الجمهوريـــة الجزائرية الديمقراطية الشعبيــة
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالـي والبحث العلمــي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH

جامعة محمد بوضياف المسيلة
كــلية الـــعلوم الاقـــتصادية والتجاريـــة
وعلوم التسيير
نيابة العمادة لما بعد التدرج والبحث العلمي
والعلاقات الخارجية

University Mohamed BOUDIAF of M'sila
Faculty of Economic Sciences, Commercial
and Management Sciences
Vice Dean of Post-Graduation, ScientificResearch and
External Relations

الرقم : 134 /2024

المسيلة في:2024/10/13

مستخرج فردي من محضر المجلس العلمي

بناء على إجتماع المجلس العلمي للكلية المنعقد يوم الأربعاء الموافق 2024/06/26، بقاعة الاجتماعات بالكليــة، ومن بين النقاط المدرجة في جدول الأعمال:

معالجة طلب الأستاذ: عبد الحميد قطوش لاعتماد مطبوعة الإحصاء 04

بناءا على الشهادة الإدارية رقم 65 الصادرة من مجلس الميدان بتاريخ 25.04.2024 والتي تم خلالها مطابقة محتوى المطبوعة من:الإحصاء 03 مدعم بتمارين وامتحانات محلولة إلى الإحصاء 04 مدعم بتمارين وامتحانات محلولة

تم اعتماد المطبوعة المعنية للأستاذ.

رئيس المجلس العلمي للكلية

أ.د عمر بوجفاوة

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République algérienne démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

جامعة محمد بوضياف - المسيلة –
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
نيابة العمادة لما بعد التدرج والبحث العلمي والعلاقات الخارجية

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université de Mohamed BOUDIAF M'sila
Faculté des sciences économiques, commerciales et science de gestion
Vice-doyen en charge de la post-Graduationet de la Recherche Scientifique et des Relations Extérieures

الرقم:93/ 2023

المسيلة في:2023/10/10

مستخرج فردي من محضر المجلس العلمي

بناء على اجتماع المجلس العلمي للكلية المنعقد بتاريخ: 2022/07/14 بقاعـة الاجتماعـات بالكليـة

وبناءا على تقارير الخبراء الايجابية للسادة الأساتذة :

بن البار موسى	جامعة المسيلة
بيصار عبد الحكيم	جامعة المسيلة
عابي وليد	جامعة تبسة

تم اعتماد مطبوعة العائد للأستاذ (ة): قطوش عبد الحميد

الموسوم(ة) بـ: محاضرات في الاحصاء 03

رئيس المجلس العلمي

أ.د/ عريوة محاد

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

رقم : 265/ 2024

المسيلة في : 2024/12/10

شهادة نشر مطبوعة بيداغوجية على الخط

(خاص بملف الترقية العلمية)

بناءا على الإطلاع على المستودع الرقمي لجامعة المسيلة Dspace والتقرير الإيجابي للخبرة البيداغوجية المرسلة للهيئة العلمية للقسم،

نشهد بأن :

الأستاذ: **قطوش عبد الحميد** (أستاذ محاضر 'أ' بقسم العلوم الاقتصادية) قام بنشر مطبوعة بيداغوجية عبر الخط للمقرر الدراسي: **الإحصاء 4**

مستوى : **الثانية ليسانس** ، تخصص : **جذع مشترك علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير** .

الهيئة العلمية

رئيس المجلس العلمي

أ.د عريوة سجاد

نائب العميد المكلف بالدراسات
والمسائل المرتبطة بالطلبة

نائب العميد المكلف بالدراسات والمسائل المرتبطة بالطلبة
أ.د غربي حمزة

أصدرت هذه الشهادة بطلب من المعني (ة) لإستعمالها في حدود ما يسمح به القانون .

الجـــمـهوريــة الجـزائـريـــة الديمـــقراطيـــة الشـــعبيـــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليـــم العالـــي والبحـــث العلمـــي
جامعـــة محمد بوضياف ـ المسيلـــة
كليـــة العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
مكتبـــة الكليـــة

Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed boudiaf de M'sila
Faculté des sciences économiques, commerciale et science de gestion
Bibliothèque de faculté

الرقم: 4 2024/0

المسيلة في: 09/ 12/ 2024

شهادة ادارية

- يشهد السيد مسؤول مكتبة كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة، بأن المطبوعة البيداغوجية المرسلة من طرف الدكتور : **عبد الحميد قطوش**

تحت عنوان: الإحصاء 4 مدعم بتمارين و امتحانات محمولة

قد وضعت على مستوى المستودع المؤسساتي بتاريخ 09/ 12/ 2024.

تحت الـرابط:

https://dspace.univ-msila.dz/handle/123456789/45116

مسؤول المكتبة

ملاحظة: * سلمت هذه الشهادة لاستعمالها فيما يسمح به قانونا.

رداوي ليلى

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف – المسيلة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

الإحصاء 4

– مدعم بتمارين وامتحانات محلولة –

– حسب المقرر الرسمي لوزارة التعليم العالي والبحث العلمي –

إعداد الدكتور:

عبد الحميد قطوش

السنة الجامعية : 2024/2023

مقدمـــــــــــة

مقدمة

يعتبر علم الإحصاء أحد أهم الأساليب الكمية العلمية الواسعة الاستخدام سواء في مجال البحث أو الإدارة أو اتخاذ القرار، حيث يستعمل كوسيلة لتحليل المشكلات بصورة موضوعية، ولخدمة العلماء والباحثين في شتى المجالات، من خلال تزويدهم بأدوات إحصائية تساعدهم على تحقيق فهم أفضل للأوضاع القائمة في شتى المجالات.

وعلم الاحصاء ينقسم إلى جزئين، أحدهما يهتم بتلخيص البيانات الإحصائية إلى عدد محدود من الأرقام تسمى مقاييس إحصائية أو إلى جدول إحصائي يسهل القراءة أو إلى رسوم بيانية، والغرض من كل ذلك هو إعطاء وصفا أوليا للظاهرة المدروسة بدون تحليل معمق، ويسمى إحصاءً وصفيا، والآخر يستند على فكرة إجراء الدراسة الإحصائية (جمع البيانات) على جزء من المجتمع يسمى العينة، يتم اختيارها بطريقة علمية مناسبة، بغرض استخدام بيانات هذه العينة في التوصل إلى نتائج يمكن تعميمها على مجتمع الدراسة، ويسمى إحصاءً استدلاليا، هذا الأخير الذي يكون بأحد الأمرين، إما بالتقدير، أي استنتاج معالم المجتمع عن طريق تقديرها بواسطة إحصائية تحسب قيمتها من بيانات العينة العشوائية المسحوبة من ذلك المجتمع. أما الأمر الآخر فهو اختبار الفرضيات، حيث نستخدم في هذه الحالة احصائية تحسب بياناتها من العينة المسحوبة في اختبار مدى صحة فرض معين حول معلمة من معالم المجتمع المدروس.

بناءا على ما تقدم، وانطلاقا من أهمية هذه المادة وضرورتها بالنسبة للطلبة والباحثين فقد تم تأليف هذه المطبوعة لإثراء مكتباتنا بالمزيد من المؤلفات في هذا المجال.

توفر هذه المطبوعة لطلبة السنة الثانية ل.م.د. مسار العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بصفة خاصة وحتى لطلبة مسارات أخرى حزمة متكاملة من المفاهيم والأدوات الأساسية في الإحصاء الاستدلالي أو الإحصاء4 حسب التسمية الرسمية للمقياس وفق المقرر الرسمي لوزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

وقد جاءت المادة العلمية لهذه المطبوعة في ثلاثة فصول. تناول الفصل الأول منه، مدخل إلى نظرية المعاينة من خلال التعرض إلى مفاهيم أساسية حول الإحصاء والعينات، وملخص لأهم التوزيعات المستخدمة في مجال الإحصاء الاستدلالي (التوزيع الطبيعي، توزيع ستودنت، توزيع كاي مربع، وتوزيع فيشر)، بالإضافة إلى توزيعات المعاينة. أما الفصل الثاني فقد خصص لدراسة نظرية التقدير، وذلك بدراسة كل من التقدير بنقطة والتقدير بمجال. وخصص الفصل الثالث لدراسة اختبار الفرضيات، وقد تم عرض في كل فصل، تمارين محلولة بما فيها امتحانات سابقة أجريت بكلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة. وتمارين أخرى مقترحة.

وفي الوقت الذي نضع هذا الجهد العلمي المتواضع بين أيدي زملائنا المدرسين والمتخصصين وأبنائنا الطلبة، فإنه يحذونا الأمل في أن تساهم هذه المطبوعة في الاستيعاب الجيد للمادة بالنسبة لفئة الطلبة الموجهة إليهم بصفة خاصة والمساهمة كذلك في تزويد الطلبة في طور التخرج والزملاء الأساتذة الباحثين ببعض الأدوات الإحصائية والمنهجية في إعداد المذكرات والرسائل والبحوث. ونستسمح القارئ الكريم العذر سلفا عن أي نقص ورد في هذه المطبوعة، فالنقص من سمات البشر والكمال لله وحده، ونسأل الله وندعوه سبحانه وتعالى أن يتقبل هذا العمل خالصا لوجهه الكريم.

والله الموفق والهادي إلى سواء السبيل.

الدكتور: عبد الحميد قطوش

الفصل الأول

مدخل إلى نظرية المعاينة

نتطرق من خلال هذ الفصل إلى العناصر التالية:

- تمهيد

أولا: مفاهيم أساسية حول الإحصاء والعينات

ثانيا: ملخص لأهم التوزيعات المستخدمة في مجال الإحصاء الاستدلالي

ثالثا: توزيعات المعاينة

- تمارين محلولة

- تمارين مقترحة

تمهيد:

يعتبر حصر جميع بيانات المجتمع الإحصائي أفضل طريقة لإجراء الدراسات الإحصائية حول ظاهرة ما، لأنها تعطي نتائج دقيقة وشاملة، ولكنها غالبا ما تكون مكلفة جدا، وفي بعض الأحيان مستحيلة، لذلك نلجأ إلى اختيار وفحص جزء من المجتمع المراد دراسته، يسمى بالعينة، والهدف من ذلك هو الاستدلال على العديد من الخصائص حول المجتمع محل الدراسة انطلاقا من نتائج العينة المختارة. حيث تسمى هذه العملية بالاستدلال الاحصائي، كما أن عملية اختيار مفردات العينة تسمى بالمعاينة، ولمعرفة كيفية الاستدلال حول خصائص المجتمع انطلاقا من بيانات العينة المختارة منه، يجب فهم العلاقات الرياضية بين الخصائص المختلفة للمجتمع مثل المتوسط الحسابي، التباين، النسبة وغيرها، والخصائص المناظرة لها في العينة، وهو ما يمثل محور دراسة هذا الفصل.

أولا: مفاهيم أساسية حول الاحصاء والعينات

1. مفاهيم أساسية حول الإحصاء:

1-1- تعريف الإحصاء: هو العلم الذي يبحث في طرق جمع البيانات الخاصة بمختلف الظواهر وعرضها وتحليلها للوصول إلى نتائج تساعد في اتخاذ القرارات المناسبة. فالإحصاء بهذا التعريف هو أسلوب منطقي منتظم موحد يعالج الموضوعات والخصائص التي يمكن أن يعبر عنها بصورة رقمية.

1-2- أنواع الإحصاء: ينقسم علم الإحصاء إلى قسمين، هما:

أ- الإحصاء الوصفي: هو ذلك الجزء من الإحصاء الذي يهتم بتلخيص البيانات الإحصائية إلى عدد محدود من الأرقام تسمى مقاييس إحصائية أو إلى جدول إحصائي يسهل القراءة أو إلى رسوم بيانية، والغرض من كل ذلك هو إعطاء وصفا أوليا للظاهرة المدروسة بدون تحليل معمق.

ب- الإحصاء الاستدلالي: يستند على فكرة إجراء الدراسة الإحصائية (جمع البيانات) على جزء من المجتمع يسمى العينة، يتم اختيارها بطريقة علمية مناسبة، بغرض استخدام بيانات هذه العينة في التوصل إلى نتائج يمكن تعميمها على مجتمع الدراسة، فنقول لقد استدللنا على خواص المجتمع على أساس خواص العينة، وهذا عكس الاستنباط الذي يعني استخراج خواص الجزء انطلاقا من خواص الكل.

1-3- طرق جمع البيانات الإحصائية:

يتم جمع البيانات الإحصائية بطرق مختلفة، من أهمها نذكر ما يلي:

أ- طريقة الحصر الشامل: وتعني جمع البيانات حول كل أفراد المجتمع الإحصائي بدون نسيان ولا تكرار، هذا النوع من الدراسات يعطي نتائج دقيقة وشاملة، ولكنها مكلفة جدا، وفي بعض الأحيان مستحيلة.

ب- طريقة العينات: حيث يتم دراسة جزء من المجتمع الإحصائي فقط، وذلك بأخذ عينة عشوائية من المجتمع ودراسة خواصها واستخلاص المعلومات اللازمة منها، ثم تعميم نتائجها على المجتمع الذي سحبت منه.

2. مفاهيم أساسية حول العينات:

2-1- تعريف العينة: هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم استخراجها بطرق إحصائية معينة حتى تكون ممثلة للمجتمع الإحصائي أحسن تمثيل، ويتم الاعتماد عليها في الدراسة بدل المجتمع للأسباب التالية:

أ- كبر حجم المجتمع؛

ب- ربحا للوقت والجهد والتكاليف؛

ج- الفحص الشامل قد يكون مؤذيا أو متلفا للوحدات، فمثلا لو أردنا فحص دم مريض معين، فإنه لا يمكننا أخذ كل دمه، لأن ذلك سيؤدي إلى موته، وبالتالي يصبح الفحص الشامل مؤذي في هذه الحالة. كذلك لو أردنا فحص جميع المصابيح التي تنتجها شركة معينة، فإنه لا يمكننا أخذ كل المصابيح، لأن ذلك سيؤدي إلى تلفها، وبالتالي نكتفي بأخذ عينة من الإنتاج اليومي للشركة؛

د- قد تكون الدراسة الشاملة مستحيلة، فمثلا لو أردنا إجراء دراسة إحصائية معينة على جميع أسماك البحر الأبيض المتوسط فمن المستحيل إجراؤها، وذلك نظرا لاستحالة حصرها، وبالتالي نكتفي بأخذ عينة فقط.

