الجمهوريــة الجزائرية الديمقراطية الشعبيــة
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالـي والبحث العلمـي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH

جامعة محمد بوضياف المسيلة
كـلية الـعلوم الاقـتصادية والتجاريـة
وعلوم التسيير
نيابة العمادة لما بعد التدرج والبحث العلمي
والعلاقات الخارجية

University Mohamed BOUDIAF of M'sila
Faculty of Economic Sciences, Commercial
and Management Sciences
Vice Dean of Post-Graduation, ScientificResearch and
External Relations

الرقم : 2024/164

المسيلة في:2024/12/08

مستخرج فردي من محضر المجلس العلمي

بناء على اجتماع المجلس العلمي للكلية المنعقد بتاريخ: بقاعـة الاجتماعـات بالكليـة

وبناءا على تقارير الخبراء الايجابية للسادة الأساتذة :

محمودي مليك	جامعة المسيلة
بن الطاهر محمد لمين	جامعة المسيلة
زميت فؤاد	جامعة برج بوعريريج

تم اعتماد الكتاب العائد(ة) للأستاذ (ة): قطوش عبد الحميد,بيصارعبد الحكيم, قرواط يونس, بدارعاشور

الموسوم(ة) بـ الإحصاء 2

رئيس المجلس العلمي

دار المتنبي للطباعة والنشر

شهادة نشر

تشهد وتتشرف دار المتنبي للطباعة والنشر بـ:
نشر وطباعة كتاب مشترك

الموسوم بـ:

الإحصاء 2

تأليف

د. عبد الحكيم بيصار / د. عبد الحميد قطوش
د. يونس قرواط / د. عاشور بدار

المسجل إداريا برقم الإيداع القانوني
ردمك 1_095_04_9969_978 :(ISBN)

مدير دار النشر

دار المتنبي للطباعة والنشر

شهادة نشر

بتاريخ: 22 ديسمبر 2024

مقر دار النشر: حي تعاونية الشيخ المقراني
طريق اشبيليا مقابل جامعة محمد بوضياف
المسيلة - الجزائر
التواصل مع دار النشر: elmotanaby.dz@gmail.com
الهاتف: 0773.30.52.82 / 0668.14.49.75
فاكس: 035.35.31.03
Scan Our QR Code

الطبعة الأولى

ديسمبر 2024

الإحصاء 2

د. عبد الحكيم بيصار / د. عبد الحميد قطوش

د. يونس قرواط / د. عاشور بدار

EDITIONS DAR EL MOUTANABBI

دار المتنبي للطباعة والنشر

ديسمبر 2024

الإحصاء 2

د. عبد الحكيم بيصار / د. عبد الحميد قطوش / د. يونس قرواط / د. عاشور بدار

الإحصاء 2

هذا الكتاب ..

يهدف الإحصاء الرياضي بصفة عامة ونظرية الاحتمالات بصفة خاصة إلى دراسة التجارب العشوائية أو دراسة قوانين الصدفة. وهكذا فإذا كنا بصدد إجراء تجربة عشوائية ملموسة، فإننا نعمد إلى تحديد نموذج احتمالي يمكننا من وصف وتحليل هذه التجربة بصورة مقبولة قدر الإمكان، وفي هذا الصدد سنستعمل بصورة عامة مفاهيم الاحتمالات، المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية. وبما أنه عمليا بإمكاننا إجراء وتصور ما لا نهاية له من التجارب العشوائية المختلفة في العالم الحقيقي، فإنه يكون من الممكن تكوين ما لا نهاية له من النماذج الاحتمالية المختلفة، بحيث أن كل واحد منها يستخدم متغيرات عشوائية وتوزيعات احتمالية خاصة. إلا أنه في الواقع هناك عدد محدود من التجارب العشوائية التي تصادفها في معظم الأوقات وتكون لها خصائص مشتركة، وهذا ما يمكننا من اختصار عدد النماذج الاحتمالية الضرورية لوصف هذه التجارب.

بناءا على ما تقدم، وانطلاقا من أهمية هذه المادة وضرورتها بالنسبة للطلبة والباحثين، فقد تم تأليف هذا الكتاب البيداغوجي لإثراء مكتباتنا بالمزيد من المؤلفات في هذا المجال، لتقديم ما يحتاجه طلابنا في الجامعات والكليات من مفاهيم أساسية في الإحصاء الرياضي، وحرصنا في هذا الكتاب اغناءه بمجموعة مختلفة من الأمثلة، وبسلسلة من التمارين المحلولة والمقترحة الخاصة بكل محور على أمل أن تكون عونا للطلبة لتبسيط المحتوى ولتعميق الفهم.

2290.00 دج

أمسح الرمز

Scan Our QR Code

EDITIONS DAR EL MOUTANABBI

دار المتنبي للطباعة والنشر

مقر دار النشر: حي تعاونية الشيخ المقراني طريق اشبيليا مقابل جامعة محمد بوضياف المسيلة - الجزائر

التواصل مع دار النشر: elmotanaby.dz@gmail.com

الهاتف: 0773.30.52.82 / 0668.14.49.75

فاكس: 035.35.31.03

ISBN 978_9969_04_095_1

9 789969 040951

الإحصـــــاء 2

د. عبد الحكيم بيصار / د. عبد الحميد قطوش

د. يونـــس قـــرواط / د. عـــاشور بـــدار

بسم الله الرحمن الرحيم

الإحصـــــاء 2

•**المؤلفين: د. عبد الحكيم بيصار / د. عبد الحميد قطوش**

د. يونس قـرواط / د. عاشــور بدار

•**تنسيق داخلي للكتاب: دار المتنبي للطباعة والنشر**

•**مقاس الكتاب: 17/25**

• **الطبعة الأولى**

• **الناشر:** دار المتنبي للطباعة والنشر

• **الرقم الدولي الموحد للكتاب**

• **ISBN :978 _ 9969 _ 04 _095 _ 1**

• **الإيداع القانوني:** ديسمبر/ 2024م

• **مقر الدار:** حي تعاونية الشيخ المقراني/ طريق إشبيليا

مقابل جامعة محمد بوضياف/ المسيلة- الجزائر

• **للتواصل مع الدار:** *elmotanaby.dz@gmail.com*

• الموقع الالكتروني: *https://elmotanaby.com*

• هاتف: 0668.14.49.75 /0773.30.52.82

• فاكس: 035.35.31.03

EDITIONS DAR EL MOUTANABBI

دار المتنبي للطباعة والنشر

د. عبد الحكيم بيصار / د. عبد الحميد قطوش
د. يونس قــــرواط / د. عــاشور بــدار

الإحصـــــــاء 2

2024

فهرس المحتويات

المحور الثالث

المتغيرات العشوائية المتقطعة

وتوزيعها الاحتمالي

المحور الرابع

المتغيرات العشوائية المستمرة

وتوزيعها الاحتمالي

المحور الخامس

العزوم والدالة المتجددة للعزوم

المحور السادس

متراجحة شيبيشيف

ونظرية الأعداد الكبيرة

المقدمة

إن مفهوم الاحتمال بصورة أو بأخرى كثير الاستخدام في حياتنا اليومية، ونظرا لأهميته صار محل اهتمام العديد من الباحثين فتمخض عنه ما يسمى بنظرية الاحتمالات، وأصبحت هذه الأخيرة تتبوأ مكانة بارزة بين الدراسات الكمية لما لها من أهمية في اتخاذ القرارات في ظروف عدم التأكد.

في منتصف القرن السابع عشر كان لعب القمار منتشرا بشكل واسع في المجتمع الفرنسي وبالذات في إمارة مونتيكارلو Monte Carlou، مما ولد لدى اللاعبين الرغبة في استشفاف معلومات مسبقة تساعدهم على معرفة مدى إمكانية فوزهم وتقدير ربحهم في لعبة معينة. كانت هذه الحاجة هي منطلق أبحاث كل من باسكال Pascal (1623– 1662)، فرمات Fermat (1601 – 1665)، وهيجنز Huygens (1629 – 1695)، حيث كانت بين هؤلاء الثلاثة مراسلات شكلت الميلاد الحقيقي لنظرية الاحتمالات بالمعنى الحديث للعبارة والتي تم صياغتها بصورة أوضح من طرف برنولي Bernoulli (1654 – 1705).

تواصلت الأبحاث في هذا المجال إلى أن استقلت هذه النظرية بمصطلحات خاصة بها وصارت تشكل تخصصا من التخصصات التي تدرس على مستوى الجامعات والمدارس الكبرى.

حساب الاحتمالات مرتبط ارتباطا وثيقا بدراسة ما يسمى بالظواهر أو المتغيرات العشوائية سواء كانت ظواهر طبيعية أو اقتصادية أو اجتماعية، التي تكون غير معلومة النواتج مسبقا، وإن عرفنا نواتجها في تجربة ما (بعد إجراء التجربة) فهذا لا يضمن تحقق النواتج نفسها في التجارب اللاحقة.

وقد تم توزيع مواضيع هذا الكتاب البيداغوجي على ستة محاور، تم فيها مراعاة السهولة والبساطة في العرض، وباعتماد التسلسل المنهجي. خصص المحور الأول للتعريف بنظرية المجموعات، التجربة، الحدث والتحليل التوافقي، فيما خصص المحور الثاني لنظرية الاحتمالات، أما في المحور الثالث فقد تم التطرق إلى المغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعها الاحتمالي، مع الإشارة إلى بعض التوزيعات الخاصة، وفي المحور الرابع تم التطرق إلى المغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعها الاحتمالي، مع الإشارة إلى بعض التوزيعات الخاصة، أما المحور الخامس فتم من خلاله التطرق إلى العزوم والدالة المتجددة للعزوم، وفي المحور الأخير تم التطرق لمتراجحة شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة.

يحتوي كل محور على مجموعة من التمارين المحلولة، ومجموعة أخرى من التمارين المقترحة (غير محلولة) ليختبر القارئ مدى فهمه للأفكار الواردة في كل محور.

نسأل الله عز وجل أن يكون هذا العمل نافعا لطلبة السنة أولى جذع مشترك علوم اقتصادية، التسيير وعلوم تجارية بالخصوص وكل المهتمين بصفة عامة.

والله ولي التوفيق.

المحور الأول

نظرية المجموعات، التجربة الحدث، والتحليل التوافقي

تمهيد

تعتبر المجموعة من أهم المفاهيم الأساسية في العلوم الرياضية، إذ بنيت على أساسها نظرية المجموعات *set Theory*، وأسس لها ولأول مرة في الرياضيات العالم الألماني *George Cantor* عام 1845 – 1918، حيث تناول هذا الموضوع في فروع مختلفة من الرياضيات، منها الجبر والمنطق الرياضي...إلخ، ومن ثم في نظرية الاحتمالات.

سنتطرق من خلال هذا المحور إلى بعض الأفكار والمفاهيم الأساسية في نظرية المجموعات، والتي تعتبر ضرورية لأي مدخل في نظرية الاحتمالات.

أولا: نظرية المجموعات

1-تعاريف حول المجموعات:

1-1-المجموعة: *Set*

تسمى أي قائمة أو تجمع من الأشياء (بشرط أن تكون القائمة معرفة تعريفا جيدا) بمجموعة، وتسمى الأشياء المكونة لهذه المجموعة بعناصرها، يعبر عنها باستخدام حروف كبيرة $A, B, C, \ldots$، ويرمز لعناصرها بأحرف صغيرة $a, b, c, \ldots$، فإذا كان a عنصرا من المجموعة A، فإننا نكتب: $a \in A$، ونقول أن a ينتمي إلى A، وبخلاف ذلك نكتب $a \notin A$، ونقول أن a لا ينتمي إلى A. وتتحدد المجموعة عادة إما بذكر كل عناصرها، أو بذكر بعض خواصها التي تميزها.

مثال 1:

$A = \{4, 6, 8, 12, 15\}$ ،$B = \{x \in N : 4 \leq x \leq 20\}$، $C = \{ab, ac, cb,\}$

2-1-المجموعة الجزئية: *Subset*

نقول أن المجموعة A هي مجموعة جزئية من المجموعة B، ونرمز لها بالرمز $A \subset B$، إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B، ونعبر عنه رياضيا بالشكل: $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$، وبخلاف ذلك نكتب: $A \not\subset B$.

وتتساوى المجموعتان A و B إذا تحقق:

$A = B \Rightarrow A \subset B\ et\ B \subset A$، وبخلاف ذلك نكتب: $A \neq B$

مثال 2: $A = \{4, 6, 8, 12, 15\}$ $B = \{x \in N : 4 \leq x \leq 20\}$، نقول أن المجموعة A هي مجموعة جزئية من المجموعة B، أي: $A \subset B$، لكنهما غير متساويتان لأن $B \not\subset A$. أي: $A \neq B$.

1-3-المجموعة الكلية: *Universal Set*

هي التي تدرس جميع المجموعات قيد البحث، باعتبارها مجموعات جزئية منها.

1-4-المجموعة الخالية: *Empty set*

نقول عن المجموعة التي لا تحوي أية عناصر أنها مجموعة خالية، ونرمز لها بالرمز $\emptyset$.

مثال 3:

- لتكن المجموعة A التي تمثل مضاعفات العدد 5 المحصورة بين الصفر والثلاثة، في هذه الحالة: $A = \emptyset$.
- لتكن: $B = \{X + Y = 1\ et\ 2X + 2Y = 1\}$، في هذه الحالة: $B = \emptyset$
- لتكن المجموعة C التي تمثل سمكة لا تعيش في الماء، في هذه الحالة: $C = \emptyset$.

2-العمليات على المجموعات:

2-1-اتحاد مجموعتين: *Union*

إذا كانت A و B مجموعتين، فإن اتحادهما هو جميع العناصر التي تنتمي إلى كل منهما أو كليهما، ويرمز له بالرمز $A \cup B$، أي أن: $A \cup B = \{x : x \in A\ or\ x \in B\}$

مثال 4: إذا كان: $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{2, 5, 6, 8, 10\}$

فإن: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10\}$

2-2-تقاطع مجموعتين: ***Intersection***

إذا كانـت A و B مجموعتين، فـإن تقـاطعهمـا هو جميع العنـاصــر المشــتركـة بـيـنـهـمـا، ويـرمـز لـه بـالـرمـز $A \cap B$، أي أن: $A \cap B = \{x: x \in A \;\; and \;\; x \in B\}$

مثال 5: إذا كان: $A = \{1,2,3\}$ ، $B = \{2,5,6,8,10\}$ فإن: $A \cap B = \{2\}$

إذا كان: $A \cap B = \emptyset$، فإننا نقول أن A و B مجموعتان منفصــلتان أو متنافيتان.

3-2-الفرق بين مجموعتين: ***Sets Difference***

إذا كانت A و B مجموعتين، فإن الفرق بينهما هو المجموعة التي تتكون من جميع عنـاصــر المجموعة A والتي لا تنتمي إلى المجموعة B، يرمز لها بالرمز $A - B$، أي أن: $A - B = \{x: x \in A \;\; and \;\; x \notin B\}$

مثال 6: إذا كان: $A = \{1,2,3\}$، $B = \{2,5,6,8,10\}$ فإن: $A - B = \{1,3\}$

4-2-الفرق التناظري بين مجموعتين: ***Semmetric Difference***

إذا كانت A و B مجموعتين، فـإن الفرق التنـاظري بينهما هو المجموعة التي تتكون من جميع عنـاصــر المجموعـة A والتي لا تنتمي إلى المجموعـة B، وجميع عنـاصــر المجموعـة B والتي لا تنتمي إلى المجموعـة A، يرمز لهـا بـالرمز $A + B$ أو $A\Delta B$، أي أن: $A + B = A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

مثال 7: إذا كان: $A = \{1,2,3\}$ ، $B = \{2,5,6,8,10\}$

فإن: $A - B = \{1,3\}$ و $B - A = \{5,6,8,10\}$

وبالتالي: $A + B = A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1,3,5,6,8,10\}$

5-2-متمم مجموعة: ***Complement***

يعرف متمم مجموعة A بالنسبة للمجموعة الكلية E بالشكل:

$$\bar{A} = \{x: x \in E \;\; and \;\; x \notin A\}$$

مما سبق، يمكن أن نستنتج العلاقات التالية:

$\bar{E} = \emptyset$ $\bar{\bar{A}} = A$ ، $\bar{A} \cap A = \emptyset$ ، $\bar{A} \cup A = E$

$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$ ، $\bar{\emptyset} = E$ ،

قانوني دو مرقان: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ و $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

مثال 8: لتكن E مجموعة كلية، حيث: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ،

ولتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E، حيث: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B =$

$\{2, 3, 5, 6, 8\}$. أثبت حسابيا صحة قانوني دو مرقان.

الحل: إثبات صحة قانوني دو مرقان:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}*$$

لدينا من جهة: $A \cap B = \{2, 3\}$

$$\overline{A \cap B} = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

ولدينا من جهة أخرى: $\bar{A} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$\bar{B} = \{1, 4, 7, \quad 9, 10\}$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

وبالتالي: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}*$$

لدينا من جهة: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$$\overline{A \cup B} = \{7, \quad 9, 10\}$$

ولدينا من جهة أخرى: $\bar{A} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$\bar{B} = \{1, 4, 7, \quad 9, 10\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{7, \quad 9, 10\}$$

وبالتالي: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

ثانيا: التجربة ومجموعة الأساس

1-التجربة:

هي كل عملية تؤدي إلى ملاحظة أو قياس، وتنقسم إلى قسمين:

1-1-التجربة النظامية: هي كل تجربة نحدد نتائجها مسبقا على أساس القوانين العلمية المعروفة، وذلك انطلاقا من جملة من الشروط المرتبطة بالظاهرة والمتوفرة أثناء التجربة (المقدمات)، حيث أننا نجد هذا النوع من التجارب في مجال العلوم الدقيقة، وبصورة أساسية في مجالي الفيزياء والكيمياء.

2-1-التجربة العشوائية: هي كل تجربة تكون نتائجها غير معروفة مسبقا، وإذا كررنا نفس التجربة وضمن نفس الشروط (نفس المقدمات) لا نحصل بالضرورة على نفس النتائج.

مثال 9: لتكن التجربة العشوائية التالية: نرمي قطعة نقد متماثلة (غير مزورة) مرة واحدة، وبطريقة عشوائية، ثم نطرح

السؤال التالي: ما هو احتمال أن تكون نتيجة هذه التجربة ظهور الصورة P؟

من هذه التجربة العشوائية نستنتج ما يلي:

- أداة التجربة: هي القطعة النقدية.
- طريقة التجربة: رمي قطعة النقد مرة واحدة.
- هذه التجربة هي تجربة عشوائية لأننا لا نعرف مسبقا النتيجة وإن كررنا التجربة عدة مرات لا تعطينا بالضرورة النتيجة نفسها، فنقول إذن أن النتيجة الواردة في السؤال نتيجة محتملة عكس النتيجة الأكيدة في التجربة الفيزيائية والكيميائية.

2-مجموعة الأساس (فراغ العينة، فضاء العينة):

هي مجموعة النتائج الممكنة والمختلفة لتجربة ما، ونرمز لها بالحرف "E"، كما تعرض على شكل مجموعة رياضية: $E = \{\dots\dots\dots\}$، وعدد عناصر E نرمز لهم بالرمز: $|E|$. وفي مثالنا السابق: $E = \{P, F\}$، ومنه: $|E| = 2$

ملاحظة: نحدد مجموعة الأساس من خلال الأداة وطريقة التجربة العشوائية.

ثالثا: الحدث العشوائي

1-تعريف الحدث العشوائي: هو جزء من مجموعة الأساس، بعد التجربة نحكم فيما إذا تحقق أو لم يتحقق، وهذا يعني أن الحدث يهتم بإمكانات محددة من فراغ إمكانات التجربة E، ونرمز له برمز لاتيني يختلف عن E، مثل: A, B, C ويعرض على شكل مجموعة رياضية $A = \{\dots\dots\dots\}$ ، ونرمز لعدد عناصر A بالرمز $|A|$، ونلاحظ أنه إذا كان A حدثا ممكنا (أي غير مستحيل) فهو مجموعة جزئية من E أي: E يحتوي على A .

فإذا أجرينا التجربة العشوائية وتحقق فعلا الحدث العشوائي A نقول قد حققنا نجاحا، وإذا لم يتحقق A فنقول قد حققنا إخفاقا، وفي مثالنا السابق الحدث العشوائي A: ظهور الصورة $A = \{P\}$ ، ومنه: $|A| = 1$ وتسمى عدد عناصر الحدث العشوائي A.

ملاحظة: يحدد الحدث العشوائي من خلال السؤال المطروح.

2-أنواع الحوادث العشوائية:

- **الحدث البسيط:** نقول عن حدث أنه بسيط إذا كان غير قابل للتجزئة، كظهور الرقم 2 في رمي زهرة النرد مرة واحدة $A = \{2\}$

- **الحدث المركب:** نقول عن حدث أنه مركبا إذا كان قابلا للتجزئة، أي إمكانية تفكيكه إلى حوادث أبسط، مثل ظهور رقم زوجي في رمي زهرة النرد مرة واحدة، في هذه الحالة نكون بصدد حادث مركب من ثلاث حوادث بسيطة $A = \{2,4,6\}$، فالحصول على 2 أو 4 أو 6 يعني حتما تحقيق الحدث المركب.

- **الحدث الأكيد:** نقول عن حدث أنه أكيدا إذا كان يحوي جميع الأحداث البسيطة المرتبطة بالتجربة، مثل الحصول على رقم أقل من 7 في تجربة رمي قطعة نرد مرة واحدة، $A = E$.

- **الحدث المستحيل:** نقول عن حدث أنه مستحيلا إذا كان غير قابل للتحقق، أي لا يتضمن ولا حدث بسيط، مثل الحصول على رقم أكبر من 6 في تجربة رمي قطعة نرد مرة واحدة، $A = \emptyset$.

- **الحدث المتمم:** نقول أنه لكل حدث A مرتبط بتجربة ما متمم يتكون من مجموعة الإمكانات الغير محققة لـ: A، ونرمز له بالرمز: $\bar{A}$، حيث:

$$\bar{A} = \{e_i \in \mathrm{E} : \ e_i \notin \mathrm{A}\}$$

- **الحوادث المتنافية:** هي الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد حيث وقوع أحدها يمنع وقوع الآخر، مثلا عندما نرمي زهرة نرد متماثلة وبطريقة عشوائية مرة واحدة، نعرف الأحداث العشوائية التالية:

$\boldsymbol{A}$: النتيجة عدد زوجي، $\boldsymbol{B}$: النتيجة عدد فردي

نقول عن الحدثين A و B أنهما متنافيان لأن ظهور رقم زوجي يمنع تحقق الحدث الآخر (ظهور الرقم الفردي).

- **الحوادث غير المتنافية:** هي الحوادث التي يمكن وقوعها في آن واحد حيث وقوع أحدها لا يمنع وقوع الآخر، مثلا عندما نرمي زهرة نرد متماثلة وبطريقة عشوائية مرة واحدة، نعرف الأحداث العشوائية التالية:

$\boldsymbol{A}$: النتيجة عدد فردي، $\boldsymbol{B}$: النتيجة عدد أولي

نقول عن الحدثين A وB أنهما غير متنافيان لأن ظهور رقم فردي لا يمنع تحقق الحدث الآخر (ظهور العدد الأولي)، (3 مثلا فردي وأولي).

- **الحوادث غير المستقلة:** نقول أن A وB حدثين غير مستقلين إذا كان تحقق أحدهما (مثلا B) مرتبط بأي شكل من الأشكال (مشروط) بتحقق الآخر (مثلا A)، مثلا السحب من مجتمع محدود وصغير مع عدم الإعادة، وبالتالي فالسحبة الموالية تتأثر بالسحبة السابقة.

- **الحوادث المستقلة:** نقول أن A وB حدثان مستقلان إذا كان تحقق أحدهما غير مرتبط بأي شكل من الأشكال (غير مشروط) بتحقق الآخر، مثلا السحب من مجتمع محدود وصغير مع الإعادة، وبالتالي فالسحبة الموالية لا تتأثر بالسحبة السابقة.

رابعا: التحليل التوافقي

إذا كانت التجربة العشوائية بسيطة يكون تحديد $|A|$ و $|E|$ سهل ويتم بطريقة العد، ولكن في غالب الأحيان تكون التجربة العشوائية معقدة وعدد عناصرها كبيرا جدا يستحيل تحديده عن طريق العد، فإننا نحتاج إلى طرق رياضية خاصة تدعى **بالتحليل التوافقي**، وكأمثلة على ذلك ما يلي:

لدينا مجموعة من 20 شخص، 8 رجال و 12 نساء، نريد اختيار 3 منهم لتشكيل وفد للمشاركة في تظاهرة علمية بطريقة عشوائية.

1- بكم طريقة يمكن اختيار هذا الوفد بحيث لا تمييز بين العناصر الثلاثة؟

2- بكم طريقة يمكن اختيار هذا الوفد بحيث الأول يكون رئيسا والثاني نائبا والثالث نائبا ثانيا؟

3- لدينا 10 شاحنات بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الشاحنات في قافلة قبل الانطلاق؟

نلاحظ من هذه الأمثلة أن تحديد عناصر مجموعة الأساس معقد ويحتاج إلى طرق خاصة. هناك ثلاث أنواع من طرق التحليل التوافقي، وهي:

- التوفيقات *Les Combinaisons* .
- الترتيبات *Les Arrangements* .
- التبديلات *Les Permutations*.

1-في حالة اختيار جزء من الكل-التوفيقات والترتيبات:

1-1-إذا كان الترتيب غير مهم: التوفيقات *Les Combinaisons*:

أ-التوفيقة بدون تكرار: *CSR*

هي منظومة غير مرتبة مشـــكلة من x عنصـــر يتم اختيـارهم بطريقـة عشـوائية من بين n عنصر، بحيث لا يظهر العنصر إلا مرة واحدة، ونرمز لعدد التوافيق تحت الشروط بالرمز: $\boldsymbol{C_n^x}$

- **ملاحظة:** اختيار جزء من الكل، الترتيب غير مهم، التكرار غير ممكن، يمكن حساب عدد التوافيق الممكنة بالصيغة التالية: $\boldsymbol{C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}}$

مثال 10: ناد يتشـكل من 4 أشـخاص، نريد اختيار اثنان منهم للمشـاركة في تظاهرة علمية، بكم طريقة يمكن اختيار هذا الوفد؟

الحل: $n = 4 \ , \ \ x = 2$، التكرار غير ممكن، الترتيب غير مهم، فهو إذن توفيقة بدون تكرار، وعليه عدد الوفود التي يمكن تشكيلها هي:

$$C_n^x = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6$$

ب-التوفيقة بتكرار: *CAR*

هي منظومة غير مرتبة مشـــكلة من x عنصـــر يتم اختيـارهم بطريقـة عشـوائية من بين n عنصر، بحيث يمكن لعنصر

ما أن يتكرر أكثر من مرة، ونرمز لعدد التوافيق تحت الشروط بالرمز:

$$\boldsymbol{C_{n+x-1}^{x}}$$

- **ملاحظة:** اختيار جزء من الكل، الترتيب غير مهم، التكرار ممكن، يمكن حساب عدد التوافيق الممكنة بالصيغة التالية: $\boldsymbol{C_{n+x-1}^x = \frac{(n+x-1)!}{x!(n-1)!}}$

مثال 11: لدينا 4 ممثلين، نريد اختيار اثنان منهم للمشـاركة في فيلمين، بحيث يمكن لنفس الشـخص أن يمثل في الفيلمين معا، بكم طريقة يمكن اختيار هذين الشخصين؟

الحل: $x = 2$, $n = 4$ ، التكرار ممكن، الترتيب غير مهم، فهو إذن توفيقة بتكرار، وعليه عدد الطرق الممكنة: $C_{4+2-1}^{2} = \frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = \frac{5!}{2!(3)!} = 10$

2-1-إذا كان الترتيب مهم: التراتيب *Les Arrangements*

أ-الترتيبة بدون تكرار: *ASR*

هي منظومة مرتبة مشكلة من x عنصر يتم اختيارهم بطريقة عشوائية من بين n عنصر، بحيث لا يمكن للعنصر الواحد أن يتكرر أكثر من مرة، ونرمز لعدد التراتيب تحت الشروط بالرمز: $\boldsymbol{A_n^x}$

- **ملاحظة:** اختيار جزء من الكل، الترتيب مهم، التكرار غير ممكن، يمكن حساب عدد التراتيب الممكنة بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}}$$

مثال 12: ناد يتشكل من 4 أشخاص، نريد اختيار اثنان منهم للمشاركة في تظاهرة علمية، بكم طريقة يمكن اختيار هذا الوفد بحيث يكون الأول رئيسا والثاني نائبا له؟

الحل: $x = 2$, $n = 4$ ، التكرار غير ممكن، الترتيب مهم، فهو إذن ترتيبة بدون تكرار، وعليه عدد الوفود التي يمكن تشكيلها هي:

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

ب-الترتيبة بتكرار: *AAR*

هي منظومة مرتبة مشكلة من x عنصر يتم اختيارهم بطريقة عشوائية من بين n عنصر، بحيث يمكن للعنصر الواحد أن يتكرر أكثر من مرة، ونرمز لعدد التراتيب تحت الشروط بالرمز: $\mathcal{A}_n^x$.

- **ملاحظة:** اختيار جزء من الكل، الترتيب مهم، التكرار ممكن، يمكن حساب عدد التراتيب الممكنة بالصيغة التالية:

$$\mathcal{A}_n^x = \boldsymbol{n^x}$$

مثال 13: ناد يتشــكل من 4 أشــخاص، نريد اختيار اثنان منهم للمشــاركة في تظاهرة علمية، بكم طريقة يمكن اختيار هذا الوفد بحيث يكون الأول رئيسـا والثاني نائبا له، لكن يمكن لنفس الشــخص أن يكون رئيســا ونائبا في الوقت نفسه؟

الحـل: $x = 2$, $n = 4$ ، التكرار ممكن، الترتيـب مهم، فهو إذن ترتيبـة بتكرار، وعليه عدد الوفود التي يمكن تشكيلها هي: $\mathcal{A}_n^x = n^x = 4^2 = 16$

2-في حالة اختيار كل من الكل -التبديلات Les Permutations

2-1-التبديلة بدون تكرار: *PSR*

هي منظومة مرتبة تشــارك فيها كل العناصــر والتي عددها n عنصــر، بحيث لا يمكن للعنصــر الواحد أن يتكرر أكثر من مرة، ونرمز لعدد التباديل تحت الشروط بالرمز: $\boldsymbol{P_n}$

- **ملاحظة:** ترتيب كل العناصر، التكرار غير ممكن، يمكن حساب عدد التباديل الممكنة بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{P_n = (n)(n-1)(n-2) \dots \dots (1) = n!}$$

مثال 14: لدينا أربع شــاحنات ســتنطلق في قافلة إلى الصــحراء، بكم طريقة ممكنة يمكن تشكيل هذه القافلة؟

الحل: $n = 4$ ، التكرار غير ممكن، الترتيب لكل العناصــر، فهو إذن تبديلة بدون تكرار، وعليه عدد الطرق الممكنة هي: $P_n = n! = 24$

2-2-التبديلة بتكرار: *PAR*

هي منظومة مرتبة تشــارك فيها كل العناصــر والتي عددها n عنصــر، بحيث يمكن للعنصر الواحد أن يتكرر أكثر من مرة.

- **ملاحظة:** ترتيب كل العناصــر، التكرار ممكن، يمكن حســاب عدد التباديل الممكنة بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}_n^n = n^n}$$

مثال 15: من بين الأرقام التالية: 1، 2، 3، 4، 5، ماهي عدد الطرق الممكنة لتكوين كلمة السر المكونة من كل الأرقام بحيث يمكن للرقم الواحد أن يتكرر (في حالة إعادة الرقم المسحوب):

الحل: عدد الطرق تمثل تبديلة بإعادة حيث

$$A_n^n = n^n = 5^5 = 3125 \;\; mot\ de\ passe \qquad : n = 5$$

2-3-التبديلة الدائرية:

هي حالة خاصة من حالات التبديلة دون تكرار حيث يكون فيها الترتيب في شكل دائري، في هذه الحالة يمكن حساب عدد التباديل الدائرية بالصيغة التالية: $\boldsymbol{P_{(n-1)} = (n-1)!}$

مثال 16: بكم طريقة يمكن أن يجلس 7 أشخاص حول مائدة مستديرة لتناول وجبة الغداء؟

الحل: $n = 7$ ، التكرار غير ممكن، الترتيب لكل العناصر، فهو إذن تبديلة بدون تكرار، وبما أن طريقة الجلوس تكون بشكل دائري فإن عدد الطرق الممكنة هي: $P_{(n-1)} = (n-1)! = 6! = 720$

2-4-وجود عناصر غير متميزة داخل المجموعة:

هي منظومة مرتبة تشارك فيها كل العناصر والتي عددها n عنصر، بحيث يمكن للعنصر الواحد أن يتكرر أكثر من مرة، ونرمز لعدد التباديل تحت الشروط بالرمز: $\boldsymbol{P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}}$

لتكن لدينا n عنصر (العدد الإجمالي) مصنفة إلى k مجموعة متجانسة، عدد عناصر المجموعة الأولى n_1، عدد عناصر المجموعة الثانية n_2 وعدد عناصر المجموعة k هو n_k، حيث: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$، عناصر كل مجموعة غير متميزة، عدد التباديل التي يمكن تشكيلها من هذه الحالة يحسب بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots \dots n_k!}}$$

مثال 17: اشـتركت عشـر آليات في رالي صـحراوي منها 5 سـيارات و3 دراجات وشـاحنتان، تنطلق هذه الآليات في قافلة واحدة، بكم طريقة يمكن تشـكيل القافلة قبل الانطلاق؟

الحل: نلاحظ في هذه المسألة أن كل العناصر تشارك في المنظومة، الترتيب مهم، التكرار ممكن، فهو تبديلة بتكرار، وعليه عدد الطرق الممكنة لتشـكيل القافلة هو:
$$P_n^{n_1,n_2,n_3} = P_{10}^{5,3,2} = \frac{10!}{5!3!2!} = 2520$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

لتكن E مجموعة كلية، حيث:

$E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 , 18, 20\}$ ، ولتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E، حيث: $A = \{2, 4,10, 12, 18, 20\}$ ، $B = \{6, 8, 10, 12, 20\}$.

1- عبر عن المجموعات التالية: $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ ، $B - A$. $A\Delta B$

2- أثبت حسابيا صحة قانوني دو مرقان، أي: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ و $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

التمرين الثاني:

نرمي قطعة نرد مرتين متتاليتين، نسمي A "ظهور نفس النتيجة"، و B "ظهور الرقم 2 في الرمية الأولى".

- عبر عن الأحداث التالية، مع تحديد عدد عناصر كل حدث:

A ، B ، $\bar{A}$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ ، $B - A$. $A\Delta B$

التمرين الثالث:

يتكون مجلس إدارة من 12 عضوا، من بينهم 09 رجال و03 نساء، نريد تكوين لجنة من 03 أشخاص.

1- ما هو عدد عناصر مجموعة الأساس (عدد الحالات الممكنة)؟

2- ما هو عدد اللجان الممكنة التي تحتوي على امرأة واحدة فقط؟

3- إذا افترضنا أن الأشخاص الثلاثة المنتخبون يتم تعيينهم حسب ترتيب القرعة: رئيسا، نائبا، أمينا للمال.

أ- ما هو عدد عناصر مجموعة الأساس (عدد الحالات الممكنة)؟

ب-ما هو عدد اللجان الممكنة التي تحتوي على رجلين على الأقل؟

التمرين الرابع:

1- اتفق 9 أصـــدقـاء على الـذهـاب إلى الملعب لمشـــاهـدة مقابلـة في كرة القـدم، بكم طريقة يمكنهم الجلوس في صف واحد به 9 مقاعد.

2- نفرض أنهم لم يجدوا إلا 7مقاعد، بكم طريقة يمكنهم الجلوس.

3- قررت هذه المجموعة (9 أصدقاء) بعد المباراة تناول العشاء معا، بكم طريقة يمكنهم الجلوس على مائدة مستديرة (بها 9 كراسي).

التمرين الخامس:

1- ما هو عـدد الكلمات الممكنـة المختلفة التي يمكن تكوينها من أحرف الاســـم " *MASSINISSA* ".

2- من بين الأرقـام التـاليـة: 1، 2، 3، 4، 5، كم توجـد من طريقـة لتكوين كلمـة السر المكونة من ثلاث أرقام:

أ- في حالة عدم إعادة الرقم المسحوب،

ب-في حالة إعادة الرقم المسحوب.

التمرين السادس:

صـــندوق يحتوي على 25 كرية مرقمة من 1 إلى 25، نسـحب عشـــوائيا ثلاث كريات دفعة واحدة.

1- ما هي طبيعـة العنـاصـــر في هـذه التجربـة العشـــوائيـة؟ أذكر بعض النمـاذج منها؟

2- ما هو عدد عناصر مجموعة الأساس (عدد الحالات الممكنة)؟

3- ما هو عدد الحالات التي تكون فيها أرقام الكريات الثلاثة أعدادا زوجية؟

4- ما هو عـدد الحـالات التي تكون فيهـا أرقـام الكريـات الثلاثـة من مضـــاعفـات العـدد 5؟

5- ما هو عـدد الحـالات التي تكون فيها مجموع رقمين من الأرقام الثلاثة يســـاوي 10؟

التمرين السابع:

1- اشتركت عشر آليات في رالي صحراوي منها 5 سيارات و3 دراجات وشاحنتان، تنطلق هذه الآليات في قافلة واحدة، بكم طريقة يمكن تشكيل القافلة قبل الانطلاق؟

2- لدينا أربع شاحنات ستنطلق في قافلة إلى الصحراء، بكم طريقة ممكنة يمكن تشكيل هذه القافلة؟

3- لدينا 4 ممثلين، نريد اختيار اثنان منهم للمشاركة في فيلمين، بحيث يمكن لنفس الشخص أن يمثل في الفيلمين معا، بكم طريقة يمكن اختيار هذين الشخصين؟

الحلـــــول:

حل التمرين الأول:

لتكن E مجموعة كلية، حيث:

$E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 , 18, 20\}$ ، ولتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E، حيث: $A = \{2, 4,10, 12, 18, 20\}$ ، $B = \{6, 8, 10, 12, 20\}$.

1-التعبيرعن المجموعات التالية: $\boldsymbol{\bar{A}}$ ، $\boldsymbol{\bar{B}}$ ، $\boldsymbol{A \cap B}$ ، $\boldsymbol{A \cup B}$ ، $\boldsymbol{A - B}$ ، $\boldsymbol{B - A}$. $\boldsymbol{A \Delta B}$

$$\bar{A} = \{6, 8,14, 16\}$$
$$\bar{B} = \{2, 4, 14, 16 , 18\}$$
$$A \cap B = \{10, 12, 20\}$$
$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 18, 20\}$$
$$A - B = \{2, 4, 18\}$$
$$B - A = \{6, 8\}$$
$$A \Delta B = \{2, 4, 6, 8, 18\}$$

2-إثبات حســـابيا صـحـة قـانوني دو مرقـان، أي: $\overline{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\cup\overline{\boldsymbol{B}}$ و $\overline{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\cap\overline{\boldsymbol{B}}$

$$*\,\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

لدينا من جهة: $A\cap B=\{10,12,20\}$

$$\overline{A\cap B}=\{2,4,6,8,14,16,18\}$$

ولدينا من جهة أخرى: $\bar{A}=\{6,8,14,16\}$

$$\bar{B}=\{2,4,14,16\,,18\}$$
$$\bar{A}\cup\bar{B}=\{2,4,6,8,14,16,18\}$$

وبالتالي: $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

$$*\,\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$

لدينا من جهة: $A\cup B=\{2,4,6,8,10,12,18,20\}$

$$\overline{A\cup B}=\{14,16\}$$

ولدينا من جهة أخرى: $\bar{A}=\{6,8,14,16\}$

$$\bar{B}=\{2,4,14,16\,,18\}$$
$$\bar{A}\cap\bar{B}=\{14,16\}$$

وبالتالي: $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

حل التمرين الثاني:

نرمي قطعـة نرد مرتين متتـاليتين، نســـمي A "ظهور نفس النتيجـة"، و B "ظهور الرقم 2 في الرمية الأولى".

- التعبيرعن الأحداث التالية: $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ ، $\overline{\boldsymbol{A}}$ ، $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$ ، $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ ، $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ ، $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}$

- مجموعة الأساس E:

$$E=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\dots,(6,5),(6,6)\}\Rightarrow|E|=36$$
$$A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}\Rightarrow|A|=6$$
$$B=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}\Rightarrow|B|=6$$
$$\bar{A}=\{(1,2),(1,3),\dots,(2,1),(2,3),\dots,(6,5)\}\Rightarrow|\bar{A}|=30$$
$$\bar{B}=\{(1,1),(1,2),\dots,(3,1),(3,2),\dots,(6,6)\}\Rightarrow|\bar{B}|=30$$
$$A\cap B=\{(2,2)\}\Rightarrow|A\cap B|=1$$

$$A \cup B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\} \Rightarrow |A \cup B| = 11$$

$$A - B = \{(1,1),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \Rightarrow |A - B| = 5$$

$$B - A = \{(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\} \Rightarrow |B - A| = 5$$

$$A\Delta B = \{(1,1),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\} \Rightarrow |A\Delta B| = 10$$

حل التمرين الثالث:

يتكون مجلس إدارة من 12 عضـــوا، من بينهم 09 رجال و03 نســـاء، نريد تكوين لجنة من 03 أشخاص.

1-عدد عناصر مجموعة الأساس (عدد الحالات الممكنة):

نلاحظ في هذه التجربة أننا نهتم باختيار جزء من الكل (3 من بين 12)، الســحب يتم دفعة واحدة أي أن الترتيب غير مهم والتكرار غير ممكن، وبالتالي نستخرج عدد عناصر مجموعة الأساس |E| بواسطة التوفيقة دون تكرار $\boldsymbol{C_n^x}$

$$|E| = C_n^x = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{(3 \times 2 \times 1) \times 9!} = 220 \text{ لجنة ممكنة}$$

2-عدد اللجان الممكنة التي تحتوي على امرأة واحدة فقط:

نســـمي A حدثا عشـــوائيا يمثل احتواء اللجنة على امرأة واحدة فقط، وبالتالي:

$$|A| = C_3^1 \times C_9^2 = \frac{3!}{1!(3-1)!} \times \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{3\times2!}{2!} \times \frac{9\times8\times7!}{(2\times1)\times7!} = 3 \times 36 = 108 \text{ لجنة}$$

3-إذا افترضـــنا أن الأشــخاص الثلاثة المنتخبون يتم تعيينهم حســـب ترتيب القرعة: رئيسا، نائبا، أمينا للمال.

أ-عدد عناصر مجموعة الأساس (عدد الحالات الممكنة):

نلاحظ في هذه التجربة أننا نهتم باختيار جزء من الكل (3 من بين 12)، الســحــب يتم على التوالي أي أن الترتيـب مهم والتكرار غير ممكن، وبـالتـالي نستخرج عدد عناصر مجموعة الأساس $|E|$ بواسطة **الترتيبة دون تكرار** $\boldsymbol{A_n^x}$

$$|E| = A_n^x = A_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 1320 \text{ لجنة ممكنة}$$

ب-عدد اللجان الممكنة التي تحتوي على رجلين على الأقل:

نســمي B حدثا عشــوائيا يمثل احتواء اللجنة على رجلين على الأقل، وبالتالي:

$$|B| = A_9^2 \times A_3^1 + A_9^3 \times A_3^0 = \frac{9!}{(9-2)!} \times \frac{3!}{(3-1)!} + \frac{9!}{(9-3)!} \times \frac{3!}{(3-0)!}$$
$$= 72 \times 3 + 504 \times 1 = 720 \text{ لجنة}$$

حل التمرين الرابع:

1-اتفق 9 أصـدقاء على الذهاب إلى الملعب لمشـاهدة مقابلة في كرة القدم، عدد الطرق التي يمكنهم الجلوس بها في صف واحد به 9 مقاعد: يمثل تبديلة مع عدم الإعادة لأننا نهتم باختيار الكل من الكل (9 من بين 9)، السحب على التوالي دون إعـادة أي أن الترتيـب مهم والتكرار غير ممكن، وبـالتـالي نســتخرج عـدد عـدد الطرق بواسطة **التبديلة دون تكرار** $\boldsymbol{P_n = n!}$

$$P_n = n! = 9! = 9 \times 8 \times 7 \times \ldots \times 1 = 362880 \text{ طريقة}$$

2-نفرض أنهم لم يجدوا إلا 7مقاعد، بكم طريقة يمكنهم الجلوس.

