 / 09 / 2009 IEEE.
- [46] R Mansouri « contribution a l'analyse et la synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire par la représentation d'état » thèse de Doctorat en Electrotechnique UMMTO 2008.
- [47] D. Xue, D. P. Atherton. A suboptimal reduction algorithm for linear systems with a time delay. *International Journal of Control*, 1994, 60(2):181–196.
- [48] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky. *Numerical Recipes, the Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [49] A. O'Dwyer, *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*, Imperial College Press, London, 2003.
- [50] F. S. Wang, W. S. Juang and C. T. Chan, Optimal tuning of PID controllers for single and cascade control loops, *Chemical Eng. Commun.* 132 (1995), 15–34

Résumé :

Ce mémoire de fin d'études explore les avantages des contrôleurs PID d'ordre fractionnaire pour les systèmes linéaires à temps invariant fractionnaires (FO-LTI). Les méthodes d'optimisation numérique et d'approximation sous-optimale utilisées démontrent une meilleure précision, stabilité et réactivité par rapport aux contrôleurs PID d'ordre entier. Les simulations et études de cas confirment leur pertinence pour des applications industrielles et de recherche avancée. Les résultats montrent également l'efficacité de l'optimisation par essaims particulaires (PSO) et des techniques d'approximation d'Oustaloup, soulignant leur potentiel pour des applications pratiques.

Mots-clés : Calcul fractionnaire, Systèmes linéaires, Contrôleur PID, Optimisation numérique

Abstract:

This thesis explores the advantages of fractional-order PID controllers for fractional linear time-invariant (FO-LTI) systems. The numerical optimization and suboptimal approximation methods used demonstrate better precision, stability, and responsiveness compared to integer-order PID controllers. Simulations and case studies confirm their relevance for industrial and advanced research applications. The results also show the effectiveness of particle swarm optimization (PSO) and Oustaloup approximation techniques, highlighting their potential for practical applications.

Keywords: Robust control, Fractional-order systems, PID controller, Numerical optimization.

ملخص :

تستكشف هذه الأطروحة مزايا وحدات التحكم PID ذات الترتيب الكسري للأنظمة الخطية الزمنية الثابتة ذات الترتيب الكسري (FO-LTI). تظهر طرق التحسين العددي والتقريب شبه الأمثل دقة واستقرارًا واستجابة أفضل مقارنة بوحدات التحكم PID ذات الترتيب الصحيح. تؤكد المحاكاة ودراسات الحالة على أهميتها للتطبيقات الصناعية المتقدمة والبحثية. تبرز النتائج أيضًا فعالية تحسين السرب الجزيئي (PSO) وتقنيات تقريب Oustaloup، مما يؤكد على إمكاناتها للتطبيقات العملية.

الكلمات الرئيسية: حساب كسري، أنظمة خطية، متحكم PID، تحسين عددي