2-2- أنواع العينات:

يمكن تصنيف العينات إلى صنفين، عينات غير احتمالية وأخرى احتمالية، كما يلي:

2-2-1- العينات غير الاحتمالية:

تعرف العينات غير الاحتمالية على أنها تلك العينات التي يتدخل فيها ميل الباحث وتحيزه في اختيار الوحدات الإحصائية التي تجرى عليها الدراسة، مما يؤدي إلى صعوبة تعميم نتائجها على المجتمع المسحوبة منه. من أهمها:

أ- العينة الميسرة: وهي العينة التي يتم اختيار وحداتها جزافيا أو بالمصادفة، حيث أنها قائمة على أساس سهولة الوصول والاتصال بالوحدات الإحصائية محل الدراسة، وكمثال على ذلك، إذا أراد الباحث أن يتعرف على رأي المسافرين في جودة الخدمات التي تقدمها إحدى المطارات، فإنه يتجه إلى البوابة الرئيسية لخروج المسافرين من المطار، ويقوم بسؤال أول 50 مسافرا يواجههم حول مدى جودة الخدمات المقدمة من قبل إدارة المطار.

ب- العينة الهادفة: تستخدم العينة الهادفة للحصول على معلومات من شريحة محددة قادرة على توفير المعلومات، إما بسبب موقعهم أو لأن بعض المعايير التي وضعها الباحث تتوفر فيهم، لأنهم أفضل الأشخاص القادرين على توفير المعلومات، حيث يتم اختيار وحدات العينة بناء على الخبرات في الموضوع الذي يدرس، وتستخدم العينة الهادفة عندما تكون المعلومات المطلوبة متوفرة لدى فئة معينة من الأفراد، فهي التي تملك المعرفة في الموضوع المبحوث وتستطيع تقديم المعلومات، وتستخدم العينة الهادفة في الغالب عندما نتعامل مع عينات صغيرة، أو عندما نتعامل مع حالات نريد منها معلومات خاصة.

وكمثال على ذلك، إذا أراد الباحث أن يتعرف على أهم العوامل التي تساعد لاعبي كرة القدم في الوصول إلى قمة الاحترافية، فإن العينة الهادفة المناسبة هنا هي مجموعة اللاعبين الذين بلغوا قمة الاحترافية، حيث أن لديهم معرفة متخصصة في ذلك الموضوع نتيجة للخبرة.

ج- العينة الحصصية: تعتمد العينة الحصصية على تقسيم المجتمع إلى مجموعات، ثم حساب حصة كل مجموعة في العينة التي ستسحب، وذلك بناء على علاقتها بالبيانات المتوفرة وحجم المجتمع، ثم الحصول على تلك الحصص بأيسر الطرق، كما أنها تستخدم في حالة وجود صفات يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار كالجنس والوظيفة والتوزيع الجغرافي، إذ يجب أن يظهر التنوع الموجود في المجتمع داخل العينة المسحوبة. وكمثال على ذلك إذا أردنا معرفة رأي طلبة كلية معينة حول جودة التدريس داخل الكلية، وكانت نسبة الطلبة الذكور بالكلية 40%، والطالبات 60%، وكان حجم العينة هو 20 طالبا،

فإننا سنوجه السؤال إلى أول 8 طلبة ذكور وأول 12 طالبة، تتم مقابلتهم في ظروف مريحة وبصورة كيفية دون الاعتماد على الأسلوب العشوائي، ليصبح حجم العينة: 8 + 12 = 20 طالبا.

2-1-2- العينات الاحتمالية:

تعرف العينات الاحتمالية على أنها تلك العينات التي لا يتدخل فيها ميل الباحث وتحيزه في اختيار الوحدات الإحصائية التي تجرى عليها الدراسة، أي أن اختيارها يتم عشوائيا، مما يتيح امكانية تعميم نتائجها على المجتمع المسحوبة منه. من أهمها:

أ- العينة العشوائية البسيطة: هي العينة التي تعطي فيها لجميع مفردات المجتمع المراد بحثه نفس الفرصة في الاختيار، وهذا يعني عدم الاهتمام ببعض المفردات أكثر من البعض الآخر وإتاحة الفرص المتكافئة أمام كل مفردة للظهور في العينة، ويمكن أن نحقق ذلك بأن نحضر عددا من البطاقات المتشابهة (في اللون والوزن والحجم وكل شيء) ويكتب على كل بطاقة رقما يمثل مفردة من مفردات المجتمــع ونسحب العــدد المطلوب من هذه البطاقات (بعد خلطها جيدا) فنجد أن الأرقام المسجلة عليها تعطي لنا المفردات التي تم اختيارها بطريقة عشوائية، كما يمكن استخدام جدول الأرقام العشوائية لاختيار العينة، فمثلا لسحب عينة عشوائية بسيطة ذات الحجم 15 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 300، بالاستعانة بجدول الأرقام العشوائية (أنظر الملحق رقم 1) نتبع الخطوات التالية:

- نحدد مفردات العينة؛
- نعطي لكل مفردة عددا من الأعداد التالية: 001، 002، 003، ....، 300.
- من جدول الأرقام العشوائية نختار سطر أو عمود معين، ونأخذ منه جميع الأعداد المحصورة ضمن المجال المحدد (من 001 إلى غاية 300)، وفي حالة نفاذ أعداد السطر أو العمود دون الانتهاء من حجم العينة فإننا ننتقل للسطر أو العمود الموالي، وهكذا حتى يتم حصر العدد المطلوب من حجم العينة، نختار مثلا السطر الثاني، فنجد العينة المطلوبة هي التي تحمل مفرداتها الأعداد التالية:

212، 159، 179، 176، 54، 84، 43، 246، 241، 18، 60، 297، 262، 285، 250.

ب- العينة الطبقية: إذا كان المجتمع يتكون من مجموعات من المفردات تتصف بالتجانس داخل كل مجموعة وبالتباين بين المجموعات المختلفة، ويراد أخذ عينة تكون ممثلة بقدر الإمكان لهذا المجتمع فلابد أن تكون هذه المجموعات ممثلة في العينة، وذلك بتقسيم المجتمع إلى أقسام تعرف بالطبقات، ثم تؤخذ عينة عشوائية من كل طبقة، وبذلك نضمن تمثيل العينة لكل طبقات المجتمع. فمثلا، إذا كان مجتمع يتكون من ثلاث فئات اجتماعية، حجمه $N = 80000$، وحجم كل فئة من فئات المجتمع هو: $N_1 = 20000\ ,\ N_2 = 36000\ ,\ N_3 = 24000$. ونريد سحب عينة حجمها $n = 200$، فإن عدد الوحدات الإحصائية التي يمكن سحبها من كل فئة هو:

بتطبيق القاعدة الثلاثية:

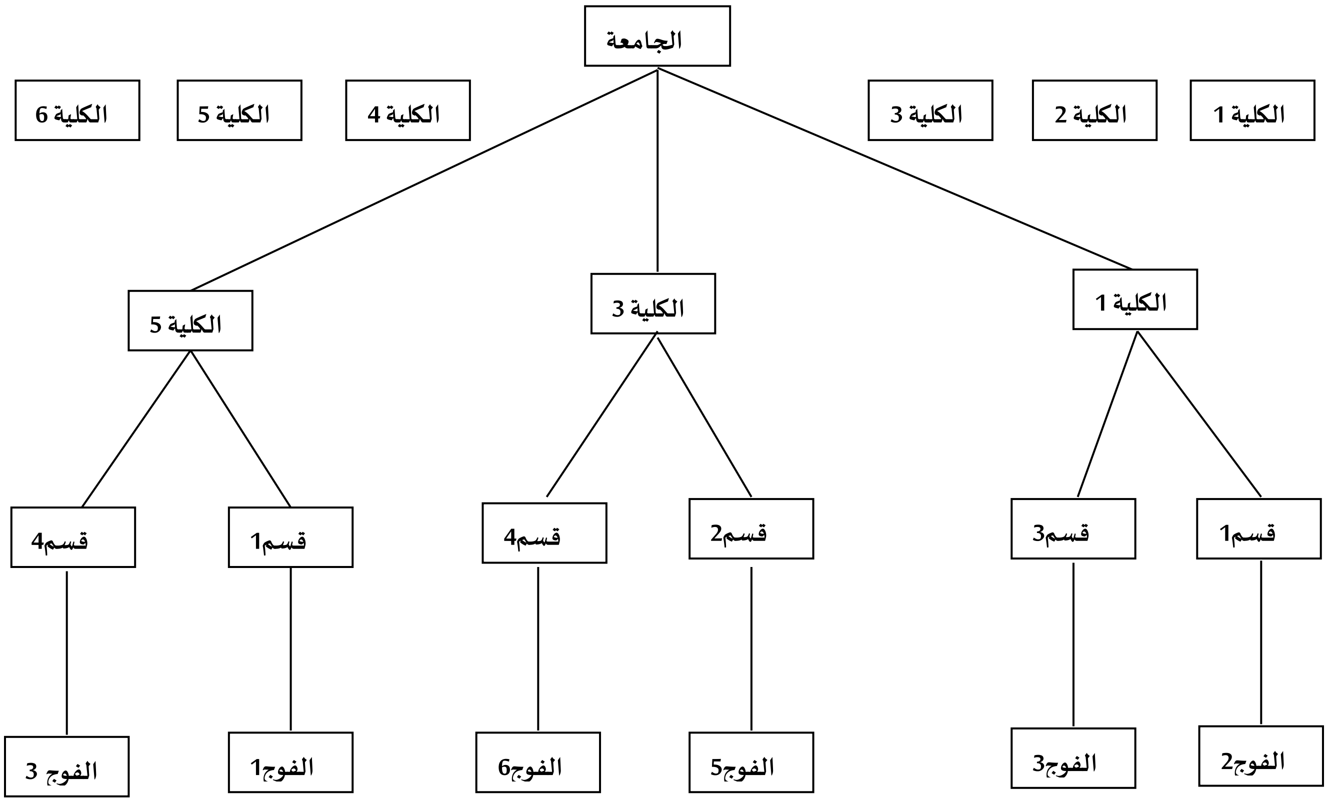
$$\boldsymbol{N \rightarrow n}$$

$$\boldsymbol{N_i \rightarrow n_i \quad \Rightarrow \quad n_i = \frac{N_i}{N} \times n}$$

$$n_1 = \frac{N_1}{N} \times n = \frac{20000}{80000} \times 200 = 50$$
$$n_2 = \frac{N_2}{N} \times n = \frac{36000}{80000} \times 200 = 90$$
$$n_3 = \frac{N_3}{N} \times n = \frac{24000}{80000} \times 200 = 60$$

ج- العينة متعددة المراحل (العنقودية): إذا كان المجتمع يتكون من مجموعات متجانسة نبدأ باختيار بعض هذه المجموعات عشوائيا (كمرحلة أولى)، ثم نختار عينة عشوائية بسيطة من كل مجموعة من المجموعات التي تم اختيارها (كمرحلة ثانية)، وقد يحتاج الأمر إلى اختيار مجموعات من بين المجموعات التي تم اختيارها في المرحلة الثانية وهكذا....، والعينة التي تم اختيارها بهذه الطريقة تعرف بالعينة متعددة المراحل أو العنقودية، حيث أن كل مجموعة من المجموعات التي تم اختيارها تسمى عنقودا، فمثلا، إذا أردنا إجراء دراسة إحصائية حول مدى تحكم طلبة جامعة ما في اللغة الانجليزية، فإننا نقوم بتقسيم الجامعة إلى كليات، ومن ثم نختار عشوائيا ثلاث كليات كمرحلة أولى، ثم نختار عشوائيا من كل كلية قسمين كمرحلة ثانية، ثم نختار عشوائيا فوج من كل قسم كمرحلة ثالثة، لنحصل في الأخير على عينة تسمى بالعينة متعددة المراحل – ذات ثلاث مراحل - أو العنقودية. نوضح ذلك من خلال الشكل التالي:

الشكل(1-1): العينة متعددة المراحل أو العنقودية



المصدر: إعداد الباحث

د- العينة المنتظمة: يتم اختيارها من خلال تحديد مجتمع الدراسة ووضع أفراده في قائمة بشكل عشوائي، وإعطاء كل منهم رقما، ثم يتم تحديد قاعدة الاختيار وفق قسمة حجم المجتمع على حجم العينة من أجل الحصول على طول الفترة، وبعد ذلك يتم انتقاء أحد الأرقام عشوائيا من بين الأرقام التي تساوي أو تقل عن طول الفترة، ليتم اعتباره كعنصر أول من مفردات العينة ويشرع في إضافة طول الفترة له للحصول على المفردة الثانية، وهكذا نستمر في إضافة العدد الثابت إلى غاية

الوصول إلى العدد الممثل لحجم العينة المطلوب، فمثلا، لسحب عينة عشوائية منتظمة ذات الحجم 15 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 300، نتبع الخطوات التالية:

- ترتيب المفردات عشوائيا من 1 إلى 300

- حساب طول الفترة كما يلي: $\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{N}{n} = \frac{300}{15} = 20$

- اختيار الرقم الأول عشوائيا على أن يكون أقل من أو يساوي طول الفترة أي 20، ثم نضيف طول الفترة في كل مرة لنحصل على العينة المطلوبة، ولنختار مثلا الرقم 8 من المفردات المرتبة عشوائيا فتكون العينة المطلوبة هي:

8، 28، 48، 68، 88، 108، 128، 148، 168، 188، 208، 228، 248، 268، 288.