هنـا نهتم بـاختيـار الجزء من الكل (7 من بين 9)، السـحب على التوالي دون إعـادة أي أن الترتيب مهم والتكرار غير ممكن، وبالتالي نســتخرج عدد عدد الطرق بواسطة **الترتيبة دون تكرار** $\boldsymbol{A_n^x}$

$$A_n^x = A_9^7 = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 181440 \text{ طريقة}$$

3-قررت هذه المجموعة (7 أصدقاء) بعد المباراة تناول العشـاء معا، عدد الطرق التي يمكنهم الجلوس بهاعلى مائدة مستديرة (بها 7 كراسي): يمثل تبديلة دائرية:

$$P_{n-1} = \frac{n!}{n} = (n-1)! = (7-1)! = 6! = 6 \times 5 \times \ldots \times 1 = 720 \text{ طريقة}$$

حل التمرين الخامس:

1-عدد الكلمات الممكنة المختلفة التي يمكن تكوينها من أحرف الاسم "*MASSINISSA*":

تمثل تبديلة مع التكرار داخل المجموعة (وجود عناصر لا يمكن تمييزها عن بعضها)، يحسب وفق العلاقة:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots\ldots n_k!}$$

حيث: عدد الأحرف المكونة لهذه الكلمة هو 10 أي: $n = 10$

عدد أحرف S هو 4 أي: $n_1 = 4$

عدد أحرف A هو 2 أي: $n_2 = 2$

عدد أحرف I هو 2 أي: $n_3 = 2$

عدد أحرف M هو 1 أي: $n_4 = 1$

عدد أحرف N هو 1 أي: $n_5 = 1$

وبالتالي: $P_{10}^{4,2,2,1,1} = \frac{10!}{4!2!2!1!1!} = 37800$ كلمة

2-من بين الأرقام التالية: 1، 2، 3، 4، 5، عدد الطرق الممكنة لتكوين كلمة السر المكونة من ثلاث أرقام:

أ-في حالة عدم إعادة الرقم المسحوب:

ترتيبة دون إعادة: $A_n^x = A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\times4\times3\times2!}{2!} = 60$ كلمة سر

ب-في حالة إعادة الرقم المسحوب:

ترتيبة بإعادة (قائمة): $n^x = 5^3 = 125$ كلمة سر

حل التمرين السادس:

صندوق يحتوي على 25 كرية مرقمة من 1 إلى 25، نسحب عشوائيا ثلاث كريات دفعة واحدة:

1-طبيعة العناصر في هذه التجربة العشوائية: ثلاثيات غير مرتبة لأننا نسحب الكريات الثلاثة دفعة واحدة أي ليس هناك ترتيب بينها.

- **بعض النماذج منها:**

$$E = \{(1,2,3), (25,19,18), (19,12,3), \dots\dots\dots\dots\}$$

2-عدد عناصر مجموعة الأساس (عدد الحالات الممكنة): أي حساب $|E|$

نلاحظ في هذه التجربة أننا نهتم باختيار جزء من الكل (3 من بين 25)، السحب يتم دفعة واحدة أي أن الترتيب غير مهم والتكرار غير ممكن وبالتالي نستخرج عدد عناصر مجموعة الأساس $|E|$ بواسطة **التوفيقة دون تكرار C_n^x**

$$|E| = C_n^x = C_{25}^3 = \frac{25!}{3!\,(25-3)!} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22!}{(3 \times 2 \times 1) \times 22!} = 2300 \text{ ثلاثية ممكنة}$$

3-عدد الحالات التي تكون فيها أعداد الكريات الثلاثة زوجية:

الأعداد الزوجية من (1 إلى 25) هي: 2، 4، 6، .....،24 (عددها 12)

نسمي A حدثا عشوائيا يمثل أعداد الكريات الثلاثة زوجية، وبالتالي:

$$|A| = C_{12}^3 = 220$$

4-عدد الحالات التي تكون فيها أعداد الكريات الثلاثة من مضاعفات العدد 5:

مضاعفات العدد 5 من (1 إلى 25) هي: 5، 10، 15،20، 25 (عددها 5)

نسمي B حدثا عشوائيا يمثل أعداد الكريات الثلاثة من مضاعفات العدد 5، وبالتالي: $|B| = C_5^3 = 10$

5-عـدد الحـالات التي تكون فيهـا مجموع عـددين من الأعـداد الثلاثـة يساوي 10:

نسمي D حدثا عشوائيا يمثل مجموع عددين من الأعداد الثلاثة يساوي 10، وبالتالي:

$$D = \{(1,9,X),(2,8,X),(3,7,X),(4,6,X)\}$$

حيـث X تمثـل عـددا من بين 23 عـددا المتبقيـة في كـل حـالـة، مثلا في الثلاثيـات التي تحتوي على العـددين 1 و9 يمكن أن نختـار العـدد الثـالـث من 23 عددا المتبقية غير العددين 1 و9 لأن السـحب تم دفعة واحدة أي دون تكرار وترتيب، وبالتالي ينتج 23 ثلاثية في الحالة الأولى فقط أي: C_{23}^{1} ، أما العدد الاجمالي للثلاثيات الممكنة فهو: $|D| = 4\ C_{23}^{1} = 4 \times 23 = 92$

حل التمرين السابع:

1- نلاحظ في هذه المسـألة أن كل العناصـر تشـارك في المنظومة، الترتيب مهم، التكرار ممكن، فهو تبديلة بتكرار، وعليه عدد الطرق الممكنة لتشـكيل القافلة هو: $P_{n}^{n_1,n_2,n_3} = P_{10}^{5,3,2} = \frac{10!}{5!3!2!} = 2520$

2- لدينا أربع شـاحنات سـتنطلق في قافلة إلى الصـحراء، عدد الطرق الممكنة لتشكيل هذه القافلة:

$n = 4$ ، التكرار غير ممكن، الترتيب لكل العناصـر، فهو إذن تبديلة بدون تكرار، وعليه عدد الطرق الممكنة هي: $P_n = n! = 24$

3- لدينا 4 ممثلين، نريد اختيار اثنان منهم للمشـاركة في فيلمين، بحيث يمكن لنفس الشـخص أن يمثل في الفيلمين معا، عدد الطرق الممكنة لاختيار هذين الشخصين:

$n = 4\ ,\ \ x = 2$ ، التكرار ممكن، الترتيب غير مهم، فهو إذن توفيقة بتكرار، وعليه عدد الطرق الممكنة: $C_{4+2-1}^{2} = \frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = \frac{5!}{2!(3)!} = 10$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

نرمي قطعة نقدية متوازنة ثلاث مرات، نسمي A "ظهور نفس النتيجة"، وB "ظهور الصورة F مرتين على الأقل".

1- عبر عن الأحداث التالية، مع تحديد عدد عناصر كل حدث:

A ، B ، $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ ، $B - A$. $A \Delta B$

2- أثبت صحة قانوني دو مرقان.

التمرين الثاني:

صندوق يحتوي على 20 كرية مرقمة من 1 إلى 20، نسحب عشوائيا خمس كريات في آن واحد.

1- ما هي طبيعة العناصر في هذه التجربة العشوائية؟ أذكر بعض النماذج منها؟

2- ما هو عدد عناصر مجموعة الأساس (عدد الحالات الممكنة)؟

3- ما هو عدد الحالات التي تكون فيها أرقام الكريات الخمسة أعدادا فردية؟

4- ما هو عدد الحالات التي تكون فيها أرقام الكريات الخمسة من مضاعفات العدد 5؟

التمرين الثالث:

1- ما هو عدد الاشارات المختلفة التي يمكن تشكيلها من مجموعة مؤلفة من خمسة أعلام بيضاء وأربعة حمراء وثلاثة زرقاء، وتتركب كل إشارة من تعليق اثنا عشر علما في خط رأسي؟

2- ما هو عدد المباريات التي يمكن أن تلعب خلال الموسم الكروي (ذهاب وإياب) لبطولة وطنية تضم 16 فريقا؟ استنتج عدد الجولات؟

التمرين الرابع:

1- لتكن الأرقام التالية: 3، 4، 7، 8 والمطلوب ما يلي:

أ- ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها والمؤلفة من ثلاث أرقام في حالة تكرار الرقم؟ عدم تكرار الرقم؟

ب-ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها والمؤلفة من كل الأرقام في حالة تكرار الرقم؟ عدم تكرار الرقم؟

ج- ما هو عدد الأعداد الزوجية التي يمكن تشكيلها والمؤلفة من ثلاث أرقام في حالة تكرار الرقم؟ عدم تكرار الرقم؟

2- بكم طريقة يمكن أن يجلس سبعة أصدقاء حول مائدة مستديرة لتناول وجبة العشاء؟

التمرين الخامس:

-أوجد قيمة n في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $A_n^2 = 72$ **ب)** $A_n^4 = 42A_n^2$ **ج)** $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$

التمرين السادس:

احتوت قائمة من 20 فردا من المتبرعين بدمهم على 5 أفراد دمهم من فصيلة B، فإذا انتقينا عينة تتشكل من ثلاثة أفراد من القائمة عشوائيا:

1- ما هي طبيعة العينات الممكن تشكيلها؟ أحسب عددها.

2- ما احتمال أن يكون جميع أفراد العينة المسحوبة دمهم من فصيلة B؟

3- ما احتمال أن تحوي العينة المسحوبة على الأقل فرد دمه من فصيلة B؟

4- ما احتمال أن تحوي العينة المسحوبة على اثنان دمهما من فصيلة B؟

5- ما احتمال أن لا تحوي العينة المسحوبة ولا فرد من فصيلة B؟

6- إذا تم اختيار هؤلاء الأفراد على أساس أن الأول يعطي نسبة من الدم أكبر من الثاني والثاني أكبر من الثالث، حدد عدد العينات الممكن تشكيلها.

المحور الثاني

نظرية الاحتمالات

تمهيد

اكتسبت النظرية الاحتمالية أهمية بالغة بين الدراسات الرياضية، لما لها من مساهمات تطبيقية واسعة ومفيدة في مختلف التجارب العملية والعلمية الممكنة، أي في كل حقل من حقول البحث العلمي تقريبا، خاصة مجال اتخاذ القرارات في النواحي الإدارية والاقتصادية، فكثير من أساليب التنبؤ وتحديد الاتجاهات الحديثة لكثير من الظواهر، إنما يعتمد على أسس نظرية الاحتمالات.

سنتطرق من خلال هذا المحور إلى بعض الأفكار والمفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمالات، والتي تعتبر الأساس للدراسات المتقدمة في نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي.

أولا: تعريف الاحتمال

ليكن الحدث العشوائي A في تجربة عشوائية، وليكن E مجموعة الأساس في هذه التجربة، حيث $|E|$ هو عدد الحالات الممكنة، و$|A|$ هو عدد النجاحات. إن احتمال تحقق الحدث العشوائي A في هذه التجربة، الذي يرمز له بالرمز $P(A)$، يحسب بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{|A|}{|E|}=\frac{\text{عدد مرات ظهور الحدث } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}}}$$

مثال 1: ألقي حجر نرد (طاولة) مرة واحدة، ما هو احتمال ظهور عدد زوجي؟

A: حدث ظهور عدد زوجي.

$|A|=3$: عدد مرات ظهور الحدث. $\qquad P(A)=\frac{|A|}{|E|}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$|E|=6$: عدد الحالات الممكنة.

مثال 2: في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية، من كل (1000) مصباح يوجد (50) مصباح رديء. نختار عشوائيا مصباح من الإنتاج الكلي للمصنع. ما هو احتمال أن يكون هذا المصباح جيد؟

الحل:

A: حدث ظهور مصباح جيد. $|A| = 950$، $|E| = 1000$

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{950}{1000} = 0,95$$

ثانيا: خواص الاحتمال

مما سبق نستنتج ما يلي:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A) = 0$، إذا كانت الحادثة مستحيلة.
- $P(A) = 1$ ، إذا كانت الحادثة مؤكدة.
- إذا كان احتمال وقوع الحادثة A هو p، واحتمال عدم وقوعها q ، فإن: $p + q = 1$ ، أي أن:

احتمال وقوع أي حادثة + احتمال عدم وقوعها = 1

ثالثا: قوانين الاحتمالات

1-قانون الجمع:

أ-حالة الحوادث المانعة (المتنافية):

إذا كان A و B حدثان مانعان أو متنافيان، فإن احتمال تحقق A أو B يحسب بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{P\left(A \text{أو} B\right) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

ب-حالة الحوادث غير المانعة (غير المتنافية):

إذا كان A وB حدثان غير مانعان أو غير متنافيان، فإن احتمال تحقق A أو B يحسب بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{P\left(A \text{أو} B\right) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

مثال 3: ألقيت زهرة نرد مرة واحدة، ما هو احتمال ظهور الرقم 2 أو رقم فردي؟

الحل: A: حدث ظهور الرقم 2 ، B: حدث ظهور رقم فردي ، حيث:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow |E| = 6 \quad , \quad A = \{2\} \Rightarrow |A| = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

$$B = \{1,3,5\} \Rightarrow |B| = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{3}{6}$$

نلاحظ أن: A وB حدثان مانعان أو متنافيان، وبالتالي:

$$P\left(A \text{أو} B\right) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال 4: ألقيت زهرة نرد مرة واحدة، ما هو احتمال أن يكون السطح العلوي يقبل القسمة على 2 أو 3؟

الحل: A: حدث ظهور رقم يقبل القسمة على 2، B: حدث ظهور رقم يقبل القسمة على 3، حيث:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow |E| = 6 \; , \; A = \{2,4,6\} \Rightarrow |A| = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6}$$

$$B = \{3,6\} \Rightarrow |B| = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{6}$$

نلاحظ أن: A وB حدثان غير مانعان أو غير متنافيان، وبالتالي:

$$A \cap \mathrm{B} = \{6\} \Rightarrow |A \cap \mathrm{B}| = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P\left(A \text{أو} B\right) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2-قانون الضرب:

أ-حالة الحوادث المستقلة:

إذا كان A وB حدثان مستقلان، فإن احتمال تحقق A و B يحسب بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{P\left(A \text{ و } B\right) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

ب-حالة الحوادث غير المستقلة:

إذا كان A وB حدثان غير مستقلان، فإن احتمال تحقق A و B يحسب بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{P\left(A \text{ و } B\right) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)}$$

حيث: $\boldsymbol{P(B/A)}$ يسمى الاحتمال الشرطي، أي احتمال وقوع الحدث B بشرط أن يكون الحدث A قد وقع فعلاً.

مثال 5: لدينا صندوق يحتوي على 8 كريات، منها 5 بيضاء و3 حمراء، نسحب كرتين الواحدة تلوى الأخرى.

1- إذا تم السحب مع الإرجاع (أي إرجاع الكرة الأولى إلى الصندوق قبل سحب الثانية):

أ- ما هو احتمال أن تكون الكرتان بيضاوان؟

ب-ما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية بيضاء؟

ج- ما احتمال أن تكون واحدة بيضاء والأخرى حمراء؟

2- نسحب الكرتين بدون إرجاع: أحسب الاحتمالات السابقة في هذه الحالة.

الحل:

1-السحب مع الإرجاع: يجعل نتيجة السحب مستقلة غير مشروطة بالسحب الأول، وعليه فإن:

الكريات البيضاء B ، الكريات الحمراء R

أ-احتمال أن تكون الكرتان بيضاوان:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$$

الشرح: هناك 25 ثنائية من بين 64 ثنائية ممكنة، تكون فيها الكرتان بيضاوان.

ب-احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية بيضاء:

$$P(R_1 \cap B_2) = P(R_1) \times P(B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$$

الشـرح: هناك 15 ثنائية من بين 64 ثنائية ممكنة، تكون فيها الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء.

ج-احتمال أن تكون واحدة بيضاء والأخرى حمراء:

$$P(B \cap R) = P(B_1 \cap R_2) \text{أو} P(R_1 \cap B_2) = \left(\frac{5}{8} \times \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{3}{8} \times \frac{5}{8}\right) = \frac{30}{64}$$

الشـرح: هناك 30 ثنائية من بين 64 ثنائية ممكنة، تكون فيها كرة واحدة بيضاء والأخرى حمراء.

2-السحب دون إرجاع: يجعل نتيجة السحب غير مستقلة، مشروطة بالسحب الأول، وعليه فإن:

الكريات البيضاء B ، الكريات الحمراء R

أ-احتمال أن تكون الكرتان بيضاوان:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2/B_1) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$$

الشرح: هناك 20 ثنائية من بين 56 ثنائية ممكنة، تكون فيها الكرتان بيضاوان.

ب-احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية بيضاء:

$$P(R_1 \cap B_2) = P(N_1) \times P(B_2/R_1) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

الشـرح: هناك 15 ثنائية من بين 56 ثنائية ممكنة، تكون فيها الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء.

ج-احتمال أن تكون واحدة بيضاء والأخرى حمراء:

$$P(B\cap R)=P(B_1\cap R_2)\text{أو}P(R_1\cap B_2)=\left(\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\right)=\frac{30}{56}$$

الشرح: هناك 30 ثنائية من بين 56 ثنائية ممكنة، تكون فيها كرة واحدة بيضاء والأخرى حمراء.

مثال 6: إذا كان احتمال وصــول الطائرة A القادمة من مطار لندن إلى مطار الجزائر في موعدها هو 0,8، واحتمال وصــول الطائرة B القادمة من مطار القاهرة إلى مطار قسنطينة في موعدها هو 0,7.

- ما هو احتمال أن تكون وصول الطائرتين A و B في موعدهما؟

الحل: وصول الطائرة A في موعدها غير مرتبط بأي شكل من الأشكال بوصول الطائرة B في موعدها، أي أن Aو B حدثان مستقلان، وبالتالي:

$$P\left(A\,\text{و}\,B\right)=P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0{,}8\times 0{,}7=0{,}56$$

رابعا: الاحتمال الشرطي

لتكن مجموعة الأساس E في تجربة عشوائية، وليكن A حدثا عشوائيا ينتمي إلى E (حدثا ممكنا)، أي $P(A)>0$، وليكن B حدثا عشوائيا ثانيا في هذه التجربة العشوائية وينتمي إلى E، وهو مرتبط بـ A.

إن الاحتمال الشرطي للحدث العشوائي B علما أن A أو شرط A قد تحقق قبله، والذي نعبر عليه بالصيغة التالية: $P(B/A)$، يحسب بالعلاقة التالية: $\boldsymbol{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$

مثال 7: نرمي زهرتي نرد متميزتين (مثلا واحدة حمراء والأخرى بيضــاء) وبطريقة عشـوائية مرة واحدة، نعرف على هذه التجربة العشـوائية الحدثين العشـوائيين التاليين: A : مجموع النتيجتين يساوي 6، B: أحد النتيجتين على الأقل هو 2.

1- أحسب احتمال $P(A)$ ، $P(B)$.

2- أحسب احتمال $P(A \cap B)$.

3- أحســب احتمال أن تظهر إحدى الزهرتين الرقم 2 بشــرط أن يكون المجموع يساوي 6.

4- أحسـب احتمال أن يكون مجموع النتيجتين يسـاوي 6 شـرط أن تكون إحدى النتيجتين هو 2.

5- اشرح النتائج.

الحل:

- تحديد مجموعة الأساس: هي عبارة عن ثنائيات:

$$E = \{(1,6), (6,6), (6,1) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots\}$$

ثنائية مرتبة $|E| = 6 \times 6 = 36$

$$A = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\}$$

$$B = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,2), (2,3), (4,2), (2,4), (5,2), (2,5), (6,2), (6,2)\}$$

$|A| = 5$ ، $|B| = 11$

1-حساب احتمال $P(A)$، $P(B)$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\mathrm{E}|} = \frac{5}{36}$$

الشــرح: هنـاك 5 ثنـائيـات من بين 36 ثنـائيـة ممكنـة مجموع النتيجتين فيهـا يساوي 6.

$$P(B) = \frac{|B|}{|\mathrm{E}|} = \frac{11}{36}$$

الشــرح: هنـاك 11 ثنـائيـة من بين 36 ثنـائيـة ممكنـة فيهـا إحـدى النتيجتين على الأقل هو2.

2-حساب احتمال $P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B)=\frac{|A \cap B|}{|E|}=\frac{2}{36}$$

الشـــرح: هناك ثنائيتين من بين 36 ثنائية ممكنة مجموع رقميها يســاوي 6 وفيها على الأقل رقم واحد يساوي 2.

3-حساب احتمال أن تظهر إحدى الزهرتين الرقم 2 بشرط أن يكون المجموع يساوي 6:

$$P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{2}{5}$$

الشـــرح: من بين 5 ثنائيات مجموع رقميها يســاوي 6 هناك ثنائيتين أحد رقميها على الأقل هو 2.

4-حســـاب احتمال أن يكون مجموع النتيجتين يســاوي 6 شـــرط أن تكون إحدى النتيجتين هو 2.

$$P(B/A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{2}{11}$$

الشـــرح: من بين 11 ثنائية أحد رقميها على الأقل هو 2 هناك ثنائيتين مجموع رقميها يساوي 6.

خامسا: الاحتمال الكلي ونظرية بايز

1-الاحتمال الكلي:

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ هي حوادث مانعة (متنافية) وشـــاملة (متكاملة)، وكان هناك حادثة أخرى B لا تقع إلا مع إحدى حالات الحدث A (أي أن B تقع إذا وقعت واحدة من هذه الحوادث المانعة) فإن:

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+\cdots+P(A_n)P(B/A_n)$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

مثال 8: ثلاثة مصــانع A_1، A_2، A_3 تنتج المصــابيح الكهربائية لإحدى المحلات التجاريـــة، فإذا كانت هذه المصــانع تنتج على التوالي: 45%، 35%، 20% من المصـــابيح التي يبيعها المحل، وكان احتمال إنتاج مصــباح رديء من هذه المصــانع هو: على التوالي: 8%، 15%، 12%، فإذا اشــترى شـخص مصباح من هذا المحل ،ما احتمال أن يكون المصباح رديء B؟

الحل: المصباح رديء: (من المصنع A_1 ورديء) أو(من المصنع A_2 ورديء) أو(من المصنع A_3 ورديء)

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$$
$$P(B) = 0{,}45 \times 0{,}08 + 0{,}35 \times 0{,}15 + 0{,}20 \times 0{,}12 = 0{,}1125$$

الشرح: من بين 10000 مصباح منتج، هناك 1125 مصباح رديء.

2-نظرية بايز:

انطلاقا من الطرح السابق للاحتمال الكلي، يطرح بايز المسألة التالية:

- علما أن الحدث العشوائي B قد تحقق فعلا (نتيجة أكيدة)، ما هو احتمال أن يكون قد تحقق عن طريق A_i، أي حساب: $P(A_i/B) = ?$

هذا احتمال شرطي يحسب بقانون الاحتمال الشرطي الذي رأيناه، أي:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

مثال 9: بالرجوع للمثال الســابق، علما أن المصــباح الذي تم شــراؤه رديء، فما احتمال أن يكون:

1- منتج من طرف المصنع A_1،

2- منتج من طرف المصنع A_2،

3- منتج من طرف المصنع A_3.

الحل: علما أن المصباح الذي تم شراؤه رديء:

1-احتمال أن يكون منتج من طرف المصنع A_1:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B/A_i)} = \frac{0{,}45 \times 0{,}08}{0{,}1125} = 0{,}32 = 32\%$$

الشـرح: من بين 100 مصـباح رديء هناك 32 مصـباح منتج من طرف المصـنع A_1.

2-احتمال أن يكون منتج من طرف المصنع A_2:

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B/A_i)} = \frac{0{,}35 \times 0{,}15}{0{,}1125} = 0{,}47 = 47\%$$

الشرح: من بين 100 رديء هناك 47 مصباح منتج من طرف المصنع A_2.

3-احتمال أن يكون منتج من طرف المصنع A_3:

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B/A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B/A_i)} = \frac{0{,}20 \times 0{,}12}{0{,}1125} = 0{,}21 = 21\%$$

الشرح: من بين 100 رديء هناك 21 مصباح منتج من طرف المصنع A_3.

تمارين محلولة

التمرين الأول:

1- ما هي العناصر الأساسية التي يجب تمييزها في كل مسألة من مسائل الاحتمالات؟ اشرح معنى كل عنصر.

2- حدد العناصر الأساسية للمسألتين التاليتين:

- "نرمي قطعة نقد مرة واحدة، ما هو احتمال الحصول على النتيجة صورة".
- "نرمي زهرة نرد مرتين متتاليتين، ما هو احتمال الحصول على نفس النتيجة".

التمرين الثاني:

ناد علمي يتكون من 10 أعضاء، 6 رجال و4 نساء، نريد أن نختار من بينهم عن طريق القرعة 3 أفراد للمشاركة في ندوة علمية.

1- أحسب احتمال أن يكون الوفد مشكلا من الرجال فقط.

2- أحسب احتمال أن يكون الوفد مشكلا من النساء فقط.

3- أحسب احتمال أن يكون الوفد يضم على الأقل رجلين.

4- أحسب احتمال أن يكون الوفد يضم على الأكثر امرأتين.

التمرين الثالث:

x ،y ، z ، t ، أربع أعضاء من مجلس إدارة شركة، مرشحين لاختيار اثنين منهم لتمثيل الشركة في أحد المؤتمرات.

1- ما هو احتمال اختيار العضو x.

2- ما هو احتمال اختيار أحد العضوين x و t.

3- ما هو احتمال اختيار أحد العضوين x أو t.

4- ما هو احتمال عدم اختيار أحد العضو x.

التمرين الرابع:

في إحدى الأفواج يوجد سبعة طلبة وثلاثة طالبات، أردنا اختيار ممثلين اثنين للفوج (دون إعادة).

1- ما هو احتمال اختيار في المرة الأولى طالب وفي المرة الثانية طالب؟

2- ما هو احتمال اختيار في المرة الأولى طالب وفي المرة الثانية طالبة؟

3- ما هو احتمال اختيار في المرة الأولى طالبة وفي المرة الثانية طالب؟

4- ما هو احتمال اختيار في المرة الأولى طالبة وفي المرة الثانية طالبة؟

التمرين الخامس:

في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية توجد ثلاث آلات M_1، M_2، M_3، تنتج في اليوم الواحد على التوالي 30%، 50%، 20%، من جهة أخرى فإن الآلة M_1 لديها 5% إنتاج معيب، الآلة M_2 لديها 2% إنتاج معيب، الآلة M_3 لديها 5% إنتاج معيب، سحبنا مصباحا من الإنتاج الكلي اليومي للمصنع:

1- ترجم هذه المسألة إلى شجرة احتمالية.

2- أوجد احتمال أن يكون هذا المصباح من إنتاج:

أ-الآلة M_1. **ب**-الآلة M_2. **ج**-الآلة M_3.

3- أوجد احتمال أن يكون هذا المصباح: **أ**-معيبا. **ب**-صالحا.

4- بعد السحب وإجراء عملية المراقبة على المصباح تأكدنا أنه فعلا معيب، ما هو احتمال أن يكون:

أ-من انتاج الآلة M_1. **ب**-من إنتاج الآلة M_2. **ج**-من إنتاج الآلة M_3.

التمرين السادس:

صـنـدوق يحتوي على 25 كرية مرقمة من 1 إلى 25، نسـحب عشـوائيا ثلاث كريات دفعة واحدة.

1- ما هي طبيعة العناصـر في هذه التجربة العشـوائية؟ أذكر بعض النماذج منها؟

2- ما هو عدد عناصر مجموعة الأساس (عدد الحالات الممكنة)؟

3- ما هو احتمال أن تكون أرقام الكريات الثلاثة أعدادا زوجية؟

4- ما هو احتمال أن تكون أرقام الكريات الثلاثة من مضاعفات العدد 5؟

5- ما هو احتمال أن يكون مجموع رقمين من الأرقام الثلاثة يساوي 10؟

التمرين السابع:

لاحظت مصـلحة خدمة ما بعد البيع أن إرجاع جهاز ما راجع إلى 20% من الحـالات للعطـب A، و30% من الحـالات للعطـب B، و2% من الحـالات للعطبين معا، نختار جهاز عشوائيا:

1- ما احتمال أن لا يكون به عطب من النوع A.

2- ما احتمال أن لا يكون به عطب من النوع B.

3- ما احتمال أن يكون به عطب من النوعين A و B.

4- ما احتمال أن يكون به عطب من أحد النوعين على الأقل.

5- ما احتمال أن يكون به عطب من النوع A فقط.

6- ما احتمال أن لا يكون به عطب من النوعين معا.

التمرين الثامن:

تفيد إحصـائيات دراسـة خاصـة أجريت على مؤسـسـة تربوية أن 4% من الـذكور و 1% من الإنـاث تفوق قـامتهم 1,6م، كمـا يثبـت نفس المصـدر أن 60% من التلاميذ إناثا وأن 40% من التلاميذ ذكورا، نختار عشـوائيا تلميذا من القائمة الكلية للمؤسسة.

1- ما هو احتمال أن يكون هذا التلميذ: أ-ذكرا.   **ب**-أنثى.

2- ما هو احتمال أن يكون التلميذ ذكرا وتفوق قامته 1,6م؟

3- ما هو احتمال أن يكون التلميذ أنثى وتفوق قامتها 1,6م؟

4- ما هو احتمال أن تفوق قامة هذا التلميذ 1,6م؟

5- علما أن التلميذ الذي تم اختياره تفوق قامته 1,6م.

أ-ما هو احتمال أن يكون من الذكور؟   **ب**-ما هو احتمال أن يكون من الإناث؟

الحلـــــول

حل التمرين الأول:

1-العناصر الأساسية التي يجب تمييزها في كل مسألة من مسائل الاحتمالات:

أ-مجموعة الأســاس: هي مجموعة النتائج الممكنة والمختلفة لتجربة ما، ونرمز لها بالحرف" E"، كما تعرض على شـكل مجموعة رياضـية: $E = \{\dots\dots\dots\}$، وعدد عناصر E نرمز لهم بالرمز: $|E|$.

ب-الحدث العشــوائي A : هو جزء من مجموعة الأســاس، بعد التجربة نحكم فيما إذا تحقق أو لم يتحقق، وهذا أن الحدث يهتم بإمكانات محددة من فراغ إمكانات التجربة E.

ج-حسـاب الاحتمال $P(A)$: نسـبة الحظوظ كي يتحقق الحدث العشـوائي A، حيث: $P(A) = \frac{|A|}{|E|}$

2-تحديد العناصر الأساسية للمسألتين التاليتين:

- "نرمي قطعة نقد مرة واحدة، ما هو احتمال الحصول على النتيجة صورة":

نضع: ص: تمثل الصورة، ك: تمثل الكتابة

أ- **مجموعة الأساس:** $E = \left\{\text{ك , ص}\right\}$

ب-**الحدث العشوائي A :** $A = \left\{\text{ص}\right\}$

ج- **حساب الاحتمال $P(A)$:** $P(\mathrm{A}) = \frac{|A|}{|\mathrm{E}|} = \frac{1}{2}$

- "نرمي زهرة نرد مرتين متتاليتين، ما هو احتمال الحصول على نفس النتيجة":

أ-مجموعة الأساس: هي عبارة عن ثنائيات:
$E = \{(1,6), (6,6), (6,1) \ldots \ldots \ldots \ldots\} \Rightarrow |E| = 6 \times 6 = 36$

ب-الحدث العشوائي A : هي عبارة عن ثنائيات:
$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Rightarrow |A| = 6$

ج-حساب الاحتمال $P(A)$: $P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{6}{36}$

حل التمرين الثاني:

نقوم أولا بحساب عدد عناصر مجموعة الأساس (عدد الحالات الممكنة):

$$|E| = C_n^x = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{(3 \times 2 \times 1) \times 7!}$$

$= 120$ وفد ممكن

1-احتمال أن يكون الوفد مشكلا من الرجال فقط:

نسمي A حدثا عشوائيا يمثل تشكيل الوفد من الرجال فقط.

$|A| = C_6^3 \times C_4^0 = 20 \times 1 = 20 \quad , \quad P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{20}{120} = 0{,}167$

2-احتمال أن يكون الوفد مشكلا من النساء فقط:

نسمي B حدثا عشوائيا يمثل تشكيل الوفد من النساء فقط.

$|B| = C_4^3 \times C_6^0 = 4 \times 1 = 4 \quad , \quad P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{4}{120} = 0{,}033$

3-احتمال أن يكون الوفد يضم على الأقل رجلين:

نسمي C حدثا عشوائيا يمثل تشكيل وفد يضم على الأقل رجلين.

$$|C| = C_6^2 \times C_4^1 + C_6^3 \times C_4^0 = 15 \times 4 + 20 \times 1 = 80$$

$$P(C) = \frac{|C|}{|E|} = \frac{80}{120} = 0{,}667$$

4-احتمال أن يكون الوفد يضم على الأكثر امرأتين:

نسمي D حدثا عشوائيا يمثل تشكيل وفد يضم على الأكثر امرأتين.

$$|D| = C_4^2 \times C_6^1 + C_4^1 \times C_6^2 + C_4^0 \times C_6^3 = 6 \times 6 + 4 \times 15 + 20 \times 1 = 116$$

$$P(D) = \frac{|D|}{|E|} = \frac{116}{120} = 0{,}967$$

حل التمرين الثالث:

- **مجموعة الأساس:** هي عبارة عن ثنائيات:

$$E = \{(x,y),(x,z),(x,t),(y,z),(y,t),(z,t)\} \Rightarrow |E| = 6$$

- **نسمي الأحداث التالية:** A: اختيار العضو x. B: اختيار العضو y.

C: اختيار العضو z D: اختيار العضو t

1-احتمال اختيار العضو x:

$$A = \{(x,y),(x,z),(x,t)\} \Rightarrow |A| = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

2-احتمال اختيار أحد العضوين x و t:

$$D = \{(x,t),(y,t),(z,t)\} \Rightarrow |D| = 3 \Rightarrow P(D) = \frac{|D|}{|E|} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

$$A \cap D = \{(x,t)\} \Rightarrow |A \cap D| = 1 \Rightarrow P(A \cap D) = \frac{|A \cap D|}{|E|} = \frac{1}{6}$$

3-احتمال اختيار أحد العضوين x أو t:

$$A \cup D = \{(x,y),(x,z),(x,t),(y,t),(z,t)\} \Rightarrow |A \cup B| = 5$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|E|} = \frac{5}{6} = 0{,}83$$

يمكن حلها عن طريق قاعدة الجمع للحوادث غير المتنافية، كما يلي:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}83$$

4-احتمال عدم اختيار أحد العضو x:

$$\bar{A} = \{(y,z),(y,t),(z,t)\} \Rightarrow |\bar{A}| = 3 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{|\bar{A}|}{|E|} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

يمكن حلها، كما يلي:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

حل التمرين الرابع:

نتيجة السحب غير مستقلة، مشروطة بالسحب الأول، وعليه فإن:

طالب في المرة الأولى: A_1 ، طالب في المرة الثانية: A_2، طالبة في المرة الأولى B_1، طالبة في المرة الثانية B_2

1-احتمال اختيار في المرة الأولى طالب وفي المرة الثانية طالب:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$$

2-احتمال اختيار في المرة الأولى طالب وفي المرة الثانية طالبة:

$$P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) \times P(B_2/A_1) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{27}{90}$$

3-احتمال اختيار في المرة الأولى طالبة وفي المرة الثانية طالب:

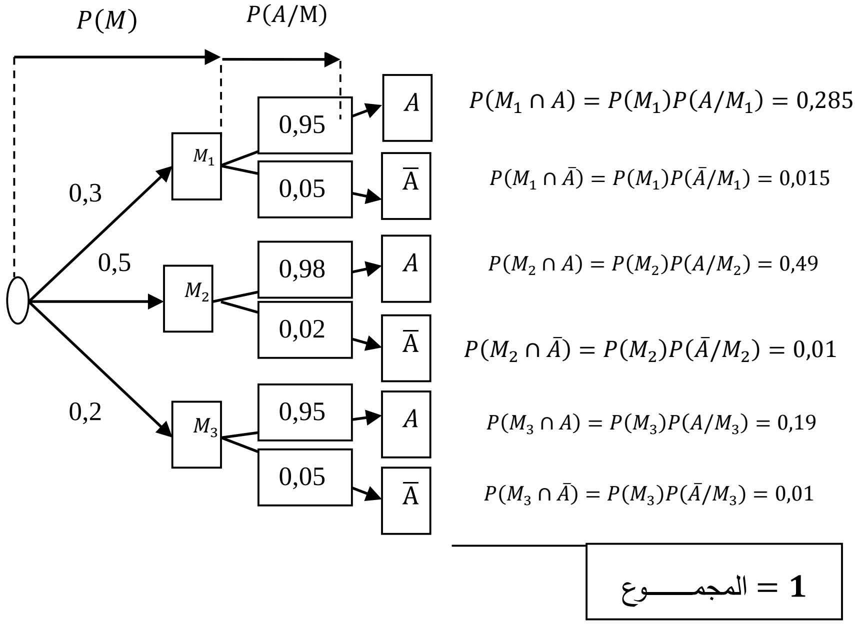
$$P(B_1 \cap A_2) = P(B_1) \times P(A_2/B_1) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{27}{90}$$

4-احتمال اختيار في المرة الأولى طالبة وفي المرة الثانية طالبة:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2/B_1) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

حل التمرين الخامس:

1-ترجمة المسألة إلى شجرة احتمالية:



2-إيجاد احتمال أن يكون هذا المصباح:

- من إنتاج الآلة M_1: $P(M_1) = 0{,}3$
- من إنتاج الآلة M_2: $P(M_2) = 0{,}5$
- من إنتاج الآلة M_3: $P(M_3) = 0{,}2$

3-إيجاد احتمال:

- أن يكون هذا المصباح معيبا:

$$P(\bar{A}) = P[(M_1 \cap \bar{A}) \cup (M_2 \cap \bar{A}) \cup (M_3 \cap \bar{A})]$$

$$P(\bar{A}) = P(M_1)P(\bar{A}/M_1) + P(M_2)P(\bar{A}/M_2) + P(M_2)P(\bar{A}/M_2) = 0{,}035 = \frac{35}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 مصباح منتج بالمصنع هناك 35 مصباحا معيبا.

- أن يكون هذا المصباح صالحا:

$$P(A) = P[(M_1 \cap \bar{A}) \cup (M_2 \cap \bar{A}) \cup (M_3 \cap \bar{A})]$$

$$P(A) = P(M_1)P(A/M_1) + P(M_2)P(A/M_2) + P(M_2)P(A/M_2) = 0{,}965 = \frac{965}{1000}$$

يمكن حلها، كما يلي:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Leftrightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}035 = 0{,}965$$

الشرح: من بين 1000 مصباح منتج بالمصنع هناك 965 مصباحا صالحا.

4-بعد السحب وإجراء عملية المراقبة على المصباح تأكدنا أنه فعلا معيب، إيجاد احتمال أن يكون:

- من انتاج الآلة M_1:

$$P(M_1/\bar{A}) = \frac{P(M_1 \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(M_1)P(\bar{A}/M_1)}{P(M_1)P(\bar{A}/M_1) + P(M_2)P(\bar{A}/M_2) + P(M_2)P(\bar{A}/M_2)} = 0{,}428$$

الشرح: من بين 1000 مصباح معيب منتج بالمصنع هناك 425 مصباحا من إنتاج الآلة M_1.

- من انتاج الآلة M_2:

$$P(M_2/\bar{A}) = \frac{P(M_2 \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(M_2)P(\bar{A}/M_2)}{P(M_1)P(\bar{A}/M_1) + P(M_2)P(\bar{A}/M_2) + P(M_2)P(\bar{A}/M_2)} = 0{,}286$$

الشرح: من بين 1000 مصباح معيب منتج بالمصنع هناك 286 مصباحا من إنتاج الآلة M_2.

- من انتاج الآلة M_3:

$$P(M_3/\bar{A}) = \frac{P(M_3 \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(M_3)P(\bar{A}/M_3)}{P(M_1)P(\bar{A}/M_1) + P(M_2)P(\bar{A}/M_2) + P(M_2)P(\bar{A}/M_2)} = 0{,}286$$

الشرح: من بين 1000 مصباح معيب منتج بالمصنع هناك 286 مصباحا من إنتاج الآلة M_3.

حل التمرين السادس:

صندوق يحتوي على 25 كرية مرقمة من 1 إلى 25، نسحب عشوائيا ثلاث كريات دفعة واحدة:

1-طبيعة العناصر في هذه التجربة العشوائية: ثلاثيات غير مرتبة لأننا نسحب الكريات الثلاثة دفعة واحدة أي ليس هناك ترتيب بينها.

- بعض النماذج منها:

$$E = \{(1,2,3), (25,19,18), (19,12,3), \dots \dots \dots \dots\}$$

2-عدد عناصر مجموعة الأساس (عدد الحالات الممكنة): أي حساب $|E|$

نلاحظ في هذه التجربة أننا نهتم باختيار جزء من الكل (3 من بين 25)، السـحب يتم دفعة واحدة أي أن الترتيب غير مهم والتكرار غير ممكن وبالتالي نستخرج عدد عناصر مجموعة الأساس $|E|$ بواسطة **التوفيقة دون تكرار C_n^x**

$$|E| = C_n^x = C_{25}^3 = \frac{25!}{3!\,(25-3)!} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22!}{(3 \times 2 \times 1) \times 22!} = 2300$$ ثلاثية ممكنة

3-احتمال أن تكون أعداد الكريات الثلاثة زوجية:

الأعداد الزوجية من (1 إلى 25) هي: 2، 4، 6، .....،24 (عددها 12)

نسمي A حدثا عشوائيا يمثل أعداد الكريات الثلاثة زوجية، وبالتالي:

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{C_{12}^3}{C_{25}^3} = \frac{220}{2300}$$

4-احتمال أن تكون أعداد الكريات الثلاثة من مضاعفات العدد 5:

مضاعفات العدد 5 من (1 إلى 25) هي: 5، 10، 15،20، 25 (عددها 5)

نســمي B حدثا عشــوائيا يمثل أعداد الكريات الثلاثة من مضــاعفات العدد 5، وبالتالي: $P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{C_5^3}{C_{25}^3} = \frac{10}{2300}$

5-احتمال أن يكون مجموع عددين من الأعداد الثلاثة يساوي 10:

نســمي D حدثا عشــوائيا يمثل مجموع عددين من الأعداد الثلاثة يســاوي 10، وبالتالي: $D = \{(1,9,X), (2,8,X), (3,7,X), (4,6,X)\}$

حيـث X تمثـل عـددا من بين 23 عـددا المتبـقيـة في كل حـالـة، مثلا في الثلاثيات التي تحتوي على العددين 1 و9 يمكن أن نختار العدد الثالث من 23 عددا المتبقية غير العددين 1 و9 لأن الســحب تم دفعة واحدة أي دون تكرار وترتيب، وبالتالي ينتج 23 ثلاثية في الحالة الأولى فقط أي: C_{23}^1 ، أما العدد الاجمالي للثلاثيات الممكنة فهو:

$$D = 4\,C_{23}^1 = 4 \times 23 = 92$$ ثلاثية

$$P(D) = \frac{|D|}{|E|} = \frac{4\,C_{23}^1}{C_{25}^3} = \frac{92}{2300}$$

حل التمرين السابع:

لاحظت مصـــلحة خدمة ما بعد البيع أن إرجاع جهاز ما راجع إلى 20% من الحـالات للعطـب A، و30% من الحـالات للعطـب B، و2% من الحـالات للعطبين معا، نختار جهاز عشوائيا:

1- احتمال أن لا يكون به عطب من النوع A:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8$$

2- ما احتمال أن لا يكون به عطب من النوع B:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$$

3- احتمال أن يكون به عطب من النوعين A و B:

$$P(A \cap B) = 0,02$$

4- احتمال أن يكون به عطب من أحد النوعين على الأقل:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,02 = 0,48$$

5- احتمال أن يكون به عطب من النوع A فقط:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,02 = 0,18$$

6- احتمال أن لا يكون به عطب من النوعين معا:

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,02 = 0,98$$

حل التمرين الثامن:

1-احتمال أن يكون ذكرا: $P(G) = 40\% = 0,4$

احتمال أن يكون أنثى: $P(F) = 60\% = 0,6$

2-احتمال أن يكون هذا التلميذ من الذكور وتفوق قامته 1,6م:

$$P(G \cap T) = P(G)P(T/G) = 0,4 \times 0,04 = 0,016 = 1,6\% = \frac{16}{1000}$$

(4% من الذكور تفوق قامتهم 1,6م $\Leftarrow$ $P(T/G) = 0,04)$

الشرح: من بين 1000 تلميذ هناك 16 تلميذا من الذكور وتفوق قامته 1,6م.

3-احتمال أن يكون هذا التلميذ من الإناث وتفوق قامتها 1,6م:

$$P(F\cap T)=P(F)P(T/F)=0{,}6\times 0{,}01=0{,}006=0{,}6\%=\frac{6}{1000}$$

$(P(T/F)=0{,}01 \quad \Leftarrow$ 1% من الاناث تفوق قامتهم 1,6م)

الشرح: من بين 1000 تلميذ هناك 6 تلاميذ من الاناث وتفوق قامتهن 1,6م.