ثانيا: ملخص لأهم التوزيعات المستخدمة في مجال الإحصاء الاستدلالي

1. التوزيع الطبيعي: $X \to N(\mu, \sigma)$

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة ذات الاستخدام الواسع، وذلك نظرا للخصائص التي يتميز بها، والتي تنطبق على أغلبية الظواهر العشوائية. ففي الكثير من الحالات التطبيقية، طبيعية كانت أو اجتماعية أو اقتصادية، تكون أغلبية قيم المتغير العشوائي المدروس متمركزة حول قيمة المتوسط الحسابي والقليل منها يتطرف إما بالزيادة أو بالنقصان، فمثلا لو أخترنا عشوائيا ألف مصباح من المصابيح التي تنتجها إحدى الشركات، وقمنا بدراسة متغير عشوائي معين، مثل مدة حياتها، سنجد أن أغلبية المصابيح سوف تكون مدة حياتها تتمحور حول قيمة متوسط مدة حياة المصابيح، وكلما ابتعدنا عن المتوسط سواء إلى أعلى أو أسفل سيقل عدد تلك المصابيح، ولو قمنا بتمثيل هذا المتغير العشوائي، سنجده يأخذ شكل جرسي أو ناقوسي متناظر حول المتوسط الحسابي، وهذا ما ينطبق على خصائص التوزيع الطبيعي، وهكذا بالنسبة للأوزان أو الأطوال أو أي متغير مستمر آخر.

1-1- دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي:

نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع الطبيعي، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حيث أن: $x \in]-\infty, +\infty[$ ، $e = 2,7183$: العدد النيبري. $\pi = 3,14$: العدد الثلاثي.

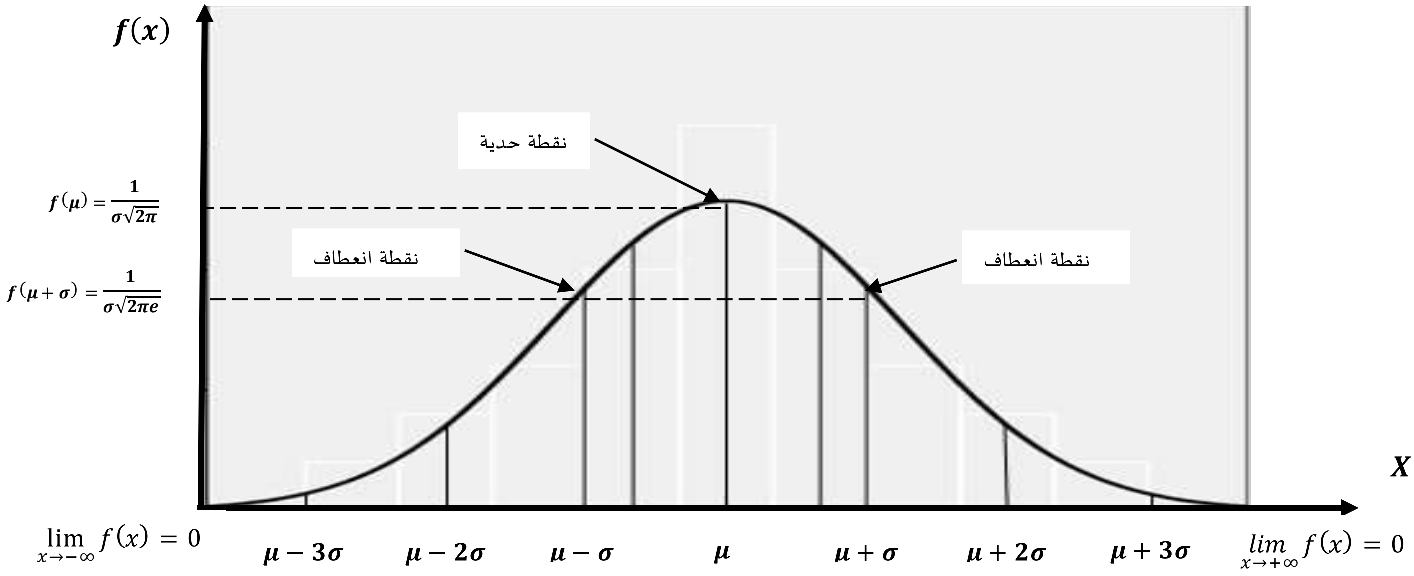
$\mu \in \mathbb{R}$: المتوسط الحسابي للمجتمع، وهو عدد حقيقي. $\sigma > 0$: الانحراف المعياري للمجتمع، يكون دوما موجبا.

1-2- خصائص التوزيع الطبيعي:

يتميز التوزيع الطبيعي بالخصائص التالية:

أ- يأخذ التوزيع الطبيعي الشكل الجرسي أو الناقوسي، كما هو موضح من خلال الشكل(1-2).

الشكل(1-2): منحنى التوزيع الطبيعي



المصدر: إعداد الباحث

من خلال منحنى التوزيع الطبيعي، يتضح مايلي:

- لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطة حدية عظمى، فاصلتها تساوي المتوسط الحسابي للمجتمع μ وترتيبتها تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$، يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الأولى لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر؛

- لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطتي انعطاف هما $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$، وترتيبتهما تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$، يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الثانية لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر.

- طرفا منحنى التوزيع الطبيعي غير منطبقين على محور الفواصل، أي أنهما ممتدان إلى ما لا نهاية في الجهتين.

ب- الدالة الممثلة للتوزيع الطبيعي هي دالة كثافة احتمالية، لأنها موجبة دوما، وهذا ما يتجلى من خلال الشكل(1-2) بوقوع المنحنى فوق محور الفواصل، أي أن: $f(x)\geq 0$. كما أن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد، وهو ما يمكن إثباته بحساب تكامل الدالة $f(x)$، أي أن: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=1$.

ج- منحنى التوزيع الطبيعي معتدل، لأنه يحقق أمرين مهمين، هما:

- التناظر: حيث يمثل المستقيم العمودي الذي يمر بالفاصلة $x=\mu$ محور التناظر للمنحنى الممثل لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي، وبالتالي فهو يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قسمين متساويين، أي:

$P(X\leq\mu)=P(X\geq\mu)=\frac{1}{2}$، وفي هذه الحالة فإن المقاييس الثلاثة للنزعة المركزية، المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال تكون متساوية، أي: $\mu=M_e=M_o$.

- غير متطاول ولا مفرطح: يمكن إثبات ذلك من خلال حساب مقياس فيشر للتفرطح، حيث أن قيمته تساوي الصفر، وهو ما يعني أن له قمة معتدلة، لا هي مدببة ولا هي منبسطة.

1-3- معالم المتغير العشوائي الخاضع للتوزيع الطبيعي:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي $E(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع للتوزيع الطبيعي يساوي μ. أي: $\boldsymbol{E(X) = \mu}$

يمكن إثبات ذلك رياضيا، كما يلي:

باعتبار التوزيع الطبيعي من التوزيعات المستمرة، فإن التوقع الرياضي يحسب بواسطة التكامل التالي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

بوضع: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$، نجد أن: $x = z\sigma + \mu$، بمفاضلة المقدار x، نجد: $dx = d(z\sigma + \mu) = \sigma dz$

وبالتالي:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (z\sigma + \mu)e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma dz = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (z\sigma + \mu)e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (z\sigma + \mu)e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(z\sigma e^{-\frac{1}{2}z^2} + \mu e^{-\frac{1}{2}z^2}\right) dz$$

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z\sigma e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

نلاحظ أن التكاملين: $\int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \sqrt{2\pi}$ من التكاملات الشهيرة.

وبالتالي:

$$E(X) = 0 + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}$$

$$E(X) = \mu$$

ب- التباين والانحراف المعياري:

التباين $V(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع للتوزيع الطبيعي يساوي σ^2. أي: $\boldsymbol{V(X) = \sigma^2}$

يمكن إثبات ذلك رياضيا، كما يلي:

باعتبار التوزيع الطبيعي من التوزيعات المستمرة، فإن التباين يحسب بواسطة التكامل التالي:

$$V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \big(E(X)\big)^2$$

نقوم بحساب $E(X^2)$ كما يلي:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

بوضع: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$، نجد أن: $x = z\sigma + \mu$، بمفاضلة المقدار x، نجد: $dx = d(z\sigma + \mu) = \sigma dz$

وبالتالي:

$$E(X^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (z\sigma + \mu)^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma dz = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (z\sigma + \mu)^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (z\sigma + \mu)^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (z^2\sigma^2 + 2\sigma z + \mu^2) e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(z^2\sigma^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} + 2\sigma z\mu e^{-\frac{1}{2}z^2} + \mu^2 e^{-\frac{1}{2}z^2}\right) dz$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\sigma^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma z\mu e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$E(X^2) = \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

بالتكامل بالتجزئة، نجد أن: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = 1$

ومما سبق لدينا: $\int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz = \sqrt{2\pi}$

وبالتالي: $E(X^2) = \sigma^2(1) + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}}(0) + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{2\pi}\right)$

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

بالرجوع إلى علاقة التباين، وبمعلومية أن: $E(X) = \mu$، نستنتج أن:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - (\mu)^2$$
$$V(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2$$
$$V(X) = \sigma^2$$

كما يمكننا استنتاج قيمة الانحراف المعياري، كما يلي: $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma}$

4-1- دالة التوزيع الاحتمالية للتوزيع الطبيعي:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(X \le x)$، إلا أن الحساب عمليا لا يتم كذلك نظرا للشكل المعقد لدالة الكثافة الاحتمالية، أين يصعب حساب الدالة الأصلية لها، فنلجأ إلى تحويل رياضي لتبسيط صيغة دالة الكثافة الاحتمالية، حيث نحصل على توزيع طبيعي آخر يدعى: التوزيع الطبيعي المعياري.

5-1- التوزيع الطبيعي المعياري: $\boldsymbol{Z \to N(0\,,1\,)}$

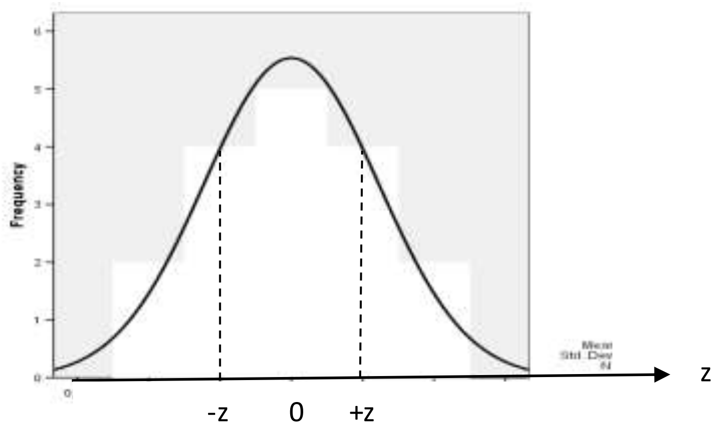
نقوم بوضع: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$، وبالتالي فإن خصائص المتغير العشوائي الجديد $\boldsymbol{Z}$ هي:

أ- مجال التعريف: $z \in \Omega_Z = \left]-\infty\,,+\infty\right[$

ب- دالة الكثافة الاحتمالية: معرفة بالصيغة التالية: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(z)^2}$

ج- التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي المعياري:

الشكل(1-3): منحنى التوزيع الطبيعي المعياري



المصدر: إعداد الباحث

حيث: $f(z) = f(-z)$

د- دالة التوزيع الاحتمالية $F(z)$:

$$F(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)\,dz$$

هـ- معالم المتغير العشوائي الخاضع للتوزيع الطبيعي المعياري:

- **التوقع الرياضي:** $\boldsymbol{E(Z) = 0}$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} => E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\big(E(X) - E(\mu)\big) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

- **التبـــــــاين:** $\boldsymbol{V(Z) = 1}$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} => V(Z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\big(V(X) - V(\mu)\big) = \frac{1}{\sigma^2}\big(V(X)\big) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

- **الانحراف المعياري:** $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1}$

ملاحظات هامة:

- يتمتع التوزيع الطبيعي المعياري بالخصائص نفسها التي يتمتع بها التوزيع الطبيعي العام، غير أن لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري نقطة حدية عظمى، فاصلتها تساوي 1 وترتيبتها تساوي $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$، يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الأولى لدالة التوزيع الطبيعي المعياري ومساواتها للصفر. كما أن له نقطتي انعطاف هما -1 و $+1$، وترتيبتهما تساوي $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$، يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الثانية لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر.

- لقد تم حساب الدالة الأصلية لـ $f(z)$ وتم التعويض فيها بكل القيم الممكنة داخل المجال: $]-\infty\,,+\infty[$، وأدرجت الإحتمالات في جداول خاصة تدعى: جدول التوزيع الطبيعي (أنظر الملحق رقم 2)، حيث يمكننا استنتاج الاحتمال مباشرة من الجدول بشرط أن يكون الاحتمال على شكل أصغر أو أصغر أو تساوي لكي يتوافق مع دالة التوزيع الاحتمالية.

مثال1: أجريت دراسة إحصائية حول الاستهلاك السنوي من اللحوم في الجزائر، وقد بينت الدراسة أن الاستهلاك المتوسط السنوي للفرد من اللحوم يقدر بـ 45 كلغ، وأن الانحراف المعياري يقدر بـ 18 كلغ، كما أن تحليل البيانات بين أن التوزيع طبيعي.

1- ما هي نسبة الأفراد الذين يقل استهلاكهم السنوي عن 30 كلغ؟

2- ما هي نسبة الأفراد الذين يفوق استهلاكهم السنوي 55 كلغ؟

3- ما هي نسبة الأفراد الذين يتراوح استهلاكهم السنوي ما بين 40 و60 كلغ؟

الحل: الاستهلاك السنوي من اللحوم في الجزائر X، متغير عشوائي يخضع للقانون الطبيعي، أي أن:

$\boldsymbol{X \rightarrow N(\mu\,,\sigma)}$ أي: $\boldsymbol{X \rightarrow N(45\,,18)}$

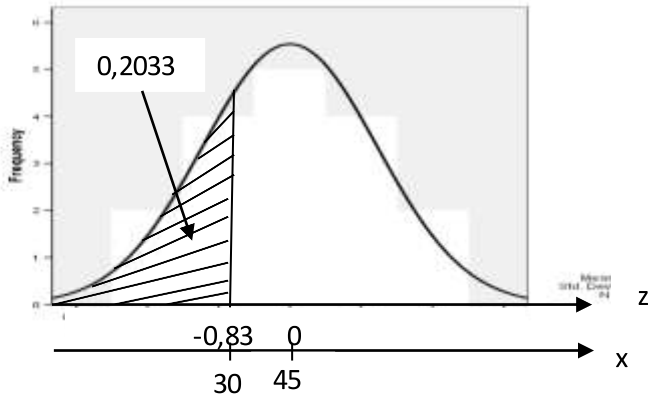
1- حساب نسبة الأفراد الذين يقل استهلاكهم السنوي عن 30 كلغ:

نقوم بحساب القيمة المعيارية z المقابلة للاستهلاك السنوي 30 كلغ، كما يلي: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{30-45}{18} = -0{,}83$

ثم نحسب الاحتمال التالي: $P(X < 30) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{30-45}{18}\right) = P(Z < -0{,}83) = 0{,}2033 = 20{,}33$

حيث أن القيمة 0,2033 تستخرج من جدول التوزيع الطبيعي (أنظر الملحق رقم 2)، بالاعتماد على قيمة Z المقابلة للقيمة 0,83- أو بإجراء التناظر إذا كانت قيم Z السالبة غير موجودة، كما يلي:

$$P(Z < -0{,}83) = 1 - P(Z < 0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033 = 20{,}33\%$$



2- حساب نسبة الأفراد الذين يفوق استهلاكهم السنوي 55 كلغ:

$$P(Z > 55) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{55-45}{18}\right) = P(Z > 0{,}55) = 1 - P(Z < 0{,}55)$$
$$P(Z > 55) = 1 - 0{,}7088 = 0{,}2912 = 29{,}12\%$$

3- حساب نسبة الأفراد الذين يتراوح استهلاكهم السنوي ما بين 40 و60 كلغ:

$$P\,(40 < X < 60) = P\left(\frac{40-45}{18} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{60-45}{18}\right) = P(-0{,}28 < Z < 0{,}83) = F(0{,}83) - F(-0{,}28)$$
$$= P(Z < 0{,}83) - P(Z < -0{,}28) = P(Z < 0{,}83) - [1 - P(Z < 0{,}28)]$$
$$= P(Z < 0{,}83) + P(Z < 0{,}28) - 1 = 0{,}7967 + 0{,}6103 - 1 = 0{,}407 = 40{,}7\%$$

2. توزيع كاي مربع:

إذا كان لدينا $X_1,\ X_2,\ X_3, \dots, X_v$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أي:

$$X_1 \to N(0\,,1)\ ,\ X_2 \to N(0\,,1)\ ,\ X_3 \to N(0\,,1)\ , \dots \dots ,\ X_v \to N(0\,,1)$$

وكان لدينا المتغير العشوائي X المعرف بالصيغة التالية: $X = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \cdots + X_v^2$، فإن المتغير العشوائي X يتبع قانون كاي مربع، بدرجة حرية v، ونرمز لذلك بـ: $\boldsymbol{X \to \chi_v^2}$.

حيث v تمثل درجة الحرية، والتي تعتمد على حجم العينة.

كما يطلق على هذا القانون اسم قانون: *Karl Pearson* نسبة لمكتشفه.

2-1- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاي مربع:

نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع توزيع كاي مربع، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\left(\frac{v}{2}-1\right)}}{(2)^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} & x \in \left]0\,,+\infty\right[\\ 0 & x \notin \left]0\,,+\infty\right[\end{cases}$$

حيث أن: Γ: هي الدالة قاما.

2-2- خصائص توزيع كاي مربع:

يتميز توزيع كاي مربع بالخصائص التالية:

أ- منحنى توزيع كاي مربع ملتوي نحو اليمين، أي موجب الالتواء، وكلما زادت قيمة درجة الحرية يقترب منحنى توزيع كاي مربع من منحنى التوزيع الطبيعي.

ب- الدالة الممثلة لتوزيع كاي مربع هي دالة كثافة احتمالية، لأنها موجبة دوما، وهذا ما يتجلى من خلال وقوع المنحنى فوق محور الفواصل، أي أن: $f(x) \geq 0$. كما أن المساحة تحت منحنى توزيع كاي مربع تساوي الواحد، وهو ما يمكن إثباته بحساب تكامل الدالة $f(x)$، أي أن: $\int_0^{+\infty} f(x) = 1$.

ج- قيم المتغير العشوائي في توزيع كاي مربع موجبة، حيث أن منحنى توزيع كاي مربع يبدأ من النقطة 0، ويمتد إلى الطرف الأيمن، وكلما اقتربنا بجوار $+\infty$ اقترب المنحنى من محور الفواصل غير أنه لا ينطبق عليه.

د- إذا كان $30 \leq v < 100$: فإننا نقرب توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي المعياري بالتحويل التالي:

$$z = \sqrt{2x} - \sqrt{2v-1}$$

هـ- إذا كان $v \geq 100$: فإننا نقرب توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي المعياري بالتحويل التالي:

$$z = \frac{x-v}{\sqrt{2v}}$$

2-3- معالم المتغير العشوائي الخاضع لتوزيع كاي مربع:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي $E(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع كاي مربع يساوي: $\boldsymbol{E(X) = v}$

ب- التباين والانحراف المعياري:

التباين $V(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع كاي مربع يساوي: $\boldsymbol{V(X) = 2v}$

كما يمكننا استنتاج قيمة الانحراف المعياري، كما يلي: $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2v}}$

2-4- دالة التوزيع الاحتمالية لتوزيع كاي مربع:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{(2)^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^x x^{\left(\frac{v}{2}-1\right)} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

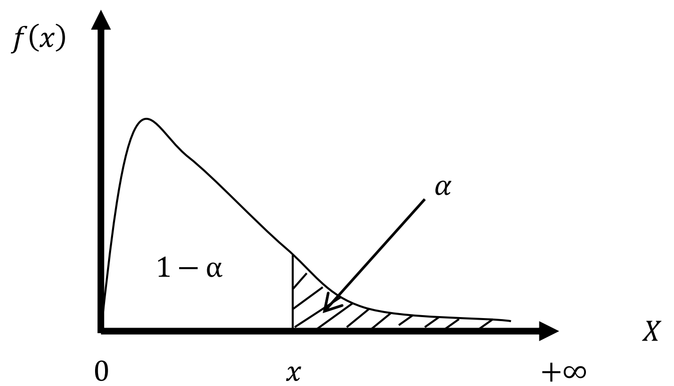
إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(X \leq x)$.

2-5- قراءة جدول كاي مربع واستعمالاته:

جدول كاي مربع (أنظر الملحق رقم 3)، أعد من أجل تحديد قيمة معينة x بدلالة معلومتين:

- درجة الحرية v: وتقرأ على العمود الأول؛ - احتمال معلوم α: ويقرأ على السطر الأول.

الشكل(1-4): منحنى توزيع كاي مربع



المصدر: إعداد الباحث

مثال2: إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 20، أي: $X \to \chi^2_{20}$، ما هي قيمة x التي يقع على يسارها 0,995 من المساحة؟

الحل: نقوم بحساب: $P(X < x) = 0{,}995$، لكن جدول كاي مربع يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي كما يلي:

$$P(X < x) = 0{,}995 \Leftrightarrow P(X \geq x) = 0{,}005$$

ومن خلال جدول كاي مربع بالملحق رقم 3، نجد: التقاطع بين: $v = 20$ و $\alpha = 0{,}005$ وهو القيمة $x = 39{,}997$

أي أن: $P(X < 39{,}997) = 0{,}995 \Leftrightarrow P(X \geq 39{,}997) = 0{,}005$

3. توزيع ستودنت:

نقول أن المتغير العشوائي T يستجيب لقانون ستودنت، بدرجة حرية v، إذا كان T معرف كالتالي: $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{v}}}$

حيث: $X \to N(0\,,1)$ و $Y \to \chi^2_v$. X و Y مستقلان. ونكتب في هذه الحالة: $\boldsymbol{T \to t_v}$

v: تمثل درجة الحرية، والتي تعتمد على حجم العينة.

3-1- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستودنت:

نقول أن المتغير العشوائي المستمر T يتبع توزيع ستودنت، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} \qquad t \in [-\infty\,, +\infty[$$

حيث أن: Γ: هي الدالة قاما.

3-2- خصائص توزيع ستودنت:

يتميز توزيع ستودنت بالخصائص التالية:

أ- منحنى توزيع ستودنت متناظر ومفرطح، وكلما زادت قيمة درجة الحرية يقترب منحنى توزيع ستودنت من منحنى التوزيع الطبيعي.

ب- الدالة الممثلة لتوزيع ستودنت هي دالة كثافة احتمالية، لأنها موجبة دوما، وهذا ما يتجلى من خلال وقوع المنحنى فوق محور الفواصل، أي أن: $f(t) \geq 0$. كما أن المساحة تحت منحنى توزيع ستودنت تساوي الواحد، وهو ما يمكن إثباته بحساب تكامل الدالة $f(t)$، أي أن: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) = 1$.

ج- طرفا منحنى توزيع ستودنت غير منطبقين على محور الفواصل، أي أنهما ممتدان إلى ما لا نهاية في الجهتين.

3-3- معالم المتغير العشوائي الخاضع لتوزيع ستودنت:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي $E(T)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع ستودنت يساوي: $\boldsymbol{E(T) = 0}$

ب- التباين والانحراف المعياري:

التباين $V(T)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع ستودنت يساوي: $\boldsymbol{V(T) = \frac{v}{v-2}}$

كما يمكننا استنتاج قيمة الانحراف المعياري، كما يلي: $\boldsymbol{\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = \sqrt{\frac{v}{v-2}}}$

3-4- دالة التوزيع الاحتمالية لتوزيع ستودنت:

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} dt$$

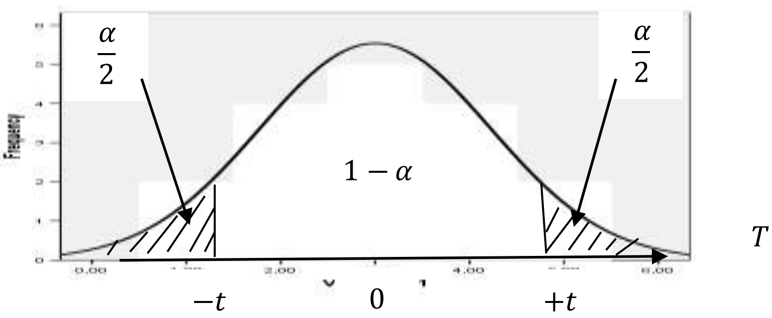
إذن لحساب $F(t)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(T \leq t)$.

3-5- قراءة جدول ستودنت واستعمالاته:

جدول ستودنت (أنظر الملحق رقم 4)، أعد من أجل تحديد قيمة معينة t بدلالة معلومتين:

- درجة الحرية v: وتقرأ على العمود الأول؛
- احتمال معلوم α: ويقرأ على السطر الأول.

الشكل(1-5): منحنى توزيع ستودنت



المصدر: إعداد الباحث

مثال3: إذا كان T يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية 12، أي: $T \rightarrow t_{12}$، ما هي قيمة t التي يقع على يسارها 0,05 من المساحة؟

الحل: نقوم بحساب: $P(T < t) = 0{,}05$، لكن جدول ستودنت يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي، كما يلي:

نلاحظ أن قيمة t التي يقع على يسارها 0,05 أي 5% من المساحة قيمتها سالبة، وبما أن منحنى توزيع ستودنت متناظر، فإننا نستخرج قيمة t الموجبة ونسبقها بإشارة سالبة كما يلي:

$$P(T < -t) = 0{,}05 \Leftrightarrow P(T \geq +t) = 0{,}05$$

ومن خلال جدول ستودنت بالملحق رقم 4، نجد: التقاطع بين: $v = 12$ و $\alpha = 0{,}05$ وهو القيمة 1,782 التي نسبقها بإشارة سالبة فتكون: $t = -1{,}782$ هي القيمة التي يقع على يسارها 0,05 من المساحة.

4. توزيع فيشر:

إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين مستقلين يتبعان توزيع كاي مربع، أي: $X_1 \rightarrow \chi^2_{v_1}$ و $X_2 \rightarrow \chi^2_{v_2}$، فإن المتغير X، حيث: $X = \frac{X_1/v_1}{X_2/v_2}$، يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية v_1 و v_2، اللتان تعتمدان على حجم العينة لكل متغير.

ونكتب: $\boldsymbol{X \rightarrow F_{v_1,v_2}}$

4-1- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فيشر:

نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع توزيع فيشر، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} v_1^{\frac{v_1}{2}} v_2^{\frac{v_2}{2}} x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1} (v_2 + v_1 x)^{\frac{-(v_1+v_2)}{2}} & x \in]0\,,+\infty[\\ 0 & x \notin]0\,,+\infty[\end{cases}$$

حيث أن: Γ: هي الدالة قاما.

4-2- خصائص توزيع فيشر:

يتميز توزيع فيشر بالخصائص التالية:

أ- منحنى توزيع فيشر ملتوي نحو اليمين، أي موجب الالتواء، وكلما زادت قيمتا درجة الحرية يقترب منحنى توزيع فيشر من منحنى التوزيع الطبيعي.

ب- الدالة الممثلة لتوزيع فيشر هي دالة كثافة احتمالية، لأنها موجبة دوما، وهذا ما يتجلى من خلال وقوع المنحنى فوق محور الفواصل، أي أن: $f(x) \geq 0$. كما أن المساحة تحت منحنى توزيع فيشر تساوي الواحد، وهو ما يمكن إثباته بحساب تكامل الدالة $f(x)$، أي أن: $\int_0^{+\infty} f(x) = 1$.

ج- يعتمد توزيع فيشر على معلمتين، هما، درجة حرية البسط v_1 ودرجة حرية المقام v_2، وتكتب درجتا الحرية أمام المتغير، بحيث تكون درجة حرية البسط إلى اليسار، ودرجة حرية المقام إلى اليمين، فإذا كانت درجة حرية البسط تساوي 8، ودرجة حرية المقام تساوي11، فنعبر عن ذلك كما يلي: $F_{8\,,11}$

د- قيم المتغير العشوائي في توزيع فيشر موجبة، حيث أن منحنى توزيع فيشر يبدأ من النقطة 0، ويمتد إلى الطرف الأيمن، وكلما اقتربنا بجوار $+\infty$ اقترب المنحنى من محور الفواصل غير أنه لا ينطبق عليه.