4-احتمال أن تفوق قامة هذا التلميذ 1,6م ($\boldsymbol{T}$):

$$P(T)=P[(G\cap T)\cup\ (F\cap T)]$$
$$P(T)=P(G\cap T)+P(F\cap T)$$
$$P(T)=P(G)P(T/G)+P(F)P(T/F)$$
$$P(T)=0{,}4(0{,}04)+0{,}6(0{,}01)=0{,}022=2{,}2\%=\frac{22}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 تلميذ في المؤسسة هناك 22 تلميذ تفوق قامتهم 1,6م.

5-علما أن التلميذ الذي تم اختياره تفوق قامته 1,6م:

- احتمال أن يكون ذكرا:

$$P(G/T)=\frac{P(G\cap T)}{\mathrm{P(T)}}=\frac{P(G)P(T/G)}{P(G)P(T/G)+P(F)P(T/F)}$$
$$=\frac{0.4(0.04)}{0.022}=0{,}73=73\%$$

الشرح: من بين 100 تلميذ تفوق قامته 1,6م هناك 73 هم من الذكور.

- احتمال أن يكون أنثى:

$$P(F/T)=\frac{P(F\cap T)}{\mathrm{P(T)}}=\frac{P(F)P(T/F)}{P(G)P(T/G)+P(F)P(T/F)}$$
$$=\frac{0.6(0.01)}{0.022}=0{,}27=27\%$$

الشرح: من بين 100 تلميذ تفوق قامته 1,6م هناك 27 هم من الاناث.

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

1- حدد مع الشرح عناصر المسألة الاحتمالية؟ ثم أذكر مسألتين توضح فيهما هاته العناصر؟

2- ما المقصود بالحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية؟ الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة؟ مع ذكر مثال لكل حدث؟

التمرين الثاني:

تملك مؤسسة إنتاجية ورشتين تقومان بإنتاج منتوج واحد ذي نوعيتين مختلفتين، الإنتاج اليومي للورشتين من النوعين ملخص بالجدول التالي:

مجموع الإنتاج	الورشة		نوع المنتوج
	2	**1**	
760	480	280	**P_1**
240	120	120	**P_2**
1000	600	400	**مجموع الإنتاج**

أولا-سحبنا وحدة منتوج من الإنتاج اليومي للمؤسسة بصورة عشوائية:

1- أحسب احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة من النوع الأول؟ من النوع الثاني؟

2- أحسب احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة من الورشة الأولى؟ من الورشة الثانية؟

3- إذا علمت أن المنتوج من النوع الأول، ما احتمال أن تكون من الورشة الثانية؟

4- إذا علمت أن المنتوج من الورشة الثانية، ما احتمال أن يكون من النوع الأول؟

ثانيا-سحبنا وحدتين من الانتاج اليومي للمؤسسة تعاقبيا ودون إرجاع الوحدة المسحوبة:

1- أحسب احتمال كون القطعتين المسحوبتين من النوع الأول؟

2- أحسب احتمال كون القطعتين المسحوبتين من الورشة الثانية؟

3- أحسب احتمال أن تكون الأولى من الورشة الثانية والثانية من الورشة الأولى؟

4- أحسب احتمال أن تكون إحداهما من النوع الأول والأخرى من النوع الثاني؟

5- إذا كان السحب تعاقبيا مع الإرجاع، أحسب الاحتمالات السابقة؟

التمرين الثالث:

حديقة حيوانات لها بوابتان A_1 و A_2، تفيد إدارة الحديقة أن 70% من الزوار يدخلون من البوابة A_1، إحصائيات نفس الإدارة تشير إلى أن 40% من الزوار الذين يدخلون من البوابة A_1 يخرجون منها، في حين أن50% من الذين يدخلون من البوابة A_2يخرجون منها.

1- نختار عشوائيا شخصا من زوار هذه الحديقة (وجد داخل الحديقة):

أ- ما هو احتمال أن يخرج من البوابة الأولى؟ اشرح النتيجة؟

ب-ما هو احتمال أن يخرج من البوابة الثانية؟ اشرح النتيجة؟

2- التقينا بشخص خرج لتوه (في حينه) من الباب الثاني (التقينا به خارج الحديقة):

أ- ما هو احتمال أن يكون قد دخل من البوابة الأولى؟ اشرح النتيجة؟

ب-ما هو احتمال أن يكون قد دخل من البوابة الثانية؟

التمرين الرابع:

ثلاث مصالح طبية A، B، C في أحد المستشفيات تستقبل على التوالي 45%، 30%، 25% من مجموع المرضى الذين يدخلون هذا المستشفى، تفيد التقارير الطبية للسنوات الماضية أن بالمتوسط نسبة الوفيات في المصالح الثلاثة هي على التوالي: 1%، 3%، 5%.

نختار عشوائيا مريضا من المرضى المسجلين بمصلحة القبول للمستشفى:

1- ترجم هذه المسألة إلى شجرة احتمالية؟

2- ما هو احتمال أن يتوفى هذا المريض بالمستشفى؟ اشرح النتيجة؟

3- ما هو احتمال أن يكون من المصلحة A أو B ويتوفى؟ اشرح النتيجة؟

4- ما هو احتمال أن يشفى؟ اشرح النتيجة؟

5- إذا افترضنا أن المريض توفي بالمستشفى، ما احتمال أن يكون من المصلحة A؟ المصلحة B؟ المصلحة C؟ اشرح النتائج؟

التمرين الخامس:

وقع حادث مرور في إحدى الطرقات، فانطلقت ثلاثة سيارات اسعاف A، B، C من مراكز مستقلة عن بعضها البعض، حيث أن احتمال وصول السيارة A إلى مكان الحادث هو 80%، واحتمال وصول السيارة B إلى مكان الحادث هو 70%، أما احتمال وصول السيارة C إلى مكان الحادث فهو 60%.

- أوجد احتمال وصول إحدى السيارات على الأقل إلى مكان الحادث في الوقت المناسب؟

التمرين السادس:

أحسب بدلالة $P(A)$، $P(B)$، $P(A \cap B)$ الاحتمالات التالية:

$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ، $P(\bar{A} \cap B)$ ، $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ ، $P(A \cup \bar{B})$

المحور الثالث

المتغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعها الاحتمالي

تمهيد

في كثير من الأحيان تكون نتائج تجربة ما قياسات وصفية أو نوعية، مثل الفضاء العيني لتجربة إلقاء قطعة نقد مرة واحدة إما H وإما T وهي قياسات نوعية، أما في تجربة إلقاء حجر نرد فتكون النتائج الأعداد من 1 إلى 6 وتكون النتائج في هذا الفضاء العيني نتائج قياسية (كميات عددية). وفي جميع هذه الأنواع من التجارب التي تكون النتائج فيها قياسات نوعية أو قياسات كمية فإننا سنقوم بربط كل نتيجة من نتائج الفضاء العيني لتجربة إحصائية بقيمة عددية من خلال تعريف اقترانات حقيقية على نقاط فضاء العينة وبالتالي إعطاءنا المجال أو المجموعة المحددة له.

أولا: المتغير العشوائي

1-تعريف المتغير العشوائي:

يصاحب نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى "المتغير العشوائي" وهذا المقدار يأخذ قيما مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية.

مثال: عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة، التجربة هنا عشوائية، المقدار الذي يرافق نتائج هذه التجربة يمكن أن يكون: 1،2،3،.....،6 ويسمى المتغير العشوائي متغيرا : لأنه يأخذ قيما مختلفة ويسمى عشوائيا : لأنه يرافق نتائج التجربة العشوائية ويرمز للمتغير العشوائي بالرمز (X) . وفي مثالنا السابق نجد (X) يمكن أن يأخذ القيم 1،2،3،.....،6.

2-أنواع المتغير العشوائي:

1-2 المتغير العشوائي المنفصل:

يقال أن المتغير العشوائي (X) متغير منفصل إذا كان يأخذ قيماً صحيحة فقط تنتمي إلى مجموعة محدودة أو معدودة.

مثال: عدد مبيعات سيارات شركة ما شهريا، يمكن أن يأخذ القيم 1،2،3،.........

2-2 المتغير العشوائي المستمر:

يقال أن المتغير العشـوائي (X) متغير مسـتمر إذا كان يأخذ جميع القيم الصـحيحة والكسـرية من مدى تغيره، أو كان ينتمي إلى مجموعة غير محدودة أو معدودة.

مثال: وزن الطالب، يمكن أن يأخذ قيماً صحيحة وكذلك قيماً كسرية.

مثال 01:

عرف المتغير العشـوائي X والـذي يمثـل عـدد مرات ظهور الصـورة H في تجربة القاء قطعة نقد ثلاث مرات؟

الحل:

عناصر الفضاء العيني	قيمة X
HHH	3
HHT	2
HTH	2
HTT	1
TTT	0
TTH	1
THT	1
THH	2

نلاحظ أن كل نتيجة بسـيطة من عناصـر الفضـاء العيني تأخذ قيمة واحدة معينة حيث البعض منها يتشـابه في ذلك العدد وبذلك نسـتطيع إعادة تنظيم النتائج السابقة على الصورة التالية:

النتيجة	قيمة X
[HHH]	3
[THH , HTH , HHT]	2
[THT , TTH , HTT]	1
[TTT]	0

ثانيا: التوزيع الاحتمالي للمتغيرة المتقطعة

1-التوزيع الاحتمالي:

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـــوائي (X) مثلا، عبارة عن دالة تعطي الاحتمالات لقيم المتغير x المختلفة وهذه الدالة عبارة عن جدول أو رســم بياني أو صــيغة رياضــية تبين قيم المتغير x والاحتمالات المقابلة لكل منها، وتحقق بعض الشروط نذكرها فيما بعد.

2-التوزيع الاحتمالي المتقطع:

إذا كانت X متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم: $x_1 \; , \; x_2 \; , \; \dots \; , x_n$

باحتمالات $P(x_1) , P(x_2) , \dots , P(x_n)$

بشرط: لجميع قيم x $\quad$ (1) $P(x) \geq 0$

(2) $\sum P(x) = 1$

فإنه يقال أن X متغير عشـــوائي له توزيع احتمالي منفصـــل دالته الاحتمالية $P(X = x_i)$

مثال 02:

نرمي زهرة نرد مرتين، نهتم بأصغر الرقمين الحاصلين:

1- أوجد قيم المتغير العشوائي X الذي يعبر عن أصغر الرقمين الحاصلين؟

2- أكتب قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـــوائي X الذي يعبر عن أصـــغر الرقمين الحاصلين عن رمي زهرة النرد مرتين؟

3- أحسب الاحتمالات التالية:

أ- الحصول على رقم أربعة على الأقل.

ب-الحصول على رقم اثنين على الأكثر.

4- أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1-إيجاد قيم المتغير العشوائي X:

هنا الأحداث (المتغير العشوائي) غير مستقلة لأننا نرمي الحجر المرة الأولى ثم ننتظر نتيجة الرمية الثانية والتي تؤثر على نتيجة الرمية الأولى ويكون هنا المتغير العشوائي غير مستقل:

من الواضح أن عدد حوادث التجربة هو: 6x6=36

المجموعة الكلية (الفراغ العيني):

$$E=\left\{\begin{array}{l}(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)\\(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6)(4,1)(4,2)(4,3)(4,5)(4,6)(5,1)\\(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)\end{array}\right\}$$

نفرض أن X تخصص لكل نقطة (a,b) من فضاء العينة القيمة الأصغر من a,b وهذا يعني أن X(a,b)=min(a,b)، وبذلك فإن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X والذي يعبر عن أصغر الرقمين الحاصلين هي: X= 1,2,3,4,5,6

2-كتابة قانون التوزيع للمتغير العشوائي X:

يمكن الحصول على قانون التوزيع كما يلي:

X												P(x)
6	6 6											1/36
5	5 6	5 5	6 5									3/36
4	4 5	4 6	4 4	6 4	5 4							5/36
3	3 4	3 5	3 6	3 3	6 3	5 3	4 3					7/36
2	2 3	2 4	2 5	2 6	2 2	6 2	5 2	4 2	3 2			9/36
1	1 6	1 5	1 4	1 3	1 2	1 1	6 1	5 1	4 1	3 1	2 1	11/36

X	1	2	3	4	5	6	∑
P(x)	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36}$

3-حساب الاحتمالات التالية:

أ-الحصول على رقم أربعة على الأقل:

$$P(x \geq 4) = P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6) = \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

ب-الحصول على رقم اثنين على الأكثر:

$$P(x \leq 2) = P(x = 1) + P(x = 2) = \frac{11}{36} + \frac{9}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

مثال 03:

1- أوجد قيمة a في الجدول التالي والتي تجعل ذلك الجدول يمثل توزيعا احتماليا؟

2- أحسب احتمال X أكبر من 4 واحتمال X أقل من أو يساوي 4؟

x	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{P(x)}$	a	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

الحل:

1-حتى يكون الجدول يمثل توزيعا احتماليا لا بد أن يكون: $\sum P(x) = 1$

$$a + \frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

وبتوحيد المقامات نجد أن:

$$a = 1 - \frac{14}{20} = \frac{20}{20} - \frac{14}{20} = \frac{5}{20} = \frac{3}{10}$$

2-أ-احتمال X أكبر من 4:

$$P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

2-ب-احتمال X أقل من أو يساوي 4:

$$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$
$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

ثالثا: شروط دالة الكثافة للمتغيرة المتقطعة

يتم التعبير عن احتمال أي قيمة في التوزيع الاحتمالي بــــــ $P(X = x_i)$، ويمكن التعبير عنه أيضا بــ $F(x_i)$، وتسمى الدالة $F(x_i)$ بدالة كثافة الاحتمال والتي تحقق الشرطين التاليين :

لجميع قيم x : $F(x_i) \geq 0$ (1)

$\sum F(x_i) = 1$ (2)

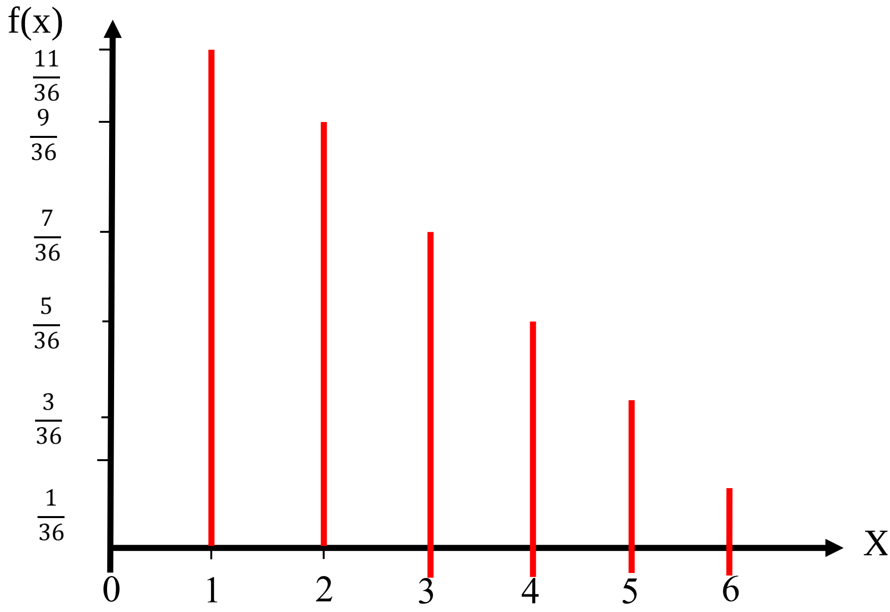
ويمكن التعبير عن دالة كثافة الاحتمال $F(x_i)$ في صورة جدول كمايلي:

X	**x_1**	**x_2**	**.....**	**....**	**x_n**	$\sum$
$f(x_i) = P(X=x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	.....	....	$f(x_n)$	1

رابعا: التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المنفصلة (المتقطعة)

يمكن تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشـــوائية المنفصـــلة بيانيا، برسم محورين متعامدين، بحيث تمثل قيم المتغير العشوائي على المحور الأفقي وتمثل قيم الاحتمال على المحور العمودي، وذلك عن طريق قطع مستقيمة عمودية ومنفصلة عن بعضها البعض لأن المتغير العشوائي منفصل، ويتناسب ارتفاعها مع الاحتمال المقابل لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي.

مثال 04: لنأخذ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـوائي X والخاص بالمثال رقم 2، ثم نقوم بتمثيل دالة كثافته الاحتمالية



خامسا: دالة التوزيع التراكمي F(x) للمتغيرة العشوائية المتقطعة

تعرف دالـة التوزيع الاحتمـاليـة (التراكميـة) F(x) وفق الصـيـاغـة الرياضية التالية :

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{X=x_1}^{X=x} P(X = x_i) = \sum_{X=x_1}^{X=x} f(x_i)$$

أي أنه إذا كانت X تأخذ قيما منتهية فإن F(x) يمكن تعريفها كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1)+f(x_2) & , \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \dots\dots\dots & \\ f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) & , \quad x_n \leq x < +\infty \end{cases}$$

تعطي لنا دالة التوزيع جدولا مشتقا من قانون التوزيع يعبر عن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X أي قيمة أصغر أو تساوي قيمة معينة ولتكن x_i ، ولها الخواص التالية :

أ- F(x) دالة عددية متزايدة.

ب-أدنى قيمة لـ F(x) هي 0، وتترجم رياضيا إلى : $lim_{x\to-\infty}F(x) = 0$

ج- أقصى قيمة لـ F(x) هي 1، وتترجم رياضيا إلى : $lim_{x\to+\infty}F(x) = 1$

د- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

مثال 05: أحسب دالة التوزيع الاحتمالية (التراكمية) F(x) للمثال 2، ثم مثلها بيانيا؟

أ-حساب دالة التوزيع الاحتمالية (التراكمية) F(x) :

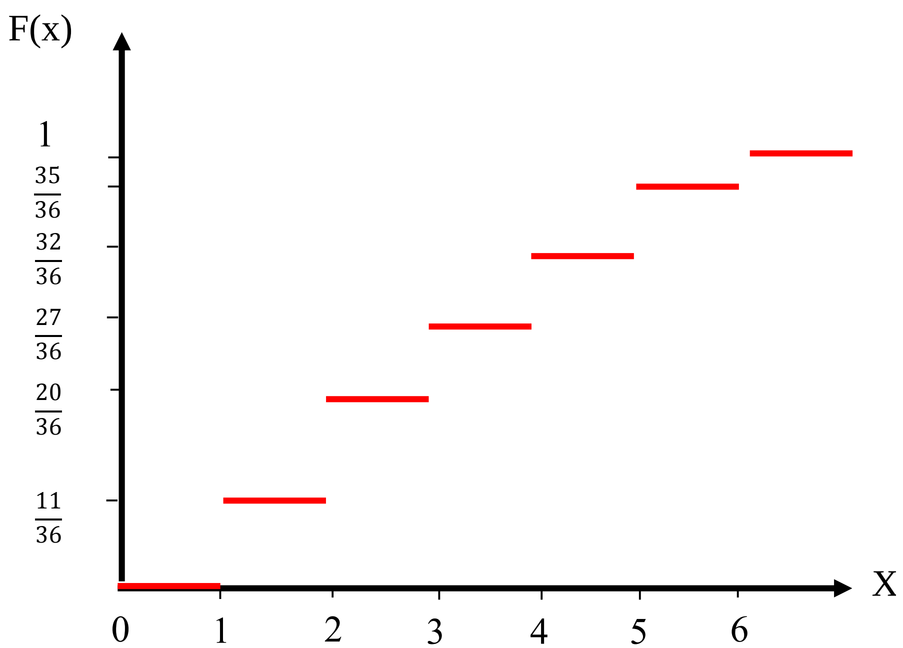
X	1	2	3	4	5	6	$\sum$
P(x)	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36}$

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \frac{11}{36} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{20}{36} & , \quad 2 \leq x < 3 \\ \frac{27}{36} & , \quad 3 \leq x < 4 \\ \frac{32}{36} & , \quad 4 \leq x < 5 \\ \frac{35}{36} & , \quad 5 \leq x < 6 \\ 1 & , \quad x \geq 6 \end{cases}$$

ويمكن وضع دالة التوزيع في الجدول التالي:

X	1	2	3	4	5	6
P(X = xi)	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$
F(x)	$\frac{11}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{32}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

ب-التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية (التراكمية) F(x): التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية F(x) للمتغير العشوائي المنفصل X، عبارة عن منحنى سلمي متصاعد، يتكون من قطع مستقيمة منفصلة موازية للمحور الأفقي (محور السينات) ومتصاعدة بتصاعد الاحتمالات (خاصية تراكم الاحتمالات)، ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالي:



سادسا: التوقع الرياضي والتباين

أ-التوقع الرياضي (الأمل الرياضي): يمثل التوقع الرياضي متوسط التوزيع للمتغير العشوائي، ويرمز له بالرمز $E(X)$ أو μ، ويحسب وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i . f(x_i)$$

من أهم الخصائص الرياضية للتوقع، نذكر ما يلي:

1-إذا كان X متغير عشوائي و k عدد حقيقي فإن :

$$* \ E(kX) = k.E(X) \qquad ** \ E(X+k) = E(X) + k$$
$$*** \ E(k) = k \qquad **** \ E(E(X)) = E(X)$$

2-إذا كانت $X_1 , X_2 ,\ldots\ldots\ldots, X_n$ متغيرات عشوائية معرفة على نفس فضاء العينة E فإن :

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

ب-التباين والانحراف المعياري: يسمح لنا التباين بقياس تشتت المتغير العشوائي المتقطع حول القيمة المتوقعة (المتوسط)، ويرمز له بالرمز V(X) ، ويحسب بالعلاقة التالية :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 . P(X = x_i) - \mu^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 . f(x_i) - \mu^2$$

أو يمكن حسابه بالصيغة التالية:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 . f(x_i) = E[(X-\mu)^2]$$

ويعرف الانحراف المعياري ويرمز له بالرمز σ بأنه الجذر التربيعي لتباين X أي أن : $\sigma_x = \sqrt{V(X)}$

من أهم الخصائص الرياضية للتباين، نذكر ما يلي:

1-إذا كان X متغير عشوائي و k عدد حقيقي فإن :

$$* \ V(kX) = k^2 . V(X) \qquad ** \ V(X+k) = V(X)$$

إذا كان $\sigma_x = \sigma_{x+k}$ وأيضا $\sigma_{k.x} = |k|\sigma_x$

2-إذا كان $Z = X \pm Y$ فإن: $V(Z) = V(X) + V(Y)$

مثال 06: أحسب توقع التوزيع وتباينه وانحرافه المعياري للمثال رقم 02؟

الحل:

X	1	2	3	4	5	6	$\sum$
P(X=xi)	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36}$
$\boldsymbol{x_i . P(X = x_i)}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{91}{36}$
$\boldsymbol{x_i^2 . P(X = x_i)}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{63}{36}$	$\frac{80}{36}$	$\frac{75}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{301}{36}$

1-حساب التوقع الرياضي: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(X = x_i) = \frac{91}{36} = 2.52$

2-حساب التباين:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . P(X = x_i) - \mu^2 = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = 1.97$$

3-حساب الانحراف المعياري: $\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.97} = 1.4$

سابعا: بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1-التوزيع المنتظم:

1-1 التعريف: هو توزيع احتمالي لمتغير عشوائي X يأخذ القيم الممكنة $x_1 , x_2 ,\dots, x_n$ باحتمالات متساوية أي :

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = \cdots = P(X = x_n)$$

من الخاصية $\sum_{\forall x} P(X = x) = 1$ نجد :

$$\sum_{\forall x} P(X = x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_n)$$

$$n\,P(X = x) = 1$$

$$\therefore\ P(X = x) = \frac{1}{n} \qquad ,\forall x = x_1, x_2, \dots, x_n$$

وتكتب على شكل دالة:

$$P(X=x)=f(x)=\frac{1}{n} \quad ,x=x_1,x_2,\dots,x_n$$

2-1 الخصائص العددية للتوزيع المنتظم:

أ-التوقع الرياضي:

$$E(X)=\mu=\frac{n+1}{2}$$

ب-التباين:

$$V(X)=\frac{n^2-1}{12}$$

مثال 07: نرمي زهرة نرد متزنة مرة واحدة، نعرف المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد النقاط التي تظهر.

1-حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ومثله بيانيا؟

2-أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير؟

الحل:

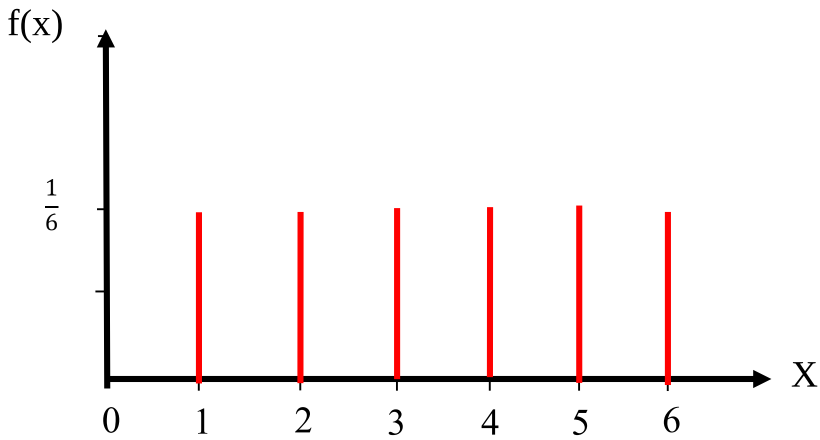
1-المتغير العشوائي X هو متغير منفصل ويتبع التوزيع المنتظم، لأن جميع احتمالاته متساوية.

القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي: x=1,2,3,4,5,6 وتكون دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي :

$$P(X=x)=f(x)=\frac{1}{6} \quad ,x=1,2,3,4,5,6$$

X	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$
$x_i.P(X=x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{21}{6}$

-التمثيل البياني:



1-أ-حساب توقع التوزيع:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(X = x_i) = \frac{21}{6} = \frac{n+1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

1-ب-حساب التباين:

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12} = \frac{36 - 1}{12} = 2.91$$

1-ج-حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.91} = 1.7$$

2-توزيع برنولي:

2-1 التعريف: وهو توزيع منفصل، يكون فيه المتغير العشوائي X يحتمل قيمتين فقط هما X=0 و X=1، أي أن مجموعة الأساس E تحتوي على حادثتين فقط وهي النجاح والذي نرمز له بالرمز p والخسارة أو الفشل والذي نرمز له بـ q=1-p، ونكتب $X \to B(1,p)$ ، ويكون التوزيع الاحتمالي بالشكل التالي :

X	0	1	$\sum$
$P(X=x_i)$	q	p	1

قانون برنولي يعبر على تجربة عشوائية تتكرر مرة واحدة ونعبر بـ: X=1 على النتيجة التي تتوفر فقط الخاصية المدروسة و X=0 إذا لم تتحقق الصفة المدروسة .

2-2 الخصائص العددية لتوزيع برنولي:

أ-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \mu = \sum x_i p_i = 0.q + 1.p = p$$

ب-التباين:

$$V(X) = p(1-p) = p.q$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p.q}$$

مثال 08: نرمي زهرة نرد مرة واحدة، نعرف النجاح بالحصول على العلامة 1 في حالة ظهور أي رقم زوجي.

1- حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يعبر عن النجاح في هذه التجربة العشوائية؟

2- أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير؟

الحل: X: ظهور رقم زوجي، النجاح (ظهور رقم زوجي) : X=1 ، الفشل(ظهور رقم فردي) : X=0

1-تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

بما أن المتغير العشوائي X يحتمل قيمتين فقط (0،1) أو (نجاح وفشل) فهو يتبع توزيع برنولي أي : $X \rightarrow B(1{,}0.5)$ ويكون توزيعه الاحتمالي كالتالي :

X	0	1	$\sum$
$P(X=x_i)$	0.5	0.5	1

2-حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير:

أ-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \mu = p = 0.5$$

ب-التباين:

$$V(X) = p(1-p) = p.q = 0.5 * 0.5 = 0.25$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p.q} = \sqrt{0.25} = 0.25$$

3-توزيع ثنائي الحدين:

3-1 التعريف: يستند هذا التوزيع على تجربة برنولي إذا تكررت n مرة، أي إذا كان احتمال ظهور حدث ما مرة واحدة (النجاح) هو p، واحتمال عدم ظهور الحدث مرة واحدة (الفشل) هو q، فإن احتمال ظهور الحدث (x) مرة من بين الـ n مرة يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = C_x^n p^x q^{n-x}$$
$$X = 0,1,2,...,n \quad p > 0 \ , q < 1 \ , p + q = 1$$

ونكتب : $X \to B(n,p)$

حيث :

n: عدد مرات إجراء التجربة (عدد المحاولات)

p: احتمال وقوع الحدث في أي محاولة (احتمال النجاح)

q: احتمال عدم وقوع الحدث في أي محاولة (احتمال الفشل)

x: عدد مرات وقوع الحدث (عدد مرات النجاح) وهو متغير يأخذ القيم 0,1,2,...,n

وحتى يكون هذا التوزيع احتمالياً، لابد أن يكون:

$$\sum P(x) = \sum C_x^n p^x q^{n-x} = 1$$

ويلاحظ أن هذا التوزيع، هو توزيع منفصل، يستخدم في حالة الأحداث المستقلة، ويتوقف على قيمة الاحتمال، مع الشروط الأربعة التالية:

1- عدد الاختبارات محدود.

2- لكل اختبار نتيجتين فقط: نجاح أو فشل.

3- احتمال النجاح يبقى ثابت في كل الاختبارات.

4- الاختبارات مستقلة عن بعضها البعض.

2-3 الخصائص العددية لتوزيع ثنائي الحدين:

أ-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \mu = \sum x_i p_i = n \,.\, p$$

ب-التباين:

$$V(X) = n \,.\, p.\,(1 - p) = n.\,p.\,q$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.\,p.\,q}$$

وهذه الخصائص يمكن إيجادها مباشرة من المسألة، حتى قبل حساب التوزيع الاحتمالي، كما يستعمل في حالة تقارب النجاح والفشل أي: $p \cong q$ و $n \leq 30$

مثال 09:

إذا كان احتمال الشفاء من أحد الأمراض هو 50 %، إذا أصيب 15 شخص بهذا المرض أحسب احتمالية الشفاء لـ:

1- ثلاثة من المرضى؟

2- عشرة أو أكثر من المرضى؟

الحل:

- عدد حالات الشفاء هو متغير كمي منفصل، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو: X=1,2,3,.....,14,15

يخضع المتغير لتوزيع ثنائي الحدين $p(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$ بالمعلمات التالية: $N = 15,\ p = 0.5\ ,\ q = 1 - 0.5 = 0.5$

شكل دالة التوزيع: $P(X = x) = C_x^{15}\,(0{,}5)^x\,(0{,}5)^{15-x}$

1-احتمال شفاء 3 مرضى:

$$P(X = 3) = C_{15}^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 455 \times 0.125 \times 0.000244 = 0.0138$$

2-احتمال شفاء عشرة مرضى أو أكثر من هذا المرض:

$$\begin{aligned}P(X \geq 10) &= P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13)\\ &\quad + P(X = 14) + P(X = 15)\\ &= \textstyle\sum_{X=10}^{15} C_{15}^X\left(\frac{1}{2}\right)^X\left(\frac{1}{2}\right)^{X-15}\end{aligned}$$

مثال 10: ألقي حجر نرد 7 مرات، نفرض أن النجاح هو الحصول على الرقم 5 أو 6 في أي رمية، أحسب:

1- احتمال الحصول على 5 أو 6 ثلاث مرات بالضبط؟

2- احتمال عدم الحصول على 5 أو 6 في أي مرة؟

3- احتمال الحصول على 5 أو 6 مرة واحدة على الأقل؟

4- أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري؟

الحل: -بما أن احتمال النجاح ثابت في كل المحاولات p = p(5,6) = 1/3، q=1- p=2/3، وبما أنه كذلك عدد المحاولات معلوم : n=7، فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين الذي دالته الاحتمالية :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}) = \mathrm{C}_7^{\mathrm{x}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{x}}\left(\frac{2}{3}\right)^{7-\mathrm{x}} \quad \mathrm{X} = 0,1,2,3,4,5,6,7$$

1-احتمال الحصول على 5 أو 6 ثلاث مرات بالضبط:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 3) = \mathrm{C}_7^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{7-3} = 35 \times 0.037 \times 0.197 = 0.256$$

2-احتمال عدم الحصول على 5 أو 6 في أي مرة:

$$P(X=0)=C_7^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{7-0}=\left(\frac{2}{3}\right)^7=(q)^7=0.0585$$

3-احتمال الحصول على 5 أو 6 مرة واحدة على الأقل:

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=7)=1-P(X=0)$$
$$=1-C_7^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{7-0}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^7=1-(q)^7$$
$$=1-0.0585=0.9414$$

4-حساب:

أ-توقه التوزيع (الوسط الحسابي): $E(X)=n.p=7.\frac{1}{3}=2.33$

ب-التباين: $V(X)=n.p.q=7.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=1.55$

ج-الانحراف المعياري: $\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1.55}=1.24$

4-توزيع بواسون:

4-أ التعريف: هو توزيع منفصل يستخدم في حالة الأحداث المستقلة ويهتم بالحوادث النادرة، مثل: الحرائق في إحدى المدن، الزلازل، الحوادث على إحدى الطرق، الأخطاء المطبعية في إحدى صفحات كتاب، ... الخ. ويعطينا احتمال عدد مرات ظهور هذه الحوادث النادرة.

فإذا كانت (X) ترمز لعدد مرات ظهور حادثة نادرة، فإن الدالة الاحتمالية للتوزيع تكون:

$$P(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\qquad ;\quad x=0,1,2,\ldots\ldots,\infty$$

متوسط التوزيع: $\mu=\lambda$ $\quad e=2.718$ (مقدار ثابت) : ونكتب اختصارا $X\rightarrow P(\lambda)$

ويتحدد هذا التوزيع بمعرفة المتوسط λ. وحتى يكون هذا التوزيع احتماليا، لابد أن يكون:

$$\sum P(x)=\sum\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=1$$

2-4 الخصائص العددية لتوزيع بواسون:

أ-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \mu = \lambda$$

ب-التباين:

$$V(X) = \lambda$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}$$

مثال 11: إذا كان معدل حالات الطوارئ في إحدى المستشفيات هو 5 كل يوم، فما احتمال حدوث حالتي طوارئ في أحد الأيام؟

الحل: بما أن حالات الطوارئ هو حدث نادر واحتمال وقوعه ضعيف جدا، فإن المتغير العشوائي لحالات الطوارئ يتبع توزيع بواسون حيث : $\lambda = 5$ وتكون دالته الاحتمالية كما يلي :

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-5}(5)^{x_i}}{x_i!}$$

- احتمال حدوث حالتي طوارئ في أحد الأيام:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-5}(5)^2}{2!} = 0.084$$

ملاحظة: تجدر الاشارة إلى أن توزيع ذو الحدين يمكن أن يقرب لتوزيع بواسون بحيث تكون $\lambda = np$ وذلك عندما تكون n كبيرة، ويكون p قريب من الصفر (أي أن q=1-p قريب من 1)،بينما [n>30,np<5 or n(1-p)<5] ، وعليه فإننا نعتبر هذا الحدث نادرا، ويكون التوزيع الثنائي قريبا جدا من التوزيع البواسوني الذي يمكن استخدامه كتقريب ممتاز للتوزيع الثنائي.

5-التوزيع الهندسي:

5-1-التعريف: التوزيع الهندسي شبيه بالتوزيع الثنائي من حيث الشروط، حيث يخص الحوادث الخاضعة لتوزيع برنولي مكررة n مرة، إلا أننا لا نهتم بعدد حالات تكرار النجاح أو الفشل في التجربة، بل يتعلق الأمر بأول مرة يتحقق فيها نجاح التجربة بعد عدد من المحاولات.

لنأخذ المثال التالي للتوضيح: نرمي قطعة نقدية إلى أن نحصل على صورة. احتمال أن يتطلب ذلك 5 رميات مثلا هو:

$$P(X= 5) = P(PPPPF)$$

نعود من جديد إلى تجربة برنولي وهذه المرة نكرر التجربة إلى غاية الحصول على النتيجة أو الحدث المطلوب (نجاح مرة واحدة). المتغيرة العشوائية X التي تمثل عدد مرات تكرار التجربة (بما فيها المرة التي حصل فيها النجاح) تتبع التوزيع الهندسي. ونكتب اختصارا $X \to G(\mathrm{p.q})$.

إذا رمزنا لاحتمال النجاح بـــــ p ولاحتمال الفشل بـــــ q فإن احتمال أي قيمة لـ X في حالة التوزيع الهندسي يعبر عنها بدالة الاحتمال كما يلي:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{p.q}^{x-1} \qquad x = 1,2,3, \dots, \infty$$

5-2-الخصائص العددية للتوزيع الهندسي:

أ-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \mu = \frac{1}{P}$$

ب-التباين:

$$V(X) = \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{P}^2}$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{P}^2}}$$

مثال 12:

نرمي زهرة نرد متوازنة إلى غاية الحصول على رقم يقبل القسمة على 2، أحسب احتمال أن يتطلب ذلك 05 رميات؟ ثم أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع؟

الحل:

بما أن التجربة تتكرر عدة مرات وX متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات للحصول على رقم يقبل القسمة على 2، وبما أن عدد المحاولات غير معلوم، واحتمال النجاح ثابت $P = 0.5$ (أي أن احتمال الفشل كذلك ثابت $q= 0.5$)، فإن X يتبع التوزيع الهندسي، وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$P(X = x) = p.q^{x-1} = (0.5)(0.5)^{x-1} \qquad x = 1,2,3,\ldots,\infty$$

1-حساب احتمال أن يتطلب الحصول على رقم يقبل القسمة على 2 خمس رميات:

$$P(X = 5) = (0.5)(0.5)^{5-1} = 0.059049$$

2-حساب:

أ-التوقع الرياضي (الوسط الحسابي):

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.5} = 2$$

ب-التباين:

$$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0.5}{(0.5)^2} = 2$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2} = 1.41$$

مثال 13:

يحتوي صندوق على 3 كرات خضراء و5 كرات حمراء، نقوم بسحب كرة واحدة مع الإعادة من هذا الصندوق فإذا عرفنا المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المحاولات لسحب كرة خضراء.

المطلوب:

1- حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X؟

2- أحسب احتمال أن يتطلب الحصول على كرة خضراء:

أ-خمس محاولات؟ ب-سبع محاولات؟

3- انطلاقا من تحديد قانون التوزيع الخاص بهذا المتغير، أوجد كل من التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1-تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

من شروط التجربة هو سحب كرة واحدة مع تسجيل إن كانت خضراء أم حمراء، وهذه التجربة تشبه تجربة بيرنولي، وبما أن التجربة تتكرر عدة مرات وX متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات لسحب كرة خضراء (هنا عدد المحاولات غير معلوم واحتمال نجاح التجربة ثابت أي احتمال الحصول على كرة خضراء $P(V)=\frac{3}{8}$ بينما احتمال الفشل هو احتمال الحصول على كرة حمراء $P(R)=\frac{5}{8}$ وعليه فإن X يتوزع وفق التوزيع الهندسي، حيث تكون دالته الاحتمالية على النحو التالي :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\mathrm{p.q}^{x-1}=\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^{x-1} \qquad x=1,2,3,\dots,\infty$$

2-حساب احتمال أن يتطلب الحصول على كرة خضراء:

أ-خمس محاولات:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)=\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^{5-1}=0.05722$$

ب-سبع محاولات:

$$P(X = 5) = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^{7-1} = 0.02235$$

3-حساب:

أ-التوقع الرياضي (الوسط الحسابي):

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\left(\frac{3}{8}\right)} = 2.666$$

ب-التباين:

$$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\left(\frac{5}{8}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)^2} = 4.444$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4.44} = 2.1$$

4-التوزيع فوق الهندسي:

1-4 التعريف: عند دراستنا للتوزيع الثنائي يتضح لنا أن عمليات السحب لتكوين العينة كانت تتم مع إعادة العنصر المسحوب إلى المجتمع، وهذا يترتب عنه أمران، يعتبران بمثابة شرطي تطبيق التوزيع الثنائي، هما:

- أن جميع السحبات (أو التجارب) مستقلة عن بعضها البعض.
- أن احتمال النجاح في تجربة واحدة p ثابت.

لكن هناك بعض الحالات لا يمكن أن يتم فيها السحب مع الإعادة (كإجراء فحص حول الإصابة بمرض معين) وهنا يختل شرطا تطبيق التوزيع الثنائي (استقلال التجارب، وثبات p) فنلجأ إلى تطبيق قانون آخر يسمى قانون فوق الهندسي.

وعليه فإن احتمال عدد ما X من النجاحات من بين n تجربة برنولية غير مستقلة يحسب وفق قانون التوزيع الاحتمالي الذي يعرف بفوق الهندسي التالي:

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}.C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}\quad X=0,1,2,3,\dots,n\qquad n=1,2,3,\dots$$

ونكتب اختصارا: $X\rightarrow H(N,N_1,n)$

حيث:

x : يمثل عدد مرات النجاح

N : حجم المجتمع

N_1 : حجم المجتمع الذي تتوفر فيه الخاصية المدروسة

N_2 : حجم المجتمع الذي لا تتوفر فيه الخاصية المدروسة

n : عدد التجارب (حجم العينة).

وبالتالي فإن شروط استخدام قانون توزيع فوق الهندسي هي:

أ- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات n؛

ب-السحب يكون دون إرجاع ودفعة واحدة؛

ج- احتمال النجاح في التجربة غير ثابت (تجارب غير مستقلة).

2-4 الخصائص العددية للتوزيع فوق الهندسي:

أ-التوقع الرياضي:

$$E(X)=\mu=n.\frac{N_1}{N}=n.p$$

ب-التباين:

$$V(X)=n.p.q(\frac{N-n}{N-1})$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})}$$

مثال 14: تتكون لجنة التنظيم في أحد المسابقات الوطنية الجامعية لاختيار أحسن مؤسسة ناشئة من 4 ذكور و7 إناث، سحبنا بصورة عشوائية لجنة مؤلفة من أربعة أشخاص لاختيار أحسن مشروع في النهائيات، نفرض أن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن اختيار الذكور.

المطلوب: 1-أكتب قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي؟

2-أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1-كتابة قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي:

بما أن التجربة برنولية (مكررة 4 مرات)، احتمال النجاح غير ثابت (التجارب غير مستقلة)، فإن المتغير X (عدد الذكور في اللجنة) يتبع التوزيع فوق الهندسي بالمعلمات: $X \to H(11{,}4{,}4)$ وتكون دالته الاحتمالية كالتالي :

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}.\,C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}=\frac{C_4^x.\,C_7^{4-x}}{C_{11}^4} \qquad X=0{,}1{,}2{,}3{,}4 \qquad n=4$$

$$P(X=0)=\frac{C_4^0.\,C_7^{4-0}}{C_{11}^4}=0.106 \quad ,P(X=1)=\frac{C_4^1.\,C_7^{4-1}}{C_{11}^4}=0.424 \quad ,P(X=2)=\frac{C_4^0.\,C_7^{4-2}}{C_{11}^4}=0.38$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3.\,C_7^{4-3}}{C_{11}^4}=0.0848 \quad ,P(X=4)=\frac{C_4^4.\,C_7^{4-4}}{C_{11}^4}=0.003$$

ويمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الجدول التالي:

X	0	1	2	3	4	$\sum$
P(x)	0.106	0.424	0.38	0.0848	0.03	1

2-حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري:

أ-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \mu = n.\frac{N_1}{N} = n.p = 4.\frac{4}{11} = \frac{16}{11} = 1.45$$

ب-التباين:

$$V(X) = n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 4.\frac{4}{11}.\frac{7}{11}\left(\frac{11-4}{11-1}\right) = 0.64$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})} = \sqrt{0.64} = 0.8$$

3-تقريب التوزيع فوق الهندسي من توزيع ثنائي الحدين:

إذا كان حجم العينة n صغير جدا مقارنة بحجم المجتمع N، فإن معامل الشمولية $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ يؤول إلى الواحد، وتصبح قيمة التباين لهذا التوزيع تساوي قيمة التباين التي توصلنا إليها من قانون ثنائي الحدين، وبالتالي كقاعدة عامة، إذا كان $\left(\frac{n}{N} \leq 0.05\right)$ فإننا نقرب توزيع فوق الهندسي من التوزيع ثنائي الحدين، أي نستخدم قانون ثنائي الحدين لحساب الاحتمالات بدل قانون فوق الهندسي، أي :

$$X \to H(N, N_1, n) \longrightarrow X \to B(n,p)$$

مثال 15: صندوق به 100 كرية منها 60 بيضاء و40 حمراء، نسحب بدون إرجاع 3 كريات، أحسب احتمال الحصول على كريتين بيضاوين ؟

الحل : القانون الأصلي هو قانون فوق الهندسي ،$X \to H(100,60,3)$

لدينا : $\left(\frac{n}{N} = \frac{3}{100} = 0.03 \leq 0.05\right)$ وبالتالي نقرب قانون فوق الهندسي من قانون ثنائي الحدين أي : $X \to B(3,0.6)$

$$P(X=2) = C_3^2(0.6)^2(0.4)^1 = 0.432$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

صـــنعـت قطعـة نقود بحيـث كـان $(H) = \frac{3}{4}$ و $P(T) = \frac{1}{4}$، ألقيـت هـذه القطعـة ثلاث مرات، نفرض أن X هو المتغير العشـــوائي الـذي يـدل على عدد الصور المتتالية في أطول متتابعة حدثت من الصور .