4-3- معالم المتغير العشوائي الخاضع لتوزيع فيشر:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي $E(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع فيشر يساوي: $\boldsymbol{v_2 > 2}$ $\boldsymbol{E(X) = \frac{v_2}{v_2-2}}$

ب- التباين والانحراف المعياري:

التباين $V(X)$ لأي متغير عشوائي خاضع لتوزيع فيشر يساوي: $\boldsymbol{v_2 > 4}$ $\boldsymbol{V(X) = \frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)(v_2-2)^2}}$

كما يمكننا استنتاج قيمة الانحراف المعياري، كما يلي: $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)(v_2-2)^2}}}$

4-4- دالة التوزيع الاحتمالية لتوزيع فيشر:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} v_1^{\frac{v_1}{2}} v_2^{\frac{v_2}{2}} \int_0^x x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1} (v_2 + v_1 x)^{\frac{-(v_1+v_2)}{2}} dx$$

إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ: $P(X \leq x)$.

4-5- قراءة جدول فيشر واستعمالاته:

باستخدام جدول توزيع فيشر (أنظر الملحق رقم 5)، نستطيع الحصول على قيمة المتغير العشوائي x الذي يقع على يمينه المساحة: $\alpha = 0,1$ أو $\alpha = 0,05$ أو $\alpha = 0,025$ أو $\alpha = 0,01$ ، وبمعلومية درجتي حرية v_1 و v_2.

مثال4: إذا كان X يتبع توزيع فيشربدرجتي حرية 8 و 11، أي: $X \to F_{8,11}$، ما هي قيمة x التي يقع على يسارها 0,05 من المساحة؟

الحل: نقوم بحساب: $P(X < x) = 0,05$، لكن جدول فيشر يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي، كما يلي:

$$P(X < x) = 0,05 \Leftrightarrow P(X \geq x) = 0,95$$

ومن خلال جدول فيشر بالملحق رقم 5، نجد: التقاطع بين: $v_1 = 8$ و $v_2 = 11$ في الجدول الخاص بـ: $\alpha = 0,05$ وهي القيمة $2,95$، وهي القيمة التي يقع على يسارها 0,05 من المساحة.

4-6- العلاقات بين توزيع فيشر وتوزيعي ستودنت وكاي مربع:

- **نظرية 1:** $F_{(1-\alpha),v_1,v_2} = \frac{1}{F_{\alpha,v_2,v_1}}$

- **نظرية 2:** $F_{\alpha,1,v} = t^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),v}$

نظرية 3: $F_{\alpha,v,\infty} = \frac{\chi^2_{\alpha,v}}{v}$

مثال5:

1- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 8 و 10، أي: $X \to F_{8,10}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,95 من المساحة؟

2- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 1 و 10، أي: $X \to F_{1,10}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,05 من المساحة؟

3- إذا كان X يتبع توزيع فيشربدرجتي حرية 10 و $+\infty$، أي: $X \to F_{10,+\infty}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,05 من المساحة؟

الحل:

1- نقوم بحساب: $P(X > x) = 0,95$. لدينا: $1 - \alpha = 0,95 \Leftrightarrow \alpha = 0,05$

ومنه:
$$F_{(0,95),8,10} = \frac{1}{F_{(0,05),10,8}} = \frac{1}{3,35} = 0,298$$

2- نقوم بحساب: $P(X > x) = 0,05$.

ومنه:
$$F_{(0,05),1,10} = t^2_{\left(1-\frac{0,05}{2}\right),10} = t^2_{(0,975),10} = (-2,228)^2 = 4,96$$

3- نقوم بحساب: $P(X > x) = 0,05$.

ومنه:
$$F_{(0,05),10,\infty} = \frac{\chi^2_{(0,05),10}}{10} = \frac{18,307}{10} = 1,8307$$

ثالثا: توزيعات المعاينة

يعتبر الإحصاء الاستدلالي فرع من فروع علم الإحصاء، الذي يستند على إحصائية العينة في استنتاج معالم المجتمع، حيث أن هذا الاستنتاج أو الاستدلال يكون بأحد أمرين، إما **بالتقدير**، أي استنتاج معالم المجتمع عن طريق تقديرها بواسطة إحصائية تحسب قيمتها من بيانات العينة العشوائية المسحوبة من ذلك المجتمع، فمثلا، لو أردنا معرفة المتوسط الحقيقي والانحراف المعياري الحقيقي لأوزان علب الطماطم المنتجة من طرف مؤسسة معينة، فإن إجراء الدراسة الشاملة غير ممكنة في هذه الحالة، نظرا لكبر حجم المجتمع، وبالتالي نقوم بتقدير المتوسط والانحراف المعياري الحقيقيين للوزن، وذلك بأخذ عينة عشوائية من الإنتاج اليومي للمؤسسة، ونقوم بحساب متوسط الوزن والانحراف المعياري فيها، ونعتبرهما كتقدير للمتوسط والانحراف المعياري الحقيقيين للوزن في المجتمع، هذا ما يطلق عليه التقدير بنقطة، وهناك نوع آخر من التقدير يسمى التقدير بمجال. أما الأمر الآخر الذي يقوم عليه الإحصاء الاستدلالي فهو **اختبار الفرضيات**، حيث نستخدم في هذه الحالة احصائية تحسب بياناتها من العينة المسحوبة في اختبار مدى صحة فرض معين حول معلمة من معالم المجتمع المدروس.

قبل التطرق للتقدير واختبار الفرضيات، يجب معرفة أهم توزيعات المعاينة المستخدمة في مجال الاحصاء الاستدلالي، باعتبارها القاعدة الأساسية التي يقوم عليها كلا من التقدير واختبار الفرضيات.

إن من أهم توزيعات المعاينة نجد، توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين، توزيع المعاينة للنسبة، توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتين، توزيع المعاينة للتباين، توزيع المعاينة لنسبة تباينين.

1. أهم المصطلحات في توزيعات المعاينة:

1-1- المعلمة: هي كل مقياس إحصائي تحسب قيمته من جميع بيانات المجتمع المدروس N، ومن أهم المعالم التي تصف لنا المجتمع، نذكر: مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي μ ، الوسيط M_e ، المنوال M_o ،...)،مقاييس التشتت (التباين $V(x)$، الانحراف المعياري σ، ...)، مقاييس الشكل (معامل فيشر للالتواء α_F، معامل فيشر للتفرطح β_F ...). نسبة ظاهرة معينة في المجتمع P . من أهم مميزات المعلمة أن قيمتها ثابتة، لأنها تحسب من بيانات المجتمع بأكمله.

1-2- الإحصائية: هي كل مقياس إحصائي تحسب قيمته من بيانات العينة المسحوبة ذات الحجم n من المجتمع المدروس، فمثلا، إذا سحبنا عينة مكونة من n طالب من طلبة كلية معينة، وقمنا بحساب متوسط وزن الطلبة في العينة المسحوبة، فإننا نستخدم العلاقة التالية: $\bar{X}=\frac{\sum x_i}{n}$، هنا $\bar{X}$ يمثل إحصائية لأنه حُسِبَ من بيانات العينة، ولو أردنا حساب نسبة الطلبة الذين يتقنون لغة معينة من بيانات العينة السابقة، فإننا نستخدم العلاقة التالية: $\hat{p}=\frac{x}{n}$، حيث x تمثل عدد الطلبة الذين يتقنون تلك اللغة في العينة، هنا $\hat{p}$ تمثل إحصائية لأنها حُسِبَتْ من بيانات العينة. وإذا أردنا حساب تباين وزن الطلبة في العينة المسحوبة، فإننا نستخدم العلاقة التالية: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}$، هنا S^2 يمثل إحصائية لأنه حُسِبَ من بيانات العينة، وهكذا لباقي الإحصاءات الأخرى. وبما أننا نستطيع أن نسحب أكثر من عينة من المجتمع نفسه فإننا نجد أن قيمة الإحصائية ستتغير من عينة لأخرى، وبالتالي نستنتج أن الإحصائية عبارة عن متغير.

1-3- توزيع المعاينة: هو التوزيع الاحتمالي لأي إحصائية تحسب قيمها من كل العينات العشوائية ذات الحجم المتساوي والممكن سحبها من المجتمع. فلو سحبنا جميع العينات الممكنة والمكونة من n طالب من طلبة كلية معينة، وفي كل عينة

حسبنا متوسط الوزن $\bar{X}$، فإننا سنحصل على عدد المتوسطات مساوي لعدد العينات الممكن سحبها، وبما أن المتوسطات ستكون غير متساوية فإننا سنقوم بإنشاء توزيع احتمالي لها، حيث يعتبر $\bar{X}$ هو المتغير المدروس فيها، وفي هذه الحالة التوزيع الاحتمالي لـ$\bar{X}$ يسمى بتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة، وهكذا بالنسبة لأي إحصائية أخرى.

سنستخدم في توزيع المعاينة والتقدير واختبار الفرضيات الرموز والعلاقات التالية:

الجدول(1-1): الرموز والعلاقات المستخدمة في توزيع المعاينة والتقدير واختبار الفرضيات

المقياس		إحصائية العينة	معلمة المجتمع
المتوسط الحسابي		$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$	$\mu = \frac{\sum X_i}{N}$
التباين	السحب بالإرجاع	$S^2 = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$	$\sigma^2 = \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{N}$
	السحب بدون الإرجاع	$S^2 = \frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$	
الانحراف المعياري		$S = \sqrt{S^2}$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
نسبة ظاهرة معينة		$\hat{p} = \frac{X}{n}$	$P = \frac{X}{N}$

المصدر: إعداد الباحث

2. توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$:

2-1- تعريف توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$:

توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو التوزيع الاحتمالي للمتوسطات الحسابية، المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة ذات الحجم المتساوي n، والممكن سحبها من المجتمع.

2-2- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\mu_{\bar{X}}$ وتباينه $\sigma^2_{\bar{X}}$:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما، متوسطه الحسابي μ وتباينه σ^2، وسحبنا جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n من هذا المجتمع. وحسبنا المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لكل عينة عشوائية، ثم حسبنا متوسط تلك المتوسطات $\mu_{\bar{X}}$ وتباينها $\sigma^2_{\bar{X}}$. فماذا تساوي قيمتهما؟ وما علاقتهما بمعالم المجتمع المدروس μ و σ^2؟

للإجابة على هذا السؤال نستعين بالمثال التالي: نفرض أن مجتمع يتكون من 4 طلبة، A، B، C، D، حيث نريد دراسة متغير إحصائي يتمثل في الوقت المخصص من قبل كل طالب لمراجعة مقياس الإحصاء3. والنتائج كانت كما يلي:

الطالب	A	B	C	D
الوقت المخصص (الساعة) X_i	07	03	06	08

نقوم باستخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها من هذا المجتمع، لكن هنا يجب أن نعرف طريقة السحب، هل تمت بالإرجاع أم لا؟ لذا سنفرق بين الحالتين، كما يلي:

أ- حالة السحب بالإرجاع: المقصود بذلك، هو أنه أثناء إجراء السحب العشوائي لاختيار الطالبين ($n = 2$)، فإننا نسحب البطاقة الأولى ثم نعيدها، وبعد ذلك نقوم بسحب البطاقة الثانية، أي أنه يمكننا سحب الطالب الواحد مرتين.

- حساب كلا من المتوسط الحسابي للمجتمع μ وتباينه σ^2:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+3+6+8}{4} = 6\ h$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{N} = \frac{(7-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2}{4} = 3,5$$

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها مع الإرجاع، وحساب متوسط كل منها:

العينات (الثنائيات)	القيم	المتوسط $\bar{X}$
AA	7,7	7
AB	7,3	5
AC	7,6	6,5
AD	7,8	7,5
BA	3,7	5
BB	3,3	3
BC	3,6	4,5
BD	3,8	5,5
CA	6,7	6,5
CB	6,3	4,5
CC	6,6	6
CD	6,8	7
DA	8,7	7,5
DB	8,3	5,5
DC	8,6	7
DD	8,8	8

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\bar{X}$)

$\bar{X}$	3	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	$\sum P_i$
P_i	$1/16$	$2/16$	$2/16$	$2/16$	$1/16$	$2/16$	$3/16$	$2/16$	$1/16$	1

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة:

المتوسط $\bar{X}_i$	الاحتمال P_i	$\bar{X}_i \times P_i$	$\bar{X}_i^2 \times P_i$
3	$1/16$	$3/16$	$9/16$
4,5	$2/16$	$9/16$	$40,5/16$
5	$2/16$	$10/16$	$50/16$
5,5	$2/16$	$11/16$	$60,5/16$
6	$1/16$	$6/16$	$36/16$
6,5	$2/16$	$13/16$	$84,5/16$
7	$3/16$	$21/16$	$147/16$
7,5	$2/16$	$15/16$	$112,5/16$
8	$1/16$	$8/16$	$64/16$
$\sum P_i$	1	$\frac{96}{16} = 6$	$\frac{604}{16} = 37,75$

$$\mu_{\bar{X}} = \sum \bar{X}_i \times P_i = \frac{96}{16} = 6 = \mu$$

نلاحظ أن: متوسط المجتمع μ يساوي متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\mu_{\bar{X}}$، أي: $\boldsymbol{\mu_{\bar{X}} = \mu}$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \left(\sum \bar{X}_i^2 \times P_i\right) - \mu_{\bar{X}}^2 = 37,75 - (6)^2 = 1,75 \neq \sigma^2$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma^2}{n}$ ، فنجد: $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{3,5}{2} = 1,75 = \sigma_{\bar{X}}^2$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\sigma_{\bar{X}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة، أي:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}}$$

ب- حالة السحب بدون إرجاع: المقصود بذلك، هو أنه أثناء إجراء السحب العشوائي لاختيار الطالبين ($n = 2$)، فإننا نسحب البطاقة الأولى دون إعادتها، وبعد ذلك نقوم بسحب البطاقة الثانية، أي أنه لا يمكننا سحب الطالب الواحد مرتين.