1- أكتب قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي؟

2- أحسب احتمال: أ-عدم الحصول على أي صورة؟ **ب**-الحصول على صورتين على الأقل متتاليتين؟

3- عين دالة التوزيع الاحتمالية F(X)، ومثلها بيانيا ؟

4- أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري؟

التمرين الثاني:

ناد علمي يتكون من 10 أعضـاء، منهم 6 رجال و4 نسـاء، نريد أن نختار من بينهم عن طريق القرعة 3 أفراد للمشـــاركة في ندوة علمية، ليكن المتغير X: عدد النساء ضمن الوفد المشارك في هذه الندوة.

1- ما هي طبيعة ونوع هذا المتغير؟ علل ذلك؟

2- عين التوزيع الاحتمـالي لهـذا المتغير؟ تـأكـد أنـه فعلا توزيع احتمـالي؟ مثلـه بيانيا؟

3- عين دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$؟ مثلها بيانيا؟

4- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري؟ اشرح النتيجتين؟

5- أحســـب احتمـال أن يكون الوفـد: مشـــكلا من الرجـال فقط؟ مشـــكلا من النساء فقط؟ يضم على الأقل رجلين؟ يضم على الأكثر امرأتين؟

التمرين الثالث:

أجريت دراسة على مئة مصاب تناولوا دواء لمرض أصابهم، وكانت نتائج احتمال الشفاء في خمسة أشهر كما يلي:

الأشهر X	1	2	3	4	5
الاحتمال	0,5 K	0,5 K	K	K	2 K

1- حدد قيمة K حتى يكون التوزيع احتماليا.

2- أحسب احتمال:

$$P(1 \leq X \leq 3), P(1 < X < 3) \quad , P(X \leq 4), P(X > 2)$$

3- ما هي مدة تناول هذا الدواء التي ينصح بها الأطباء حتى يتم الشفاء وبكم يمكن أن تزيد أو تنقص؟

التمرين الرابع:

احتمال المتغير العشوائي X الممثل لعدد الأطفال في العائلة الواحدة معطى كما يلي :

$$P(X) = C\,X \quad , x = 3,4,5,6$$

1- أوجد قيمة الثابت C حتى يكون التوزيع احتماليا؟

2- ما هو احتمال وجود ثلاثة أطفال في العائلة الواحدة على الأقل، أربعة على الأكثر؟

3- أحسب التوقع والتباين (حساب مباشر)؟

التمرين الخامس:

نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام نوع معين من العقاقير الطبية هي: 0,6، تناول هذا العقار 5 مصابين، إذا عرُف المتغير العشوائي X بأنه عدد (المستجيبين) حالات الشفاء (لهذا الدواء):

1- ما هو نوع المتغير؟

2- اكتب شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير.f (x)

3- أحسب الاحتمالات التالية: أ-ما احتمال استجابة 3 مرضى لهذا العقار؟ **ب**-ما هو احتمال استجابة مريض واحد على الأقل؟ **جـ**-ما هو احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر؟

4- أحسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الشفاء؟

التمرين السادس:

نفرض أن هناك 300 خطأ مطبعيا موزعة على صفحات كتاب به 500 صفحة،

1- أوجد الاحتمالات التالية: أ – أن لا تحتوي صفحة معينة على أية خطأ؟

ب-أن تحتوي صفحة معينة على خطأ بالضبط؟ **جـ**-أن تحتوي صفحة معينة على خطأين أو أكثر؟

2- أحسب المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع؟

التمرين السابع:

توضح الخبرة الماضية أن **1%** من مصابيح الكهرباء المنتجة في مصنع ما هي مصابيح معيبة. في عينة من **30** مصباح، أوجد احتمال وجود أكثر من مصباح معيب باستخدام (أ) توزيع ذو الحدين (ب) توزيع بواسون كتقريب لذو الحدين.

التمرين الثامن:

معرض سيارات به 48 سيارة من بينها 8 سيارات معيبة، اختيرت عينة عشوائية من 5 سيارات، أوجد:

1- دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي الذي يهتم بالسيارات المعيبة؟

2- احتمال أن تكون العينة كلها سليمة؟

3- أحتمال أن تكون سيارة واحدة معيبة؟

4- احتمال أن توجد بها سيارتان معيبتان على الأقل؟

5- التوقع والانحراف المعياري لهذا التوزيع؟

التمرين التاسع:

ليكن لدينا المتغير العشوائي X يأخذ القيم التالية: 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 احتمالاتها على الترتيب: $\frac{2}{\alpha}$، $\frac{4}{\alpha}$، $\frac{6}{\alpha}$، $\frac{8}{\alpha}$، $\frac{6}{\alpha}$، $\frac{4}{\alpha}$، $\frac{2}{\alpha}$

في الجدول عين قيمة الثابت α حتى يكون التوزيع توزيع احتمالي، ثم أكمل الجدول.

الإجابة								
$\Rightarrow \alpha = ...$								
X_i	1	2	3	4	5	6	7	Σ
$P(Xi)$	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$P(X < 3)$	....							
$P(1 < X \leq 4)$	....							
$Xi \times P(x)$	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$Xi^2 \times P(Xi)$	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$V(x) =$								

التمرين العاشر:

ليكن لدينا X متغير عشوائي، معرف بالقانون الاحتمالي التالي:

$$\boldsymbol{P(X = x) = C_5^x p^x q^{5-x}}$$

1- ما هو نوع المتغير العشوائي X؟ وما هو القانون الاحتمالي الذي يتبعه؟

2- إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد المصابيح المعيبة في مصنع معين، وأن نسبة المصابيح الصالحة بالمصنع يقدر بـ 60%.

أ- حدد معالم هذا المتغير.

ب-أحسب الاحتمالين التاليين: $P(X > 3)$ ، $P(X \leq 1)$

ج- أحسب قيمة كلا من: التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري

د- إذا كان 3% من المصابيح المنتجة في مصنع آخر معيبة، وسحبنا 100 مصباحا من الإنتاج الكلي للمصنع، فما احتمال أن يكون بها وحدتان تالفتان؟

التمرين الحادي عشر:

تشـــير الخبرة الســـابقة لأحد اللاعبين أنه يفوز في ســـتة من عشـــرة من المباريات التي يلعبها، في كل دور يلعب خمســـة مباريات، يتأهل إذا فاز في أكثر من ثلاثة مباريات:

1- ما هو قانون التوزيع للمتغير العشوائي؟

2- ما هو عدد المباريات المتوقع أن يفوز بها (التوقع الرياضي)؟

3- ما احتمال أن يفوز في كل المباريات؟

4- ما احتمال أن يخسر في كل المباريات؟

5- ما احتمال أن يتأهل اللاعب: يتأهل اللاعب إذا فاز في أكثر من ثلاثة مباريات؟

6- ما احتمال أن يقصـــى اللاعب: لا يتأهل اللاعب إذا خســـر في أقل من ثلاثة مباريات؟

التمرين الثاني عشر:

التوزيع الاحتمالي لعدد زبائن فندق ما، موضح في الجدول التالي:

125	**120**	**118**	**110**	**100**	**.X**
0,1	0,2	0,2	0,3	0,2	$.P(X = x_i)$

المطلوب:

1- تأكد أن هذا الجدول يمثل جدول توزيع احتمالي.

2- مثل بيانيا هذا التوزيع بواسطة الأعمدة.

3- أحسب كلا من التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

4- أحسب احتمال أن يكون عدد زبائن الفندق:

أ-يفوق 118. **ب**-يتراوح ما بين 110 و125 بما في ذلك 110. ج-على الأكثر 110.

التمرين الثالث عشر:

ليكن لدينا X متغير عشوائي، معرف بالقانون الاحتمالي التالي:

$$\boldsymbol{P(X = x) = \frac{4^x}{x!} e^{-4}}$$

المطلوب:

1- ما هو نوع المتغير العشوائي X؟ وما هو القانون الاحتمالي الذي يتبعه؟

2- إذا كان المتغير العشوائي X المعرف بالقانون الاحتمالي السابق، يمثل عدد مرات تعطل آلة صناعية في مصنع معين خلال سنة.

أ- حدد معلمة هذا المتغير.

ب-أحسب الاحتمالين التاليين: $P(X > 1)$ ، $P(2 \leq X < 4)$.

ج- أحسب قيمة كلا من: التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

3- إذا كان 80% من منتجات هذه الآلة سليما، وسحبنا 7 وحدات من الإنتاج الكلي لهذه الآلة.

أ- ما احتمال أن يكون بها ثلاث وحدات معيبة.

ب-أحسب العدد المتوقع للوحدات المعيبة، والانحراف المعياري.

التمرين الرابع عشر:

خلال الأزمة الصحية العالمية (كوفيد 19) كانت نسبة الشفاء باستخدام حزمة العقاقير المقدمة في المستشفيات هي 0,7، أصيب 10 أشخاص بالفيروس في إحدى العائلات الجزائرية:

1- ما هو قانون التوزيع الاحتمالي الذي يتبعه المتغير العشوائي المعبر عن عدد حالات الشفاء. أكتب صيغته.

2- أحسب الاحتمالات التالية:

أ- شفاء مريض واحد على الأكثر.

ب-شفاء مريضين.

ج- شفاء ثلاثة مرضى على الأقل.

3- أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد حالات الشفاء.

4- بعد انتشـــار المرض في أنحاء العالم قامت عدة مخابر عالمية بإنتاج أنواع مختلفة من اللقاحات، فكان من بين 1000 شخص ملقح يصاب 10 أشخاص، فإذا استخدم اللقاح 500 شخص في أحد المدن الجزائرية، أحسب ما يلي:

أ- احتمال أن لا يصاب أي شخص ملقح.

ب-احتمال أن يصاب شخصين ملقحين.

الحلـــــول

حل التمرين الأول:

المتغير العشـوائي X معرف على فضـاء العينة E، الذي يمثل الفضـاء العيني لرمي قطعة نقود ثلاث مرات، فيكون :

$E = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \Rightarrow |E| = 8$

1-كتابة قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي X:

ولدينا: $P(H) = \frac{3}{4}$ و $P(T) = \frac{1}{4}$ ، والمتغير العشــوائي X الذي يمثل عدد الصـــور المتتالية، فتكون الاحتمالات الممكنة لكل حالة من حالات فضـــاء العينة، وقيم المتغير العشوائي X ملخصة في الجدول التالي :

عناصر الفضاء العيني	الاحتمالات المقابلة لحالات فضاء العينة	قيمة X
HHH	$P(HHH) = \frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4} = \frac{27}{64}$	3
HHT	$P(HHT) = \frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{9}{64}$	2
HTH	$P(HTH) = \frac{3}{4}.\frac{1}{4}.\frac{3}{4} = \frac{9}{64}$	1
HTT	$P(HTT) = \frac{3}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{3}{64}$	1
THH	$P(THH) = \frac{1}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4} = \frac{9}{64}$	2
THT	$P(THT) = \frac{1}{4}.\frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{3}{64}$	1
TTH	$P(TTH) = \frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{3}{4} = \frac{3}{64}$	1
TTT	$P(TTT) = \frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{64}$	0

إذا قيم المتغير العشـــوائي الممكنـة هي: $X = \{0,1,2,3\}$ وبـالتـالي

فإن الاحتمالات الممكنة لقيم المتغير العشوائي تكون كالتالي :

$$P(X = 0) = P(TTT) = \frac{1}{64}$$

$$P(X = 1) = P(HTH) + P(HTT) + P(THT) + P(TTH) = \frac{18}{64}$$

$$P(X = 2) = P(HHT) + P(THH) = \frac{18}{64}$$

$$P(X = 3) = P(HHH) = \frac{27}{64}$$

ومنه التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو:

$;X$	0	1	2	3	$;\sum P(X = x_i)$
$:P(X = x_i)$	$:\frac{1}{64}$	$:\frac{18}{64}$	$:\frac{18}{64}$	$::\frac{27}{64}$	1

2-حساب احتمال:

أ-عدم الحصول على أية صورة:

$$P(X = 0) = \frac{1}{64}$$

ب-الحصول على صورتين على الأقل متتاليتين:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{18}{64} + \frac{27}{64} = \frac{45}{64}$$

3-تعيين دالة التوزيع الاحتمالية $\boldsymbol{F(X)}$، وتمثيلها بيانيا :

أ-تعيين دالة التوزيع الاحتمالية $\boldsymbol{F(X)}$:

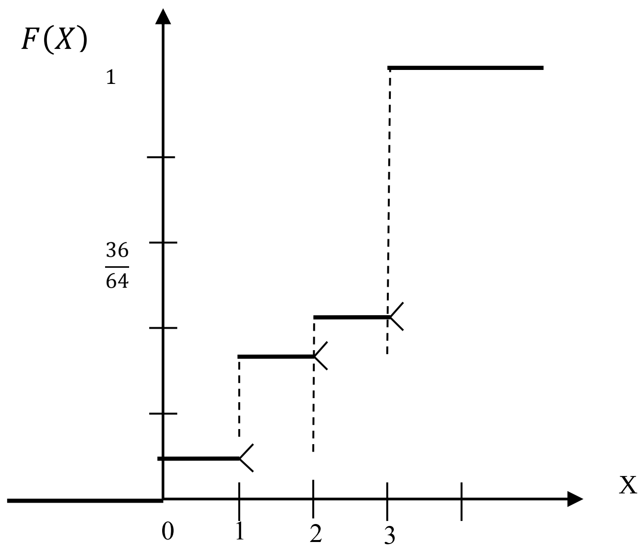
لدينا:

$F(X) = P(X \leq x_i) = \sum_{X=x_1}^{X=x} P(X = x_i) = \sum_{X=x_1}^{X=x} f(x_i)$ وبالتالي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{64} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{19}{64} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{35}{64} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

; X	**0**	**1**	**2**	**3**
:$\boldsymbol{F(X)}$	: $\frac{1}{64}$	: $\frac{19}{64}$	: $\frac{35}{64}$	: : $\frac{64}{64}$

ب-التمثيل البياني: بواسطة المنحنى السلمي



4-حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري:

; X	**0**	**1**	**2**	**3**	;$\sum P(X=x_i)$
:$\boldsymbol{P(X=x_i)}$	: $\frac{1}{64}$	: $\frac{18}{64}$	: $\frac{18}{64}$	: : $\frac{27}{64}$	1
$\boldsymbol{x_i.P(X=x_i)}$	00	: $\frac{18}{64}$	: $\frac{36}{64}$	: : $\frac{81}{64}$	$\frac{135}{64}$
$\boldsymbol{x_i{}^2.P(X=x_i)}$	00	: $\frac{18}{64}$	: $\frac{72}{64}$	: : $\frac{243}{64}$	$\frac{333}{64}$

أ-حساب التوقع الرياضي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i.P(X=x_i)=\frac{135}{64}=2.1$$

ب-حساب التباين:

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2.P(X=x_i)-\mu^2=\frac{333}{64}-\left(\frac{135}{64}\right)^2=0.75$$

ج-حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.75} = 0.86$$

حل التمرين الثاني:

ناد علمي يتكون من 10 أعضـاء، منهم 6 رجال و4 نسـاء، نريد أن نختار من بينهم عن طريق القرعة 3 أفراد للمشـاركة في ندوة علمية، ليكن المتغير X : عدد النساء ضمن الوفد المشارك في هذه الندوة.

1-طبيعة ونوع هذا المتغير، مع التعليل:

أ-طبيعة المتغير: عشوائي **لأن** السحب يكون عن طريق القرعة (بشكل عشوائي) وبالتالي لا نعرف مسبقا أعضاء هذا الوفد.

ب-نوع المتغير: عشوائي متقطع **لأن** عدد النساء غير قابل للتجزئة.

2-تعيين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير ثم التأكد أنه فعلا توزيع احتمالي، وتمثيله بيانيا:

أ-تعيين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير ثم التأكد أنه فعلا توزيع احتمالي:

X: يمثل عدد النساء ضمن الوفد، أي أن مجموعة تعريف المتغير العشوائي X هي: $X \in \Omega_X = [0,1,2,3]$

وبالتالي:

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 . C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} \quad ، \quad P(X=1) = \frac{C_4^1 . C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 . C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} \quad ، \quad P(X=3) = \frac{C_4^3 . C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4}{120}$$

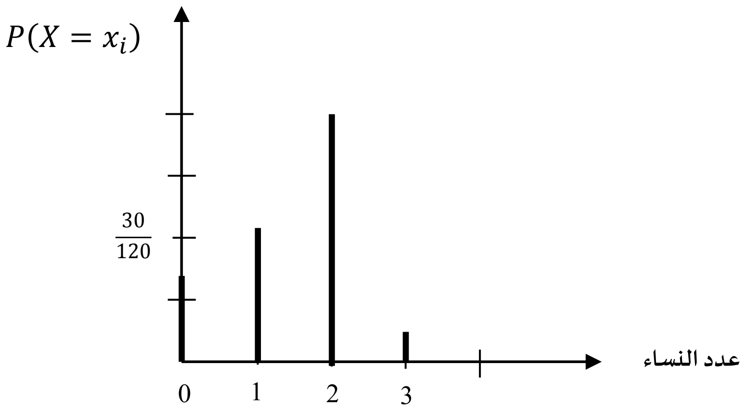
ومنه التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو:

$;X$	0	1	2	3	$;\sum P(X=x_i)$
$:P(X=x_i)$	$:\frac{20}{120}$	$:\frac{60}{120}$	$:\frac{36}{120}$	$:\frac{4}{120}$	1

-بما أن الشرطين: $P(X=x_i) \geq 0$ و$\sum P(X=x_i) = 1$ محققين فإن: هذا التوزيع هو فعلا توزيع احتمالي.

ب-التمثيل البياني: بما أن المتغير العشــوائي من النوع المتقطع فإنه يمثل بواسطة الأعمدة البسيطة.

-3



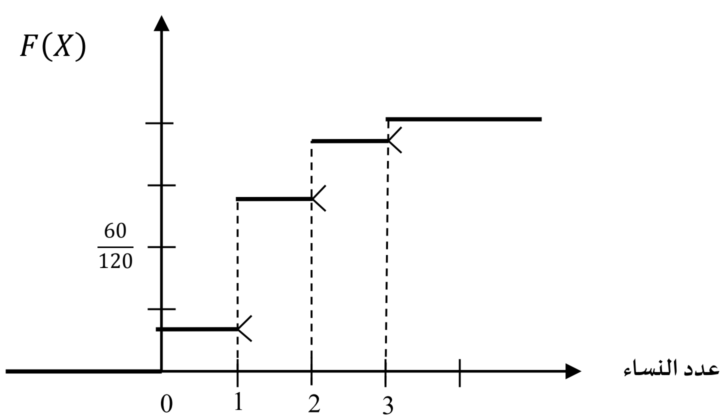
تعيين دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$، ومثلها بيانيا:

أ-تعيين دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$:

لدينا: $F(X) = P(X \leq x_i)$ وبالتالي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{20}{120} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{80}{120} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{116}{120} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

ب-التمثيل البياني: بواسطة المنحنى السلمي



4-حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري، مع شرح النتيجتين:

أ-حساب الأمل الرياضي:

$;X$	0	1	2	3	$;\sum P(X=x_i)$
$:P(X=x_i)$	$:\frac{20}{120}$	$:\frac{60}{120}$	$:\frac{36}{120}$	$:\frac{4}{120}$	1
$x_i.P(X=x_i)$	$:0$	$:\frac{60}{120}$	$:\frac{72}{120}$	$:\frac{12}{120}$	$1,2$
$x_i^2.P(X=x_i)$	$:0$	$:\frac{60}{120}$	$:\frac{144}{120}$	$:\frac{36}{120}$	2

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4} P_i x_i = 1,2$$

الشرح: متوسط عدد النساء في الوفد الواحد هو امرأة واحدة تقريبا.

ب-الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{m_2-m_1^2}=\sqrt{E(X^2)-\left(E(X)\right)^2}=\sqrt{2-(1,2)^2}=0,75$$

الشرح: متوسط تشتت عدد النساء ضمن 120 وفد هو إمراه واحدة تقريبا.

5-حساب احتمال أن يكون الوفد:

أ-مشكلا من الرجال فقط A: $P(A)=\frac{{}^{0}_{4}.C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}$

ب-مشكلا من النساء فقط B: $P(B)=\frac{C_4^3.C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}$

ج-يضم على الأقل رجلين C: $P(C)=\frac{C_4^1.C_6^2+C_4^0.C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{80}{120}$

د-يضم على الأكثر امرأتين D: $P(D)=\frac{C_4^2.C_6^1+C_4^1.C_6^2+C_4^0.C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{116}{120}$

حل التمرين الثالث:

5	4	3	2	1	الأشهر X
2 K	K	K	0,5 K	0,5 K	الاحتمال

1-تحدد قيمة K حتى يكون التوزيع احتماليا:

حتى يكون التوزيع احتماليا يجب أن يكون: $\sum p(x) = 1$ ومنه:

$$\sum P(X) = 0{,}5K + 0{,}5K + K + K + 2K = 1$$

$$\Rightarrow 5K = 1 \Rightarrow K = 1/5$$

2-حساب الاحتمالات:

لغرض حساب مختلف الاحتمالات نضع الجدول التالي:

X	1	2	3	4	5	$\sum$
$P(X=x)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4	1

1- $P(X>2) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}8$

2- $P(X \le 2) = P(X=4) + P(X=3) + P(X=2) + P(X=2) = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}6$

3- $P(1 < X < 3) = P(X=2) = 0{,}1$

4- $P(1 \le X \le 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}4$

3-مدة تناول هذا الدواء التي ينصح بها الأطباء حتى يتم الشفاء وبكم يمكن أن تزيد أو تنقص: نحسب التوقع والانحراف المعياري من خلال الجدول التالي:

X	1	2	3	4	5	$\sum$
$P(X=x)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4	1
$x.P(x)$	0,1	0,2	0,6	0,8	2,0	3,7
$x^2.P(x)$	0,1	0,4	1,8	3,2	10	15,5

$\mu = E(X) = \sum xP(x) = 3{,}7$

$\sigma^2 = V(X) = \sum x^2 P(x) - \mu^2 = 15{,}5 - (3{,}7)^2 = 1{,}5 - 1 = 1{,}81 \Rightarrow \sqrt{V(x)} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1{,}81} = 1{,}34$

المدة المتوقعة 3 أشهر و21 يوم $(0.7 \times 30 = 21)$ يمكن أن تزيد أو تنقص بشهر و10 أيام $(0.34 \times 30 \approx 10)$.

حل التمرين الرابع:

احتمال المتغير العشـــوائي X الممثل لعدد الأطفال في العائلة الواحدة معطى كما يلي : $P(X) = C\,X \quad , x = 3,4,5,6$

1-إيجاد قيمة الثابت C حتى يكون التوزيع احتماليا:

حتى يكون التوزيع احتماليا يجب أن يكون: $\sum P(x) = 1$ إذن:

$$\sum P(X) = \sum C\,X = 1 \quad , x = 3,4,5,6$$

$$\therefore \sum C\,X = C\sum X = \quad , x = 3,4,5,6$$

$$\therefore \sum C\,X = C(3+4+5+6) = 1 \Rightarrow 18C = 1 \Rightarrow C = 1/18$$

2-احتمال وجود ثلاثة أطفال في العائلة الواحدة على الأقل، أربعة على الأكثر:

لغرض حساب مختلف الاحتمالات نضع الجدول التالي:

X	3	4	5	6	$\sum$
$P(X = x)$	3/18	4/18	5/18	6/18	18/18

أ-احتمال وجود ثلاثة أطفال في العائلة الواحدة على الأقل:

$$P(X \geq 3) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 4/18 + 5/18 + 6/18 = 15/18$$

ب-احتمال وجود أربعة أطفال في العائلة الواحدة على الأكثر:

$$P(X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4) = 3/18 + 4/18 = 7/18$$

3-حساب التوقع والتباين:

أ-التوقع:

$$\mu = E(X) = \sum xP(x) = \sum x \times Cx = C\sum x^2 = \frac{1}{18}(3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{86}{18} = \frac{43}{9}$$

ب-التباين: $\sigma^2 = V(X) = \sum x^2 P(x) - \mu^2$

$$\sum x^2 P(x) = \sum x^2 \times C\,x = C\sum x^3 = \frac{1}{18}(3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3) = \frac{432}{18} = \frac{216}{9}$$

$$\sigma^2 = \sum x^2 P(x) - \mu^2 = \frac{416}{9} - (\frac{43}{9})^2 = \frac{1944-1849}{81} = \frac{95}{81} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{95}{81}} = \frac{\sqrt{95}}{9}$$

الانحراف المعياري:

حل التمرين الخامس:

1- عدد حالات الاســتجابة **x متغير عشــوائي منفصــل**، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو: $X = \{x = 0,1,2,3,4,5\}$

2- شكل دالة التوزيع:

$$P(X = x) = C_x^n \ p^X \ q^{n-x} \quad : n = 5 \ , p = 0,6 \quad q = 1 - 0,6 = 0,4$$

أي: $P(X = x) = C_x^5 \ (0,6)^X \ (0,4)^{5-x} \quad x = 0,1,2,3,4,5$

3- حساب احتمال شفاء:

3-أ-ثلاثة مرضى:

$$P(X = 3) = C_3^5 \ (0,6)^3 \ (0,4)^{5-3} = \frac{5!}{(5-3)!3!}(0,6)^3 \ (0,4)^{5-3} = 0,3456$$

3-ب-مريض على الأقل: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - \left[C_0^5 \ (0,6)^0 \ (0,4)^{5-0}\right] = 1 - \left[1(1) \ \ (0,0102) \ \right] = 0,9897$$

3.ج-مريضين على الأكثر:

$$P(x \geq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(x \geq 2) = C_0^5 \ (0,6)^0 \ (0,4)^{5-0} + C_1^5 \ (0,6)^1 \ (0,4)^{5-1} + C_2^5 \ (0,6)^2 \ (0,4)^{5-2} = 0,3174$$

4- حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الشفاء:

الوسط الحسابي: $E(X) = n \times p = 5 \times 0,6 = 3$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{5 \times 0,6 \times 0,4} = 1,095$

حل التمرين السادس:

سـوف ننظر إلى عدد الأخطاء في الصـفحة على أنه عدد مرات النجاح في متتابعة من تجارب برنولي، في هذا المثال n=300 حيث أنه يوجد 300 خطأ مطبعي و $p = \frac{1}{500}$ هو احتمال أن يظهر خطأ في الصـفحة المعينة، حيث أن p صـغيرة فسـوف نسـتعمل تقريب بواسـون للتوزيع ذي الحدين ويكون $\lambda = np = 300.\frac{1}{500} = 0.6$. وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-0.6}0.6^x}{x!}$$

1-حساب الاحتمالات التالية:

أ-أن لا تحتوي أية صفحة معينة على خطأ:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-0.6}0.6^0}{0!} = 0.549$$

ب-أن تحتوي صفحة معينة على خطأ بالضبط:

$$P(X = 1) = \frac{e^{-0.6}0.6^1}{1!} = 0.329$$

ج-أن تحتوي صفحة معينة على خطأين أو أكثر:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$
$$= 1 - [0.549 + 0.329] = 0.122$$

2-حساب المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع:

أ-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \lambda = 0.6$$

ب-التباين:

$$V(X) = \lambda = 0.6$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{0.6} = 0.77$$

حل التمرين السابع:

1-أ-حســـاب احتمـال وجود أكثر من مصـــباح معيب باســـتخدام توزيع ذو الحدين:

بما أن عدد المحاولات معلوم (n=30) ، واحتمال النجاح ثابت في كل تجربة (p=0.01) (التجارب مســتقلة) فإن المتغير العشـــوائي X يتبع توزيع ذو الحدين الذي دالته الاحتمالية :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\mathrm{C}_{30}^{\mathrm{x}}(0.01)^{\mathrm{x}}(0.99)^{30-\mathrm{x}} \qquad \mathrm{X}=0,1,2,3,..,30$$

$$P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=30)$$

$$P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$$

$$P(X>1)=1-[\mathrm{C}_{30}^{0}(0.01)^{0}(0.99)^{30-0}+\mathrm{C}_{30}^{1}(0.01)^{1}(0.99)^{30-1}]$$

$$=1-(0.7397+0.2241)$$

$$=0.0361$$

1-ب-حســـاب احتمـال وجود أكثر من مصـــباح معيب باســـتخدام توزيع بواسون:

بما أن p صـــغيرة فيمكن أن نســـتعمل تقريب بواســـون للتوزيع ذي الحـدين ويكون $\lambda=\mathrm{np}=30*0.01=0.3$. وتكون الـدالـة الاحتمـاليـة لهذا التوزيع على النحو التالي:

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-0.3}0.3^{x}}{x!}$$

$$P(X=1)=\frac{e^{-0.3}0.3^{1}}{1!}=(2.3)(0.74082)=0.222246$$

$$P(X=0)=\frac{e^{-0.3}0.3^{0}}{0!}=e^{-0.3}=0.74082$$

$$P(X\leq 1)=P(X=1)+P(X=0)=0.222246+0.74082=0.963066$$

$$P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-0.963066=0.036934,\ \text{or } 3.69\%$$

2-الاســـتنتـاج: يمكن تقريب توزيع ثنـائي الحـدين من توزيع بواســـون، وذلـك عندما تكون p صـــغيرة و n كبيرة، وعموما نقوم بالتقرب إذا تحقق: $p\leq 0,05$ و $n\geq 30$.

حل التمرين الثامن:

1-إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشـــوائي الذي يهتم بالســـيارات المعيبة:

بما أن التجربة برنولية (مكررة 5 مرات)، احتمال النجاح غير ثابت (التجارب غير مستقلة)، فإن المتغير X (عدد السيارات المعيبة في العينة) يتبع التوزيع فوق الهندسي بالمعلمات: $X \to H(48,8,5)$ وتكون دالته الاحتمالية كالتالي :

$$f(x) = \frac{C_{N_1}^{x}.\,C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} = \frac{C_8^x.\,C_{40}^{5-x}}{C_{48}^5} \qquad X = 0,1,2,3,4,5 \qquad n = 5$$

2-حساب احتمال أن تكون العينة كلها سليمة:

$$P(X = 0) = \frac{C_8^0.\,C_{40}^{40-0}}{C_{48}^5} = 0.38$$

3-حساب احتمال أن تكون سيارة واحدة معيبة:

$$P(X = 1) = \frac{C_8^1.\,C_{40}^{40-1}}{C_{48}^5} = 0.427$$

4-حساب احتمال أن توجد بها سيارتان معيبتان على الأقل:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$
$$= 1 - (0.38 + 0.427) = 0.193$$

5-حساب التوقع والانحراف المعياري لهذا التوزيع:

أ-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \mu = n.\frac{N_1}{N} = n.p = 5.\frac{8}{48} = \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$$

ب-التباين:

$$V(X) = n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 5.\frac{8}{48}.\frac{40}{48}\left(\frac{48-5}{48-1}\right) = 0.64$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})} = \sqrt{0.64} = 0.8$$

حل التمرين التاسع:

الاجابة								
$\sum P(Xi)=1 \Rightarrow \frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\alpha}+\frac{6}{\alpha}+\frac{8}{\alpha}+\frac{6}{\alpha}+\frac{4}{\alpha}+\frac{2}{\alpha}=1 \Rightarrow \frac{32}{\alpha}=1 \Rightarrow \alpha=32$								
Xi	1	2	3	4	5	6	7	Σ
$P(Xi)$	2/32	4/32	6/32	8/32	6/32	4/32	2/32	32/32
$P(X<3)$	$P(X<3)=P(X=1)+P(X=2)=2/32+4/32=6/32$							
$P(1<X\le 4)$	$P(1<X\le 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=4/32+6/32+8/32=18/32$							
$Xi\times P(x)$	2/32	8/32	18/32	32/32	30/32	24/32	14/32	128/32=4
$Xi^2\times P(Xi)$	2/32	16/32	54/32	128/32	150/32	144/32	98/32	592/32=18,5
$V(x)=E(X^2)-E(X)^2=18{,}5-(4)^2=18{,}5-16=2{,}5 \Rightarrow \sqrt{V(x)}=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{2{,}5}=1{,}58$								

حل التمرين العاشر:

ليكن لدينا X متغير عشوائي، معرف بالقانون الاحتمالي التالي:

$$\boldsymbol{P(X=x)=C_5^x p^x q^{5-x}}$$

1-نوع المتغير العشوائي X: متغير عشوائي منفصل

- القانون الاحتمالي الذي يتبعه: قانون ثنائي الحدين أي: $X \to B(5\ ;\ p)$

2-إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد المصابيح المعيبة في مصنع معين، وأن نسبة المصابيح الصالحة بالمصنع يقدر بـ 60%.

أ-تحديد معالم هذا المتغير:

- بما أن القانون الاحتمالي الذي يتبعه المتغير العشوائي X هو قانون ثنائي الحدين، فإن لديه معلمتين هما: $n=5$ و $p=0{,}4$ وبالتالي:

$$X \to B(5\ ;\ 0{,}4)$$

ب-حساب الاحتمالين التاليين: $P(X>3)$ ، $P(X\leq 1)$

$$P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)=C_5^4(0{,}4)^4(0{,}6)^1+C_5^5(0{,}4)^5(0{,}6)^0$$
$$=0{,}0768+0{,}01024=0{,}087$$
$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=C_5^0(0{,}4)^0(0{,}6)^5+C_5^1(0{,}4)^1(0{,}6)^4$$
$$=0{,}0778+0{,}2592=0{,}337$$

ج-حساب قيمة كلا من: التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري

$$E(X)=np=5(0{,}4)=2$$
$$V(X)=npq=5(0{,}4)(0{,}6)=1{,}2$$
$$\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{5(0{,}4)(0{,}6)}=\sqrt{1{,}2}=1{,}095$$

د-إذا كان 3% من المصابيح المنتجة في مصنع آخر معيبة، وسحبنا 100 مصباحا من الإنتاج الكلي للمصنع، احتمال أن يكون بها وحدتان تالفتان

M لدينا: $(n=100>30)$ و $(p=0{,}03<0{,}05)$ وبالتالي:

نقرب قانون ثنائي الحدين من قانون بواسون فنجد:

$$\lambda=np=100(0{,}03)=3$$
$$P(X=2)=e^{-3}\ \frac{(3)^2}{2!}=0{,}2241$$

حل التمرين الحادي عشر:

تشـــير الخبرة الســـابقـة لأحـد اللاعبين أنـه يفوز في ســـتـة من عشـــرة من المباريات التي يلعبها، في كل دور يلعب خمســة مباريات، يتأهل إذا فاز في أكثر من ثلاثة مباريات:

1-تحديد قانون التوزيع للمتغير العشوائي:

احـتـمـال يـفـوز الـلاعـب هـو: $p=\frac{6}{10}0,6$ إذن احـتـمـال أن يـخسـر $q=1-p=1-0,6=0,4$ و $n=5$

كتابة قانون التوزيع للمتغير العشوائي (ثنائي الحدين):

$$P(X=x)=C_x^5\,(0,6)^X\,(0,4)^{5-x}\quad x=0,1,.....,5$$

2-عدد المباريات المتوقع (التوقع): $\mu=n\times p=5\times 0,6=3$ ثلاثة مباريات

3-احتمال أن يفوز في كل المباريات:

$$P(X=5)=C_5^5\,(0,6)^5\,(0,4)^{5-5}=0,077$$

4-احتمال أن يخسر في كل المباريات:

$$P(X=0)=C_0^5\,(0,6)^0\,(0,4)^{5-0}=0,01$$

5-احتمال أن يتأهل اللاعب: يتأهل اللاعب إذا فاز في أكثر من ثلاثة مباريات:

$$P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)=C_4^5\,(0,6)^4\,(0,4)^{5-4}+0,077=0,336=0,336$$

6-احتمال أن يقصــى اللاعب: لا يتأهل اللاعب إذا خســـر في أقل من ثلاثة مباريات

$$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0,01+C_1^5\,(0,6)^1\,(0,4)^{5-1}+C_2^5\,(0,6)^2\,(0,4)^{5-2}$$
$$=0,01+0,076+0,23=0,31$$

حل التمرين الثاني عشر:

التوزيع الاحتمالي لعدد زبائن فندق ما موضح في الجدول التالي:

$.X$	**100**	**110**	**118**	**120**	**125**	المجموع
$.\boldsymbol{P(X = x_i)}$	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	**1**
$\boldsymbol{xP(x)}$	20	33	23,6	24	12,5	**113,1**
$\boldsymbol{x^2P(x)}$	2000	3630	2784,8	2880	1562,5	**12857,3**

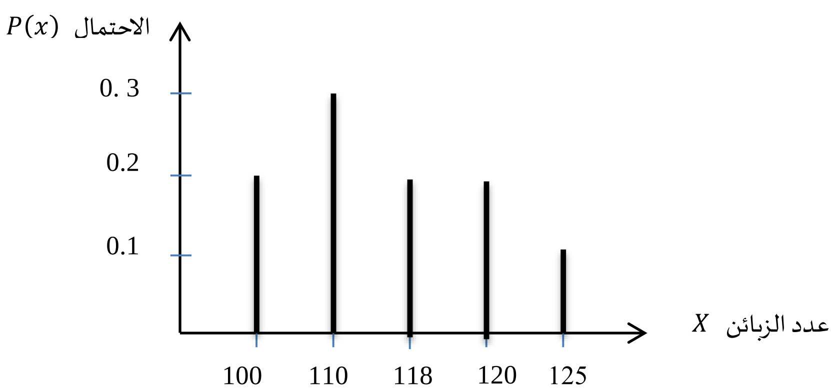
1-التأكد أن هذا الجدول يمثل جدول توزيع احتمالي:

-الشــــرط الأول: $\boldsymbol{P(X = x_i) > 0}$ نلاحظ أنه محقق، لأن احتمال كل قيمة أكبر من الصفر.

-الشرط الثاني: $\boldsymbol{\sum P(X = x_i) = 1}$ نلاحظ أنه محقق، لأن:

$$\sum P(X = x_i) = 0,2 + 0,3 + 0,2 + 0,2 + 0,1 = 1$$

2-التمثيل البياني بواسطة الأعمدة:



3-حساب كلا من التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري:

أ-التوقع الرياضي: $E(X) = \sum xP(x) = 113,1$

ب-التباين: $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$$E(X^2) = \sum x^2P(x) = 12857,3$$
$$V(X) = 12857,3 - (113,1)^2 = 65,69$$

ج-الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{65,69} = 8,1$

4-حساب احتمال أن يكون عدد زبائن الفندق:

أ-يفوق 118:

$$P(X > 118) = P(X = 120) + P(X = 125) = 0,2 + 0,1 = 0,3$$

ب-يتراوح ما بين 110 و125 بما في ذلك 110:

$$P(110 \leq X < 125) = P(X = 110) + P(X = 118) + P(X = 120) + P(X = 120)$$
$$= 0,3 + 0,2 + 0,2 = 0,7$$

ج-على الأكثر 110:

$$P(X \leq 110) = P(X = 110) + P(X = 100) = 0,3 + 0,2 = 0,5$$

حل التمرين الثالث عشر:

ليكن لدينا X متغير عشوائي، معرف بالقانون الاحتمالي التالي:

$$\boldsymbol{P(X = x) = \frac{4^x}{x!} e^{-4}}$$

1-أ-نوع المتغير العشوائي X: متغير عشوائي منفصل (متقطع).

ب-القانون الاحتمالي الذي يتبعه: قانون بواسون *Loi de Poisson*

2-إذا كان المتغير العشوائي X المعرف بالقانون الاحتمالي السابق، يمثل عدد مرات تعطل آلة صناعية في مصنع معين خلال سنة.

أ-معلمة هذا المتغير: متوسط عدد مرات تعطل آلة صناعية في المصنع هو 4 مرات، أي: $\lambda = 4$

ب-حساب الاحتمالين التاليين:

$$* P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) = 1 - \left(\frac{4^0}{0!} e^{-4} + \frac{4^1}{1!} e^{-4}\right)$$
$$= 1 - (e^{-4} + 4e^{-4}) = 1 - (5e^{-4}) = 1 - (5(2,718)^{-4})$$
$$= 0,9083$$

$$* P(2 \leq X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{4^2}{2!} e^{-4} + \frac{4^3}{3!} e^{-4}$$
$$= 8e^{-4} + \frac{32}{3} e^{-4} = \frac{56}{3} e^{-4} = \frac{56}{3} (2,718)^{-4} = 0,342$$

ج-حساب قيمة كلا من:

أ-التوقع الرياضي: $E(X) = \lambda = 4$

ب-التباين: $V(X) = \lambda = 4$

ج-الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{4} = 2$

3-إذا كان 80% من منتجات هذه الآلة سليما، وسحبنا 7 وحدات من الإنتاج الكلي لهذه الآلة.

أ-احتمال أن يكون بها ثلاث وحدات معيبة:

$$* P(X = 3) = C_7^3(0,2)^3(0.8)^{7-3} = \frac{7!}{3!(7-3)!}(0,2)^3(0.8)^4 = 35(0,2)^3(0.8)^4 = 0,115$$

ب-حساب العدد المتوقع للوحدات المعيبة، والانحراف المعياري:

أ-توقع التوزيع (الوسط الحسابي): $E(X) = n.p = 7.(0,2) = 1,4$

ب-الانحراف المعياري: $\sigma_X = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{7.(0,2).(0,8)} = \sqrt{1,12} = 1,058$

حل التمرين الرابع عشر:

1-كتابة قانون التوزيع للمتغير العشوائي المعبر عن عدد حالات الشفاء:

بما أن احتمال النجاح ثابت في كل المحاولات p =0.7، q=1-p=0.3، والمحاولات مستقلة بعضها عن بعض، وبما أنه كذلك عدد المحاولات معلوم : n=10، فإن المتغير العشوائي X يتبع **توزيع ذو الحدين**

الذي دالته الاحتمالية:

$$\mathbf{P(X = x) = C_{10}^{x}(0.7)^{x}(0.3)^{10-x} \qquad X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}$$

2-حساب الاحتمالات التالية:

أ-شفاء مريض واحد على الأكثر:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= C_{10}^{0}(0.7)^{0}(0.3)^{10-0} + C_{10}^{1}(0.7)^{1}(0.3)^{10-1} \\ &= (0.3)^{10} + 0.00013 = \mathbf{0.00014} \end{aligned}$$

ب-شفاء مريضين: $P(X = 2) = C_{10}^{2}(0.7)^{2}(0.3)^{10-2} = \mathbf{0.0014}$

ج-شفاء ثلاثة مرضى على الأقل:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 3) &= \mathrm{P}(\mathrm{X}=3)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)+\cdots+\mathrm{P}(\mathrm{X}=10)\\ &= 1-\mathrm{P}(\mathrm{X}<3)\\ &= 1-[\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)]\\ &= 1-(0.00014+0.0014)=\mathbf{0.9984}\end{aligned}$$

3-حساب كلا من:

أ-توقع التوزيع (الوسط الحسابي): $E(X)=n.p=10.(0.7)=\mathbf{7}$

ب-الانحراف المعياري: $\sigma_X=\sqrt{n.p.q}=\sqrt{10.(0.7).(0.3)}=\sqrt{2.1}=\mathbf{1.44}$

4-سوف ننظر إلى عدد المصابين على أنه عدد مرات النجاح في متتابعة من تجارب برنولي، وبما أنه حدث نادر، و n=500 كبير ($n \geq 30$) و $p=\frac{10}{1000}=0.01$ (احتمال أن يصاب شخص ملقح) صغير ($p \leq 0,05$)، فيمكن أن نستعمل تقريب **بواسون**

للتوزيع ذي الحدين ويكون. $\lambda=\mathrm{np}=500.\frac{10}{1000}=5$ وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي:

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-5}5^{x}}{x!}$$

4-أ-حساب احتمال أن لا يصاب أي شخص ملقح:

$$P(X=0)=\frac{e^{-5}5^{0}}{0!}=0.0067$$

4-ب-حساب احتمال أن يصاب شخصين ملقحين:

$$P(X=2)=\frac{e^{-5}5^{2}}{2!}=0.0842$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

نرمي زهرتي نرد D_1 و D_2 مرقمتين كما يلي:

- الزهرة الأولى D_1: 3، 2، 2، 1، 1، 1
- الزهرة الثانية D_2: 3، 3، 1، 1، 1، 1

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يمثل مجموع الرقمين الظاهرين.

1- عين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟ مثله بيانيا؟

2- عين دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$؟ مثلها بيانيا؟

3- أحسب الاحتمالات التالية مستعملا دالة التوزيع:

$P(X > 3)$ ،$P(X = 7)$ ،$P(4 \leq X < 6)$ ،$P(4 < X \leq 6)$

4- أحسب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

التمرين الثاني:

ليكن لدينا المتغير العشوائي X متقطع، و a ، b ثابتان، أثبت أن:

1. $E(aX + b) = aE(X) + b$
2. $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$
3. $V(X + b) = V(X)$
4. $V(aX) = a^2 V(X)$

التمرين الثالث:

يعطى نص الامتحان في مقياس معين على شكل أربعة أسئلة ذات أجوبة متعددة، كل سؤال له ثلاث أجوبة محتملة، ويقوم الطالب باختيار الجواب المناسب، ويتحصل الطالب على خمس نقاط عند كل جواب صحيح ولا يتحصل على أي نقطة عند اختيار الجواب الخطأ.

لم يقم أحد الطلبة بمراجعة دروسه، فقرر الإجابة بطريقة عشوائية، فإذا علمت أن الأسئلة مستقلة عن بعضها البعض، وأن كل سؤال يحتوي على عبارة صحيحة وعبارتين خاطئتين:

1- شكل جدول التوزيع الاحتمالي للعلامات التي يمكن أن يتحصل عليها الطالب.

2- ما هي العلامة التي تتوقع أن يتحصل عليها الطالب.

3- ما هو احتمال أن ينجح الطالب في هذا المقياس.

التمرين الرابع:

أولا-ناد به 10 أعضاء، 6 رجال و4 نساء، نريد أن نختار عشوائيا 5 منهم للتمثيل في خمسة أفلام مختلفة

(يمكن لنفس الشخص أن يمثل في أكثر من فيلم)، ليكن X: عدد النساء من بين الخمسة أشخاص الذين تم اختيارهم.

1- ما هي طبيعة X؟ علل ذلك؟

2- ما هو القانون الاحتمالي لـ: X؟ علل ذلك؟

3- عين التوزيع الاحتمالي لـ: X؟ مثله بيانيا؟

4- أحسب العدد المتوسط للنساء والانحراف المعياري؟

5- ما هو احتمال أن يكون عدد النساء من بين الخمسة الذين تم اختيارهم: يساوي 0؟ أقل من 3؟ يفوق أو يساوي 2؟ محصورا بين 2 و5؟

ثانيا-نختار من بين أعضاء نفس النادي 5 أشخاص لنفس الغرض، ولكن لا يمكن لنفس الشخص أن يمثل في أكثر من فيلم، ليكن المتغير العشوائي X: يمثل عدد النساء من بين الخمسة أشخاص الذين تم اختيارهم.

1- ما هو القانون الاحتمالي لـ: X؟ علل ذلك؟

2- عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير؟

3- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري؟

4- ما هو احتمال أن يكون عدد النساء من بين الخمسة الذين تم اختيارهم: يساوي 0؟ يفوق 4؟ محصورا بين 1 و4 (بما في ذلك 4)؟

التمرين الخامس:

أولا-تفيد تقارير الشرطة أنه خلال إحصائيات السنوات الماضية يقدر العدد المتوسط لحوادث المرور التي تقع في ولاية سطيف سنويا بـ: 6 حوادث، إذا علم أن هذه الظاهرة تتبع قانون بواسون Poisson.

1- عرف المتغير العشوائي في هذه المسألة؟

2- عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير؟

3- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري؟

4- ما هو احتمال أن تقع في السنة المقبلة بولاية سطيف: 3 حوادث مرور؟ 10 حوادث مرور؟ أكثر من 6 حوادث؟ اشرح النتائج؟

5- ما هو أقصى عدد ممكن لحوادث المرور؟

ثانيا-تتوقع الإدارة تحسن الضروف بنسبة 50%(إصلاح وتوسيع الطرقات، المراقبة، التوعية)، وتتوقع التخفيض من الظاهرة بنفس النسبة.

1- عين القانون الاحتمالي في هذه الحالة؟

2- ما هو احتمال أن تقع في السنة المقبلة في ولاية سطيف: 3 حوادث؟ 10 حوادث؟ أكثر من 6؟

3- ما هو أقصى عدد ممكن لحوادث المرور في هذه الحالة؟

التمرين السادس:

ليكن لدينا X متغير عشوائي، معرف بالقانون الاحتمالي التالي:

$$\boldsymbol{P(X=x)=\frac{3^x}{x!}e^{-3}}$$

1- ما هو نوع المتغير العشوائي X؟ وما هو القانون الاحتمالي الذي يتبعه؟

2- إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات تعطل آلة صناعية في مصنع معين، وأن متوسط عدد مرات تعطل هذه الآلة في السنة بالمصنع هو 3.

أ- حدد معلمة هذا المتغير.

ب-أحسب الاحتمالين التاليين: $P(X>1)$ ، $P(3\leq X<5)$

ج- أحسب قيمة كلا من: التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

3- إذا كان 10% من منتجات هذه الآلة معيبا، وسحبنا 5 وحدات من الإنتاج الكلي لهذه الآلة، فما احتمال أن يكون بها وحدتان تالفتان.

التمرين السابع:

ليكن لدينا المتغير العشـــوائي X يأخذ القيم التالية: 1، 2، 3، 4، 5، 6، حيث لدينا: $P(X = x_i) = \frac{x_i}{\alpha}$

المطلوب:

1- عين قيمة الثابت α ليكون التوزيع السابق توزيع احتمالي؟ مثله بيانيا؟

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$؟ مثلها بيانيا؟

3- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X < 2)$؟ $P(X \geq 4)$؟ $F\left(\frac{\alpha}{7}\right)$؟

4- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري؟

التمرين الثامن:

حصـــل مرشـــح A على 20% من الأصـــوات في مكتب انتخابي معين، نسـحب عشـــوائيا عينة من أربعة (4) أوراق تصـــويت من صـــندوق ما (يحتوي على مئات الأوراق الانتخابية)، ليكن X متغير عشـــوائي يمثل عدد الأصـــوات التي يحصل عليها المرشح A في العينة.

المطلوب:

1- ما هو القانون الاحتمالي لــ: X؟ حدد معالمه؟

2- أحسب احتمال أن يكون من بين الأوراق الأربعة:

3- أ-صوت واحد لصالح المرشح A؟

ب-ولا صوت لصالح المرشح A؟

ج-على الأكثر صوتين لصالح المرشح A؟

4- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري؟

المحور الرابع

المتغيرات العشوائية المستمرة

وتوزيعها الاحتمالي

تمهيد

المتغير العشـوائي المسـتمر (المتصـل) يأخذ مجالا معينا من مجموعة الأعداد الحقيقية، ولذلك فإن توزيعه الاحتمالي سيمثل صيغة أو دالة مستمرة تسمى بدالة الكثافة الاحتمالية تعطي هيئة التوزيع لذلك المجال المعين، بحيث أن خصائص دالة الكثافة والتي يرمز لها بالرمز $f(x)$:

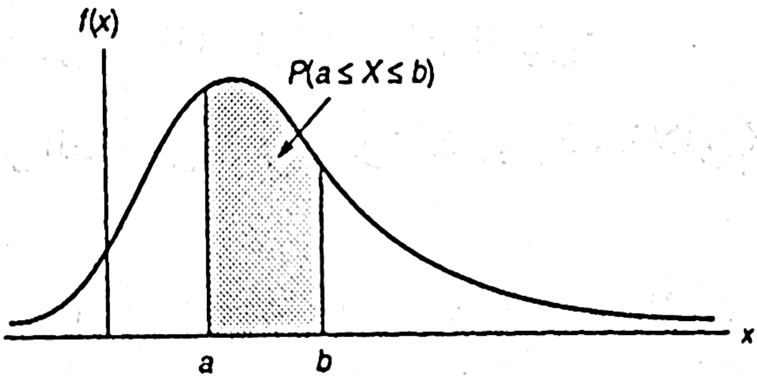
$$f(x) \geq 0$$

$$\int f(x)dx = 1$$

أولا: التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر

1-دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي مستمر (متصل):

يتصف المتغير العشـوائي المتصل بصيغة رياضية تعرف باسم دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$، وهي ليست نفس دالة الاحتمال في حالة المتغير المتقطع، حيث أن احتمال أن X تساوي قيمة معينة هو الصفر، نجد أن هذه الدالة تعطي الوسيلة التي يمكن بها تحديد احتمال أن X تقع في فترة معينة. والتمهيد السابق يكشف لنا أن التعبير الرياضي (الدالة) لا يمكن أن يكون مفيدا كدالة كثافة احتمال لمتغير عشوائي متصل مالم تكن المساحة أسفل المنحنى البياني لهذه الدالة تساوي واحد، بمعنى إذا كانت المساحة الكلية تساوي واحد في الفترة التي يعرف خلالها المتغير العشوائي المتصل، فإن أي جزء من هذه المساحة يناظر فترة قصيرة يجب أن يكون عددا ينحصر بين الصفر والواحد، المساحة لفترة قصيرة هي احتمال أن المتغير العشوائي X يأخذ قيما داخل هذه الفترة القصيرة. بصفة عامة دعنا ننظر إلى أي متغير عشوائي متصل X له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$، احتمال أن X تأخذ قيما في الفترة من a إلى b، هو ذلك الجزء من المساحة الكلية تحت المنحنى البياني لـ $f(x)$ والمحدود من الأسفل بالمحور الأفقي ومن اليسار واليمين بالقيم من a إلى b على التوالي، هذه الفترة الاحتمالية تكتب كما يلي: $p(a \leq x \leq b)$ وهي موضحة في الشكل الموالي:



الاحتمال عبارة عن المســاحة أســفل منحنى دالة كثافة الاحتمال، أي حساب الاحتمالات في حالة المتغير العشوائي المتصل يعني رياضيا حساب المساحة بواسطة التكامل أي: $p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

2-التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي مستمر (متصل):

يتم تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية بمنحنى سلس إذا كانت دالة الكثافة غير خطية، أما إذا كانت خطية فإنها تمثل بخط مستقيم.

ثانيا: خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر

لتكن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية بحيث:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a-b] \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

حيث $b > a$ ، وبفرض وجود عدد حقيقي i محصور بين العددين a و b فإن:

- $p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
- $p(x = a) = p(x = b) = 0$
- $p(x \leq i) = \int_a^i f(x)dx$
- $p(x \geq i) = \int_i^b f(x)dx$

مثال 1: بفرض أن دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل X هي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0-1] \\ 0 & x \notin [0-1] \end{cases}$$

1. تأكد أن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية، ثم مثلها بيانيا.

2. أحسب الاحتمالات التالية:

أ- $p(0.25 \leq x \leq 0.75)$

ب- $p(x \geq 0.5)$

ج- $p(x \leq 0.5)$

د- $p(x < 0)$

الحل:

1-في البداية نلاحظ أن الشرط الأول في تعريف دالة كثافة الاحتمال محقق، حيث أنه لأي قيمة x في المجال $[0-1]$ فإن: $f(x) = 2x$ موجبة، أما بالنسبة للشرط الثاني فإننا نحتاج إلى اثبات أن المساحة تحت الرسم البياني والمحدد من الأسفل بالمحور الأفقي ومن اليسار بالقيمة 0 ومن اليمين بالقيمة 1 حيث سنقوم بذلك باستخدام التكامل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$$

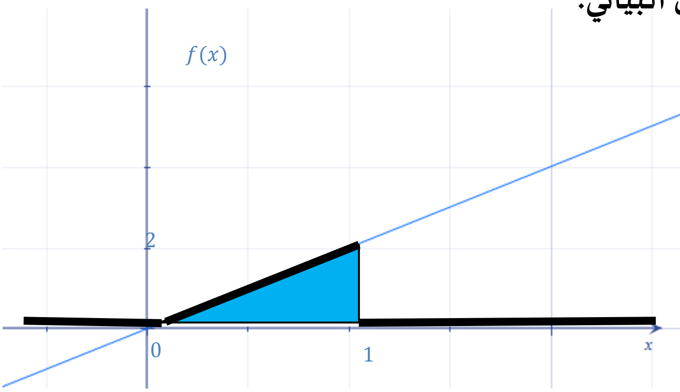
$$= \int_{-\infty}^{0} (0)dx + \int_{0}^{1} 2x\,dx + \int_{1}^{+\infty} (0)dx$$

$$= \quad 0 \quad + \quad \left[2\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \quad + \quad 0$$

$$= (1)^2 - (0)^2 = 1$$

وبالتالي فإن $f(x)$ فعلا دالة كثافة احتمالية.

- التمثيل البياني:



2-حساب الاحتمالات:

$$p(0.25 \le x \le 0.75) = \int_{0.25}^{0.75} f(x)dx = \int_{0.25}^{0.75} 2xdx = \left[2\frac{x^2}{2}\right]_{0.25}^{0.75} = 0.5$$

$$p(x \ge 0.5) = \int_{0.5}^{1} f(x)dx = \int_{0.5}^{1} 2xdx = \left[2\frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^{1} = (1)^2 - (0.5)^2 = 0.75$$

$$p(x \le 0.5) = \int_{0}^{0.5} f(x)dx = \int_{0}^{0.5} 2xdx = \left[2\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{0.5} = (0.5)^2 - (0)^2 = 0.25$$

$$p(x < 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0$$

ثالثا: دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي المستمر

1-إيجاد دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي المستمر:

هي دالة عددية نرمز لها بـ: $F(x)$، وهي معرفة كالتالي:

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx}$$

لدالة التوزيع الاحتمالية أهمية كبيرة بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر، حيث أننا نهتم في هذه الحالة باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأسهل التعويض في دالة التوزيع الاحتمالية بدلا من حساب التكامل في كل مرة، يتضح ذلك من القاعدة التالية: بفرض أن a و b نقطتان من مجال تعريف X، حيث $b > a$، لحساب احتمال أن تكون X تنتمي للمجال $]a - b]$

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$$

بما أن الاحتمال عند النقطة في المتغير العشـوائي المسـتمر يسـاوي الصفر، فإننا نستنتج من ذلك أن:

الإشارتين $\leq$ و $<$ متكافئتان، وبالتالي:

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$$
$$= P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

مثال 2: بالعودة للمثال السابق أحسب دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$.

الحل: حساب دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$:

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx}$$

$$x < 0 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 0$$

$$x \in [0-1] : F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{x} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{x} (2x)\,dx = x^2$$

$$x > 1 : F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{x} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{1} (2x)\,dx + \int_{1}^{x} (0)\,dx = 1$$

أي أن:

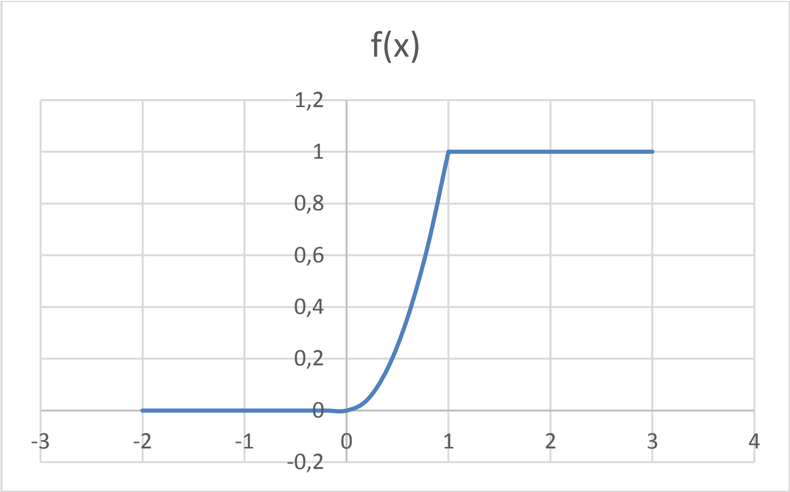
$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \in [0-1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}}$$

2-التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ لمتغيرعشوائي متصل:

يتم تمثيل دالة التوزيع الاحتمالية بمنحنى سـلس إذا كانت دالة التوزيع غير خطية، أما إذا كانت خطية فإنها تمثل بخط مستقيم.

مثال 3: مثل بيانيا دالة التوزيع الاحتمالية للمثال السابق.

الحل:



رابعا: التوقع الرياضي والتباين للمتغيرة العشوائية المستمرة

1-التوقع الرياضـي: القيمة المتوقعة لمتغير عشـوائي مسـتمر X هو متوسـط قيمة X وتعرف كما يلي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

مثال 4: للتوضيح نستخدم مرة أخرى دالة كثافة الاحتمال في المثال 1، القيمة المتوقعة (المتوسط) هي:

$$E(X)=\int_0^1 x(2x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$$

2-التباين والانحراف المعياري: تباين المتغير العشـوائي المتصـل X هو التوقع لمربع الفرق بين X ومتوسطها $E(X)$ ويعطى بالصورة التالية:

$$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx-\big(E(X)\big)^2$$

أو بصيغة بديلة أخرى:

$$V(X)=E(X-E(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(X-E(X))^2f(x)dx$$

ويعرف الانحراف المعياري ويرمز له بالرمز σ بأنه الجذر التربيعي لتباين X أي أن:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

مثال 5: لتكن دالة كثافة الاحتمال السـابقة: يحسـب التباين والانحراف المعياري كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2(2x)dx = \int_0^1 2x^3 dx$$

$$E(X^2) = \left[\frac{2}{4}x^4\right]_0^1 = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \left[\frac{1}{2}(1)^4 - \frac{1}{2}(0)^4\right] = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \mathbf{0.23}$$

مثال 6: إذا كان المتغير العشوائي المتصل XX له الدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} c(x+3) & 2 \le x \le 8 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

1- أوجد قيمة الثابت c حتى تكون الدالة دالة كثافة احتمالية.

2- بعد تعويض قيمة c في دالة كثافة الاحتمال مثلها بيانيا.

3- أوجد دالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$.

4- أحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري.

5- أحسب الاحتمالات التالية:

أ-$p(x \le 4)$ **ب**-$p(x < 4)$ **ج**-$p(x \ge 4)$ **د**-$p(4 \le x \le 6)$

الحل:

1-إيجاد قيمة الثابت c حتى تكون الدالة السـابقة دالة كثافة احتمالية: لكي يتحقق الشرط يجب تحقق ما يلي:

$$\int_2^8 f(x)dx = 1$$

$$\int_2^8 c(x+3)dx = 1 \Leftrightarrow c\int_2^8 (x+3)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow c\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_2^8 = 1$$

$$\Leftrightarrow c\left[\left(\frac{(8)^2}{2}+3(8)\right)-\left(\frac{(2)^2}{2}+3(2)\right)\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow c(56-8) = 1$$

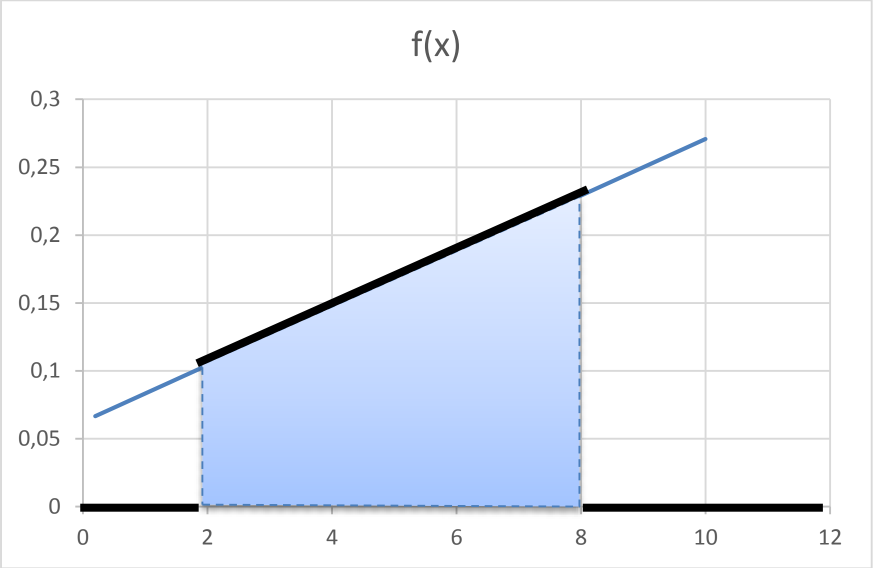
$$\Leftrightarrow 48c = 1$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{48}$$

تصبح دالة كثافة الاحتمال بعد تعويض قيمة الثابت C كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{48}(x+3) & 2 \le x \le 8 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

2-التمثيل البياني:



3-إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$:

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx}$$

$$x < 2 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 0$$

$$x \in [2-8] : F(x) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{x} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{2} (0)\,dx + \int_{2}^{x} \frac{1}{48}(x+3)\,dx = \frac{1}{48}\left(\frac{x^2}{2} + 3x - 8\right)$$

$$x > 8 : F(x) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{8} f(x)\,dx + \int_{8}^{x} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{2} (0)\,dx + \int_{2}^{8} \frac{1}{48}(x+3)\,dx + \int_{8}^{x} (0)\,dx = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \dfrac{1}{48}\left(\dfrac{x^2}{2} + 3x - 8\right) & x \in [2-8] \\ 1 & x > 8 \end{cases}$$

4-إيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري:

أ-حساب المتوسط (القيمة المتوقعة):

$$E(X) = \int_2^8 xf(x)dx = \int_2^8 \frac{1}{48}x(x+3)dx = \int_2^8 \frac{1}{48}(x^2+3x)dx$$
$$= \frac{1}{48}\left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right]_2^8 = \frac{1}{48}\left[\left(\frac{(8)^3}{3} + 3\frac{(8)^2}{2}\right) - \left(\frac{(2)^3}{3} + 3\frac{(2)^2}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{48}\left(\frac{800}{3} - \frac{26}{3}\right) = \frac{258}{48} = \frac{43}{8} = 5.375$$

ب-حساب التباين:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_2^8 \frac{1}{48}x^2(x+3)dx = \int_2^8 \frac{1}{48}(x^3+3x^2)dx$$
$$E(X^2) = \frac{1}{48}\left[\frac{x^4}{4} + x^3\right]_2^8 = \frac{1}{48}\left[\left(\frac{(8)^4}{4} + (8)^3\right) - \left(\frac{(2)^4}{4} + (2)^3\right)\right]$$
$$E(X^2) = \frac{1}{48}[1536 - 12] = 31{,}75$$
$$V(X) = 31{,}75 - (5{,}375)^2 = 2{,}86$$

ج-حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}86} = 1{,}69$$

5-حساب الاحتمالات:

أ. $p(x \leq 4) =$

الطريقة 1: باستخدام دالة الكثافة الاحتمالية:

$$p(x \leq 4) = \int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 \frac{1}{48}(x+3)dx = \frac{1}{48}\int_2^4 (x+3)dx = \frac{1}{48}\left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_2^4$$
$$= \frac{1}{48}\left[\left(\frac{(4)^2}{2} + 3(4)\right) - \left(\frac{(2)^2}{2} + 3(2)\right)\right] = \frac{1}{48}(20-8) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} = 0.25$$

الطريقة 2: باستخدام دالة التوزيع $F(x)$:

بما أن $x = 4$ ينتمي للمجال $[2 - 8]$ نعوض في دالة التوزيع كما يلي:

$$F(4) = P(X \leq 4) = \frac{1}{48}\left(\frac{(4)^2}{2} + 3(4) - 8\right) = \mathbf{\frac{1}{4}} = 0.25$$

ب. $p(x < 4) = p(x \leq 4) = \frac{1}{4} = 0.25$

ج. $p(x \geq 4) = \int_4^8 f(x)dx = \frac{1}{48}\left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_4^8 = \frac{1}{48}\left[\left(\frac{(8)^2}{2} + 3(8)\right) - \left(\frac{(4)^2}{2} + 3(4)\right)\right] = \frac{1}{48}(56 - 20) = \frac{36}{48} = \frac{3}{4} = 0.75$

د. $p(4 \leq x \leq 6) = \int_4^6 f(x)dx = \frac{1}{48}\left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_4^6 = \frac{1}{48}\left[\left(\frac{(6)^2}{2} + 3(6)\right) - \left(\frac{(4)^2}{2} + 3(4)\right)\right] = \frac{1}{48}(36 - 20) = \frac{16}{48} = \frac{1}{3} = 0.3333$

خامسا: بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة

1-التوزيع المنتظم: X متغير عشوائي مستمر (متصل)، يأخذ مجالا معينا من مجموعة الأعداد الحقيقية، بحيث $(a < b)$ $x \in [a; b]$، وتأخذ دالة كثافته الاحتمالية الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a; b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

ونكتب: $X \rightsquigarrow \mathbb{U}(a; b)$

أما التوقع الرياضي، التباين، والانحراف المعياري فيتم حسابهم كما يلي:

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

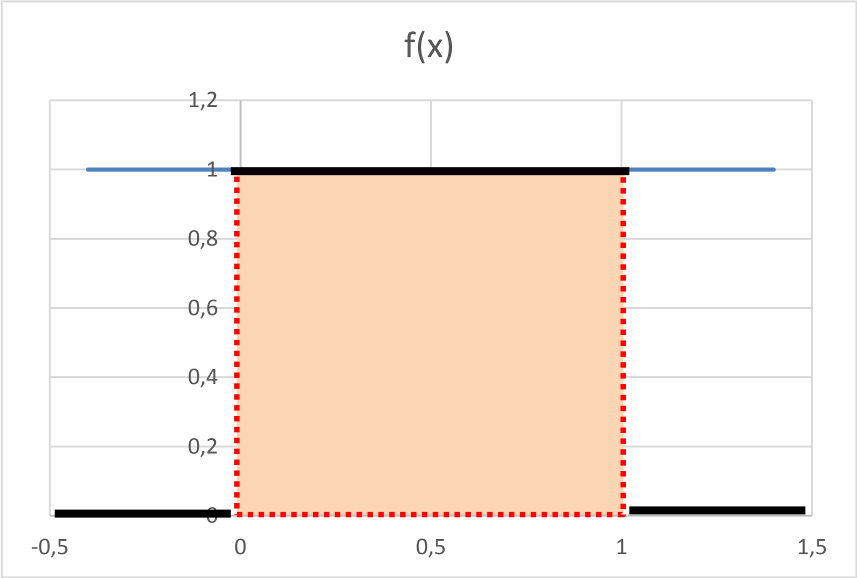
مثال 7: ليكن: $X \rightsquigarrow \mathbb{U}(0; 1)$، أكتب دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ومثلها بيانيا، ثم أوجد ما يلي:

- دالة التوزيع $F(x)$ وتمثيلها البياني.
- الاحتمالات : $P\left(x < \frac{3}{4}\right)$، $P\left(\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}\right)$، $P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{2}{3}\right)$.
- التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

الحـل: بمـا أن X يتبع التوزيع المنتظم $X \sim \mathbb{U}(0;1)$ فـإن دالـة كثـافتـه الاحتمالية هي:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0;1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

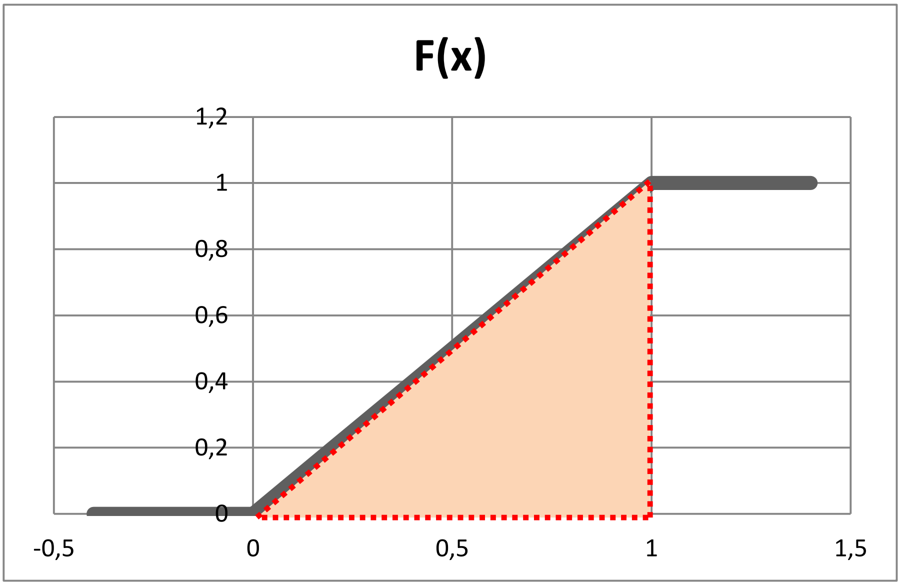
التمثيل البياني لدالة كثافة الاحتمال:



دالة التوزيع الاحتمالية هي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$:



-حساب الاحتمالات:

$$P\left(x<\frac{3}{4}\right)=F\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$$
$$P\left(\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}\right)-F\left(\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$
$$P\left(\frac{1}{4}<x<\frac{2}{3}\right)=F\left(\frac{2}{3}\right)-F\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

-حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري:

$$E(X)=\frac{b+a}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}=0.5$$
$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(1-0)^2}{12}=\frac{1}{12}=0.0833$$
$$\sigma=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{1}{12}}=0.2887$$

2-التوزيع الطبيعي: نميز في هذا التوزيع بين قانونين، قانون التوزيع الطبيعي العام وقانون التوزيع الطبيعي المعياري.

أ-القانون الطبيعي العام: $X \rightsquigarrow \mathbb{N}(\mu, \sigma)$

هو توزيع مستمر يأخذ شكل منحنى متماثل ذو قمة واحدة، ويمتد طرفاه إلى ∞ ، وقد وجد أن معظم التوزيعات مثل الأوزان – الأطوال – الأعمار ...الخ. تأخذ شكلاً قريبا من المنحنى الطبيعي.

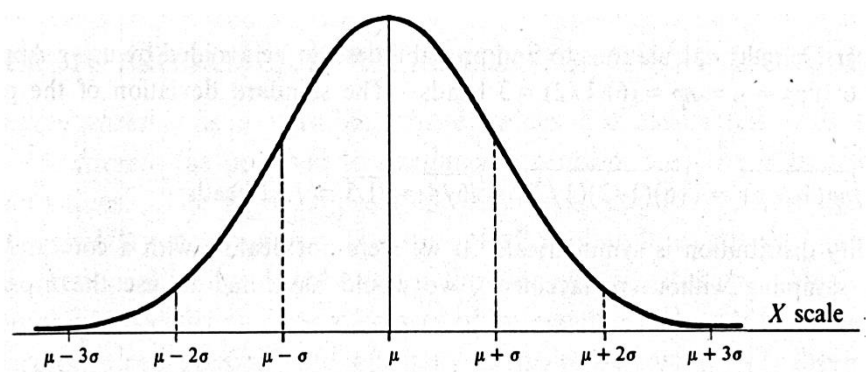
إذا كان X متغير عشوائي مستمر (متصل) دالة كثافته الاحتمالية هي :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty \le x \le \infty$$

حيث : **e :** constant=2.718 ، **π:** constant=3.14 ، $\mu \in R$ ، $\sigma > 0$

يقال إن X يتبع توزيع طبيعي عادي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ ويكتب باختصار $X \rightsquigarrow \mathbb{N}(\mu, \sigma)$

- التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي العام هو منحنى متناظر، غير مفرطح وغير مدبب، كما يلي:



- دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ هي كما يلي:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

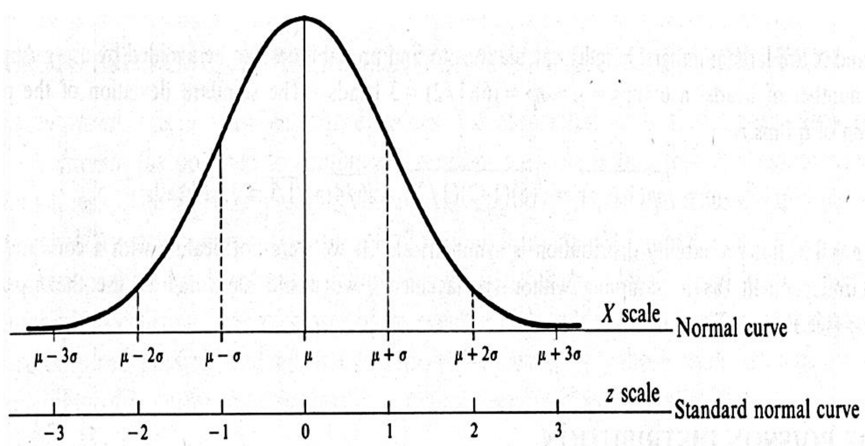
بحيث $f(x)$ تأخذ الصيغة السابقة، إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لــ $P(X \leq x)$، إلا أن الحساب عمليا لا يتم كذلك نظرا للشكل المعقد لدالة الكثافة الاحتمالية، أين يصعب حساب الدالة الأصلية لها، فنلجأ إلى تحويل رياضي لتبسيط صيغة دالة الكثافة الاحتمالية.

- **ملاحظة:** من خلال ما سبق نلاحظ أن للقانون الطبيعي نفس خواص أي متغير عشوائي متصل، إلا أنه من الناحية التطبيقية وبالخصوص حساب الاحتمالات لا يمكن التطبيق المباشر لقواعد حساب المساحات، لأن صيغة دالة الكثافة الاحتمالية معقدة ويصعب مكاملتها، وعليه نلجأ إلى تبسيطها فنحصل على قانون آخر يدعى: القانون الطبيعي المعياري.

ب-القانون الطبيعي المعياري (القياسي): $\mathbb{N}(\mathbf{0},\mathbf{1})$

بوضع $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ في دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي العادي (أي في صورته العامة)، نجد أنه يتحول إلى توزيع طبيعي معياري، متوسطه $\mu = 0$ ، انحرافه المعياري $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1}$ ، ويكتب $Z \leadsto \mathbb{N}(0,1)$.

وتصبح دالة كثافته الاحتمالية: $-\infty \leq z \leq \infty$ $\quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

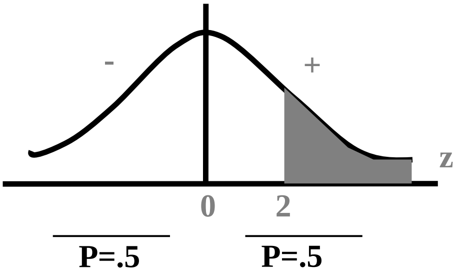


وقد وضـــعت جداول توضـــح المســـاحة أســـفل المنحنى (الاحتمال) وهذه الجداول [جدول (z)] تســتخدم بشــرط أن تكون المســألة في صــورة توزيع طبيعي عـادي X أي: $\mu \neq 0 \;,\; \sigma \neq 1$ ونحولها إلى توزيع طبيعي معيـاري Z أي: $\mu = 0 \;,\; \sigma = 1$ بالتحويلة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

مثال 8: إذا كان دخل (1000) أســرة في مدينة ما يتبع توزيع طبيعي متوســطه (μ) 1800 ون وانحرافـه المعيـاري (σ) 300 ون .احســـب احتمال الحصـــول على دخل:

1-أكبر من 2400 ون
2-أكبر من 1500 ون.
3-أقل من 2550 ون
4-أقل من 1200 ون
5-ينحصر بين 2250 و1650 ون
6-ينحصر بين 2400 و2550 ون.
7-أوجد عدد الأسر التي يزيد دخلها عن 1500 ون .
8-ما هو الدخل الذي أقل منه 97.72 % من المداخيل.

الحـل: X متغير عشـــوائي مســـتمر، يتبع توزيع طبيعي عـادي بمتوســـط $\mu = 1800$، وانحرافه المعياري $\sigma = 300$. نحوله إلى توزيع طبيعي قياسـي Z بالتحويلة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-1800}{300}$



1- $P(x \geq 2400)$:

$x = 2400 \;\; \Rightarrow z = \frac{2400-1800}{300} = 2$

$P(x \geq 2400) = P(z \geq 2)$

$= P(z \leq -2) = 0.0228$

(من جدول Z)

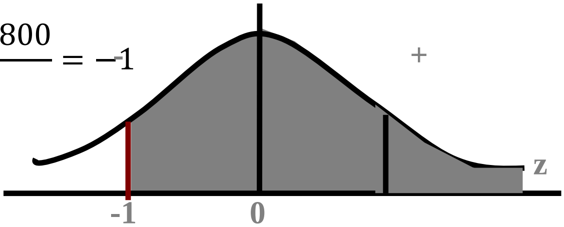
2- $P(x \geq 1500)$:

$x = 1500 \quad \Rightarrow z = \dfrac{1500 - 1800}{300} = -1$

$P(x \geq 1500) = P(z \geq -1)$

$= P(z \leq 1) =$ 0.8413

(Z من جدول)

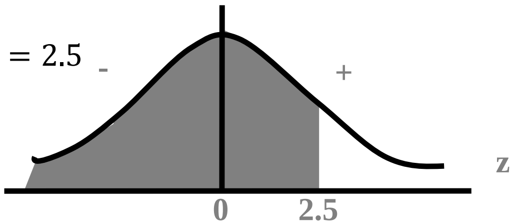


3- $P(x \leq 2550)$:

$x = 2550 \Rightarrow z = \dfrac{2550 - 1800}{300} = 2.5$

$P(x \leq 2550) = P(z \leq 2.5)$

$=$ 0.9938

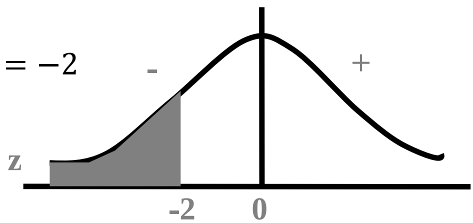


4- $P(x \leq 1200)$:

$x = 1200 \Rightarrow z = \dfrac{1200 - 1800}{300} = -2$

$= P(x \leq 1200) = P(z \leq -2)$

$=$ 0.0228



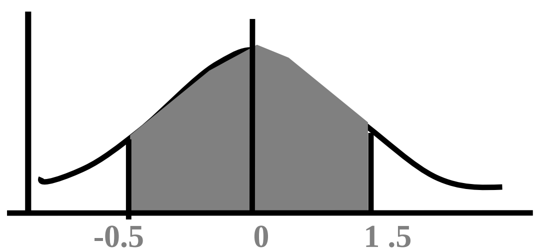
5- $P(1650 \leq x \leq 2250)$:

$P\left(\dfrac{1650 - 1800}{300} \leq z \leq \dfrac{2250 - 1800}{300}\right)$

$P(1650 \leq x \leq 2250) = P(-0.5 \leq z \leq 1.5)$

$P(z \leq 1.5) - P(z \leq -0.5)$

$= 0.9332 + 0.3085 =$ 0.6247



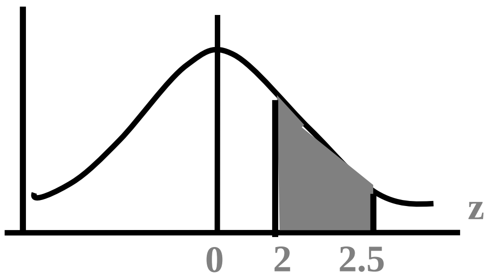
6- $P(2400 \leq x \leq 2550)$

$$P\left(\frac{2400-1800}{300} \leq z \leq \frac{2550-1800}{300}\right)$$

$P(2400 \leq x \leq 2550) = P(2 \leq z \leq 2.5)$

$P(z \leq 2.5) - P(z \leq 2)$

$= 0.9938 - 0.9772 = 0.0166$



7- عـدد الأســـر التي يزيـد دخلـها عن 1500 ون = العدد × $P(X \geq 1500)$ الإجمالي للأسر

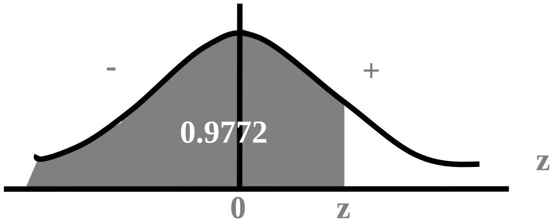
(من المطلوب 2) 0.8413 x 1000= 841.3 = 841 أسرة

8- الدخل الذي أقل منه 97.72% من المداخيل:

$$P(X \leq x) = 0.9772 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0.9772$$

$$z = 2 \Leftrightarrow \frac{x-\mu}{\sigma} = 2 \Leftrightarrow \frac{x-1800}{300} = 2$$

$\Rightarrow x = 600 + 1800 =$ 2400 ون



3-التوزيع الأسي:

أ-التعريف: من التوزيعات الاحتمالية المهمة جدا والتي تصف كثير من الظواهر العشوائية المتعلقة بالزمن، أين المتغير العشوائي قيمته عبارة عن لحظة معينة (مفاجئة) على محور الزمن، مثل: الزمن الذي تستغرقه آلة لكي تتعطل، مدة البقاء لبعض الأجزاء الالكترونية، الزمن بين وصول زبون وآخر في سوق مركزي، مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، الزمن اللازم للانتهاء من تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة...

ويسمى هذا التوزيع الأسي ويسمى أيضا التوزيع الأسي السالب لعلاقته بتوزيع بواسون. فإذا كان وقوع أحداث معينة يتبع توزيع بواسون، فإن المدة الفاصلة بين وقوع حدثين من هذه الأحداث تتبع التوزيع الأسي، فمثلا إذا كان وصول الزبائن إلى أحد شبابيك خدمة ما يتبع توزيع بواسون، فإن المدة الفاصلة بين وصول كل زبونين إلى الشباك تخضع للتوزيع الأسي.

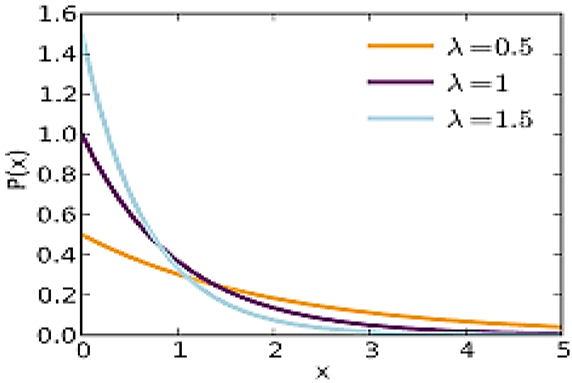
وغالبا ما يعبر عن التوزيع الأسي، اختصارا بـ: $\boldsymbol{X \backsim Exp(\lambda)}$ وهذا يعني بأن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الأسي بالمعلمة λ .

وهو توزيع احتمالي لمتغير عشوائي مستمر X يأخذ قيم ممكنة $X > 0$ X وله دالة الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda.x} & ,x > 0 \ \ et \ \ \lambda > 0 \\ 0 & ,x \leq 0 \end{cases}$$

حيث: λ عدد حقيقي موجب وهو معلمة التوزيع وتمثل المعدل أو المتوسط الذي تحصل به الظاهرة العشوائية.

ويمثل هذا التوزيع بيانيا وفق الشكل التالي:

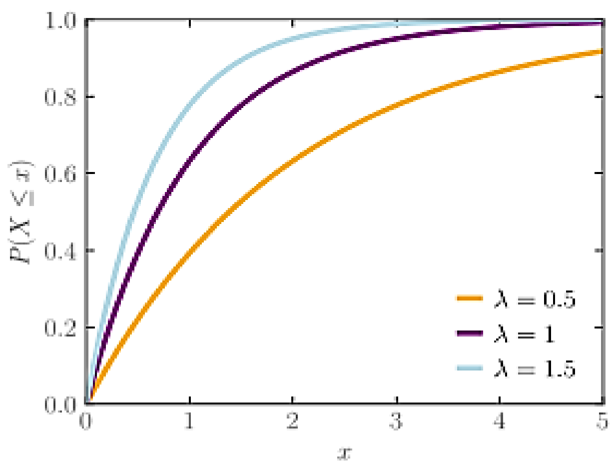


ملاحظة: يتغير شكل دالة الكثافة للتوزيع الأسي بتغير قيمة λ.