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها بدون إرجاع، وحساب متوسط كل منها:

العينات (الثنائيات)	القيم	المتوسط $\bar{X}$
AB	7,3	5
AC	7,6	6,5
AD	7,8	7,5
BA	3,7	5
BC	3,6	4,5
BD	3,8	5,5
CA	6,7	6,5
CB	6,3	4,5
CD	6,8	7
DA	8,7	7,5
DB	8,3	5,5
DC	8,6	7

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\bar{X}$)

$\bar{X}$	4,5	5	5,5	6,5	7	7,5	$\sum P_i$
P_i	$2/12$	$2/12$	$2/12$	$2/12$	$2/12$	$2/12$	1

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة:

المتوسط $\bar{X}$	الاحتمال P_i	$\bar{X}_i \times P_i$	$\bar{X}_i^2 \times P_i$
4,5	$2/12$	$9/12$	$40{,}5/12$
5	$2/12$	$10/12$	$50/12$
5,5	$2/12$	$11/12$	$60{,}5/12$
6,5	$2/12$	$13/12$	$84{,}5/12$
7	$2/12$	$14/12$	$98/12$
7,5	$2/12$	$15/12$	$112{,}5/12$
$\sum P_i$	1	$\frac{72}{12} = 6$	$\frac{446}{12} = 37{,}167$

$$\mu_{\bar{X}} = \sum \bar{X}_i \times P_i = \frac{72}{12} = 6 = \mu$$

نلاحظ أن: متوسط المجتمع μ يساوي متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\mu_{\bar{X}}$، أي: $\boldsymbol{\mu_{\bar{X}} = \mu}$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \left(\sum \bar{X}_i^2 \times P_i\right) - \mu_{\bar{X}}^2 = 37{,}167 - (6)^2 = 1{,}167 \neq \sigma^2$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ ، فنجد: $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{3{,}5}{2}\left(\frac{4-2}{4-1}\right) = 1{,}167 = \sigma_{\bar{X}}^2$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\sigma_{\bar{X}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة مضروبا في المقدار $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، أي: $\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

- إذا تم سحب جميع العينات الممكنة ذات الحجم المتساوي n سواء بإرجاع أو بدون إرجاع من مجتمع حجمه N، فإن:
متوسط المجتمع μ يساوي متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\mu_{\bar{X}}$، أي: $\boldsymbol{\mu_{\bar{X}} = \mu}$
- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$، فإن: تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\sigma_{\bar{X}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة n ، أي: $\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}}$
- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$، فإن: تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\sigma_{\bar{X}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة n مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، أي:
$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

رياضيا يمكن أن نثبت أن: $\mu_{\bar{X}} = \mu$

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \sum \frac{\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)}{m} = \sum\left(\frac{\sum x_i}{nm}\right) = \frac{1}{n}\sum\left(\frac{\sum x_i}{m}\right) = \frac{1}{n}\sum E(X) = \frac{1}{n}\sum \mu = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

كما يمكن أن نثبت رياضيا أن: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum V(X) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

في جميع الحالات السابقة فإن الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين، وعليه فإن:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$$

2-3- طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$:

ترتبط طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ أي توزيع المتوسطات الحسابية المحسوبة من جميع العينات المسحوبة من مجتمع ما، بطبيعة توزيع المتغير المدروس X في ذلك المجتمع، الانحراف المعياري إذا كان معلوما أو مجهولا، وحجم العينة المسحوبة.

أ- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ معلوم، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n، فتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}}$ ، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}}$، أي: $X \to N(\mu\ ;\ \sigma) \Rightarrow \bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}}\ ; \sigma_{\bar{X}})$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$،

وفقا للحالات التالية:

- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم

بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$، فإن: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ و $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، أي أن: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$، فإن:

$\mu_{\bar{X}} = \mu$ و $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$، أي أن: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$

مثال6: إذا كان لدينا متغير عشوائي X في مجتمع حجمه 500، موزع طبيعيا، متوسطه 75 وإنحرافه المعياري 10، نسحب من ذلك المجتمع عينة عشوائية حجمها n بدون إرجاع. ما هو احتمال أن يكون متوسط العينة يفوق 78، في الحالتين التاليتين: 1- حجم العينة: $n = 16$ 2- حجم العينة: $n = 36$

الحل:

1- حجم العينة: $n = 16$:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 75$

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{16}{500} = 0,032 < 0,05$، فإن:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2,5$، وبالتالي: $\bar{X} \to N(75 ; 2,5)$

$$P(\bar{X} > 78) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{78-75}{2,5}\right) = P(Z > 1,20) = P(Z < -1,20) = 1 - P(Z < 1,20)$$

$$P(\bar{X} > 78) = 1 - 0,8849 = 0,1151$$

2- حجم العينة: $n = 36$:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 75$

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{36}{500} = 0,072 > 0,05$، فإن:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{10}{\sqrt{36}}\sqrt{\left(\frac{500-36}{500-1}\right)} = 1,61$، وبالتالي: $\bar{X} \to N(75 ; 1,61)$

$$P(\bar{X} > 78) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}} > \frac{78-75}{1,61}\right) = P(Z > 1,86) = P(Z < -1,86) = 1 - P(Z < 1,86)$$

$$P(\bar{X} > 78) = 1 - 0,9686 = 0,0314$$

ملاحظة: يطلق على الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\sigma_{\bar{X}}$ **بالخطأ المعياري**، الذي يعتمد على حجم العينة n، حيث أن قيمته تنخفض كلما زاد حجم العينة العشوائية، وهذا ما يؤدي بـ $\bar{X}$ المحسوب على العينة إلى الاقتراب أكثر فأكثر من μ المحسوب من المجتمع، أين يتطابقا لما تضم العينة جميع وحدات المجتمع.

ب- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ مجهول و حجم العينة أكبر أو يساوي 30 أي: $n \geq 30$ ، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n، فتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}}$، أي:

$$X \rightarrow N(\mu\,;\,\sigma) \Rightarrow \bar{X} \rightarrow N(\mu_{\bar{X}}\,;\sigma_{\bar{X}})$$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$، وفقا للحالات التالية:

- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$، فإن: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ و $\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$، أي أن: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$، فإن:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \quad \text{، أي أن:} \quad Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$$

بما أن الانحراف معياري σ مجهول، فإننا نقدره بالانحراف المعياري للعينة المسحوبة S، حيث:

$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع.

$S = \sqrt{\frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

مثال7: تتبع أوزان طلبة جامعة الجزائر توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 72 كلغ، فإذا سحبنا منهم عينة عشوائية حجمها 36 طالبا، ووجدنا أن إنحرافها المعياري يساوي 7 كلغ، فما احتمال أن يكون متوسط الوزن في العينة يفوق 70 كلغ؟

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، حجم العينة أكبر من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \rightarrow N(\mu_{\bar{X}}\,;\sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 72$

- بما أن المجتمع غير محدود، فإن: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{36}} = 1{,}17$ ، وبالتالي: $\bar{X} \rightarrow N(72\,;1{,}17)$

$$P(\bar{X} > 70) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > \frac{70-72}{1{,}17}\right) = P(Z > -1{,}71) = P(Z < 1{,}71) = 0{,}9564$$

ج- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أقل من 30:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ مجهول و حجم العينة أقل من 30 أي: $n < 30$ ، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n، فتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيتوزع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1$.

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى التوزيع T كما يلي: $T=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$، وفقا للحالات التالية:

- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N}\leq 0{,}05$، فإن: $\mu_{\bar{X}}=\mu$ و $\sigma_{\bar{X}}=\frac{S}{\sqrt{n-1}}$، أي أن: $T=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$

- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N}>0{,}05$، فإن:

$\mu_{\bar{X}}=\mu$ و $\sigma_{\bar{X}}=\frac{S}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$، أي أن: $T=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$

بما أن الانحراف معياري σ مجهول، فإننا نقدره بالانحراف المعياري للعينة المسحوبة S، حيث:

$S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع.

$S=\sqrt{\frac{N-1}{N}\times\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

مثال8: حل المثال السابق، إذا كان حجم العينة 26 طالبا.

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، حجم العينة أقل من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v=n-1=26-1=25$

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}}=\mu=72$

- بما أن المجتمع غير محدود، فإن:

$\sigma_{\bar{X}}=\frac{S}{\sqrt{n-1}}=\frac{7}{\sqrt{26-1}}=\frac{7}{\sqrt{25}}=\frac{7}{5}=1{,}4$، وبالتالي: $\bar{X}\to N(72\,;1{,}4)$

$$P(\bar{X}>70)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}>\frac{70-72}{1{,}4}\right)=P(T>-1{,}43)=P(T<1{,}43)=1-P(T>1{,}43)$$

ومن خلال جدول ستودنت بالملحق رقم 4، نجد: التقاطع بين: $v=25$ و أقرب قيمة ممكنة للقيمة 1,43 في ذلك السطر المقابل لدرجة الحرية 25، وهي القيمة 1,316، التي نسقطها على المحور العمودي، لنجد: $\alpha=0{,}1$. أي أن:

$$P(T<1{,}43)=1-0{,}1=0{,}90$$

د- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع غير موزع طبيعيا، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30:

نظرية النهاية المركزية: إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ، و حجم العينة أكبر أو يساوي 30 أي: $n\geq 30$ ، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n، فتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي. بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}}$، أي:

$$X\to N(\mu\,;\,\sigma)\Rightarrow\bar{X}\to N(\mu_{\bar{X}}\,;\sigma_{\bar{X}})$$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$، وفقا للحالات المذكورة في العنصرين أ وب.

مثال9: إذا كانت رواتب 540 موظف في أحد الشركات لا تتوزع طبيعيا، وسطها الحسابي يساوي 26953 دج، بإنحراف معياري 4573 دج، وقمنا بسحب عينة عشوائية تشمل81 موظفا من هذه الشركة، فما احتمال أن يكون وسطها الحسابي أقل من 26000 دج؟

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع توزيعه الاحتمالي ليس طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وحجم العينة أكبر من 30، وبالتالي، فحسب نظرية النهاية المركزية فإن: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يقترب من التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \rightarrow N(\mu_{\bar{X}}\ ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 26953\ DA$

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{81}{540} = 0{,}15 > 0{,}05$، فإن:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{4573}{\sqrt{81}}\sqrt{\left(\frac{540-81}{540-1}\right)} = 468{,}89$، وبالتالي: $\bar{X} \rightarrow N(26953\ ; 468{,}89)$

$$P(\bar{X} < 26000) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}} < \frac{26000-26953}{468.89}\right) = P(Z < -2{,}03) = 1 - P(Z < 2{,}03)$$

$$P(\bar{X} < 26000) = 1 - 0{,}9788 = 0{,}0212$$

مثال10: في أحد اختبارات الذكاء الذي أجري على 8000 شخص، وجد أن متوسط الدرجات هو 1000. اختيرت عينة عشوائية من 100 شخص ووجدنا أن تباينها يساوي 15625 . فإذا كانت درجات الذكاء في هذا المجتمع لا تتوزع طبيعيا. ما هو احتمال أن قيمة متوسط الذكاء في العينة ستتراوح ما بين 970 و 1030؟

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع توزيعه الاحتمالي ليس طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، وحجم العينة أكبر من 30، وبالتالي، فحسب نظرية النهاية المركزية فإن: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يقترب من التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \rightarrow N(\mu_{\bar{X}}\ ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu = 1000$

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{100}{8000} = 0{,}0125 < 0{,}05$، فإن:

$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{15625} = 125$ ، $\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{125}{\sqrt{100}} = 12{,}5$، وبالتالي: $\bar{X} \rightarrow N(1000\ ; 12{,}5)$

$$P(970 \le \bar{X} \le 1030) = P\left(\frac{970-1000}{12{,}5} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{1030-1000}{12{,}5}\right) = P(-2{,}4 \le Z \le 2{,}4)$$

$$= P(Z \le 2{,}4) - P(Z \le -2{,}4) = P(Z \le 2{,}4) - \big(1 - P(Z \le 2{,}4)\big)$$

$$= 2P(Z \le 2{,}4) - 1$$

$$= 2(0{,}9918) - 1 = 0{,}9836$$

3. توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

3-1- تعريف توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين، هو التوزيع الاحتمالي للفروق ما بين جميع المتوسطات الحسابية المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول ذات الحجم المتساوي n_1، وجميع المتوسطات الحسابية المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني ذات الحجم المتساوي n_2.

3-2- متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ وتباينه $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، متوسطه الحسابي في المجتمع الأول μ_1 وتباينه σ_1^2، ومتوسطه الحسابي في المجتمع الثاني μ_2 وتباينه σ_2^2، وسحبنا من المجتمع الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n_1، وحسبنا لكل عينة وسطها الحسابي $\bar{X}_1$، وسحبنا من المجتمع الثاني جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n_2، وحسبنا لكل عينة وسطها الحسابي $\bar{X}_2$، ثم حسبنا كل الفروق الممكنة بين جميع متوسطات العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول، وجميع متوسطات العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني، $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$، ثم حسبنا متوسط تلك الفروق $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ وتباينها $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$. فماذا تساوي قيمتهما؟ وما علاقتهما بمعالم المجتمعين المدروسين μ_1، μ_2، σ_1^2، σ_2^2؟

أ- حالة السحب بالإرجاع:

نستعين بالمثال التالي: إذا كان لدينا مجتمعين، يضم الأول القيم: 10، 12، 14، ويضم الثاني القيمتين: 11 و15، وسحبنا من المجتمع الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_1 = 2$، وسحبنا من المجتمع الثاني جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_2 = 3$، وأن العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول مستقلة عن العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني، وأن السحب تم بالإرجاع.