كما يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمية F(x) لهذا التوزيع بالصورة التالية:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda . x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

وتمثل دالة التوزيع التراكمية بيانيا وفق الشكل التالي:



ب-الخصائص العددية للتوزيع المنتظم (المستمر):

-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

-التباين:

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

مثال 9: إذا كانت المدة الزمنية لبقاء جزء الكتروني في جهاز الكمبيوتر تتبع التوزيع الأسي بمتوسط 1000 ساعة، فأوجد ما يلي:

1- دالة كثافة الاحتمال التي تعبر عن الفترة الزمنية لبقاء الجزء الالكتروني في جهاز الكمبيوتر؟

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير؟

3- احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة 1100 ساعة على الأكثر؟

4- احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة بين 800 و1200 ساعة؟

5- متوسط الزمن لبقاء الجزء الالكتروني وانحرافه المعياري؟

الحل:

1-كتابة دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير العشوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لبقاء الجزء الالكتروني في جهاز الكمبيوتر:

بما أن المتغير العشوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لبقاء الجزء الالكتروني في جهاز الكمبيوتر يتبع التوزيع الأسي، بمتوسط 1000 ساعة، فإن: $0 < x < \infty$، والمتوسط $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$ ، ومن ثم فإن قيمة λ تصبح تقدر بـ:

$\lambda = \frac{1}{1000}$ ، وتكتب دالة الكثافة لهذا المتغير بالصورة التالية:

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda.x} = \frac{1}{1000}\, e^{\frac{-x}{1000}} \qquad 0 < x < \infty$$

2-كتابة دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير:

$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}0 & si \quad x\leq 0\\ 1-\ e^{-\lambda.x} & si \quad x>0\\ 1 & si \quad x\to\infty\end{cases}$$

وبتعويض قيمة λ تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي:

$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}0 & si \quad x\leq 0\\ 1-\ e^{\frac{-x}{1000}} & si \quad x>0\\ 1 & si \quad x\to\infty\end{cases}$$

3-حساب احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة 1100 ساعة على الأكثر:

$$P(X\leq 1100)=F(1100)=1-\ e^{\frac{-1100}{1000}}=1-0.3328$$
$$=0.6671$$

4-حساب احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة بين 800 و1200 ساعة:

$$P(800\leq X\leq 1200)=P(X\leq 1200)-P(X\leq 800)$$
$$=F(1200)-F(800)\ =\left(1-\ e^{\frac{-1200}{1000}}\right)-\left(1-\ e^{\frac{-800}{1000}}\right)$$
$$=0.6988-0.5506=0.1482$$

5-حساب متوسط الزمن لبقاء الجزء الالكتروني وانحرافه المعياري:

أ-التوقع الرياضي:

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}=1000$$

ب-التباين:

$$V(X)=\frac{1}{\lambda^2}=1000000$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{\lambda}=1000$$

مثال 10: إذا كان زمن تقديم الخدمة للزبون في أحد مراكز بريد الجزائر يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 8 دقائق، فأوجد:

1- دالة كثافة الاحتمال التي تعبر عن الفترة الزمنية لتقديم الخدمة للزبون في هذا المركز لبريد الجزائر؟

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير؟

3- احتمال أن يتم تقديم الخدمة خلال 5 دقائق أو أقل؟

4- احتمال أن يتم تقديم الخدمة ما بين 6 و9 دقائق؟

5- متوسط الزمن اللازم لتقديم الخدمة للزبون وانحرافه المعياري؟

الحل:

1-كتابة دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير العشـــوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لتقديم الخدمة للزبون في هذا المركز لبريد الجزائر:

بما أن المتغير العشوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لتقديم الخدمة للزبون في هذا المركز لبريد الجزائر يتبع التوزيع الأسي، بمتوسط 8 دقائق، فإن: $0 < x < \infty$، و المتوســـط $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 8$ ، ومن ثم فإن قيمة λ تصـــبح تقدر بــ:

$\lambda = \frac{1}{8} = 0.125$ ، وتكتب دالة الكثافة لهذا المتغير بالصورة التالية:

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda . x} = 0.125\, e^{-0.125\, x} \qquad 0 < x < \infty$$

2-كتابة دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda . x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

وبتعويض قيمة λ تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-0.125\, x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

3-حساب احتمال أن يتم تقديم الخدمة خلال 5 دقائق أو أقل:

$$P(X \leq 5) = F(5) = 1 - e^{-0.125(5)} = 1 - 0.5352 = 0.4647$$

4-حساب احتمال أن يتم تقديم الخدمة ما بين 6 و9 دقائق:

$$\begin{aligned} P(6 \leq X \leq 9) &= P(X \leq 9) - P(X \leq 6) = F(9) - F(6) \\ &= \left(1 - e^{-0.125(9)}\right) - \left(1 - e^{-0.125(6)}\right) \\ &= 0.6753 - 0.5276 = 0.1477 \end{aligned}$$

5-حساب متوسط الزمن اللازم لتقديم الخدمة للزبون وانحرافه المعياري:

أ-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 8$$

ب-التباين:

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 64$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = 8$$

6-توزيع قاما:

أ- التعريف : يعد توزيع قاما من التوزيعات الشائعة الاستخدام التي تعتمد على عنصر الزمن أو التي تستعمل في قياس المهل الزمنية، خاصة عند تقدير دالة المعولية (الثبات) أو دالة البقاء، مثل : الفترة الزمنية لفحص مريض، الفترة الزمنية لبقاء إنسان على قيد الحياة مصاب بمرض عضال، أوقات الانتظار لدى المطاعم أو مكاتب الخدمات وحتى حجز قنوات الاتصال...إلخ، لهذا يشترط أن تكون القيم التي يأخذها المتغير العشوائي موجبة، ويعد هذا التوزيع الأساس النظري لتوليد بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة كالتوزيع الأسي، توزيع بيتا، توزيع كاي مربع، توزيع فيشر، توزيع ستودنت...إلخ.

فإذا كان لدينا متغير عشـوائي مسـتمر وليكن X مثلا، يتبع توزيع قاما، فإن دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & , x > 0 \;\; et \;\; \alpha, \beta > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

ويعبر اختصارا عن توزيع قاما بـ: $\boldsymbol{X \backsim G(\alpha, \beta)}$

حيث أن:

α، β تمثل معلمات توزيع قاما وتكونان موجبتان أي : $\alpha, \beta > 0$

$\Gamma(\alpha)$ تمثل دالة قاما والتي تكون من الشكل التالي:

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} \; e^{-x} dx$$

وبصـــورة عامة، إذا كان لدينا العدد n عدد صـحيح موجب، فإن دالة قاما تصبح:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

وفيما يلي بعض خصائص دالة قاما:

1) $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \;\; ; \; \forall \; n > 0$
2) $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) \qquad ; \forall\, n > 0$
3) $\Gamma(n) = (n-1)! \qquad ; \forall\, n > 0$
4) $\Gamma(n) = \infty \Rightarrow n \leq 0$
5) $\Gamma(1) = 0! = 1$
6) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
7) $\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(1-n)}{(-n)}$
8) $\Gamma(P)\Gamma(1-P) = \frac{\pi}{\sin(P.\pi)} \quad ; 0 < P < 1$

- **دالـة التوزيع التراكمي لهـذا التوزيع:** يتم التعبير عن دالـة التوزيع التراكمي لتوزيع قاما بالشكل الآتي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \frac{x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

ب-الخصائص العددية لتوزيع قاما:

-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \alpha.\beta$$

-التباين:

$$V(X) = \alpha.\beta^2$$

-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\alpha.\beta^2}$$

-ملاحظة: للتوزيعين قاما وبيتا علاقة بعدد من التوزيعات المهمة كالتوزيع الأسي وتوزيع كاي تربيع:

- فالتوزيع الأسي مثلا هو حالة خاصة من توزيع قاما عندما $\alpha = 1 , \beta = 1/\lambda$:

$$\alpha = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^{1-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^1 \Gamma(1)} = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} = \lambda\, e^{-\lambda.x}$$

- وعندما تكون المعلمتين ($\beta = 2$ ،$\alpha = \frac{n}{2}$) فإن توزيع قاما يتحول إلى وزيع كاي مربع بدرجة حرية (n)، والتي تعتبر حالة خاصة من توزيع قاما، والمعرفة بالمعادلة التالية :

$$\alpha = \frac{n}{2}\ et\ \beta = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

مثال 11: أحسب ما يلي:

- $\Gamma(8)$ ، $\Gamma(6)$ ، $\Gamma(9)$ ، $\Gamma(13)$ ، $\Gamma(5.5)$، $\Gamma(3.5)$، $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$

- $\int_0^\infty x^3\ e^{-x} dx$ ، - $\int_0^\infty x^7\ e^{-x} dx$ ، $\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ e^{-x} dx$

الحل:

- $\Gamma(8) = 7! = 5040$
- $\Gamma(6) = 5! = 120$
- $\Gamma(9) = 8! = 40320$
- $\Gamma(13) = 12! = 47900160$
- $\Gamma(5.5) = 4.5\Gamma(4.5) = (4.5)(3.5)\Gamma(3.5) = (4.5)(3.5)(2.5)\Gamma(2.5) = (4.5)(3.5)(2.5)(1.5)\Gamma(1.5) = (4.5)(3.5)(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 29.53125\sqrt{\pi}$
- $\Gamma(3.5) = (2.5)\Gamma(2.5) = (2.5)(1.5)\Gamma(1.5) = (2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 1.875\sqrt{\pi}$
- $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{105}{16}\right)\sqrt{\pi}$
- $\int_0^\infty x^3\ e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{4-1}\ e^{-x}dx = \Gamma(4) = 3! = 6$
- $\int_0^\infty x^7\ e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{8-1}\ e^{-x}dx = \Gamma(8) = 7! = 5040$
- $\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{\frac{-1}{2}}\ e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{(\frac{1}{2}-1)}\ e^{-x}dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

7-توزيع بيتا:

أ-التعريف : إن توزيع بيتا مشـــتق من دالـة بيتـا أو مـا يســـمى في بعض الأحيـان بتكامل بيتـا، وللتوزيع أهميـة في تطبيقـات الرقـابـة على جودة الإنتـاج من خلال تكوين جداول عينات القبول والتي تستخدم في اتخاذ القرار بشأن قبول وحدات الإنتاج اســـتنادا إلى نســـب الوحدات المعيبة في العينة فضـــلا عن التطبيقات الأخرى.

ودالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع تعطى وفق الصياغة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1\ \ et\ \ (\alpha,\beta) > 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

ويمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0<x<1 \;\; et \;\; (\alpha,\beta)>0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

ويعبر اختصارا عن توزيع بيتا بـ: $\boldsymbol{X \backsim \beta(\alpha,\beta)}$

حيث $\beta(\alpha,\beta)$ هي دالة بيتا والتي تحسب كالتالي :

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du, \qquad \alpha,\beta>0$$

ولدالة بيتا علاقة بدالة قاما حيث نجد أن:

$$\beta(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ومن بين خواص هذه الدالة:

$$\beta(\alpha,\beta)=\beta(\beta,\alpha), \qquad \beta(1,1)=1\,, \qquad \beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$$

- **دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع:** يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمي لتوزيع قاما بالشكل الآتي:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_0^x f(x)dx=\begin{cases}0 & si\ x\le 0\\ \dfrac{1}{\beta(\alpha,\beta)}\displaystyle\int_0^x x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}dx & si\ 0<x<1\\ 1 & si\ x\ge 1\end{cases}$$

ب-الخصائص العددية لتوزيع بيتا:

-التوقع الرياضي:

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

-التباين:

$$V(X)=\frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}$$

-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}}$$

مثال 12: أحسب ما يلي:

$$B(3,4),\qquad B(1/2,1/2),\quad B(n,2),\qquad B(1,n),\qquad B(n,1)\quad (n\in N)$$

$$B(3,2),\quad \int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx,\qquad \int_0^1 x(1-x)dx$$

$$B(3,4)=\frac{(3-1)!(4-1)!}{(7-1)!}=\frac{2}{120}=\frac{1}{60},\quad B(1/2,1/2)=\frac{\left(\sqrt{\pi}\right)\left(\sqrt{\pi}\right)}{(1/2)+(1/2)}=\pi,$$

$$B(n,2)=\frac{(n-1)!1!}{(2+1)!}=\frac{1}{n(n+1)!},\qquad B(1,n)=\frac{1(n-1)!}{n!}=\frac{(n-1)!}{n(n-1)!}=\frac{1}{n},\qquad B(n,1)=\frac{(n-1)!1}{n!}=\frac{1}{n}$$

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx=B(5,4)=\frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)}=\frac{4!3!}{8!}=\frac{1}{280},\qquad \int_0^1 x(1-x)dx=B(2,2)=\frac{1!1!}{3!}=1/6$$

$$B(3,2)=1/[n(n+1)]=1/[3(4)]=1/12$$

مثال 13: أحسب النسبة المتوقعة للإنتاج التالف والتباين، إذا كانت نسبة الإنتاج التالف تتبع التوزيع التالي:

$$f(x)=\begin{cases}6(1-x)^5, & 0<x<1\\ 0\quad , & \text{sinon}\end{cases}$$

من المثال السابق لدينا: $B(1,n)=1/n \Rightarrow 6=1/B(1,6).$

بوضع α و β يساويان 1 و 6 على التوالي، نجد أن **B(1, 6)** ~ X

ومنه:

$$\mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=1/2,\qquad \sigma^2=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}=\frac{4}{16(5)}=1/20.$$

مثال 14: نسبة الإنتاج المباع في مؤسسة تتبع التوزيع التالي. أحسب النسبة المتوقعة، واحتمال أن تبلغ النسبة أكثر من 35%.

$$f(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0<x<1\\ 0 & ,\ \text{sinon}\end{cases}$$

$$12=3*4\Rightarrow 12=1/B(3,2)\Rightarrow X\sim B(3,2)\Rightarrow \mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{3}{3+2}=3/5=60\%$$

$$P(X>0.35)=\int_{0,35}^1 12x^2(1-x)dx.$$

$$soit: v=x^2dx\ et\ u=1-x\Rightarrow P(X>0.35)=12\left(\left[(1-x)\frac{x^3}{3}\right]_{0,35}^1+\int_{0,35}^1 x^2dx\right)=0.3125$$

8-توزيع ستودنت (t)

أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة، يشبه كثيرا التوزيع الطبيعي، تكمن تطبيقاته في نظرية العينات واختبار الفرضيات كبديل للتوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينة صغيرا.

دالة كثافة الاحتمالية تعطى بالعلاقة التالية:

$$f(t) = c(1 + \frac{t^2}{v})^{-(v+2)/2}$$

حيث:

C ثابت مرتبط بـ v

$\boldsymbol{v}$ درجات الحرية و $-\infty < t < +\infty$

نرمز لتوزيع t بالرمز $t(\rho, v)$

تحسب احتمالات توزيع t من خلال الجدول (أنظر الملاحق)

حيث تسجل درجات الحرية في العمود الأيسر، أما في الأعلى فتقرأ المساحة (الاحتمالية) وفي داخل الجدول تقرأ قيمة t المقابلة.

مثال 15:

ما هي قيمة المساحة التي تقابل حجم العينة 11 و t=2.812.

الجواب:

لدينا $v = n - 1$، أي أن $v = 10$ و $\mathrm{v} = 2.812$ فإن المساحة المقابلة هي 0.95

إن توزيع t هو توزيع متماثل ،حيث أن:

$\mu = 0$ حيث $v > 2$

$$\sigma^2 = \frac{v}{v-2}$$

وبالتالي أمكن الاستفادة من هذه الخاصية في حساب المساحات الصغيرة (والغير موجودة في الجدول أحيانا)، وذلك بتطبيق العلاقة التالية:

$$t_{1-\mathrm{p}} = -\mathrm{t}_{\mathrm{p}}$$

مثال 16:

باستعمال توزيع ستودنت، أوجد المساحة الواقعة على يسار t=-2.13 وعند درجات حرية 15.

لدينا:

$t_{1-\mathrm{p}} = -\mathrm{t_p}$، وحيث أن قيمة t سالبة فأننا نستخدم خاصية التناظر (لاية جد قيم سالبة في جدول t) أي:

$$t(p,15) = -t(1-p,15)$$

أن قيمة t=-2.13 تقابلها t=2.13 ومساحتها 0.97 وحيث أن المساحة المطلوبة هي على يسار 2.13- ،فيكون:

1-p=0.97 من الجدول، ومنه p=1-0.97=0.03،أي المساحة الواقعة على يسار 13. 2-=t وعند درجات حرية 15 هي 0.03

مثال 17:

أوجد قيمة p بحيث تكون: t=(p,15)=-2.60 .

الحل:

بالتماثل نجد:$t(p,15) = -t(1-p,15)$،

أي أن: -t=(1-p,15)=-2,60

ومن الجدول: 1-p=0.99 هذا يعني أن: p=0.01.

مثال 18:

أوجد قيمة t التي تقابل p=0.05 وv=5.

الحل:

حيث أن قيمة المساحة صغيرة جدا، يمكن تطبيق الخاصية التالية:

t(0.05,15)=-t(1-0.015,15)

t(0.05,15)=-t(0.95,1 5)

9-توزيع كاي مربع x^2 (Khi deux)

توزيع احتمال متصـــل، له اســـتعمالات متعددة خاصـــة في اختبارات الارتباط والاســـتقلال والتوفيق، وهو معرف بالمتغير العشـوائي X^2. دالة كثافته الاحتمالية تعطى بالعلاقة التالية:

$$f(x^2) = c(x^2)^{(v-2)/2} e^{-x^2/2}$$
$$x^2 > 0$$

حيث أن c ثابت يعتمد على v ليجعل المســاحة تحت المنحني تسـاوي 1

و v=n-1

ولإيجاد احتمالات ال X^2 فإننا نســتخدم الجدول الخاص بهذا التوزيع، حيث نجد أفقيا المســـاحـة المقابلة ،وعموديا درجات الحرية وفي داخل الجدول تقرأ قيم ال X^2.

مثال 19:

إذا كان المتغير العشــوائي x^2 يخضــع لتوزيع كاي تربيع على درجات حرية 10، أوجد :

أ) قيمة x^2 التي يكون على يسارها 0.99 من المساحة .

$x^2\ [0.99\ ;10] = ??$

من الجدول مباشرة : $x^2 = 23.209$

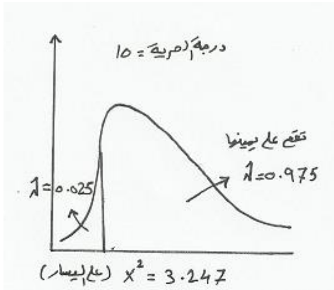
ب) قيمة x^2 التي يكون الى يمينها 0.01 من المساحة .

قيمة x^2 التي يكون الى يمينها 0.01 من المساحة

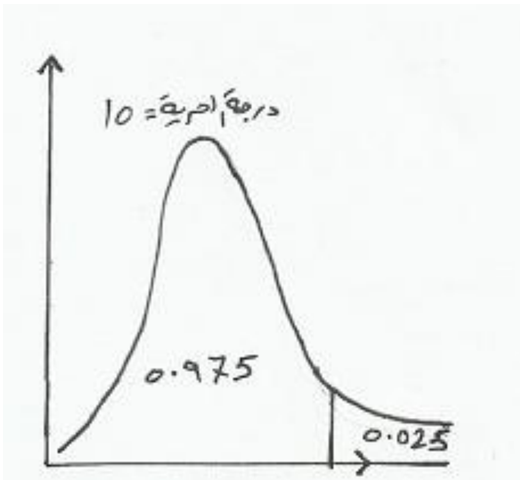
لاحظ أن المســـاحـة التي تقع على يمين $0.01 = \sqrt{}$ هي المســـاحـة التي تقع على يسار $0.99 = \sqrt{}$, وبذالك فإن قيمة $x^2 = 23.209$

ت) قيمة x^2 التي يكون الى يســـارها 0.975 و القيمة التي يكون إلى يســـارها 0.025 من المساحة؟

المساحة اليمين $x^2[0.025\ ;10] = x^2[0.975\ ;10]$ المساحة من اليسار



$$x^2[0.025\,;10] = x^2[0.975\,;10] = 3.247$$



ملاحظة: نعبر عن قيمة المتغير العشـوائي x^2 التي يقع على يسـارها المسـاحة $\sqrt{}$ بدرجة حرية v تحت منحنى توزيع x^2 بالرمز

$$\mathbf{x^2}\ [\sqrt{}; \mathbf{v}]$$

مثال 20: إذا كان المتغير العشـوائي x^2 يخضع لتوزيع كاي بدرجة حرية v = 15

أوجد :

1) قيمة x^2 التي تقع 0.99 من المساحة على يسارها ؟

2) قيمة x^2 التي تقع 0.01 من المساحة على يمينها ؟

10-توزيع F (فيشر، سنيديكور، Snedecor، Fischer):

أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة المهمة والمستخدمة في الفرضيات وفي تحليل التباين. يعرف متغير العشوائي بالدالة الاحتمالية التالية:

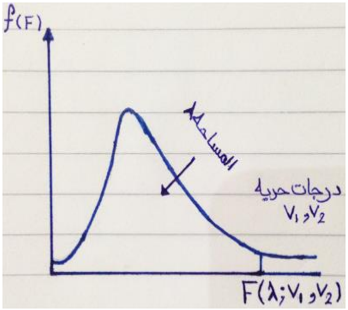
$$F > 0 \text{ و } f(F) = \frac{CF^{(v1-2)/2}}{(V_2 + V_2.F)^{(v1+V)/2}}$$

يرمز له بالرمز $F(V_1, V_2)$، حيث V_1 وV_2 هما درجة الحرية و C هو ثابت يعتمد على V_1 و V_2 ليجعل المساحة تحت المنحنى يساوي 1.

إن لهذا التوزيع عددان من درجة الحرية، وحيث أن V_2 لا تظهر إلا في المقام، فإننا نسمي V_2 درجات حرية البسط. يقترب توزيع F من التوزيع الطبيعي بزيادة قيمتي V_1 وV_2

مثال 21: F(0.95,9.7)= 3.68

خواص منحنى توزيع F: منحنى توزيع F أحادي المنوال ملتوٍ قليلاً إلى اليمين، وكلما زادت درجات الحرية V_1 , V_2 يقترب منحنى توزيع F من منحنى التوزيع الطبيعي وهو موجب لجميع قيم F بين الصفر واللانهاية.



➢ **ملاحظة:** هناك بعض المساحات الصغيرة لا توجد في جداول توزيع F، ولإيجاد هذه المساحة فانه يمكن استعمال القاعدة التالية:

$$\mathrm{F(p, v1, v2)} = \frac{1}{\mathrm{F(1-p, v2, v1)}}$$

مثال 22:

$$F(0.095,7,10) = \frac{1}{F(0.95,7,10)} = \frac{1}{3.14} = 0.318$$
$$F(0.99,11,15) = \frac{1}{F(0.99,15,11)} = \frac{1}{4.25} = 0.23$$

مثال 23:

أ-أوجد ما يلي:

1- ← **F(0.95 ; 9.7)** معدل (3.73 , 3.64)

←F = 3.68

2- ← **F(0.99 ; 9.7)** معدل (6.84 , 6.62)

←F = 6.73

وفي حال إيجاد قيم F إذا كانت المساحة على يسارها وقيم غير موجودة في الجدول (بمعنى قيم صغيرة) مثل $F(0.05 ; V_1 , V_2)$ أو $F(0.01 ; V_1 , V_2)$ ، ففي هذه الحالة تستخدم الصيغة التالية:

$$F(\lambda; V_1 ,V_2) = \frac{1}{F(1-\lambda; V_2 ,V_1)}$$

ب-أوجد قيمة ما يلي:

1- F(0.05 ; 10 , 7) $= \frac{1}{F(1-0.05;7,10)} = \frac{1}{F(0.95;7,10)} = \frac{1}{3.14}$

2- F(0.01 ; 1 , 15) $= \frac{1}{F(0.99\,;15\,,1)} = \frac{1}{\frac{6056+6209}{2}}$

مثال 24: أوجد المساحة إلى يسار F=3 إذا كانت $V_1 = 7$ ، $V_2 = 20$؟

أوجد المساحة λ بحيث $F(\lambda\ ; 5 , 5)$

علاقة بين X^2 و t و F:

أ) $F(1-p,1,v)=t^2(1-(p/2),v)$

- **مثال:**

إذا كانت لدينا: p=0,05 وv=3 فإن:

$t(1-(p\ /2),v)=t(1-(0,05/2),3)$

$t^2=10.11$

ب) $F_{(p,v,\infty)} = \frac{X^2(p,v)}{v}$

- **مثال:**

$F(0.95,3,\infty)=2\ .60$

$$\frac{X^2(0.95,3)}{3} = \frac{7.81}{3} = 2.60$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

المبيعات اليومية لإحدى الشركات تخضع لدالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{500}(10x - x^2) & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- تأكد أن الدالة تمثل دالة كثافة احتمال.

2- أكتب شكل دالة التوزيع $F(x)$.

3- أحسب احتمال أن تتراوح المبيعات بين خمسة وثمانية وحدات مباعة.

4- أحسب كلا من التوقع الرياضي، التباين، والانحراف المعياري.

التمرين الثاني:

يتبع المتغير العشوائي X للدالة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}c(2x + 1) & 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{2}{5}c & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- حدد قيمة الثابت C حتى تكون الدالة دالة كثافة احتمال.

2- احسب الاحتمالات التالية: أ- $P(X > 1,5)$ ب- $P(X < 2,5)$

3- احسب التوقع الرياضي.

التمرين الثالث:

تفيد إحصائيات الاستهلاك الغذائي في الجزائر أن متوسط الاستهلاك السنوي من اللحوم للفرد الواحد يقدر بـ: 45 كلغ، وأن الانحراف المعياري يقدر بـ: 11 كلغ، التحليل الإحصائي أثبت أن هذا المتغير يتوزع طبيعيا.

1- ما هي الصيغة الرياضية للقانون الاحتمالي؟ مثل بيانيا هذا التوزيع؟

2- أحسب نسبة الأفراد الذين:

أ-يفوق استهلاكهم السنوي 55 كلغ. **ب**-يتراوح استهلاكهم بين 25 و40 كلغ.

ج-يقل استهلاكهم السنوي عن 67 كلغ.

التمرين الرابع:

نسبة الكمية المنتجة المحصورة بين 100 و110 وحدة منتجة هي 47.72% ومتوسط التوزيع الطبيعي للكمية المنتجة هو الحد الأدنى للحصر السابق. فما هو احتمال:

1- أن تزيد الكمية المنتجة عن 105 وحدة.

2- أن تقل الكمية المنتجة عن 95 وحدة.

3- أن تتراوح بين 105 و110 وحدة.

4- أن تتراوح بين 95 و90 وحدة.

ملاحظة: المتراجحتان التاليتان كافيتان عن استخدام جدول التوزيع الطبيعي:

$P(-2 \le Z \le 2) = 0,9544$ $\qquad$ $P(-1 \le Z \le 1) = 0,6826$

التمرين الخامس:

المبيعات اليومية لإحدى الشركات تخضع لدالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(x) = \frac{1}{60}(3x^2 - 1) \qquad 0 \leq x \leq 4$$

1- تأكد أن الدالة f تمثل دالة كثافة احتمال.

2- أحسب احتمال ان تقل المبيعات اليومية عن ثلاث وحدات مباعة.

3- أحسب احتمال ان تتراوح المبيعات اليومية بين وحدتين وثلاث وحدات مباعة.

4- أحسب توقع المبيعات اليومية.

5- بفرض أن المبيعات اليومية لشركة أخرى تخضع لدالة كثافة الاحتمال التالية: $f(x) = \frac{1}{\alpha}(x + 3) \quad 0 \leq x \leq 6$

- حدد قيمة α حتى تكون الدالة f تمثل دالة كثافة احتمال.

التمرين السادس:

باعتبار أن الكمية المنتجة يوميا من مادة الدقيق لإحدى المطاحن تتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط قدره 50 قنطار، وانحراف معياري قيمته تساوي 5 قناطير.

1- أكتب دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي.

2- ما احتمال أن تزيد الكمية المنتجة من مادة الدقيق عن 55 قنطار في اليوم.

3- ما احتمال أن تقل الكمية المنتجة من مادة الدقيق عن 45 قنطار في اليوم.

4- ما احتمال أن تتراوح الكمية المنتجة من مادة الدقيق بين 40 و 45 قنطار في اليوم.

5- ما هي كمية الدقيق المنتجة في اليوم، التي أقل منها 84,13% من الكمية المنتجة؟

التمرين السابع:

استورد أحد المراكز التجارية الكبرى 240 طن من مادة القهوة، ووضعها في مخازنه، حيث يقوم باستخراج الكمية المخزنة وبيعها بكميات متساوية ومنتظمة على مدار أشهر السنة.

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية التي تعبر عن مدة البيع لهذه الكمية من القهوة؟

2- عين دالة التوزيع التراكمية $F(X)$ ؟ ثم مثلها بيانيا؟

3- ما هو احتمال أن يبيع كل الكمية خلال الأشهر الثلاثة الأخيرة على الأقل؟

4- ما هو احتمال أن يبيع كل الكمية خلال 7 أشهر على الأقل؟ وما هي الكمية المتبقية في المخزن بعد مرور 7 أشهر من البيع؟

5- أحسب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للفترة الزمنية لبيع القهوة؟

التمرين الثامن:

في دراسة حول أطوال 1000 طالب بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، وجد أن هذه الأطوال تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط (160 سم) وانحراف معياري مقدر بـ (10 سم).

انطلاقا من هذه المعطيات أوجد:

1- احتمال أن تزيد أطوال الطلبة عن 170 سم؟

2- احتمال أن تقل أطوال الطلبة عن 170 سم؟

3- النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 180 سم؟

4- النسبة المئوية للطلبة الذين تتراوح أطوالهم بين 165 سم و175 سم؟

5- عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 سم؟

التمرين التاسع:

درجات امتحان نصف السنة في مقياس الاحصاء لفصل كبير موزعة طبيعيا بوسط حسابي 12 وانحراف معياري 3، فإذا كان بهذا الفصل 500 طالب، فأوجد:

1- احتمال أن تقل علامات الطلبة عن 10؟

2- احتمال أن تزيد علامات الطلبة عن 15؟

3- احتمال أن تتراوح علامات الطلبة بين 14 و16؟

4- عدد الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 8 و11؟

5- يريد الأستاذ أن يعطي تقدير A لنسبة 10 % من الطلاب، ما هو الحد الأدنى للدرجات الذي يعطي تقدير A في امتحان الاحصاء؟

التمرين العاشر:

في وقت الظهيرة يتلقى مركز شرطة في المتوسط 5 مكالمات في الساعة، فإذا حددنا انطلاق الزمن في لحظة معينة X_i، فأوجد:

1- التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي X الذي يعبر عن تلقي المكالمات انطلاقا من لحظة زمنية معينة؟

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير؟

3- احتمال أن يتلقى هذا المركز مكالمة خلال 15 دقيقة أو أقل؟

4- احتمال أن يتلقى هذا المركز مكالمة خلال النصف ساعة القادمة؟

5- احتمال أن يتلقى هذا المركز مكالمة ما بين النصف ساعة و45 دقيقة؟

6- متوسط زمن تلقي المكالمات وانحرافه المعياري؟

التمرين الحادي عشر:

إذا كانت مدة إصــلاح الهواتف النقالة في أحد مراكز صــيانة الأجهزة الكهربائية هي 20 دقيقة في المتوســط لكل هاتف، فإذا كانت مدة الانتهاء من الإصلاح تحدد انطلاقا من لحظة زمنية معينة X_i عشوائية، فأوجد:

1- التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشــوائي X الذي يعبر عن المدة الزمنية اللازمة لإصلاح الهواتف النقالة؟

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير؟

3- احتمال أن يتم إصلاح هاتف في هذا المركز خلال 10 دقائق أو أقل؟

4- احتمال أن يتم إصلاح هاتف في هذا المركز خلال نصف ساعة القادمة؟

5- احتمال أن يتم إصلاح هاتف في هذا المركز ما بين 12 و22 دقيقة؟

6- متوسط زمن إصلاح الهاتف في هذا المركز وانحرافه المعياري؟

الحلــــــول

حل التمرين الأول:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{500}(10x-x^2) & 0\le x\le 10\\ 0 & \text{بخلاف ذلك}\end{cases}$$

1-التأكد من أن الدالة تمثل دالة كثافة احتمال:

حتى تكون الدالة دالة كثافة احتمال يجب أن يكون: $\int f(x)dx=1$

$$\int f(x)dx=\int_0^{10}\frac{3}{500}(10x-x^2)dx=\frac{3}{500}\int_0^{10}(10x-x^2)\,dx$$
$$=\frac{3}{500}\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}=\frac{3}{500}\left[500-\frac{1000}{3}\right]=\frac{3}{500}\cdot\frac{500}{3}$$
$$=1$$

ومنه الدالة دالة كثافة احتمال.

2-كتابة دالة التوزيع F(x):

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx}$$

$$\boldsymbol{x} < 0 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 0$$

$$\boldsymbol{x \in [0 - 10]} : F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{x} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{x} \frac{3}{500}(10x - x^2)dx = \frac{3}{500}\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]$$

$$\boldsymbol{x} > 10 : F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{10} f(x)\,dx + \int_{10}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0}(0)\,dx + \int_{0}^{10}\frac{3}{500}(10x - x^2)dx + \int_{10}^{x}(0)\,dx = 1$$

أي أن:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{3}{500}\left[5x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right] & x \in [0 - 10] \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

3-حساب احتمال أن تتراوح المبيعات بين خمسة وثمانية وحدات مباعة:

$$P(5 \leq x \leq 8) = \int_{5}^{8} \frac{3}{500}(10x - x^2)dx = \frac{3}{500}\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$= \frac{3}{500}\left[\left[5(8)^2 - \frac{(8)^3}{3}\right] - \left[5(5)^2 - \frac{(5)^3}{3}\right]\right]$$

$$= \frac{3}{500}\left(\frac{448}{3} - \frac{250}{3}\right) = \frac{3}{500} \cdot 66 = \frac{99}{250} = \mathbf{0.396}$$

4-حساب كلا من التوقع الرياضي، التباين، والانحراف المعياري:

أ-حساب التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_0^{10} xf(x)dx = \int_0^{10} \frac{3}{500} x(10x - x^2)dx = \frac{3}{500}\int_0^{10} (10x^2 - x^3)dx$$

$$= \frac{3}{500}\left[10\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = \frac{3}{500}\left[\left(\frac{10(10)^3}{3} - \frac{(10)^4}{4}\right) - (0)\right]$$

$$= \frac{3}{500}\left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{4}\right) = \frac{3}{500}\left(\frac{10000}{12}\right) = 5$$

ب-حساب التباين:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X^2) = \int_0^{10} x^2 f(x)dx = \int_0^{10} \frac{3}{500} x^2(10x - x^2)dx = \frac{3}{500}\int_0^{10}(10x^3 - x^4)dx \quad E(X^2) = \frac{3}{500}\left[10\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{10} = \frac{3}{500}\left[\left(\frac{10(10)^4}{4} - \frac{(10)^5}{5}\right) - (0)\right]$$

$$E(X^2) = \frac{3}{500}[25000 - 20000] = 30 \quad V(X) = 30 - (5)^2 = 5$$

ج-حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5} = 2{,}236$$

حل التمرين الثاني:

1-تحديد قيمة الثابت حتى تكون الدالة دالة كثافة احتمال:

$$\int f(X)dx = 1 \Rightarrow \int_1^2 C(1/5X + 1/10)\,dx + \int_2^3 C(2/5)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow C\left(\left[\frac{X^2}{10} + \frac{X}{10}\right]_1^2 + \left[\frac{2X}{5}\right]_2^3\right) = 1 \Rightarrow C\left(\left[\frac{2^2}{10} + \frac{2}{10}\right] - \left[\frac{1^2}{10} + \frac{1}{10}\right] + \left[\frac{2x3}{5} - \frac{2x2}{5}\right]\right) = 1$$

$$\Rightarrow C\left(\left[\frac{4}{10}\right] + \left[\frac{4}{10}\right]\right) = 1 \Rightarrow \frac{8}{10}C = 1 \Rightarrow \frac{4}{5}C = 1 \Rightarrow C = \frac{5}{4}$$

لتصبح الدالة من الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{1}{8} & 1 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

2-حساب الاحتمالات:

أ- $P(X > 1{,}5)$:

$$P(X > 1{,}5) = \int_{1{,}5}^{2} (X/4 + 1/8)dx + \int_{2}^{3} 1/2\ dx$$

$$\Rightarrow \left({}_{1{,}5}^{2}\left[\frac{X^2}{8} + \frac{X}{8}\right] + {}_{2}^{3}\left[\frac{X}{2}\right] \right) = \left(\left[\frac{2^2}{8} - \frac{2}{8}\right] - \left[\frac{1{,}5^3}{8} - \frac{1{,}5}{8}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] \right) = \frac{25}{32} = 0{,}7812$$

ب-P(X<2,5):

$$P(X > 1{,}5) = \int_{1}^{2} (X/4 + 1/8)dx + \int_{2}^{2{,}5} 1/2\ dx$$

$$\Rightarrow \left({}_{1}^{2}\left[\frac{X^2}{8} + \frac{X}{8}\right] + {}_{2}^{2{,}5}\left[\frac{X}{2}\right] \right) = \left(\left[\frac{2^2}{8} + \frac{2}{8}\right] - \left[\frac{1^2}{8} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{2{,}5}{2} - \frac{2}{2}\right] \right) = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

3-حساب الوسط الحسابي:

$$E(X) = \int\ X \times f(x) = X(\int_{1}^{2} (X/4 + 1/8)dx + \int_{2}^{3} 1/2\ dx)$$

$$= \int_{1}^{2} (X^2/4 + 1/8X^2)dx + \int_{2}^{3} 1/2\, X\ dx$$

$$= \left({}_{1}^{2}\left[\frac{X^3}{12} + \frac{X^2}{16}\right] + {}_{2}^{3}\left[\frac{X^2}{4}\right] \right) = \left(\left[\frac{2^3}{12} + \frac{2^2}{16}\right] - \left[\frac{1^3}{12} + \frac{1^2}{16}\right] + \left[\frac{3^2}{4} - \frac{2^2}{4}\right] \right) = \frac{97}{48} = 2{,}02$$

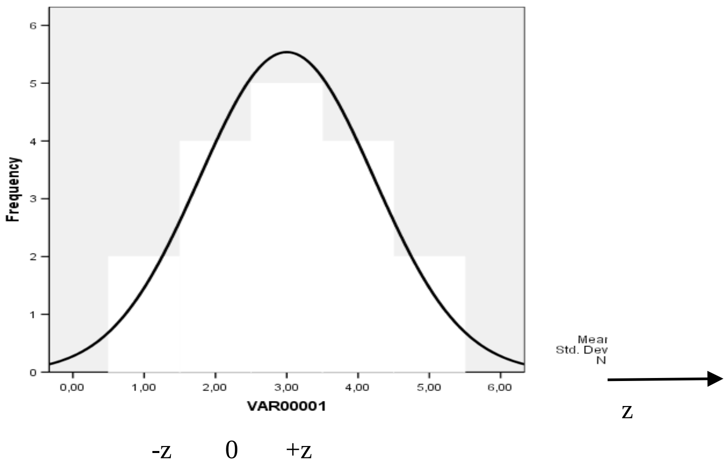
حل التمرين الثالث:

تفيد إحصائيات الاستهلاك الغذائي في الجزائر أن متوسط الاستهلاك السنوي من اللحوم للفرد الواحد يقدر بـ: 45 كلغ، وأن الانحراف المعياري يقدر بـ: 11 كلغ، التحليل الإحصائي أثبت أن هذا المتغير يتوزع طبيعيا.

1-الصيغة الرياضية للقانون الاحتمالي:

$$f(x) = \frac{1}{11\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-45}{11}\right)^2}$$

-التمثيل البياني لهذا التوزيع:



2-حساب نسبة الأفراد الذين:

أ-يفوق استهلاكهم السنوي 55 كلغ:

$$P(X > 55) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{55-45}{11}\right) = P\left(Z > 0{,}91\right) = P\left(Z < -0{,}91\right)$$
$$= 1 - 0{,}8186 = 0{,}1814$$

ب-يتراوح استهلاكهم بين 25 و40 كلغ:

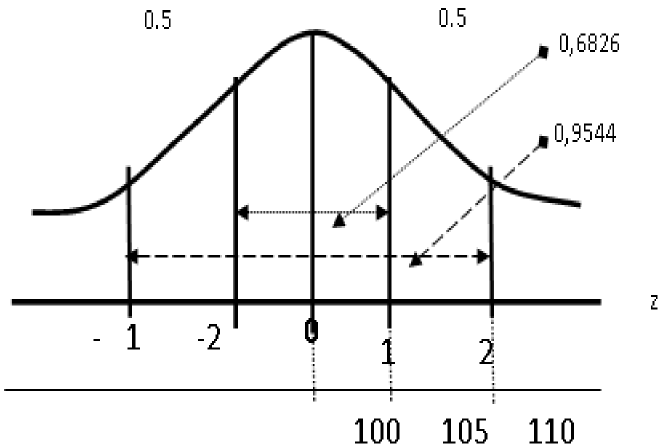
$$P(25 < X < 40) = P\left(\frac{25-45}{11} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{40-45}{11}\right) = P(-1{,}82 < Z < -0{,}45)$$
$$= P(Z < -0{,}45) - P(Z < -1{,}82)$$
$$= 0{,}3264 - 0{,}0344$$
$$= 0{,}292$$

ج-يقل استهلاكهم السنوي عن 67 كلغ:

$$P(X < 67) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{67-45}{11}\right) = P(Z < 2) = 0{,}9772$$

حل التمرين الرابع:

X متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع طبيعي عادي متوسطه μ = 100، غير أن الانحراف المعياري غير موجود ، من الحصر السابق ومن المتراجحة نحدد الانحراف المعياري :



لدينا: $P(100 < X < 110) = 0{,}4772$

ومنه: $P(\frac{100-100}{\sigma} < Z < \frac{110-100}{\sigma}) = 0{,}4772$ أي: $P(0 < Z < \frac{10}{\sigma}) = 0{,}4772$

من المتراجحة: $P(-2 \le Z \le 2) = 0{,}9544$ نجد أن:

$$P(0 \le Z \le 2) = \frac{0{,}9544}{2} = 0{,}4772$$

ومنه $P(0 < Z < \frac{10}{\sigma}) = P(0 < Z < 2) = 0{,}4772$ أي أن $\frac{10}{\sigma} = 2 \Leftarrow \frac{10}{2} = \sigma$

$5 = \sigma \Leftarrow$

إذن لدينا: $\sigma = 5$ و $\mu = 5$

أ-حساب احتمال:

1-أن تزيد الكمية المنتجة عن 105 وحدة:

$$P(X > 105) = P(Z > \frac{105-100}{5}) = P(Z > 1)$$

من المتراجحة: $P(-1 \leq Z \leq 1) = 0,6826$ نجد أن:

$$P(0 \leq Z \leq 1) = \frac{0,6826}{2} = 0,3413$$

ومنه: $P(X > 105) = P(Z > 1) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587$

2-أن تقل الكمية المنتجة عن 95 وحدة:

$$P(X < 95) = P(Z > \frac{95-100}{5}) = P(Z > -1)$$

من المتراجحة: $P(-1 \leq Z \leq 1) = 0,6826$ نجد أن:

$$P(-1 \leq Z \leq 0) = \frac{0,6826}{2} = 0,3413$$

ومنه: $P(X < 95) = P(Z < -1) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587$

3-أن تتراوح بين 105 و110 وحدة:

$$P(105 < X < 110) = P(\frac{105-100}{5} < Z < \frac{110-100}{5}) = P(1 < Z < 2)$$

من المتراجحة: $P(-1 \leq Z \leq 1) = 0,6826$ نجد أن:

$$P(0 \leq Z \leq 1) = \frac{0,6826}{2} = 0,3413$$

من المتراجحة: $P(-2 \leq Z \leq 2) = 0,9544$ نجد أن:

$$P(0 \leq Z \leq 2) = \frac{0,9544}{2} = 0,4772$$

ومنه: $P(105 < X < 110) = P(1 < Z < 2) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359$

4-أن تتراوح بين 95 و90 وحدة.

$$P(90 < X < 95) = P(\frac{90-100}{5} < Z < \frac{95-100}{5}) = P(-2 < Z < -1)$$

من المتراجحة: $P(-1 \le Z \le 1) = 0,6826$ نجد أن:

$$P(-1 \le Z \le 0) = \frac{0,6826}{2} = 0,3413$$

من المتراجحة: $P(-2 \le Z \le 2) = 0,9544$ نجد أن:

$$P(-2 \le Z \le 0) = \frac{0,9544}{2} = 0,4772$$

ومنه:

$$P(90 < X < 95) = P(\frac{90-100}{5} < Z < \frac{95-100}{5}) = P(-2 < Z < -1) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359$$

حل التمرين الخامس:

1. حتى تكون الدالة دالة كثافة احتمال يجب: $\int_0^4 f(x)dx = 1$

$$\int_0^4 \frac{1}{60}(3x^2-1)dx = \frac{1}{60}\int_0^4 (3x^2-1)\,dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{60}[x^3-x]_0^4 = \frac{1}{60}[(4^3-4)-(0)] = 1$$

2. حساب احتمال أن تقل المبيعات عن ثلاث وحدات مباعة:

$$p(x<3) = \int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{60}\int_0^3 3x^2 - 1dx = \frac{1}{60}[x^3-x]_0^3 = \frac{1}{60}[(3^3-3)-(0)]$$

$$= \frac{1}{60}[(24)-(0)] = \frac{1}{60}\cdot 24 = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = \mathbf{0.4}$$

3. حساب احتمال أن تتراوح المبيعات بين وحدتين وثلاث وحدات:

$$p(2<x<3) = \int_2^3 f(x)dx = \frac{1}{60}\int_2^3 3x^2 - 1dx = \frac{1}{60}[x^3-x]_2^3$$

$$= \frac{1}{60}[(3^3-3)-(2^3-2)] = \frac{1}{60}[(24)-(6)] = \frac{1}{60}\cdot 18 = \frac{18}{60}$$

$$= \frac{3}{10} = \mathbf{0.3}$$

4. حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري:

$$\mu = E(x) = \int_0^4 xf(x)dx = \frac{1}{60}\int_0^4 x(3x^2-1)dx = \frac{1}{60}\int_0^4 3x^3 - xdx = \frac{1}{60}\left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{60}\left[\left(\frac{3}{4}(4)^4 - \frac{4^2}{2}\right) - (0)\right] = \frac{1}{60}\cdot 184 = \frac{46}{15} = 3.0666$$

5. بفرض أن المبيعات اليومية لشـــركة أخرى تخضـــع لدالة كثافة الاحتمال التالية:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\alpha}(x+3) \qquad 0 \le x \le 6}$$

- تحديد قيمة α حتى تكون الدالة f تمثل دالة كثافة احتمال.

حتى تكون الدالة دالة كثافة احتمال يجب: $\int_0^6 f(x)dx = 1$

$$\int_0^6 \frac{1}{\alpha}(x+3)dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^6 (\boldsymbol{x+3})\, dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{6^2}{2} + 3(6)\right) - (0)\right] = 1$$

$$\frac{1}{\alpha}[36] = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 36}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{36}(x+3) \qquad 0 \le x \le 6}$$

حل التمرين السادس:

باعتبار أن الكمية المنتجة يوميا من مادة الدقيق لإحدى المطاحن تتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسـط قدره 50 قنطار، وانحراف معياري قيمته تسـاوي 5 قناطير.

1-كتابة دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي:

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-50}{5}\right)^2} = \qquad X \in \left]-\infty, +\infty\right[$$

2-احتمال أن تزيد الكمية المنتجة من مادة الدقيق عن 55 قنطار في اليوم:

$$P(X > 55) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{55-50}{5}\right) = P(Z > 1) = 0{,}5 - \frac{P(-1 \le Z \le 1)}{2}$$

$$= 0{,}5 - \frac{0{,}6826}{2} = \boldsymbol{0{,}1587}$$

أو باستعمال جدول التوزيع الطبيعي:

$$P(X > 55) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{55-50}{5}\right) = P(Z > 1) = P(Z < -1) = 0{,}1587$$

3-احتمال أن تقل الكمية المنتجة من مادة الدقيق عن 45 قنطارفي اليوم:

$$P(X<45)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{45-50}{5}\right)=P(Z<-1)=0{,}5-\frac{P(-1\leq Z\leq 1)}{2}=0{,}5-\frac{0{,}6826}{2}=0{,}1587$$

أو باستعمال جدول التوزيع الطبيعي:

$$P(X<45)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{45-50}{5}\right)=P(Z<-1)=0{,}1587$$

4-احتمال أن تتراوح الكمية المنتجة من مادة الدقيق بين 40 و45 قنطار في اليوم:

$$P(40\leq X\leq 45)=P\left(\frac{40-50}{5}\leq\frac{x-\mu}{\sigma}\leq\frac{45-50}{5}\right)=P(-2\leq Z\leq -1)$$

$$=\frac{P(-2\leq Z\leq 2)-P(-1\leq Z\leq 1)}{2}=\frac{0{,}9544-0{,}6826}{2}=\mathbf{0,1395}$$

أو باستعمال جدول التوزيع الطبيعي:

$$P(40\leq X\leq 45)=P\left(\frac{40-50}{5}\leq\frac{x-\mu}{\sigma}\leq\frac{45-50}{5}\right)$$
$$=P(-2<Z<-1)$$
$$=P(Z<-1)-P(Z<-2)$$
$$=0{,}1587-0{,}0228$$
$$=0{,}1359$$

5-كمية الدقيق المنتجة في اليوم، التي أقل منها 84,13% من الكمية المنتجة:

$$P(X<\alpha)=0{,}8413\Leftrightarrow P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{\alpha-50}{5}\right)=0{,}8413$$
$$\Leftrightarrow P\left(Z<\frac{\alpha-50}{5}\right)=0{,}8413$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$P(Z<1)=0{,}5+P(0\leq Z\leq 1)=0{,}5+\frac{P(-1\leq Z\leq 1)}{2}=0{,}5+0{,}3413$$
$$=0{,}8413$$

أي ينتج لنا: $\begin{cases}P\left(Z<\frac{\alpha-50}{5}\right)=0{,}8413\\ P(Z<1)=0{,}8413\end{cases}$ بالمطابقة نجد: $\frac{\alpha-50}{5}=1$

أي: $\alpha=60\ \ Q$

أو باستعمال جدول التوزيع الطبيعي: حيث نبحث عن قيمة Z الموافقة للاحتمال 0,8413، سنجدها تساوي 1,00،

وبالتالي: $1 = \frac{\alpha-50}{5}$ أي: $\alpha = 55\ Q$

حل التمرين السابع:

1-إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية التي تعبرعن مدة البيع لهذه الكمية من القهوة:

بما أن المتغير العشوائي X المعبر عن الفترة الزمنية لبيع هذه الكمية من القهوة هو متغير مستمر، وعملية البيع تتم خلال فترة زمنية منتظمة، فإن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع المنتظم، وتكون دالة كثافة الاحتمال له من الشكل:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{b-a} \qquad x \in [a; b]$$

بما أن المدة الزمنية لبيع القهوة في هذا المركب التجاري محددة بـــ 12 شهر أي بالمجال: [0; 12] ، فإن دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير تصبح على النحو التالي:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12} \qquad x \in [0; 12]$$

ونكتب اختصارا: $X \sim \mathbb{U}(0; 12)$

2-أ-تعيين دالة التوزيع التراكمية F(X):

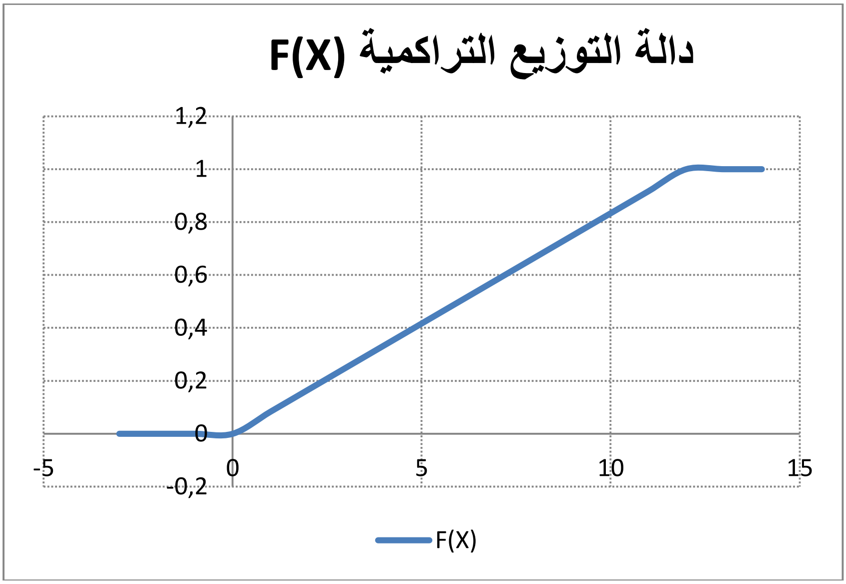
تعطى هذه الدالة وفق الصياغة التالية:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

وبتعويض المدى الزمني لبيع القهوة في المركب التجاري، تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{12} & si \quad 0 \le x \le 12 \\ 1 & si \quad x > 12 \end{cases}$$

2-ب-التمثيل البياني:



3-حساب احتمال أن يبيع كل الكمية خلال الأشهر الثلاثة الأخيرة على الأقل:

$$P(X > (12-3)) = P(X > 9) = 1 - P(X \le 9) = 1 - F(9)$$

$$= 1 - \frac{9}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$$

4-أ-حساب احتمال أن يبيع كل الكمية خلال 7 أشهر على الأقل:

$$P(X > 7) = 1 - P(X \le 7) = 1 - F(7) = 1 - \frac{7}{12} = 0.4166$$

4-ب-حساب الكمية المتبقية في المخزن بعد مرور 7 أشهر من البيع:

$$\mathrm{Q} \times \mathrm{P}(\mathrm{X} > 7) = 240 \times 0.4166 = 99.984$$ طن

5-حساب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للفترة الزمنية لبيع القهوة:

أ-القيمة المتوقعة:

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{12+0}{2} = 6$$

ب-التباين:

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(12-0)^2}{12}=12$$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\sqrt{12}=3.4641$$

حل التمرين الثامن:

X متغير عشـــوائي مســـتمر، يتبع توزيع طبيعي عـادي بمتوســط $\mu=160\ cm$، وانحراف معيـاري $\sigma=10\ cm$. أي $\boldsymbol{X \backsim \mathbb{N}(160,100)}$

نحوله إلى توزيع طبيعي قياسي Z $\boldsymbol{Z \backsim \mathbb{N}(0,1)}$ بالتحويلة:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{x-160}{10}$$

1-حساب احتمال أن تزيد أطوال الطلبة عن 170 سم :

$$P(X\geq 170)=P\left(Z\geq\frac{170-160}{10}\right)=P(Z\geq 1)$$
$$=0.5-P(0\leq Z\leq 1)=0.5-0.3413=0.1587$$

2-حساب احتمال أن تقل أطوال الطلبة عن 170 سم :

$$P(X\leq 170)=P\left(Z\leq\frac{170-160}{10}\right)=P(Z\leq 1)$$
$$=0.5+P(0\leq Z\leq 1)=0.5+0.3413=0.8413$$

3-حساب النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 180 سم:

$$P(X\geq 180)=P\left(Z\geq\frac{180-160}{10}\right)=P(Z\geq 2)$$
$$=0.5-P(0\leq Z\leq 2)=0.5-0.4772=0.0228$$

إذا فالنسبة المئوية للطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 180 سم هي:

0.0228 * 100 = 2.28 %

4-حســاب النسـبـة المئويـة للطلبـة الـذين تتراوح أطوالهم بين 165 ســم و175 سم:

$$P(165 \le X \le 175) = P\left(\frac{165-160}{10} \le Z \le \frac{175-160}{10}\right)$$
$$= P(0.5 \le Z \le 1.5)$$
$$= P(0 \le Z \le 1.5) - P(0 \le Z \le 0.5)$$
$$= 0.4332 - 0.1915 = 0.2417$$

إذا فـالنســبـة المئويـة للطلبـة الـذين تتراوح أطوالهم بين 165 ســم و175 سم هي: 0.2417 * 100 = 24.17 %

5-حساب عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 سم:

لإيجاد عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 ســم، نجد الاحتمال ونضــربه في عدد الطلبة الكلي، أي أن عدد الطلبة المطلوب = احتمال أن تزيد أطوال الطلبة عن 175 سم × عدد الطلبة الكلي.

-حساب احتمال أن تزيد أطوال الطلبة عن 175 سم:

$$P(X \ge 175) = P\left(Z \ge \frac{175-160}{10}\right) = P(Z \ge 1.5) = 0.5 - P(0 \le Z \le 1.5)$$
$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

إذا فعدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 سم يساوي:

0.0668 ×1000 = 66.8≈ 67

حل التمرين التاسع:

X متغير عشــوائي مســتمر، يتبع توزيع طبيعي عـادي بمتوســط $\mu = 12$، وانحراف معياري $\sigma = 3$. أي $\boldsymbol{X \sim \mathbb{N}(12, 9)}$ نحوله إلى توزيع طبيعي قياسي Z $\boldsymbol{Z \sim \mathbb{N}(0, 1)}$ بالتحويلة : $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-12}{3}$

1-حساب احتمال أن تقل علامات الطلبة عن 10 :

$$P(X \le 10) = P\left(Z \le \frac{10-12}{3}\right) = P(Z \le -0.66)$$
$$= 0.5 - P(0 \le Z \le 0.66) = 0.5 - 0.2454 = 0.2546$$

2-حساب احتمال أن تزيد علامات الطلبة عن 15:

$$P(X \le 10) = P\left(Z \le \frac{10-12}{3}\right) = P(Z \le -0.66)$$
$$= 0.5 - P(0 \le Z \le 0.66) = 0.5 - 0.2454 = 0.2546$$

3-حساب احتمال أن تتراوح علامات الطلبة بين 14 و16:

$$P(14 \le X \le 16) = P\left(\frac{14-12}{3} \le Z \le \frac{16-12}{3}\right) = P(0.66 \le Z \le 1.33)$$
$$= P(0 \le Z \le 1.33) - P(0 \le Z \le 0.66)$$
$$= 0.4082 - 0.2454 = 0.1628$$

4-حساب عدد الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 8 و11:

لإيجاد عدد الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 8 و11، نجد الاحتمال ونضـربه في عدد الطلبة الكلي، أي أن عدد الطلبة المطلوب = احتمال أن تتراوح علامات الطلبة بين 8 و11 × عدد الطلبة الكلي.

- حساب احتمال أن تتراوح علامات الطلبة بين 8 و11 :

$$P(8 \le X \le 11) = P\left(\frac{8-12}{3} \le Z \le \frac{11-12}{3}\right) = P(-1.33 \le Z \le -0.33)$$
$$= P(0 \le Z \le 1.33) - P(0 \le Z \le 0.33)$$
$$= 0.4082 - 0.1293 = 0.2789$$

إذا فعدد الطلبة الذين تتراوح علامات الطلبة بين 8 و 11 يساوي:

$0.2789 \times 500 = 139.45 \approx 139$ طالب

5-حساب الحد الأدنى للدرجات الذي يعطي تقدير A في امتحان الإحصاء:

لإيجاد أدنى درجة والتي تعطي تقدير A في امتحان الإحصاء ولنفرضها a فيكون :

$$P(Z \ge a) = 0.1$$

وقيمة a التي تحقق العلاقة السابقة هي نفس قيمة a التي تحقق العلاقة:

$$P(0 \le Z \le a) = 0.4$$

الآن نبحث في جدول التوزيع الطبيعي القياسي عن المساحة (0.4000) فلا نجدها، لذلك نأخذ أقرب قيمة لها وهي (0.3997) وبالتالي فإن قيمة a المقابلة لهذه القيمة هي: a=1.28 وهي أدنى درجة معيارية لتحقيق التقدير A، ولتحويلها إلى علامة طبيعية نستخدم العلاقة التالية:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-12}{3} = 1.28 \Rightarrow x = (3 \times 1.28) + 12 \Rightarrow x = 15.84$$

حل التمرين العاشر:

1-ايجاد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي X الذي يعبر عن تلقي المكالمات انطلاقا من لحظة زمنية معينة:

بما أن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن تلقي المكالمات انطلاقا من لحظة زمنية معينة، أي مرتبط بعنصر الزمن، فإن هذا المتغير يتبع التوزيع الأسي بالمعلمة $\lambda = \frac{1}{5} = 0.2$ لأن المتوسط $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5$ ، ونكتب $X \sim Exp(0.2)$ وتكون دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير على النحو التالي:

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda.x} = 0.2\, e^{-0.2\,x} \qquad 0 < x < \infty$$

2-إيجاد دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda.x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

وبتعويض قيمة λ تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-0.2\,x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

3-حساب احتمال أن يتلقى هذا المركز مكالمة خلال 15 دقيقة أو أقل:

تلقي مكالمة خلال 15 دقيقة أو أقل يعني وصولها سيكون أقل من أو يساوي ربع ساعة ومنه الاحتمال يحسب كما يلي:

$$P\left(X \le \frac{15}{60}\right) = P\left(X \le \frac{1}{4}\right) = P(X \le 0.25) = F(0.25) = 1 - e^{-0.2(0.25)}$$
$$= 1 - 0.9512 = 0.0487$$

4-حساب احتمال أن يتلقى هذا المركز مكالمة خلال النصف ساعة القادمة:

تلقي مكالمة خلال النصف ساعة القادمة يعني وصولها سيكون أقل من أو يساوي نصف ساعة ومنه الاحتمال يحسب كما يلي:

$$P\left(X \leq \frac{30}{60}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = P(X \leq 0.5) = F(0.5) = 1 - e^{-0.2(0.5)}$$
$$= 1 - 0.9048 = 0.0951$$

5-حساب احتمال أن يتلقى هذا المركز مكالمة ما بين النصف ساعة و45 دقيقة:

$$P\left(\frac{30}{60} \leq X \leq \frac{45}{60}\right) = P\left(X \leq \frac{3}{4}\right) - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$$
$$= P(X \leq 0.75) - P(X \leq 0.5) = F(0.75) - F(0.5)$$
$$= \left(1 - e^{-0.2(0.75)}\right) - \left(1 - e^{-0.2(0.5)}\right) = 0.1392 - 0.0951$$
$$= 0.0441$$

6-حساب متوسط زمن تلقي المكالمات وانحرافه المعياري:

أ-التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5$

ب-التباين: $V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 25$

ج-الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = 5$

حل التمرين الحادي عشر:

1-إيجاد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي X الذي يعبر عن مدة الانتهاء من إصلاح الهواتف النقالة انطلاقا من لحظة زمنية معينة:

بما أن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن مدة الانتهاء من إصلاح الهواتف النقالة انطلاقا من لحظة زمنية معينة، أي مرتبط بعنصر الزمن، فإن هذا المتغير يتبع التوزيع الأسي بالمعلمة $\lambda = \frac{1}{20} = 0.05$ لأن المتوسط $(X) = \frac{1}{\lambda} = 20$ ، ونكتب $X \sim Exp(0.05)$ وتكون دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير على النحو التالي :

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda . x} = 0.05\, e^{-0.05\, x} \qquad 0 < x < \infty$$

2-إيجاد دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda . x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

وبتعويض قيمة λ تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-0.05\, x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

3-حساب احتمال أن يتم إصلاح هاتف في هذا المركز خلال 10 دقائق أو أقل:

$$P(X \leq 10) = F(10) = 1 - e^{-0.05(10)} = 1 - 0.6065 = 0.3934$$

4-حساب احتمال أن يتم إصلاح هاتف في هذا المركز خلال نصف ساعة القادمة:

إصلاح هاتف خلال النصف ساعة القادمة يعني إصلاحه سيكون أقل من أو يساوي نصف ساعة ومنه الاحتمال يحسب كما يلي:

$$P(X \leq 30) = F(30) = 1 - e^{-0.05(30)} = 1 - 0.2231 = 0.7768$$

5-حساب احتمال أن يتم إصلاح هاتف في هذا المركز ما بين 12 و 22 دقيقة:

$$P(12 \leq X \leq 22) = P(X \leq 22) - P(X \leq 12) = F(22) - F(12)$$
$$= \left(1 - e^{-0.05(22)}\right) - \left(1 - e^{-0.05(12)}\right)$$
$$= 0.6671 - 0.4511 = 0.216$$

6-حساب متوسط زمن إصلاح الهاتف في هذا المركز وانحرافه المعياري:

أ-التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 20$

ب-التباين: $V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 400$

ج-الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = 20$

تمارين مقترحة

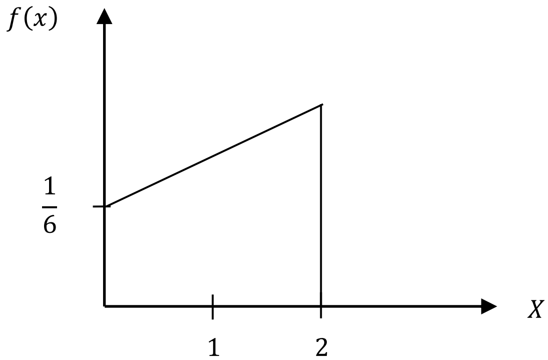
التمرين الأول:

إذا كانت لدينا دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ معرفة بالشكل المقابل:

1- ما هو نوع هذا المتغير؟ أوجد الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$؟

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$؟ مثلها بيانيا؟

3- أحسب: الأمل الرياضي؟ الانحراف المعياري؟ $E(2X-7)$؟ $V(2X-7)$؟



التمرين الثاني:

لتكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & X<0 \text{ أو } X>2 \\ X & 0\le X\le 1 \\ \alpha - X & 1<X\le 2 \end{cases}$$

1- حدد قيمة α حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية؟

2- أحسب: $F(x)$ ، $E(X)$ ، $V(X)$ ، $P(X=1)$ ، $P\left(X\le \frac{3}{2}\right)$.

التمرين الثالث:

ليكن المتغير العشوائي X المعرف كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} kX & x \in [1\,,5] \\ 0 & x \notin [1\,,5] \end{cases}$$

1- أوجد قيمة الثابت k التي تجعل $f(x)$ دالة كثافة احتمالية.

2- بفرض أن X يمثل الانتاج السنوي لإحدى المؤسسات، ماذا تمثل القيمتين: $x = 1$ و $x = 5$.

3- أحسب الإنتاج المتوسط والانحراف المعياري.

4- أحسب احتمال أن تنتج هذه المؤسسة:

أ-أقل من ثلاث وحدات. **ب**-أكثر من وحدتين. **ج**-ما بين 1,5 و2,5 وحدة.

التمرين الرابع:

تفيد إحصائيات الاستهلاك الغذائي في الجزائر أن متوسط الاستهلاك السنوي من اللحوم للفرد الواحد يقدر بـ: 50 كلغ، وأن الانحراف المعياري يقدر بـ: 9 كلغ، التحليل الإحصائي أثبت أن هذا المتغير يتوزع طبيعيا.

1- ما هي الصيغة الرياضية للقانون الاحتمالي؟ مثل بيانيا هذا التوزيع؟

2- أحسب نسبة الأفراد الذين: يفوق استهلاكهم السنوي 48 كلغ؟ يتراوح استهلاكهم بين 33 و40 كلغ؟ يقل استهلاكهم السنوي عن 47 كلغ؟

3- أحسب الوسيط، المنوال، الربيع الأول؟ اشرح النتائج؟

التمرين الخامس:

إذا كان الاستهلاك السنوي للأسرة من السمك يتبع القانون الطبيعي بمتوسط قدره 10 كلغ وانحراف معياري قدره 1,25 كلغ.

1- ما هي نسبة الأسر التي تستهلك:

أ/ أقل من 12 كلغ، **ب**/ أكثر من 8,4 كلغ، **ج**/ ما بين 8,75 و 11,25 كلغ.

2- أحسب قيمتي الوسيط والربيع الثالث، واشرح النتيجتين.

التمرين السادس:

ليكن X متغير عشوائي يمثل الإنتاج الشهري من القمح في أحد المؤسسات، أقصى طاقة إنتاجية هي 60 قنطار،

دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير معرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{1800}x \qquad\qquad x \in [0-60]$$

1- تأكد أن $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية.

2- ما احتمال أن يبلغ إنتاج هذه المؤسسة ما بين 30 و52 قنطار هذا الشهر.

3- أحسب متوسط الإنتاج الشهري من القمح بالمؤسسة، ثم استنتج قيمة $E(5X-2)$.

التمرين السابع:

في قسم معين بكلية الاقتصاد يحصل 25% من الطلبة الأوائل على تقدير جيد في مقياس الإحصاء 2، وجد أن نقاط الطلبة في امتحان معين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 10,5 وانحراف معياري قدره 1,5

1- أحسب احتمال: أن تتراوح نقطة طالب ما بين 9 و12؟ أن تقل نقطة طالب عن 8؟ أن تزيد نقطة طالب عن 11؟

2- أوجد أدنى علامة تستحق التقدير جيد؟

التمرين الثامن:

ليكن X متغير عشوائي بحيث دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-2x} & X \geq 0 \\ 0 & X < 0 \end{cases}$$

1- أوجد قيمة الثابت α حتى تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية. مثلها بيانيا.

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$،

3- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري، ثم استنتج قيم كلا من: $E(2X+1)$، $V(2X+1)$.

4- أحسب الاحتمالات: $P(X \leq 4)$ ، $P(1 < X < 3)$.

المحور الخامس

العزوم والدالة المتجددة للعزوم

تمهيد

تمثل العزوم مفاهيم رياضية، نحتاج إليها لدراسة بعض المؤشرات مثل التباين، التوقع الرياضي، معامل الالتواء، ومعامل التفرطح، إضافة لمدلولها الرياضي والفيزيائي فلها مدلول إحصائي، كما نستخدم الدالة المتجددة للعزوم لحساب العزوم المركزية، بالإضافة إلى إثبات التقارب بين التوزيعات الاحتمالية.

أولا: العزوم

يوجد نوعين من العزوم، عزم مرتبط بالأصل ويسمى العزم الابتدائي، وآخر مرتبط بالمركز ويسمى بالعزم المركزي.

1-العزم الابتدائي: m_k

يعرف العزم الابتدائي بالصيغة التالية: $m_k = E(X^k)$

- في حالة المتغير العشوائي المتقطع، فإن:

$$m_k = E(X^k) = \sum x_i^k\, p_i$$

- في حالة المتغير العشوائي المستمر، فإن: $m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$

وكحالات خاصة من العزم الابتدائية، نذكر:

- إذا كان: $k = 0$، فإن: $m_0 = E(X^0) = 1$
- إذا كان: $k = 1$، فإن:

$$\begin{cases} m_1 = E(X) = \sum x_i\, p_i & \text{في حالة المتغير العشوائي المتقطع} \\ m_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx & \text{في حالة المتغير العشوائي المستمر} \end{cases}$$

- إذا كان: $k = 2$، فإن:

$$\begin{cases} m_2 = E(X^2) = \sum x_i^2\, p_i & \text{في حالة المتغير العشوائي المتقطع} \\ m_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx & \text{في حالة المتغير العشوائي المستمر} \end{cases}$$

2-العزم المركزي: μ_k

يعرف العزم المركزي بالصيغة التالية: $\mu_k = E\big(X - E(X)\big)^k$

- في حالة المتغير العشوائي المتقطع، فإن:

$$\mu_k = E\big(X - E(X)\big)^k = \sum \big(x_i - E(X)\big)^k p_i$$

- في حالة المتغير العشوائي المستمر، فإن:

$$\mu_k = E\big(X - E(X)\big)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - E(X)\big)^k f(x)\, dx$$

وكحالات خاصة من العزم المركزي، نذكر:

- إذا كان: $k = 0$، فإن:

$$\mu_0 = E\big(X - E(X)\big)^0 = E(1) = 1$$

- إذا كان: $k = 1$، فإن:

$$\mu_1 = E\big(X - E(X)\big)^1 = E(X) - E\big(E(X)\big) = E(X) - E(X) = 1$$

- إذا كان: $k = 2$، فإن:

$$\mu_2 = E\big(X - E(X)\big)^2 = V(X)$$

وبالتالي فإن العزم المركزي من الدرجة الثانية يمثل التباين. حيث يمكننا التعبير عن صيغة التباين بدلالة العزوم

الابتدائية كما يلي:

$$V(X) = \mu_1 = E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = m_2 - m_1^2$$

مثال 1: ليكن X متغير عشــوائي، دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالصــيغة التالية: $X \in [2 - 5]$ $\qquad f(x) = \frac{1}{3}$

1- أوجد العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3.

2- أكتب العزم المركزي من الدرجة الثالثة بدلالة العزوم الابتدائية. أحســب قيمته.

3- أحسب معامل الالتواء لفيشر. ماذا تستنتج.

الحل:

1-إيجاد العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3:

- العزم الابتدائي من الدرجة 0: $m_0 = E(X^0) = 1$
- العزم الابتدائي من الدرجة 1:

$$m_1 = E(X^1) = E(X) = \int_2^5 xf(x)\,dx = \int_2^5 \frac{1}{3}x\,dx = \left[\frac{x^2}{6}\right]_2^5 = \frac{5^2-2^2}{6} = 3{,}5$$

- العزم الابتدائي من الدرجة 2:

$$m_2 = E(X^2) = \int_2^5 x^2 f(x)\,dx = \int_2^5 \frac{1}{3}x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{9}\right]_2^5 = \frac{5^3-2^3}{9} = 13$$

- العزم الابتدائي من الدرجة 3:

$$m_3 = E(X^3) = \int_2^5 x^3 f(x)\,dx = \int_2^5 \frac{1}{3}x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{12}\right]_2^5 = \frac{5^4-2^4}{12} = 50{,}75$$

2-كتابة العزم المركزي من الدرجة الثالثة بدلالة العزوم الابتدائية. وحساب قيمته:

$$\begin{aligned}
\mu_3 = E\big(X-E(X)\big)^3 &= E(X-m_1)^3 = E(X^3m_1^0 - 3X^2m_1^1 + 3X^1m_1^2 - X^0m_1^3)\\
&= E(X^3 - 3X^2m_1 + 3Xm_1^2 - m_1^3)\\
&= E(X^3) - 3m_1E(X^2) + 3m_1^2E(X) - m_1^3\\
&= m_3 - 3m_1m_2 + 3m_1^2m_1 - m_1^3\\
&= m_3 - 3m_1m_2 + 3m_1^3 - m_1^3\\
&= m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3
\end{aligned}$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 = 50{,}75 - 3(3{,}5)(13) + 2(3{,}5)^3 = 0$$

3-حساب معامل الالتواء:

نعلم أن معامل الالتواء لفيشر تحسب قيمته من خلال الصيغة التالية:

$$\alpha_F = \frac{\mu_3}{\delta(x)^3} = \frac{0}{\delta(x)^3} = 0$$

نستنتج أن التوزيع متناظر لأن قيمته معدومة.

مثال 2: ليكن X: متغير عشوائي يمثل عدد الرجال ضمن وفد معين مشكل من 4 أشخاص، يتبع التوزيع المبين في الجدول التالي:

X_i	0	1	2	3	4
P_i	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

1- أوجد العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3.

2- أكتب العزم المركزي من الدرجة الثانية بدلالة العزوم الابتدائية. أحسب قيمته.

الحل:

X_i	0	1	2	3	4	$\sum x_i p_i$
P_i	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1	1
$x_i p_i$	0	0,3	0,6	0,6	0,4	1,9
$x_i^2 p_i$	0	0,3	1,2	1,8	1,6	4,9
$x_i^3 p_i$	0	0,3	2,4	5,4	6,4	14,5

- العزم الابتدائي من الدرجة 0:

$$m_0 = E(X^0) = 1$$

- العزم الابتدائي من الدرجة 1:

$$m_1 = E(X^1) = E(X) = \sum x_i\, p_i = 1{,}9$$

- العزم الابتدائي من الدرجة 2:

$$m_2 = E(X^2) = \sum x_i^2\, p_i = 4{,}9$$

- العزم الابتدائي من الدرجة 3:

$$m_3 = E(X^3) = \sum x_i^3\, p_i = 14{,}5$$

2-كتابة العزم المركزي من الدرجة الثانية بدلالة العزوم الابتدائية. وحساب قيمته:

$$\mu_2 = E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X - m_1)^2 = E(X^2 - 2Xm_1 + m_1^2)$$
$$= E(X^2) - 2m_1E(X) + E(m_1^2)$$
$$= m_2 - 2m_1m_1 + m_1^2$$
$$= m_2 - 2m_1^2 + m_1^2$$
$$= m_2 - m_1^2$$
$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = 4{,}9 - (1{,}9)^2 = 1{,}29$$

ثانيا: الدالة المتجددة للعزوم

تعرف الدالة المتجددة للعزوم بأنها القيمة المتوقعة للدالة الأسية لمضاعفات المتغير العشوائي X، ويرمز لها بالرمز $m_x(t)$، ويعبر عنها رياضيا بالصيغة التالية: $M_x(t) = E(e^{tx})$

- في حالة المتغير العشوائي المتقطع: $M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx} f(x)$
- في حالة المتغير العشوائي المستمر:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لحساب العزم المركزي من الدرجة k، وذلك إنطلاقا من العزم الابتدائي وفق الصيغة:

$$m_k = \frac{d^k M_x(t)}{dt^k} \quad avec \quad t = 0$$

مثال 3: بالعودة للمثال 2، أوجد الدالة المتجددة للعزوم، ثم أوجد العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3. وأحسب قيمة العزم المركزي من الدرجة الثالثة.

الحل:

- إيجاد الدالة المتجددة للعزوم:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx} f(x) = 0{,}1e^{0t} + 0{,}3e^{1t} + 0{,}3e^{2t} + 0{,}2e^{3t} + 0{,}1e^{4t}$$

$$M_x(t) = 0{,}1 + 0{,}3e^{1t} + 0{,}3e^{2t} + 0{,}2e^{3t} + 0{,}1e^{4t}$$

- الدالة العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3، وحساب العزم المركزي من الدرجة الثالثة:

$$m_0 = 0{,}1e^{0(0)} + 0{,}3e^{1(0)} + 0{,}3e^{2(0)} + 0{,}2e^{3(0)} + 0{,}1e^{4(0)} = 1$$

$$m_1 = \frac{d^1 M_x(t)}{dt^1} = 0{,}3e^{1t} + 0{,}6e^{2t} + 0{,}6e^{3t} + 0{,}4e^{4t}$$

$$m_1 = 0{,}3e^{1(0)} + 0{,}6e^{2(0)} + 0{,}6e^{3(0)} + 0{,}4e^{4(0)} = 1{,}9$$

$$m_2 = \frac{d^2 M_x(t)}{dt^2} = 0{,}3e^{1t} + 1{,}2e^{2t} + 1{,}8e^{3t} + 1{,}6e^{4t}$$

$$m_2 = 0{,}3e^{1(0)} + 1{,}2e^{2(0)} + 1{,}8e^{3(0)} + 1{,}6e^{4(0)} = 4{,}9$$

$$m_3 = m_3 = \frac{d^3 M_x(t)}{dt^3} = 0{,}3e^{1t} + 2{,}4e^{2t} + 5{,}4e^{3t} + 6{,}4e^{4t}$$

$$\mu_3 = E\big(X - 0{,}3e^{1(0)} + 2{,}4e^{2(0)} + 5{,}4e^{3(0)} + 6{,}4e^{4(0)} = 14{,}5$$

$$E(X)\big)^3 = E(X - m_1)^3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 = 14{,}5 - 3(1{,}9)(4{,}9) + 2(1{,}9)^3 = 0{,}288$$

مثال 4: ليكن X متغير عشـــوائي، دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالصـــيغة التالية: $X > 0 \qquad f(x) = 2e^{-2x}$

1- أوجد الدالة المتجددة للعزوم عندما $t < 2$.

2- أوجد قيمة التباين باستخدام الدالة المتجددة للعزوم.

الحل:

1-إيجاد الدالة المتجددة للعزوم عندما $t < 2$:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x}(e^{tx})\, dx = \int_0^{+\infty} 2e^{(t-2)x}\, dx$$

$$M_x(t) = \left[\frac{2}{t-2} e^{(t-2)x}\right]_0^{+\infty} = \left[\frac{2}{t-2}\left(e^{(t-2)(+\infty)} - e^{(t-2)(0)}\right)\right] = \frac{2}{t-2}\left[\left(e^{(-\infty)} - e^{(0)}\right)\right]$$

$$M_x(t) = \frac{2}{t-2}(0-1) = \frac{-2}{t-2}$$

$$M_x(t) = \frac{-2}{t-2}$$

2-**إيجاد قيمة التباين باستخدام الدالة المتجددة للعزوم:**

$$m_1 = \frac{d^1 M_x(t)}{dt^1} = \frac{2}{(t-2)^2}$$

$$m_1 = \frac{2}{(0-2)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{d^2 M_x(t)}{dt^2} = \frac{-4(t-2)}{(t-2)^4}$$

$$m_2 = \frac{-4(0-2)}{(0-2)^4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = \mu_1 = m_2 - m_1^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

1- أكتب صيغة العزم المركزي من الدرجة الرابعة بدلالة العزوم الابتدائية من الدرجة 1 و2 و3 و4.

2- أحسب قيمة العزم المركزي من الدرجة الرابعة، إذا علمت أن:

التوزيع متناظر. الانحراف المعياري يساوي 2، التوقع الرياضي يساوي 3. العزم الابتدائي من الدرجة الرابعة يساوي 400.

التمرين الثاني:

ليكن X: متغير عشوائي يتبع التوزيع المبين في الجدول التالي:

3	**2**	**1**	**0**	X_i
0,12	0,3	0,35	0,15	P_i

1- أوجد العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3.

2- أكتب العزم المركزي من الدرجة الثانية بدلالة العزوم الابتدائية. أحسب قيمته.

التمرين الثالث:

ليكن X: متغير عشوائي يتبع التوزيع المبين في الجدول التالي:

3	**2**	**1**	**0**	X_i
0,12	0,3	0,35	0,15	P_i

1- أوجد الدالة المتجددة للعزوم.

2- أوجد العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3. وأحسب قيمة العزم المركزي من الدرجة الثالثة.

التمرين الرابع:

ليكن X متغير عشوائي، دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالصيغة التالية: $X \in [0-2]$ $\qquad f(x) = \frac{1}{2}x$

1- أوجد العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3.

2- أكتب العزم المركزي من الدرجة الثالثة بدلالة العزوم الابتدائية. أحسب قيمته.

التمرين الخامس:

ليكن X متغير عشوائي، دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالصيغة التالية: $X > 0$ $\qquad f(x) = 0{,}4e^{-0{,}4x}$

1- أوجد الدالة المتجددة للعزوم عندما $t < 0{,}4$.

2- أوجد قيمة الانحراف المعياري باستخدام الدالة المتجددة للعزوم.

الحلــــــــــول

حل التمرين الأول:

1-كتابة صــيغة العزم المركزي من الدرجة الرابعة بدلالة العزوم الابتدائية من الدرجة 1 و2 و3 و4:

$$\mu_4 = E\big(X - E(X)\big)^4 = E(X - m_1)^4 = E(X^4 m_1^0 - 4X^3 m_1^1 + 6X^2 m_1^2 - 4X^1 m_1^3 + 4X^0 m_1^4) = E(X^4 m_1^0) - E(4X^3 m_1^1) + E(6X^2 m_1^2) - E(4X^1 m_1^3) + E(4X^0 m_1^4)$$

$$= E(X^4) - 4m_1E(X^3) + 6m_1^2E(X^2) - 4m_1^3E(X^1) + 4m_1^4$$

$$= m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 4m_1^4 + 4m_1^4$$

$$= m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$$

2-أحسب قيمة العزم المركزي من الدرجة الرابعة، علما أن:

التوزيع متناظر. الانحراف المعياري يساوي 2، التوقع الرياضي يساوي 3. العزم الابتدائي من الدرجة الرابعة يساوي 80.

$$m_1 = 3$$

$$V(X) = \sigma^2 \Leftrightarrow m_2 - m_1^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow m_2 = 4 + m_1^2$$

$$\Leftrightarrow m_2 = 4 + 3^2$$

$$\Leftrightarrow m_2 = 13$$

بما أن التوزيع متناظر فإن: $\mu_3 = 0$، وبالتالي:

$$\mu_3 = 0 \Leftrightarrow m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow m_3 = 3m_1m_2 - 2m_1^3$$
$$\Leftrightarrow m_3 = 3(3)(13) - 2(3)^3$$
$$\Leftrightarrow m_3 = 63$$
$$m_4 = 80$$
$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$$
$$\mu_4 = 400 - 4(3)(63) + 6(3)^2(13) - 3(3)^4$$
$$\mu_4 = 103$$

حل التمرين الثاني:

1-إيجاد العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3:

X_i	0	1	2	3	$\sum x_i p_i$
P_i	0,15	0,35	0,3	0,12	1
$x_i p_i$	0	0,35	0,6	0,36	1,31
$x_i^2 p_i$	0	0,35	1,2	1,08	2,63
$x_i^3 p_i$	0	0,35	2,4	3,24	5,99

- العزم الابتدائي من الدرجة 0: $m_0 = E(X^0) = 1$
- العزم الابتدائي من الدرجة 1: $m_1 = E(X^1) = E(X) = \sum x_i\, p_i = 1{,}31$
- العزم الابتدائي من الدرجة 2: $m_2 = E(X^2) = \sum x_i^2\, p_i = 2{,}63$
- العزم الابتدائي من الدرجة 3: $m_3 = E(X^3) = \sum x_i^3\, p_i = 5{,}99$

2-كتابة العزم المركزي من الدرجة الثانية بدلالة العزوم الابتدائية. وحساب قيمته:

$$\mu_2 = E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X - m_1)^2 = E(X^2 - 2Xm_1 + m_1^2)$$
$$= E(X^2) - 2m_1E(X) + E(m_1^2)$$
$$= m_2 - 2m_1m_1 + m_1^2$$
$$= m_2 - 2m_1^2 + m_1^2$$
$$= m_2 - m_1^2$$
$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = 2{,}63 - (1{,}31)^2 = 0{,}91$$

حل التمرين الثالث:

1-إيجاد الدالة المتجددة للعزوم:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx} f(x) = 0{,}15e^{0t} + 0{,}35e^{1t} + 0{,}3e^{2t} + 0{,}12e^{3t}$$

$$M_x(t) = 0{,}15 + 0{,}35e^{1t} + 0{,}3e^{2t} + 0{,}12e^{3t}$$

2-الدالة العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3، وحســاب العزم المركزي من الدرجة الثالثة:

$$m_0 = 0{,}15e^{0(0)} + 0{,}35e^{1(0)} + 0{,}3e^{2(0)} + 0{,}12e^{3(0)} = 1$$

$$m_1 = \frac{d^1 M_x(t)}{dt^1} = 0{,}35e^{1t} + 0{,}6e^{2t} + 0{,}36e^{3t}$$

$$m_1 = 0{,}35e^{1(0)} + 0{,}6e^{2(0)} + 0{,}36e^{3(0)} = 1{,}31$$

$$m_2 = \frac{d^2 M_x(t)}{dt^2} = 0{,}35e^{1t} + 1{,}2e^{2t} + 1{,}08e^{3t}$$

$$m_2 = 0{,}35e^{1(0)} + 1{,}2e^{2(0)} + 1{,}08e^{3(0)} = 2{,}63$$

$$m_3 = \frac{d^3 M_x(t)}{dt^3} = 0{,}35e^{1t} + 2{,}4e^{2t} + 3{,}24e^{3t}$$

$$m_3 = 0{,}35e^{1(0)} + 2{,}4e^{2(0)} + 3{,}24e^{3(0)} = 5{,}99$$

$$\mu_3 = E\big(X - E(X)\big)^3 = E(X - m_1)^3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 = 5{,}99 - 3(1{,}31)(2{,}63) + 2(1{,}31)^3 = 0{,}15$$

حل التمرين الرابع:

ليكن X متغير عشــوائي، دالـة كثافتـه الاحتماليـة معرفـة بـالصــيغـة التالية: $X \in [0-2]$ $\qquad f(x) = \frac{1}{2}x$

1-إيجاد العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3:

- العزم الابتدائي من الدرجة 0: $m_0 = E(X^0) = 1$
- العزم الابتدائي من الدرجة 1:

$$m_1 = E(X^1) = E(X) = \int_0^2 x f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{2^3 - 0^3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

- العزم الابتدائي من الدرجة 2:

$$m_2 = E(X^2) = \int_0^2 x^2 f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = \frac{2^4 - 0^4}{8} = 2$$

- العزم الابتدائي من الدرجة 3:

$$m_3 = E(X^3) = \int_0^2 x^3 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{10}\right]_0^2 = \frac{2^5 - 0^5}{10} = 3{,}2$$

2-كتابة العزم المركزي من الدرجة الثالثة بدلالة العزوم الابتدائية. وحساب قيمته:

$$\mu_3 = E\big(X - E(X)\big)^3 = E(X - m_1)^3 = E(X^3 m_1^0 - 3X^2 m_1^1 + 3X^1 m_1^2 - X^0 m_1^3)$$
$$= E(X^3 - 3X^2 m_1 + 3X m_1^2 - m_1^3)$$
$$= E(X^3) - 3m_1 E(X^2) + 3m_1^2 E(X) - m_1^3$$
$$= m_3 - 3m_1 m_2 + 3m_1^2 m_1 - m_1^3$$
$$= m_3 - 3m_1 m_2 + 3m_1^3 - m_1^3$$
$$= m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 = 3{,}2 - 3\left(\frac{4}{3}\right)(2) + 2\left(\frac{4}{3}\right)^3 = -0{,}059$$

حل التمرين الخامس:

ليكن X متغير عشـــوائي، دالـة كثـافتـه الاحتمـاليـة معرفـة بـالصـــيغـة التالية: $X > 0 \qquad f(x) = 0{,}4e^{-0{,}4x}$

1-إيجاد الدالة المتجددة للعزوم عندما $t < 0,4$:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 0{,}4e^{-0{,}4x}(e^{tx})\,dx = \int_0^{+\infty} 0{,}4e^{(t-0{,}4)x}\,dx$$

$$M_x(t) = \left[\frac{0{,}4}{t-0{,}4}e^{(t-0{,}4)x}\right]_0^{+\infty} = \left[\frac{0{,}4}{t-0{,}4}\left(e^{(t-0{,}4)(+\infty)} - e^{(t-0{,}4)(0)}\right)\right] = \frac{0{,}4}{t-0{,}4}\left[\left(e^{(-\infty)} - e^{(0)}\right)\right]$$

$$M_x(t) = \frac{0{,}4}{t-0{,}4}(0-1) = \frac{-0{,}4}{t-0{,}4}$$

$$M_x(t) = \frac{-0{,}4}{t - 0{,}4}$$

2 إيجاد قيمة الانحراف المعياري باستخدام الدالة المتجددة للعزوم:

$$m_1 = \frac{d^1 M_x(t)}{dt^1} = \frac{0{,}4}{(t-0{,}4)^2}$$

$$m_1 = \frac{0{,}4}{(0-0{,}4)^2} = 2{,}5$$

$$m_2 = \frac{d^2 M_x(t)}{dt^2} = \frac{-0{,}8(t-0{,}4)}{(t-0{,}4)^4}$$

$$m_2 = \frac{-0{,}8(0-0{,}4)}{(0-0{,}4)^4} = \frac{0{,}32}{0{,}0256} = 12{,}5$$

$$V(X) = \mu_1 = m_2 - m_1^2 = 12{,}5 - (2{,}5)^2 = 6{,}25$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mu_1} = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

ليكن X متغير عشوائي، دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالصيغة التالية: $X \in]0-3[\qquad f(x) = cx^2$

1- أوجد قيمة الثابت c حتى تكون الدالة هي دالة كثافة احتمالية.