- حساب كلا من المتوسط الحسابي للمجتمع الأول μ_1 وتباينه σ_1^2:

$$\mu_1 = \frac{\sum x_{i1}}{N_1} = \frac{10+12+14}{3} = 12$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum(x_{i1}-\mu_1)^2}{N_1} = \frac{(10-12)^2+(12-12)^2+(14-12)^2}{3} = 2{,}67$$

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها مع الإرجاع من المجتمع الأول، وحساب متوسطاتها:

العينات (الثنائيات)	المتوسط $\bar{X}_1$
10,10	10
10,12	11
10,14	12
12,10	11
12,12	12
12,14	13
14,10	12
14,12	13
14,14	14

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\bar{X}_1$)

$\bar{X}_1$	10	11	12	13	14	$\sum P_i$
P_i	$1/9$	$2/9$	$3/9$	$2/9$	$1/9$	1

- حساب كلا من المتوسط الحسابي للمجتمع الثاني μ_2 وتباينه σ_2^2:

$$\mu_2=\frac{\sum x_{i2}}{N_2}=\frac{11+15}{2}=13 \quad . \quad \sigma_2^2=\frac{\sum(x_{i2}-\mu_2)^2}{N_2}=\frac{(11-13)^2+(15-13)^2}{2}=4$$

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n=3$ الممكن سحبها مع الإرجاع من المجتمع الثاني، وحساب متوسطاتها:

العينات (الثلاثيات)	المتوسط $\bar{X}_2$
11,11,11	11
11,11,15	12,33
11,15,11	12,33
11,15,15	13,67
15,11,11	12,33
15,11,15	13,67
15,15,11	13,67
15,15,15	15

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\bar{X}_2$)

$\bar{X}_2$	11	12,33	13,67	15	$\sum P_i$
P_i	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	1

- جدول الفروق $\bar{X}_1-\bar{X}_2$:

$\bar{X}_1-\bar{X}_2$	10	11	12	13	14
11	-1	0	1	2	3
12,33	-2,33	-1,33	-0,33	0,67	1,67
13,67	-3,67	-2,67	-1,67	-0,67	0,33
15	-5	-4	-3	-2	-1

- جدول احتمالات الفروق $P(\bar{X}_1-\bar{X}_2)$:

بما أن العينتين مستقلتين فإن احتمال كل فرق بين قيمتين يمثل حاصل ضرب احتمالهما. مثلا:

$$P\big((\bar{X}_1=10)-(\bar{X}_2=11)\big)=P(\bar{X}_1-\bar{X}_2=-1)=P\big((\bar{X}_1=10)\big)\times P\big((\bar{X}_2=11)\big)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{72}$$

$\bar{X}_1-\bar{X}_2$	10	11	12	13	14	$\sum P_i$
11	$1/72$	$2/72$	$3/72$	$2/72$	$1/72$	$9/72$
12,33	$3/72$	$6/72$	$9/72$	$6/72$	$3/72$	$27/72$
13,67	$3/72$	$6/72$	$9/72$	$6/72$	$3/72$	$27/72$
15	$1/72$	$2/72$	$3/72$	$2/72$	$1/72$	$9/72$
$\sum P_i$	$8/72$	$1/72$	$1/72$	$1/72$	$1/72$	1

ليكون التوزيع الاحتمالي لـ: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$، كما يلي:

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	الاحتمال P_i	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \times P_i$	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)_i^2 \times P_i$
-5	$1/72$	$-5/72$	$25/72$
-4	$2/72$	$-8/72$	$32/72$
-3,67	$3/72$	$-11,01/72$	$40,4067/72$
-3	$3/72$	$-9/72$	$27/72$
-2,67	$6/72$	$-16,02/72$	$42,7734/72$
-2.33	$3/72$	$-6,99/72$	$16,2867/72$
-2	$2/72$	$-4/72$	$8/72$
-1,67	$9/72$	$-15,03/72$	$25,1001/72$
-1,33	$6/72$	$-7,98/72$	$10,6134/72$
-0,67	$6/72$	$-4,02/72$	$2,6934/72$
-1	$2/72$	$-2/72$	$2/72$
-0,33	$9/72$	$-2,97/72$	$0,9801/72$
0	$2/72$	0	0
0,33	$3/72$	$0,99/72$	$0,3267/72$
0,67	$6/72$	$4,02/72$	$2,6934/72$
1	$3/72$	$3/72$	$3/72$
1,67	$3/72$	$5,01/72$	$8,3667/72$
2	$2/72$	$4/72$	$8/72$
3	$1/72$	$3/72$	$9/72$
$\sum P_i$	**1**	$\frac{-72}{72} = -1$	$264,2406/72$

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$:

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sum(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \times P_i = \frac{-72}{72} = -1$$

نقوم بحساب المقدار $\mu_1 - \mu_2$، فنجد: $\mu_1 - \mu_2 = 12 - 13 = -1$

نلاحظ أن: متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين يساوي الفرق ما بين متوسطي المجتمعين، أي:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2}$$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$:

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \left(\sum(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)_i^2 \times P_i\right) - \mu^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{264,2406}{72} - (-1)^2 = 2,67$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$، فنجد: $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{2,67}{2} + \frac{4}{3} = 2,67 = \sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين يساوي تباين المجتمع الأول مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضافا إليه تباين المجتمع الثاني مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه، أي:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ب- حالة السحب بدون إرجاع:

نستعين بالمثال التالي: إذا كان لدينا مجتمعين، يضم الأول القيم: 10، 12، 14، 16 ويضم الثاني القيم: 9، 11، 13، وسحبنا من المجتمع الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_1 = 3$، وسحبنا من المجتمع الثاني جميع

العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_2 = 2$، وأن العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول مستقلة عن العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني، وأن السحب دون إرجاع.

- حساب كلا من المتوسط الحسابي للمجتمع الأول μ_1 وتباينه σ_1^2:

$$\mu_1 = \frac{\sum x_{i1}}{N_1} = \frac{10+12+14+16}{2} = 13$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum(x_{i1}-\mu_1)^2}{N_1} = \frac{(10-13)^2+(12-13)^2+(14-13)^2+(16-13)^2}{4} = 5$$

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها دون إرجاع من المجتمع الأول، وحساب متوسطاتها:

العينات (الثلاثيات)	المتوسط $\bar{X}_1$	العينات (الثلاثيات)	المتوسط $\bar{X}_1$
10,12,14	12	14,10,12	12
10,12,16	12,67	14,10,16	13,33
10,14,12	12	14,12,10	12
10,14,16	13,33	14,12,16	14
10,16,12	12,67	14,16,10	13,33
10,16,14	13,33	14,16,12	14
12,10,14	12	16,10,12	12,67
12,10,16	12,67	16,10,14	13,33
12,14,10	12	16,12,10	12,67
12,14,16	14	16,12,14	14
12,16,10	12,67	16,14,10	13,33
12,16,14	14	16,14,12	14

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ $\bar{X}_1$)

$\bar{X}_1$	12	12,67	13,33	14	$\sum P_i$
P_i	$6/24$	$6/24$	$6/24$	$6/24$	1

- حساب كلا من المتوسط الحسابي للمجتمع الثاني μ_2 وتباينه σ_2^2:

$$\mu_2 = \frac{\sum x_{i2}}{N_2} = \frac{9+11+13}{3} = 11$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum(x_{i2}-\mu_2)^2}{N_2} = \frac{(9-11)^2+(11-11)^2+(13-11)^2}{3} = 2{,}67$$

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها دون إرجاع من المجتمع الثاني، وحساب متوسطاتها:

العينات (الثنائيات)	المتوسط $\bar{X}_2$
9,11	10
9,13	11
11,9	10
11,13	12
13,9	11
13,11	12

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ $\bar{X}_2$)

$\bar{X}_2$	10	11	12	$\sum P_i$
P_i	$2/6$	$2/6$	$2/6$	1

- جدول الفروق $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	12	12,67	13,33	14
10	2	2,67	3,33	4
11	1	1,67	2,33	3
12	0	0,67	1,33	2

- جدول احتمال الفروق $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:

بما أن العينتين مستقلين فإن احتمال كل فرق بين قيمتين يمثل حاصل ضرب احتمالهما. مثلا:

$$P\big((\bar{X}_1 = 12) - (\bar{X}_2 = 10)\big) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 2) = P\big((\bar{X}_1 = 12)\big) \times P\big((\bar{X}_2 = 10)\big) = \frac{6}{24} \times \frac{2}{6} = \frac{12}{144}$$

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	12	12,67	13,33	14	$\sum P_i$
10	$12/144$	$12/144$	$12/144$	$12/144$	$48/144$
11	$12/144$	$12/144$	$12/144$	$12/144$	$48/144$
12	$12/144$	$12/144$	$12/144$	$12/144$	$48/144$
$\sum P_i$	$36/144$	$36/144$	$36/144$	$36/144$	1

ليكون التوزيع الاحتمالي لـ: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$، كما يلي:

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	الاحتمال P_i	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \times P_i$	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)_i^2 \times P_i$
0	$12/144$	0	0
0,67	$12/144$	$8{,}04/144$	$5{,}3868/144$
1	$12/144$	$12/144$	$12/144$
1,33	$12/144$	$15{,}96/144$	$21{,}2268/144$
1,67	$12/144$	$20{,}04/144$	$33{,}4668/144$
2	$24/144$	$48/144$	$96/144$
2,33	$12/144$	$27{,}96/144$	$65{,}1468/144$
2,67	$12/144$	$32{,}04/144$	$85{,}5468/144$
3	$12/144$	$36/144$	$108/144$
3,33	$12/144$	$39{,}96/144$	$133{,}0668/144$
4	$12/144$	$48/144$	$192/144$
$\sum P_i$	1	$\frac{288}{144} = 2$	$751{,}8408/144$

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$:

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sum(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \times P_i = \frac{288}{144} = 2$$

نقوم بحساب المقدار $\mu_1 - \mu_2$، فنجد: $\mu_1 - \mu_2 = 13 - 11 = 2$

نلاحظ أن: متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين يساوي الفرق ما بين متوسطي المجتمعين، أي:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2}$$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$:

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \left(\sum(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)_i^2 \times P_i\right) - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{751{,}8408}{144} - (2)^2 = 1{,}22$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$، فنجد: $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}=\frac{5}{3}+\frac{2,67}{2}=3\neq\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}^2$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\frac{N_2-n_2}{N_2-1}$، فنجد:

$$\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\frac{N_2-n_2}{N_2-1}=\frac{5}{3}\times\frac{4-3}{4-1}+\frac{2,67}{2}\times\frac{3-2}{3-1}=0,55+0,67=1,22=\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}^2$$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين، يساوي تباين المجتمع الأول مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع، مضافا إليه تباين المجتمع الثاني مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع، أي:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}^2=\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\frac{N_2-n_2}{N_2-1}}$$

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، وتم سحب جميع العينات الممكنة ذات الحجم المتساوي n_1 سواء بإرجاع أو بدون إرجاع من المجتمع الأول حجمه N_1، وسحب جميع العينات الممكنة ذات الحجم المتساوي n_2 سواء بإرجاع أو بدون إرجاع من المجتمع الثاني حجمه N_2، فإن: متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين يساوي الفرق ما بين متوسطي المجتمعين، أي: $\boldsymbol{\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\mu_1-\mu_2}$

- إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1}\leq 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2}\leq 0,05$ فإن: تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين، يساوي تباين المجتمع الأول مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه، مضافا إليه تباين المجتمع الثاني مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه، أي: $\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}^2=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

- إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1}>0,05$ و $\frac{n_2}{N_2}>0,05$ فإن: تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للعينتين، يساوي تباين المجتمع الأول مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع، مضافا إليه تباين المجتمع الثاني مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع، أي: $\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}^2=\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\frac{N_2-n_2}{N_2-1}}$

في جميع الحالات السابقة فإن الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين، وعليه فإن:

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}^2=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\Rightarrow\sigma_{\bar{X}}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}^2=\frac{\sigma_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)\Rightarrow\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}}$$

3-3- طبيعة توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

3-3-1- إذا كان المجتمعين مستقلين (العينتين المسحوبتين غير مرتبطتين):

أ- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمعين يتوزع طبيعيا بانحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين:

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 معلوم في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 معلوم في المجتمع الثاني، وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين، حجمهما على التوالي n_1 و n_2، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، أي:

$$X_1 \to N(\mu_1\ ;\ \sigma_1) \quad et \quad X_2 \to N(\mu_2\ ;\ \sigma_2) \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to N\left(\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\ ; \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)$$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، وفقا للحالات التالية:

- إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} \le 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} \le 0{,}05$، فإن:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad و \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}، \quad أي أن: \quad Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} > 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0{,}05$ فإن:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad و \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}، \quad أي أن: \quad Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}}$$

مثال11: إذا كانت الأجور الشهرية لـ 600 عاملا في الشركة A تتوزع طبيعيا بمتوسط حسابي يساوي 29400 دج، وانحراف معياري 4500 دج، والأجور الشهرية لـ 800 عاملا في الشركة B تتوزع طبيعيا بمتوسط حسابي يساوي 30000 دج، وانحراف معياري 4200 دج، وسحبنا عينتين مستقلتين بدون إرجاع، العينة الأولى من الشركة A، حجمها 25 عاملا، والعينة الثانية من الشركة B حجمها 36 عاملا.

1- ما احتمال أن يكون متوسط الأجور الشهرية للعينة الأولى يقل بـ 200 دج عن متوسط الأجور الشهرية للعينة الثانية؟

2- أجب على السؤال 1، إذا كان حجم العينتين: $n_A = 64$ و $n_B = 81$؟

الحل:

لدينا المعطيات التالية: المتغير العشوائي المدروس X يمثل الأجور الشهرية للعمال.