2- أوجد العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3.

3- أكتب العزم المركزي من الدرجة الثالثة بدلالة العزوم الابتدائية. أحسب قيمته.

4- أحسب معامل الالتواء لفيشر. ماذا تستنتج.

التمرين الثاني:

1- أكتب صيغة العزم المركزي من الدرجة الخامسة بدلالة العزوم الابتدائية من الدرجة 1 و2 و3 و4 و5.

2- أحسب قيمة العزم المركزي من الدرجة الخامسة، إذا علمت أن:

التوزيع متناظر. التباين يساوي 12، التوقع الرياضي يساوي 5. العزم الابتدائي من الدرجة الرابعة يساوي 800، العزم الابتدائي من الدرجة الخامسة يساوي 200.

التمرين الثالث:

ليكن لدينا المتغير العشوائي X يأخذ القيم التالية: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، احتمالاتها على الترتيب: $\frac{1}{\beta}$، $\frac{3}{\beta}$، $\frac{5}{\beta}$، $\frac{7}{\beta}$، $\frac{5}{\beta}$، $\frac{3}{\beta}$، $\frac{1}{\beta}$

1- أوجد العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3.

2- أكتب العزم المركزي من الدرجة الثانية بدلالة العزوم الابتدائية. أحسب قيمته.

التمرين الرابع:

ليكن X: متغير عشوائي يتبع التوزيع المبين في الجدول التالي:

$X,$	0	1	2	3	4
$P_i,$	0,4	0,2	0,1	0,05	0,25

1- أوجد الدالة المتجددة للعزوم.

2- أوجد العزوم الابتدائية من الدرجة 0، 1، 2، 3. وأحسب قيمة العزم المركزي من الدرجة الثالثة.

التمرين الخامس:

ليكن X متغير عشوائي، دالة التوزيع الاحتمالية معرفة بالصيغة التالية: $X > 0$ $\quad F(x) = 1 - e^{-0,2x}$

1- أوجد الدالة المتجددة للعزوم عندما $t < 0,2$.

2- أوجد قيمة التباين باستخدام الدالة المتجددة للعزوم.

المحور السادس

متراجحة شيبيشيف

ونظرية الأعداد الكبيرة

تمهيد

إن المعنى الحدثي للاحتمال هو ما يسمى "بقانون المتوسطات" أي أنه إذا كان لدينا حدثا A واحتماله P فإن " متوسط وقوع A " يقترب من P كلما زاد عدد مرات " المحاولات المستقلة "، ويتضح هذا المفهوم من قانون الأعداد الكبيرة الذي سنذكره فيما بعد، ويستخدم لبرهان هذا القانون متراجحة شيبيشيف المشهورة.

أولا: نظرية (متراجحة) شيبيشيف (Chebychev Inequality)

إن نظرية شيبيشيف من النظريات المفيدة إذا أنها تعطينا حدا أدنى لنسبة البيانات الواقعة في فترة معينة عند معرفة متوسط البيانات وانحرافها المعياري دون الحاجة لمعرفة البيانات الأصلية أو التوزيع الذي أخذت منه العينة، تستخدم هذه النظرية في قياس التشتت حول التوقع μ، وذلك عن طريق احتمال (أو نسبة) المفردات التي المسافة (الفرق) بينها وبين μ تزيد عن مقدار ما، وتعطى هذه المتراجحة وفق الشكل التالي:

إذا كان لدينا متغير عشوائي X توقعه μ وانحرافه المعياري σ، فيكون لكل عدد ε موجب تماما ($\varepsilon > 0$) فإن :

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

البرهان: نبدأ بتعريف التباين:

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_i (x_i-\mu)^2 f(x_i)$$

نحذف كل الحدود في السلسلة السابقة التي تحقق أن $|x-\mu| < \varepsilon$ وهذا الحذف لن يؤدي إلى زيادة قيمة المتسلسلة إذ أن جميع الحدود غير سالبة، أي أن :

$$\sigma^2 \geq \sum_i {}^{*} (x_i-\mu)^2 f(x_i)$$

وتدل " النجمة " على أن المجموع يشـــمل فقط تلك القيمi التي تحقق الشـرط $|x_i - \mu| \geq \varepsilon$، إذا قيمة المجموع الجديد لن تزيد إذا اسـتبدلنا كل حد $|x_i - \mu|$ بالمقدار ε ، أي أن:

$$\sigma^2 \geq \sum_i * \varepsilon^2 f(x_i) = \varepsilon^2 \sum_i * f(x_i)$$

ولكن $\sum_i * f(x_i)$ تساوي احتمال أن يكون $|X - \mu| \geq \varepsilon$، فيكون إذا:

$$\sigma^2 \geq \varepsilon^2 P|X - \mu| \geq \varepsilon$$

بقسمة الطرفين على ε^2 نحصل على المتراجحة المطلوبة :

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

ويمكن أن نكتبها على الشكل التالي:

$$P(|X - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

إذا افترضنا $\varepsilon = k\sigma$ ، حيث $k > 0$ ، فإن متراجحة شـيبيشـيف تأخذ الشكل التالي :

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

أو :

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

تبين هذه المتراجحة بأن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيما خارج المجال $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ لا يمكن أن يتجاوز القيمة $\frac{1}{k^2}$.

فمثلا من أجل $k = 10$ نجد أن :

$$P(|X - \mu| < 10\sigma) \geq 1 - \frac{1}{10^2} = 1 - 0.01 = 0.99$$

$$P(|X - \mu| \geq 10\sigma) \leq 0.001$$

هكذا نجد بأن متراجحة شـــيبيشـــيف تنطبق على أي متغير عشـــوائي شـــريطة أن يكون له توقع رياضـــي وتباين، وأن متراجحة شـــيبيشـــيف لا تعطي طريقة عملية لتقدير الاحتمال، وذلك لأن الفرق بين طرفي المتراجحة (1) يكون عـادة كبيرا، وبـالإضـــافـة إلى ذلـك أنـه في حـالـة $k \leq 1$ وبـالتـالي $\frac{1}{k} \geq 1$ ، فـإن المتراجحـة (1) لا تفيـدنـا بـأيـة معلومـات، فمثلا، إذا كـانـت $k = \frac{1}{2}$ فـإن : $P\left(|X-\mu| \geq \frac{1}{2}\sigma\right) \leq 4$ ، وهــذا واضـــح لأن أي احــتــمــال يــمــثــل بعدد $0 \leq p \leq 1$ ، لذا فإن متراجحة شـيبيشـيف مفيدة فقط عندما يكون k كبير نسبيتا.

مثال 1:

إذا كـان لـدينـا مجموعـة من البيـانـات متوســطهـا $\mu = 7$ وانحرافهـا المعياري $\sigma = 5$ فما هي نسبة البيانات الواقعة في الفترة (18 , 4−)؟

الحل:

أولا نلاحظ أن منتصـف الفترة المعطاة (4,18−) هو المتوسـط $\mu = 7$ لذلك نستطيع تطبيق نظرية شيبيشيف. فيكون لدينا:

$$
\begin{aligned}
(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma) = (-4\,,18) &\Rightarrow \mu + k\sigma = 18 \\
&\Leftrightarrow 7 + 5k = 18 \\
&\Leftrightarrow 5k = 11 \\
&\Leftrightarrow k = 11/5 \\
&\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{(11/5)^2} \\
&\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 0.7934
\end{aligned}
$$

ومنـه فـإن نســبـة البيـانـات الـواقـعـة في الـفـترة (4,18−) لا تـقـل عن 79.34%.

مثال 2:

وجد أن متوسط كمية فيتامين C في نوع معين من الفواكه هو 0.24 ملغرام، بانحراف معياري قدره 0.004 ملغرام، فما هي أقل نسبة من الفاكهة التي تحتوي على مقدار من هذا الفيتامين واقع بين (0.264، 0.216 ملغرام).

الحل:

نلاحظ أن منتصف المقدار من كمية الفيتامين المعطاة (0.264، 0.216 ملغرام). هو المتوسط $\mu = 0.24$ لذلك نستطيع تطبيق نظرية شيبيشيف. فيكون لدينا :

$$(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma) = (0.216\,, 0.264) \Rightarrow \mu + k\sigma = 0.264$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.24 + 0.004k = 0.264$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.004k = 0.024$$

$$\Leftrightarrow \quad k = 6$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{(6)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 0.9722$$

ومنه فإن نسبة الفاكهة التي تحتوي على مقدار من هذا الفيتامين واقع بين (0.284، 0.232 ملغرام) لا تقل عن 97.22%.

مثال 3:

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات متوسطها $\mu = 10$ وانحرافها المعياري $\sigma = 6$ فأوجد فترة يقع فيها ما لا يقل عن 75 % من البيانات.

الحل:

$$\left(1 - \frac{1}{\mathrm{k}^2}\right) = 0.75 \quad \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\mathrm{k}^2}\right) = 1 - 0.75$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\mathrm{k}^2}\right) = 0.25$$

$$\Leftrightarrow k = \sqrt{\frac{1}{0.25}}$$

$$\Leftrightarrow k = 2$$

وبالتالي فإن الفترة التي يقع فيها ما لا يقل عن 75 % من البيانات هي:

$$(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma) = (10 - 2(6), 10 + 2(6)) = (10 - 12,10 + 12) = (-2,22)$$

ملاحظات على متراجحة شيبيشيف:

1. في بعض الأحيان نكتب الفترة $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$ على الصورة $(\mu \mp k\sigma)$.

2. تطبق نظرية شيبيشيف للفترات التي منتصفها (مركزها) هو المتوسط μ.

3. تستخدم نظرية شيبيشيف بطريقتين (في كلا الحالتين لابد من معرفة قيمة k):

أ- تحديد النسبة (التقريبية) لعدد البيانات الواقعة في فترة معينة.

ب- تحديد فترة يقع فيها ما لا يقل عن نسبة معينة.

4. نستخلص مما سبق، بأن متراجحة شيبيشيف تملك قيمة تطبيقية محدودة، لكن لها قيمة نظرية كبيرة، لأنها تستخدم أساسا لبرهان سلسلة النظريات المنتمية لقانون الأعداد الكبيرة.

ثانيا: نظرية الأعداد الكبيرة

إن مجموعة المفاهيم المتعلقة بالتقارب بالإضافة إلى متراجحة شيبيشيف، تمكننا من إيضاح محتوى قانون الأعداد الكبيرة. فقانون الأعداد الكبيرة يصيغ العلاقة بين النماذج الرياضية للتجربة والتطبيق، وهذا القانون له صيغ مختلفة، ويتجلى ذلك بمجموعة من النظريات (شيبيشيف، برنولي، بواسون، ...).

وفي هذه النظريات تبدو الشروط التي في حالة تحققها، يؤدي التأثير الإجمالي (المحصلة) لعدد كبير جدا من التغيرات العشوائية غير المضبوطة لشروط التجربة (العوامل العشوائية) إلى نتيجة ثابتة، وتقريبا مستقلة عن العشوائية.

نظرية الأعداد الكبيرة التي تبنى أساسياتها على متراجحة شبيشيف يستفاد منها بشكل خاص في نظرية المعاينة، وتصاغ هذه النظرية بالشكل الآتي:

لتكن لدينا المتغيرات العشوائية المستقلة بالتبادل $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ (منفصلة أو متصلة) ولها نفس التوزيع الاحتمالي، ولكل منها التوقع المحدود μ والتباين σ^2 فإنه إذا كان :

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n \qquad (n = 1,2, \dots)$$

فإن:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| - \mu \geq \varepsilon\right) = 0$$

تسمى هذه الصياغة أيضا بقانون الأعداد الكبيرة الضعيف، وحيث أن S_n/n تمثل الوسط الحسابي للمجموع $X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$ فإن هذه النظرية تقرر احتمال أن الوسط الحسابي S_n/n يختلف عن العينة المتوقعة μ بأكثر من ε ويقترب من الصفر عندما $n \to \infty$، وتبعا لذلك فقد نتوقع صحة النتيجة أن $\lim_{n\to\infty} S_n/n = \mu$ ولكنها تكون بالفعل خطأ، وعلى أي حال يمكن إثبات أن $\lim_{n\to\infty} S_n/n = \mu$ باحتمال هي واحد صحيح أي أن :

$$P(\lim_{n\to\infty} S_n/n = \mu) = 1$$

وهذه الصياغة تسمى بالقانون القوي للأعداد الكبيرة.

تمارين محلولة

التمرين الأول:

في دراســة قام بها مركز للأغذية وجد أن متوســط كمية فيتامين B في شــرائح الخبز هو 0.260 ملغرام بانحراف قدره 0.005 ملغرام، أوجد القيم التي تقع بينها كمية فيتامين B في:

1- نسبة $\frac{35}{36}$على الأقل من هذه الشرائح.

2- نسبة $\frac{63}{64}$على الأقل من هذه الشرائح.

التمرين الثاني:

ادعت شــركة طيران أن ســفرياتها بين المدن الداخلية تصــل متأخرة عن موعدها بمتوســط قدره 4.6 دقيقة وانحراف معياري مقداره 1.6 دقيقة، فما هي أقل نسبة من سفرياتها تصل متأخرة ما بين:

1- (1.8 و7.4 دقيقة)

2- (2.2 و7 دقيقة)

التمرين الثالث:

إذا كان عدد المنتجات المصــنعة في أحد المصــانع خلال شــهر هو متغير عشــوائي بمتوســط قدره 60، وانحراف معياري مقدر بــــ 5، فما هي نســبة الاحتمال في أن يختلف الإنتاج في هذا الشهر:

1- بأكثر من 10 وحدات عن المتوسط؟

2- بأكثر من 20 وحدة عن المتوسط؟

التمرين الرابع:

لنفترض أن نسبة العطب (القطع غير مكتملة الصنع) في شحنة كبيرة من بضاعة مصنعة هي p.

المطلوب: تعيين n، بحيث إذا أخذنا عينة عشوائية (السحب مع الإعادة) حجمها n أو أكثر من هذه البضاعة كنا واثقين باحتمال لا يقل عن 0.95 بأن نسبة العطب في العينة يختلف عن p بأقل من 0.1.

الحلـــول

حل التمرين الأول:

1-إيجاد القيم التي تقع بينها كمية فيتامين B في نسبة $\frac{35}{36}$على الأقل من هذه الشرائح:

$$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{35}{36} \qquad \Leftrightarrow \left(\frac{1}{k^2}\right)=1-\frac{35}{36}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{36}$$

$$\Leftrightarrow \quad k=\sqrt{36}$$

$$\Leftrightarrow \quad k=6$$

وبالتالي القيم التي تقع بينها كمية فيتامين B في نسبة $\frac{35}{36}$على الأقل من هذه الشرائح هي:

$$(\mu-k\sigma,\mu+k\sigma)=\left(0.26-0.005(6)\,,0.26+0.005(6)\right)$$

$$=(0.26-0.03\,,0.26+0.03)$$

$$=(0.23\,,0.29)$$

2-إيجاد القيم التي تقع بينها كمية فيتامين B في نسبة $\frac{63}{64}$على الأقل من هذه الشرائح:

$$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{63}{64} \qquad \Leftrightarrow \left(\frac{1}{k^2}\right)=1-\frac{63}{64}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{64}$$

$$\Leftrightarrow \quad k=\sqrt{64}$$

$$\Leftrightarrow \quad k=8$$

وبالتالي القيم التي تقع بينها كمية فيتامين B في نسبة $\frac{63}{64}$على الأقل من هذه الشرائح هي:

$$\begin{aligned}(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma) &= \big(0.26 - 0.005(8)\,, 0.26 + 0.005(8)\big)\\ &= (0.26 - 0.04, 0.26 + 0.04)\\ &= (0.22\,, 0.30)\end{aligned}$$

حل التمرين الثاني:

1-أقل نسبة من سفريات شركة الطيران التي تصل متأخرة ما بين (1.8 و7.4 دقيقة)

نلاحظ أن منتصف الفترة المعطاة (1.8 و7.4 دقيقة) هو المتوسط $\mu = 4.6$ لذلك نستطيع تطبيق نظرية شيبيشيف. فيكون لدينا:

$$\begin{aligned}(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma) = (1.8\,, 7.4) \quad &\Rightarrow \quad \mu + k\sigma = 7.4\\ &\Leftrightarrow \quad 4.6 + 1.6\,k = 7.4\\ &\Leftrightarrow \quad 1.6\,k = 2.8\\ &\Leftrightarrow \quad k = 1.75\\ &\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{(1.75)^2}\\ &\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 0.6734\end{aligned}$$

ومنه فإن أقل نسبة من سفريات شركة الطيران التي تصل متأخرة ما بين (1.8 و7.4 دقيقة) هي 67.34 %.

2-أقل نسبة من سفريات شركة الطيران التي تصل متأخرة ما بين (2.2 و7 دقيقة)

نلاحظ أن منتصف الفترة المعطاة (2.2 و7 دقيقة) هو المتوسط $\mu = 4.6$ لذلك نستطيع تطبيق نظرية شيبيشيف. فيكون لدينا:

$$\begin{aligned}(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma) = (2.2\,, 7) \quad &\Rightarrow \quad \mu + k\sigma = 7\\ &\Leftrightarrow \quad 4.6 + 1.6\,k = 7\\ &\Leftrightarrow \quad 1.6\,k = 2.4\\ &\Leftrightarrow \quad k = 1.5\\ &\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{(1.5)^2}\\ &\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 0.5555\end{aligned}$$

ومنه فإن أقل نسـبة من سـفريات شـركة الطيران التي تصـل متأخرة ما بين (2.2 و7 دقيقة) هي 55.55 %.

حل التمرين الثالث:

1-نسبة الاحتمال في أن يختلف الإنتاج في هذا الشهر بأكثر من 10 وحدات عن المتوسط:

بتطبيق نظرية شيبيشيف والتي تنص على أن:

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

نجد أن:

$$P(|X-60| \geq 10) \leq \frac{5^2}{10^2} = \frac{1}{4}$$

إذا احتمال أن يختلف الإنتاج في هذا الشـهر بأكثر من 10 وحدات عن المتوسط هو: 0.25 (25 %) على الأكثر.

2-نسـبة الاحتمال في أن يختلف الإنتاج في هذا الشـهر بأكثر من 10 وحدات عن المتوسط:

بتطبيق نظرية شيبيشيف والتي تنص على أن:

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

نجد أن:

$$P(|X-60| \geq 20) \leq \frac{5^2}{20^2} = \frac{25}{400} = 0.0625$$

إذا احتمال أن يختلف الإنتاج في هذا الشـهر بأكثر من 20 وحدة عن المتوسط هو: 0.0625 (6.25 %) على الأكثر.

حل التمرين الرابع:

لنرمز بـــــ X_i لنتيجة الســحب رقم $i = \overline{1,n}$ عند أخذ العينة، حيث $X_i = 0$ إذا كانت القطعة المســحوبة ســليمة (خالية من العطب) و $X_i = 1$ إذا كانت القطعة المسحوبة معطوبة، وليكن $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ هو عدد النجاحات (عدد القطع المطلوبة) من بين الـــ n قطعة في العينة، وبالتالي فإن: $\bar{X} = \frac{X}{n}$ نسبة القطع المعطوبة في العينة، فيصبح المطلوب :

$$P(|\bar{X} - \mu = p| < 0.1) \geq 0.95$$

أي أن:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < 0.1\right) \geq 0.95 \Rightarrow \mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mathrm{np}| \geq 0.1\mathrm{n}) \leq 1 - 0.95 = 0.05$$

حسب متراجحة شيبيشيف فإن:

$$P(|X - np| \geq 0.1n) \leq \frac{\sigma^2}{(0.1n)^2} = \frac{V(X)}{(0.1n)^2} = \frac{npq}{(0.1n)^2}$$

وبما أن: $pq \leq \frac{1}{4}$ فإن:

$$\frac{npq}{(0.1n)^2} \leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)n}{(0.1n)^2} = \frac{25n}{n^2} = \frac{25}{n}$$

إذن:

$$P(|X - np| \geq 0.1n) \leq \frac{25n}{n^2} = \frac{25}{n}$$

ويتحقق المطلوب، إذا كان:

$$\frac{25}{n} \leq 0.05 \Rightarrow \boldsymbol{n} \geq \mathbf{500}$$

ومنه فإنه يجب أن تكون $n \geq 500$، بحيث إذا أخذنا عينة عشـــوائية (الســحب مع الإعادة) حجمها n أو أكثر من هذه البضــاعة كنا واثقين باحتمال لا يقل عن 0.95 بأن نسبة العطب في العينة يختلف عن p بأقل من 0.1.

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

إذا كان أطوال طلاب الجامعة يتبع توزيعا طبيعيا وسطه 170 سم مع انحراف معياري 8 سم. استخدم متراجحة شيبيشيف لإيجاد حدا أعلى لاحتمال أن يكون أحد الطلاب:

1- أطول أو أقصر بـ 12 سم من المتوسط؟

2- أطول أو أقصر بـ 16 سم من المتوسط؟

التمرين الثاني:

لدينا عينة من المعطيات متوسطها 25 وانحرافها المعياري 4.5:

1- ما هي نسبة المعطيات الواقعة ضمن المجال (34،16)؟

2- ما هي نسبة المعطيات الواقعة ضمن المجال (22، 28)؟

3- أوجد مجال يقع فيها ما لا يقل عن 50 % من المعطيات؟

4- أوجد مجال يقع فيها ما لا يقل عن 75 % من المعطيات؟

التمرين الثالث:

بافتراض أن إنتاج مصنع خاص بصناعة الأجهزة الكهرومنزلية خلال يوم واحد عبارة عن متغير عشوائي ذو توقع رياضي يساوي 850، وتباين يساوي 250:

1- أحسب احتمال أن يكون الإنتاج اليومي للمصنع محصور بين 700 و1000 وحدة؟

2- أحسب احتمال أن يكون الإنتاج اليومي للمصنع محصور بين 600 و1100 وحدة؟

3- أوجد مجال يقع فيه ما لا يقل عن 75 % من الإنتاج؟

التمرين الرابع:

متوســـط مـدة التمـدرس في مجتمع معين هي 8 ســـنوات، والانحراف المعياري $\sigma = 1$.

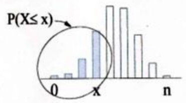
1- أحســب أدنى احتمال لمدة تمدرس بين 6 و10 ســنوات لفرد مختار عشــوائيا من هذا المجتمع؟

2- أحســـب أقصــى احتمـال لمـدة تمـدرس لا تزيـد عن 6 ســـنوات أو لا تقـل عن 10 سنوات؟

الملحق رقم (1)

Table de la variable aléatoire Binomiale

Fournit la probabilité $P(X \leq x)$
pour $X \sim Bi(n,p)$



p		0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=5	x											
	0	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,0778	0,0312	0,0102	0,0024	0,0010	0,0003	0,0000
	1	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,3370	0,1875	0,0870	0,0308	0,0156	0,0067	0,0005
	2	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,6826	0,5000	0,3174	0,1631	0,1035	0,0579	0,0086
	3	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9130	0,8125	0,6630	0,4718	0,3672	0,2627	0,0815
	4	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9898	0,9688	0,9222	0,8319	0,7627	0,6723	0,4095
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=10	x											
	0	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0060	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	
	1	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0464	0,0107	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000	
	2	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,1673	0,0547	0,0123	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000
	3	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,3823	0,1719	0,0548	0,0106	0,0035	0,0009	0,0000
	4	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,6331	0,3770	0,1662	0,0473	0,0197	0,0064	0,0001
	5	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,8338	0,6230	0,3669	0,1503	0,0781	0,0328	0,0016
	6	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9452	0,8281	0,6177	0,3504	0,2241	0,1209	0,0128
	7	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9877	0,9453	0,8327	0,6172	0,4744	0,3222	0,0702
	8		1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9893	0,9536	0,8507	0,7560	0,6242	0,2639
	9		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	0,9940	0,9718	0,9437	0,8926	0,6513
	10				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=15	x											
	0	0,2059	0,0352	0,0134	0,0047	0,0005	0,0000	0,0000				
	1	0,5490	0,1671	0,0802	0,0353	0,0052	0,0005	0,0000	0,0000			
	2	0,8159	0,3980	0,2361	0,1268	0,0271	0,0037	0,0003	0,0000	0,0000		
	3	0,9444	0,6482	0,4613	0,2969	0,0905	0,0176	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	
	4	0,9873	0,8358	0,6865	0,5155	0,2173	0,0592	0,0093	0,0007	0,0001	0,0000	
	5	0,9978	0,9389	0,8516	0,7216	0,4032	0,1509	0,0338	0,0037	0,0008	0,0001	
	6	0,9997	0,9819	0,9434	0,8689	0,6098	0,3036	0,0950	0,0152	0,0042	0,0008	0,0000
	7	1,0000	0,9958	0,9827	0,9500	0,7869	0,5000	0,2131	0,0500	0,0173	0,0042	0,0000
	8	1,0000	0,9992	0,9958	0,9848	0,9050	0,6964	0,3902	0,1311	0,0566	0,0181	0,0003
	9		0,9999	0,9992	0,9963	0,9662	0,8491	0,5968	0,2784	0,1484	0,0611	0,0022
	10		1,0000	0,9999	0,9993	0,9907	0,9408	0,7827	0,4845	0,3135	0,1642	0,0127
	11		1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9824	0,9095	0,7031	0,5387	0,3518	0,0556
	12			1,0000	1,0000	0,9997	0,9963	0,9729	0,8732	0,7639	0,6020	0,1841
	13				1,0000	1,0000	0,9995	0,9948	0,9647	0,9198	0,8329	0,4510
	14					1,0000	1,0000	0,9995	0,9953	0,9866	0,9648	0,7941
	15						1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

p		0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
n=20	x											
	0	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	0,0000					
	1	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0005	0,0000					
	2	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0036	0,0002	0,0000				
	3	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0160	0,0013	0,0000				
	4	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000			
	5	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000		
	6	0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,2500	0,0577	0,0065	0,0003	0,0000	0,0000	
	7	0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,4159	0,1316	0,0210	0,0013	0,0002	0,0000	
	8	0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,5956	0,2517	0,0565	0,0051	0,0009	0,0001	
	9	1,0000	0,9974	0,9861	0,9520	0,7553	0,4119	0,1275	0,0171	0,0039	0,0006	0,0000
	10	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,8725	0,5881	0,2447	0,0480	0,0139	0,0026	0,0000
	11		0,9999	0,9991	0,9949	0,9435	0,7483	0,4044	0,1133	0,0409	0,0100	0,0001
	12		1,0000	0,9998	0,9987	0,9790	0,8684	0,5841	0,2277	0,1018	0,0321	0,0004
	13		1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423	0,7500	0,3920	0,2142	0,0867	0,0024
	14			1,0000	1,0000	0,9984	0,9793	0,8744	0,5836	0,3828	0,1958	0,0113
	15				1,0000	0,9997	0,9941	0,9490	0,7625	0,5852	0,3704	0,0432
	16					1,0000	0,9987	0,9840	0,8929	0,7748	0,5886	0,1330
	17					1,0000	0,9998	0,9964	0,9645	0,9087	0,7939	0,3231
	18						1,0000	0,9995	0,9924	0,9757	0,9308	0,6083
	19						1,0000	1,0000	0,9992	0,9968	0,9885	0,8784
	20							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
n=25	x											
	0	0,0718	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000						
	1	0,2712	0,0274	0,0070	0,0016	0,0001	0,0000					
	2	0,5371	0,0982	0,0321	0,0090	0,0004	0,0000					
	3	0,7636	0,2340	0,0962	0,0332	0,0024	0,0001	0,0000				
	4	0,9020	0,4207	0,2137	0,0905	0,0095	0,0005	0,0000				
	5	0,9666	0,6167	0,3783	0,1935	0,0294	0,0020	0,0001				
	6	0,9905	0,7800	0,5611	0,3407	0,0736	0,0073	0,0003	0,0000			
	7	0,9977	0,8909	0,7265	0,5118	0,1536	0,0216	0,0012	0,0000			
	8	0,9995	0,9532	0,8506	0,6769	0,2735	0,0539	0,0043	0,0001	0,0000		
	9	0,9999	0,9827	0,9287	0,8106	0,4246	0,1148	0,0132	0,0005	0,0000	0,0000	
	10	1,0000	0,9944	0,9703	0,9022	0,5858	0,2122	0,0344	0,0018	0,0002	0,0000	
	11	1,0000	0,9985	0,9893	0,9558	0,7323	0,3450	0,0778	0,0060	0,0009	0,0001	
	12		0,9996	0,9966	0,9825	0,8462	0,5000	0,1538	0,0175	0,0034	0,0004	
	13		0,9999	0,9991	0,9940	0,9222	0,6550	0,2677	0,0442	0,0107	0,0015	0,0000
	14		1,0000	0,9998	0,9982	0,9656	0,7878	0,4142	0,0978	0,0297	0,0056	0,0000
	15		1,0000	1,0000	0,9995	0,9868	0,8852	0,5754	0,1894	0,0713	0,0173	0,0001
	16			1,0000	0,9999	0,9957	0,9461	0,7265	0,3231	0,1494	0,0468	0,0005
	17				1,0000	0,9988	0,9784	0,8464	0,4882	0,2735	0,1091	0,0023
	18				1,0000	0,9997	0,9927	0,9264	0,6593	0,4389	0,2200	0,0095
	19					0,9999	0,9980	0,9706	0,8065	0,6217	0,3833	0,0334
	20					1,0000	0,9995	0,9905	0,9095	0,7863	0,5793	0,0980
	21					1,0000	0,9999	0,9976	0,9668	0,9038	0,7660	0,2364
	22						1,0000	0,9996	0,9910	0,9679	0,9018	0,4629
	23						1,0000	0,9999	0,9984	0,9930	0,9726	0,7288
	24							1,0000	0,9999	0,9992	0,9962	0,9282
	25							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

الملحق رقم (2)

Table de la loi de poisson

	λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
r	0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
	1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
	2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
	3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
	4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
	5			0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
	6					0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
	7							0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	8										0,0000

	λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
r	0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
	1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
	2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
	3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
	4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
	5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
	6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
	7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
	9			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
	10						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	11									0,0000	0,0000

	λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
r	0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
	1	0,1083	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
	2	0,0053	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
	3	0,0000	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
	4	0,0000	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
	5	0,0000	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
	6	0,0000	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
	7	0,0000	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
	8	0,0000	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
	9			0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
	10						0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
	11						0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
	12						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	13									0,0000	0,0000

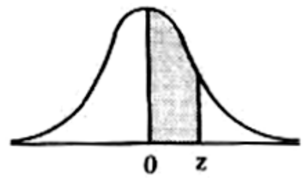
	λ	2,5	3	4	4,5	5	5,5	6	7	8	9
r	0	0,0821	0,0498	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
	1	0,2052	0,1494	0,0733	0,0500	0,0337	0,0225	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
	2	0,2565	0,2240	0,1465	0,1125	0,0842	0,0618	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
	3	0,2138	0,2240	0,1954	0,1687	0,1404	0,1133	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
	4	0,1336	0,1680	0,1954	0,1898	0,1755	0,1558	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
	5	0,0668	0,1008	0,1563	0,1708	0,1755	0,1714	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
	6	0,0278	0,0504	0,1042	0,1281	0,1462	0,1571	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
	7	0,0099	0,0216	0,0595	0,0824	0,1044	0,1234	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
	8	0,0031	0,0081	0,0298	0,0463	0,0653	0,0849	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
	9	0,0009	0,0027	0,0132	0,0232	0,0363	0,0519	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
	10	0,0002	0,0008	0,0053	0,0104	0,0181	0,0285	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
	11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0043	0,0082	0,0143	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
	12		0,0001	0,0006	0,0016	0,0034	0,0065	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728
	13		0,0000	0,0002	0,0006	0,0013	0,0028	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504

الملحق رقم (3): التوزيع الطبيعي

١ ـ جدول التوزيع الطبيعي القياسي

$Z \sim N(0, 1)$

المساحة المظللة تمثل $P(0<Z<z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2703	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997

الملحق رقم (3): التوزيع الطبيعي -تابع

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

الملحق رقم (3): التوزيع الطبيعي -تابع-

$\Phi(z) = P(Z \leq z), \ -3.49 \leq z \leq 0\,, \quad Z\sim N(0,1)$ جدول (1) التوزيع الطبيعي

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3829
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

الملحق رقم (4): توزيع كاي مربع

$$P(X \geq a), \qquad X \sim x^2(\alpha, \vartheta)$$

ϑ \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	–	–	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

الملحق رقم (5): توزيع ستودنت

$P(X \geq a), \quad X \sim t(\vartheta)$ جدول (3) توزيع t

ϑ \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

الملحق رقم (6): توزيع فيشر

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.05, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75
inf	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67

الملحق رقم (6): توزيع فيشر-تابع-

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.05, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
inf	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

الملحق رقم (6): توزيع فيشر -تابع-

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.1, \vartheta_1, \vartheta_2)$

$\vartheta_2 \backslash \vartheta_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	39.86	49.5	53.59	55.83	57.24	58.2	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22
2	8.53	9	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.2
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.9	3.87
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.4	3.37	3.34	3.32	3.3	3.27	3.24
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.9	2.87
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.7	2.67	2.63
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.5	2.46
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.3	2.27	2.25	2.21	2.17
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.1
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.2	2.16	2.14	2.1	2.05
14	3.1	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.1	2.05	2.01
15	3.07	2.7	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.1	2.06	2.03	2	1.96	1.91
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.2	2.13	2.08	2.04	2	1.98	1.93	1.89
19	2.99	2.61	2.4	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2	1.96	1.94	1.89	1.84
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.9	1.86	1.81
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.8
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.1	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76
27	2.9	2.51	2.3	2.17	2.07	2	1.95	1.91	1.87	1.85	1.8	1.75
28	2.89	2.5	2.29	2.16	2.06	2	1.94	1.9	1.87	1.84	1.79	1.74
29	2.89	2.5	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.6
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.9	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.6	1.55
inf	2.71	2.3	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.6	1.55	1.49

الملحق رقم (6): توزيع فيشر-تابع-

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.1, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	61.74	62	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.84	3.83	3.82	3.8	3.79	3.78	3.76
5	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
6	2.84	2.82	2.8	2.78	2.76	2.74	2.72
7	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	2.42	2.4	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	2.3	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	2.2	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	2.12	2.1	2.08	2.05	2.03	2	1.97
12	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.9
13	2.01	1.98	1.96	1.93	1.9	1.88	1.85
14	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.8
15	1.92	1.9	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	1.81	1.79	1.76	1.73	1.7	1.67	1.63
20	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	1.76	1.73	1.7	1.67	1.64	1.6	1.57
23	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	1.73	1.7	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.5
27	1.7	1.67	1.64	1.6	1.57	1.53	1.49
28	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.5	1.46
40	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.4	1.35	1.29
120	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
inf	1.42	1.38	1.34	1.3	1.24	1.17	1

الملحق رقم (6): توزيع فيشر-تابع-

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.025, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	647.79	799.5	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63	976.71	984.87
2	38.51	39	39.17	39.25	39.3	39.33	39.36	39.37	39.39	39.4	39.41	39.43
3	17.44	16.04	15.44	15.1	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25
4	12.22	10.65	9.98	9.6	9.36	9.2	9.07	8.98	8.9	8.84	8.75	8.66
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43
6	8.81	7.26	6.6	6.23	5.99	5.82	5.7	5.6	5.52	5.46	5.37	5.27
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.9	4.82	4.76	4.67	4.57
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.3	4.2	4.1
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.2	4.1	4.03	3.96	3.87	3.77
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33
12	6.55	5.1	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18
13	6.41	4.97	4.35	4	3.77	3.6	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05
14	6.3	4.86	4.24	3.89	3.66	3.5	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95
15	6.2	4.77	4.15	3.8	3.58	3.41	3.29	3.2	3.12	3.06	2.96	2.86
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.5	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.1	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67
19	5.92	4.51	3.9	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.8	2.73	2.64	2.53
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.7	2.6	2.5
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.9	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.7	2.64	2.54	2.44
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.1	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.8	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.9	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34
29	5.59	4.2	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.9	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06
120	5.15	3.8	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.3	2.22	2.16	2.05	1.95
inf	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83

الملحق رقم (6): توزيع فيشر-تابع-

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.025, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	993.1	997.25	1001.41	1005.6	1009.8	1014.02	1018.26
2	39.45	39.46	39.47	39.47	39.48	39.49	39.5
3	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.9
4	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.9	4.85
7	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.2	4.14
8	4	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.42	3.37	3.31	3.26	3.2	3.14	3.08
11	3.23	3.17	3.12	3.06	3	2.94	2.88
12	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.73
13	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.6
14	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	2.76	2.7	2.64	2.59	2.52	2.46	2.4
16	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.62	2.56	2.5	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.56	2.5	2.45	2.38	2.32	2.26	2.19
19	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.2	2.13
20	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.39	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2
23	2.36	2.3	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.3	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.25	2.19	2.13	2.07	2	1.93	1.85
28	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.2	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.07	2.01	1.94	1.88	1.8	1.72	1.64
60	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
inf	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1

الملحق رقم (6): توزيع فيشر -تابع-

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.01, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	4052.18	4999.5	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.85	6106.32	6157.29
2	98.5	99	99.17	99.25	99.3	99.33	99.36	99.37	99.39	99.4	99.42	99.43
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87
4	21.2	18	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.8	14.66	14.55	14.37	14.2
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72
6	13.75	10.93	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.1	7.98	7.87	7.72	7.56
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.8	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.2	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.4	4.25
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.5	4.39	4.3	4.16	4.01
13	9.07	6.7	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.3	4.19	4.1	3.96	3.82
14	8.86	6.52	5.56	5.04	4.7	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.8	3.66
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4	3.9	3.81	3.67	3.52
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.2	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41
17	8.4	6.11	5.19	4.67	4.34	4.1	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.02	3.84	3.71	3.6	3.51	3.37	3.23
19	8.19	5.93	5.01	4.5	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.3	3.15
20	8.1	5.85	4.94	4.43	4.1	3.87	3.7	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.4	3.31	3.17	3.03
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98
23	7.88	5.66	4.77	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.3	3.21	3.07	2.93
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.9	3.67	3.5	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82
27	7.68	5.49	4.6	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.9	2.75
29	7.6	5.42	4.54	4.05	3.73	3.5	3.33	3.2	3.09	3.01	2.87	2.73
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.7	3.47	3.3	3.17	3.07	2.98	2.84	2.7
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.8	2.67	2.52
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.5	2.35
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19
inf	6.64	4.61	3.78	3.32	3.02	2.8	2.64	2.51	2.41	2.32	2.19	2.04

الملحق رقم (6): توزيع فيشر-تابع-

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.01, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	6208.73	6234.63	6260.65	6286.78	6313.03	6339.39	6365.86
2	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.5
3	26.69	26.6	26.51	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	9.55	9.47	9.38	9.29	9.2	9.11	9.02
6	7.4	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.36	5.28	5.2	5.12	5.03	4.95	4.86
9	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.4	4.31
10	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4	3.91
11	4.1	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.6
12	3.86	3.78	3.7	3.62	3.54	3.45	3.36
13	3.67	3.59	3.51	3.43	3.34	3.26	3.17
14	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3
15	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.26	3.18	3.1	3.02	2.93	2.85	2.75
17	3.16	3.08	3	2.92	2.84	2.75	2.65
18	3.08	3	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3	2.93	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	2.94	2.86	2.78	2.7	2.61	2.52	2.42
21	2.88	2.8	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	2.83	2.75	2.67	2.58	2.5	2.4	2.31
23	2.78	2.7	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	2.74	2.66	2.58	2.49	2.4	2.31	2.21
25	2.7	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	2.66	2.59	2.5	2.42	2.33	2.23	2.13
27	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.2	2.1
28	2.6	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	2.57	2.5	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.55	2.47	2.39	2.3	2.21	2.11	2.01
40	2.37	2.29	2.2	2.11	2.02	1.92	1.81
60	2.2	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.6
120	2.04	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
inf	1.88	1.79	1.7	1.59	1.47	1.33	1

المراجع

أولا: المراجع باللغة العربية

1- أحمد السيد عامر، **الإحصاء الوصفي والتحليلي**، (دار الفجر للنشر والتوزيع، القاهرة، 2007).

2- إمتثال محمد حسن وآخرون، **مقدمة في أساليب الاستدلال الإحصائي والتنبؤ**، (مكتبة الوفاء القانونية، الإسكندرية، 2012).

3- أمحمد معتوق، **الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية**، (ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015).

4- أنيس كنجو، **الإحصاء الرياضي**، (مديرية الكتب الجامعية، دمشق، 1979).

5- السعدي رجال، **نظرية الاحتمالات**، (ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2008).

6- السيفو ولد إسماعيل، **أساسيات الأساليب الإحصائية**، (زمزم ناشرون وموزعون، عمان، 2010).

7- سيمور ليبشتز: **سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في الاحتمالات**، ترجمة سامح داود، نشر وترجمة الدار الدولية للنشر والتوزيع، القاهرة – مصر، الطبعة الثالثة، 1990.

8- صالح رشيد بطارسة، **الإحصاء والاحتمالات**، (دار أسامة للنشر والتوزيع، عمان، 2010).

9- عزام صبري، **الإحصاء الرياضي**، (دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع، عمان، 2010).

10- عماد عصاب عبابنة وسالم عيسى بدر، **مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، (دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، 2007).

11- كامل فليفل وفتحي حمدان، **الإحصاء**، (دار المناهج، عمان، 2005).

12- الكيخيا نجاة إبراهيم، **<u>أساسيات الإحصاء الاستدلالي</u>**، (دار المريخ للنشر، الرياض، 2007).

13- محمد حسين محمد رشيد القادري، **<u>مبادئ الإحصاء والاحتمالات ومعالجتها باستخدام برنامج SPSS</u>**، (دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع، 2012).

14- محمد صبحي أبو صالح، **<u>الطرق الإحصائية</u>**، (دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، 2000).

15- مصطفى عبد الحفيظ: **نظرية الاحتمالات مبادئ وتطبيقات**، الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، 2008.

16- موراي شبيجل وآخرون: **<u>الاحتمالات والإحصاء</u>**، ترجمة محمود علي أبو النصر ومصطفى جلال مصطفى، نشر وترجمة الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة – مصر، الطبعة الأولى، 2004.

17- نعمة الله نجيب إبراهيم، **<u>مقدمة في الاقتصاد القياسي</u>**، (مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، 2012).

ثانيا: المراجع باللغة الأجنبية

18- *Ahmed Chibat,* ***Cours de statistiques,*** *(Universié mentouri de constantine, Alger, 2000).*

19- *Bernard Verlant,* ***Statistiques et Probabilités : Manuel de cours, Exercices corrigés – Sujets d'examens*** *(BERTI Editions, Alger, 2008).*

20- *Besma Belhadj,* ***Statistique mathématique, inférence statistique : introduction à l'économiétrie et aux techniques des sondages : cours, exercices corrigés et sujets d'examens, problèmes concrets,*** *(Centre de publication universitaire, Tunis, 2010).*

21- *Chamoun Chamoun,* ***Elements de statistiques et la probabilité****, (office des publications universitaires, Alger, 2010).*

22- *Jean-Pierre Lecoutre****, Statistique et probabilités,*** *(Malakoff : Dunod, 2016).*

23- *Maurice Lethielleux,* ***Probabilités, estimation statistique,*** *(Dunod, Paris, 2016).*

24- *Mohamed Benali moncef,* ***Statistique mathématique : rappels de cours avec exercices corriges,*** *(Centre de publication universitaire, Tunis, 2002).*

25- *Rachid Souidi****, Statistique inférentielle,*** *(OPU, Alger, 1999).*

EDITIONS DAR EL MOUTANABBI
دار المتنبي
للطباعة والنشر