الشركة A: X: يتوزع طبيعيا ، $N_A = 600$ ، $\mu_A = 29400\ DA$ ، $\sigma_A = 4500\ DA$ ، $n_A = 25$

الشركة B: X: يتوزع طبيعيا ، $N_B = 800$ ، $\mu_B = 30000\ DA$ ، $\sigma_B = 4200\ DA$ ، $n_B = 36$

1-احتمال أن يكون متوسط الأجور الشهرية للعينة الأولى يقل بـ 200 دج عن متوسط الأجور الشهرية للعينة الثانية:

نقوم بحساب الاحتمال: $P(\bar{X}_A - \bar{X}_B < 200) = ?$

بما أن: المتغير العشوائي المدروس X (الأجور الشهرية للعمال) يتوزع طبيعيا في كلا الشركتين، بانحرافين معياريين معلومين، والعينتين مستقلتين، فإن: توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_A - \bar{X}_B$ يتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}$، أي:

$$X_A \to N(29400\,;\ 4500) \quad et \quad X_B \to N(30000\,;\ 4200) \ \Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \to N\left(\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\,; \sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\right)$$

وبما أن حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع،

و $\frac{n_A}{N_A} = \frac{25}{600} = 0{,}042 < 0{,}05$ و $\frac{n_B}{N_B} = \frac{36}{800} = 0{,}045 < 0{,}05$ ، فإن:

$$\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 29400 - 30000 = -600\ DA$$

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(4500)^2}{25} + \frac{(4200)^2}{36}} = 1140{,}175\ DA$$

أي أن: $\bar{X}_A - \bar{X}_B \to N(-600\ ;\ 1140{,}175)$

$$P(\bar{X}_A - \bar{X}_B < 200) = P\left(\frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}} < \frac{200-(-600)}{1140{,}175}\right) = P(Z < 0{,}70) = 0{,}7580$$

2-الإجابة على السؤال 1، إذا كان حجم العينتين: $n_A = 64$ و $n_B = 81$:

بما أن: المتغير العشوائي المدروس X (الأجور الشهرية للعمال) يتوزع طبيعيا في كلا الشركتين، بانحرافين معياريين معلومين، والعينتين مستقلتين، فإن: توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_A - \bar{X}_B$ يتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}$، أي:

$$X_A \to N(29400\,;\ 4500) \quad et \quad X_B \to N(30000\,;\ 4200) \ \Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \to N\left(\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\,; \sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\right)$$

وبما أن حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع،

و $\frac{n_A}{N_A} = \frac{64}{600} = 0{,}11 > 0{,}05$ و $\frac{n_B}{N_B} = \frac{81}{800} = 0{,}10 > 0{,}05$ ، فإن:

$$\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 29400 - 30000 = -600\ DA$$

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}\left(\frac{N_A-n_A}{N_A-1}\right) + \frac{\sigma_B^2}{n_B}\left(\frac{N_B-n_B}{N_B-1}\right)} = \sqrt{\frac{(4500)^2}{64}\left(\frac{600-64}{600-1}\right) + \frac{(4200)^2}{81}\left(\frac{800-81}{800-1}\right)} = 692{,}17$$

أي أن: $\bar{X}_A - \bar{X}_B \to N(-600\ ;\ 692{,}17)$

$$P(\bar{X}_A - \bar{X}_B < 200) = P\left(\frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}\left(\frac{N_A-n_A}{N_A-1}\right)+\frac{\sigma_B^2}{n_B}\left(\frac{N_B-n_B}{N_B-1}\right)}} < \frac{200-(-600)}{692{,}17}\right) = P(Z < 1{,}16) = 0{,}8770$$

ب- إذا كان المتغير العشوائي المدروس لا يتوزع طبيعيا في كلا المجتمعين، بانحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين، وحجم العينتين كبير، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$:

> إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما لا يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 معلوم في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 معلوم في المجتمع الثاني، وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين حجمهما أكبر أو يساوي 30، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فحسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، أي: $X_1 \to N(\mu_1\ ;\ \sigma_1)\ \ et\ \ X_2 \to N(\mu_2\ ;\ \sigma_2) \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to N\left(\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\ ;\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، وفقا للحالات التي تم ذكرها في الحالة أ.

مثال12: متوسط مدة الحياة لمصابيح كهربائية تنتجها المؤسسة A هو 1100 ساعة وتباينها هو 40000، بينما التي تنتجها المؤسسة B فمتوسط مدة حياتها هو 900 ساعة وانحرافها المعياري هو 100 ساعة. سحبت عينتين عشوائيتين مستقلتين، الأولى حجمها 100 مصباح من منتجات المؤسسة A، والثانية حجمها 121 مصباح من منتجات المؤسسة B. فإذا علمت أن مدة حياة المصابيح في المجتمعين لا تتوزع طبيعيا. أوجد احتمال أن يزيد متوسط مدة الحياة لعينة مصابيح المؤسسة A عن متوسط مدة الحياة لعينة مصابيح المؤسسة B بمقدار 180 ساعة؟

الحل: لدينا المعطيات التالية: المتغير العشوائي المدروس X يمثل مدة حياة المصابيح.

المؤسسة A: X: توزيعه الاحتمالي ليس طبيعيا ، $\mu_A = 1100\ h$ ، $\sigma_A^2 = 40000$ ، $n_A = 100$

المؤسسة B: X: توزيعه الاحتمالي ليس طبيعيا ، $\mu_B = 900\ h$ ، $\sigma_B = 100\ h$ ، $n_B = 121$

- احتمال أن يزيد متوسط مدة الحياة لعينة مصابيح المؤسسة A عن متوسط مدة الحياة لعينة مصابيح المؤسسة B بمقدار 180 ساعة: نقوم بحساب الاحتمال: $P(\bar{X}_A - \bar{X}_B > 180) =?$

بما أن: المتغير العشوائي المدروس X (مدة الحياة للمصابيح) توزيعه الاحتمالي غير طبيعي في كلا المؤسستين، بانحرافين معياريين معلومين، والعينتين مستقلتين، وحجم العينتين يفوق 30، فحسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_A - \bar{X}_B$ يتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}$ ، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}$، أي: $X_A \to N(1100\ ;\ 200)\ \ et\ \ X_B \to N(900\ ;\ 100) \Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \to N\left(\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\ ;\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\right)$

وبما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن: $\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 1100 - 900 = 200\ h$

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{40000}{100} + \frac{(100)^2}{121}} = 21{,}97\ h$$

أي أن: $\bar{X}_A - \bar{X}_B \to N(200\ ;\ 21{,}97)$

$$P(\bar{X}_A - \bar{X}_B > 180) = P\left(\frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}} > \frac{180-200}{21{,}97}\right) = P(Z > -0{,}91) = P(Z < 0{,}91) = 0{,}8186$$

ج- إذا كان الانحرافين المعياريين σ_1 و σ_2 مجهولين، وحجم العينتين كبير، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$:

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 مجهول في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 مجهول في المجتمع الثاني، وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين حجمهما أكبر أو يساوي 30، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فحسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، أي: $X_1 \to N(\mu_1\,;\,\sigma_1) \;\; et \;\; X_2 \to N(\mu_2\,;\,\sigma_2) \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to N\left(\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\,;\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، وفقا للحالات السابقة، مع تقدير الانحرافين المعياريين المجهولين للمجتمعين σ_1 و σ_2 بالانحرافين المعياريين للعينتين المسحوبتين S_1 و S_2، كما يلي:

- إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} \leq 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} \leq 0{,}05$، فإن:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \quad \text{أي أن:} \quad Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

حيث أن: $S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع و $S = \sqrt{\frac{N-1}{N}\times\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

- إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} > 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0{,}05$ فإن:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{و} \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{S_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)} \quad \text{أي أن:} \quad Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{S_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}}$$

ملاحظة: بالنسبة لطبيعة توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين في هذه الحالة، فهي تصلح بغض النظر عن طبيعة توزيع المجتمعين سواء أكانا طبيعيين أو غير طبيعيين.

مثال13: ينتج مصنع A للمشروبات الغازية في المتوسط 600 لتر يوميا، وينتج مصنع آخر B، 700 لتر كمعدل يومي من المنتوج نفسه. سحبت عينة عشوائية من المصنع الأول، تمثل إنتاج 49 يوما، فوجد أن متوسطها يساوي 590 لتر وانحرافها المعياري يساوي 30 لتر، كما سحبت عينة عشوائية أخرى من المصنع الثاني مستقلة عن العينة الأولى، تمثل إنتاج 36 يوما، فوجد أن متوسطها يساوي 720 لتر وانحرافها المعياري يساوي 20 لتر. أحسب الاحتمال: $P(90 \leq \bar{X}_B - \bar{X}_A \leq 110)$

الحل: لدينا المعطيات التالية: المتغير العشوائي المدروس X يمثل الكمية المنتجة يوميا من المشروبات الغازية باللتر.

المصنع A: X : توزيعه الاحتمالي غير معروف، $\mu_A = 600\ l$ ، $\bar{X}_A = 590\ l$ ، $S_A = 30\ l$ ، $n_A = 49$

المصنع B: X : توزيعه الاحتمالي غير معروف، $\mu_B = 700\ l$ ، $\bar{X}_B = 720\ l$ ، $S_B = 20\ l$ ، $n_B = 36$

بما أن: المتغير العشوائي المدروس X (الكمية المنتجة يوميا من المشروبات الغازية باللتر) توزيعه الاحتمالي غير معروف في كلا المصنعين، بانحرافين معياريين مجهولين، والعينتين مستقلتين، وحجم العينتين يفوق 30، فحسب نظرية النهاية

المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_B - \bar{X}_A$ يتوزع توزيعا طبيعيا، بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}_B-\bar{X}_A}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}_B-\bar{X}_A}$، أي:

$$X_A \to N(600\,;\,\sigma_A)\ \ et\ \ X_B \to N(700\,;\,\sigma_B)\ \Rightarrow \bar{X}_B - \bar{X}_A \to N\left(\mu_{\bar{X}_B-\bar{X}_A}\,;\sigma_{\bar{X}_B-\bar{X}_A}\right)$$

وبما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن:

$$\mu_{\bar{X}_B-\bar{X}_A} = \mu_B - \mu_A = 700 - 600 = 100\ l$$

$$\sigma_{\bar{X}_B-\bar{X}_A} = \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(30)^2}{49} + \frac{(20)^2}{36}} = 5{,}43\ l$$

أي أن: $\bar{X}_B - \bar{X}_A \to N(100\ ;\ 5{,}43)$

$$P(90 \le \bar{X}_B - \bar{X}_A \le 110) = P\left(\frac{90-100}{5{,}43} \le \frac{(\bar{X}_B-\bar{X}_A)-(\mu_B-\mu_A)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}} \le \frac{110-100}{5{,}43}\right)$$

$$\begin{aligned}P(90 \le \bar{X}_B - \bar{X}_A \le 110) &= P(-1{,}84 \le Z \le 1{,}84) = P(Z \le 1{,}84) - P(Z \le -1{,}84)\\ &= P(Z \le 1{,}84) - \left(1 - P(Z \le 1{,}84)\right)\\ &= 2P(Z \le 1{,}84) - 1 = 2(0{,}9671) - 1 = 0{,}9342\end{aligned}$$

د- إذا كان المتغير المدروس في المجتمعين موزع طبيعيا بانحرافين مجهولين، وحجم أحد العينتين على الأقل صغير:

د-1- إذا كان الانحرافين المعياريين المجهولين متساويين، أي $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$:

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما موزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 مجهول في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 مجهول في المجتمع الثاني، وكان الانحرافين المعياريين المجهولين متساويين، أي: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$، وسحبنا من هذين المجتمعين عينتين عشوائيتين حجم إحداهما على الأقل صغير، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n_1 + n_2 - 2$، أي: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to T_{v=n_1+n_2-2}$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، وفقا للحالات التالية:

- تقدير الانحرافين المعياريين المجهولين للمجتمعين σ_1 و σ_2 بالانحرافين المعياريين للعينتين المسحوبتين S_1 و S_2.
- بما أن الانحرافين المعياريين للمجتمعين متساويين، فسنقوم بتقديرهما بنفس المقدِّر، بالاعتماد على التباين المشترك، الذي يرمز له بالرمز S_p^2، حيث: $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$
- إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} \le 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} \le 0{,}05$ ، فإن:

$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$ و $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$، أي أن: $T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$

- إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} > 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0{,}05$ فإن:

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{1}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)\right)} \quad \text{و} \quad \mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\mu_1-\mu_2$$

أي أن: $T=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{1}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)\right)}}$ ، ودرجة الحرية هي: $v=n_1+n_2-2$

د-2- إذا كان الانحرافين المعياريين المجهولين غير متساويين، أي $\sigma_1\neq\sigma_2$:

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما موزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 مجهول في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 مجهول في المجتمع الثاني، وكان الانحرافين المعياريين المجهولين غير متساويين، أي: $\sigma_1\neq\sigma_2$، وسحبنا من هذين المجتمعين عينتين عشوائيتين حجم إحداهما على الأقل صغير، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ سيتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية v، حيث: $v=\dfrac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$ ، أي: $\bar{X}_1-\bar{X}_2\to T_v$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، وفقا للحالات التالية:

- تقدير الانحرافين المعياريين المجهولين للمجتمعين σ_1 و σ_2 بالانحرافين المعياريين للعينتين المسحوبتين S_1 و S_2.
- إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1}\leq 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2}\leq 0{,}05$ ، فإن: $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\mu_1-\mu_2$ و $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$، أي أن: $T=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$
- إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1}>0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2}>0{,}05$ فإن:

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{S_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)} \quad \text{و} \quad \mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\mu_1-\mu_2$$

أي أن: $T=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{S_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}}$ ، ودرجة الحرية هي: $v=\dfrac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$

مثال14: استخدمت طريقتان لإنتاج سلعة معينة، حيث توضح البيانات التالية الوقت بالدقائق المستغرق في إنتاج الوحدة بالنسبة لـ 6 وحدات أنتجت بالطريقة الأولى، و5 وحدات أنتجت بالطريقة الثانية، حيث X_1 يمثل الوقت المستغرق عند إستعمال الطريقة الأولى، وX_2 يمثل الوقت المستغرق عند إستعمال الطريقة الثانية:

X_1: 40 ,40 ,50 ,60 ,60 ,50 . X_2: 40, 45, 55, 58, 62

إذا علمت أن الوقت المستغرق في الإنتاج بالطريقتين يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 51 دقيقة بالطريقة

الأولى، و53 دقيقة بالطريقة الثانية. أحسب الاحتمال $P(\bar{X}_1 < \bar{X}_2 + 7)$، في الحالتين التاليتين:

أ- إذا كان الانحرافين المعياريين متساويين. ب- إذا كان الانحرافين المعياريين غير متساويين.

الحل:

أ- إذا كان الانحرافين المعياريين للإنتاج بالطريقتين متساويين:

بما أن الانحرافين المعياريين مجهولين ومتساويين، أي: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$، وحجم العينتين صغير، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية:

$$v = n_1 + n_2 - 2 = 6 + 5 - 2 = 9\text{، أي: } \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightarrow T_{v=9}$$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$،

- نقوم تقدير الانحرافين المعياريين المجهولين للمجتمعين σ_1 و σ_2 بالانحرافين المعياريين للعينتين المسحوبتين S_1 و S_2:

- الطريقة الأولى:

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_{1i}}{n_1} = \frac{40+40+50+60+60+50}{6} = \frac{300}{6} = 50$$

$$S_1^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{(40-50)^2 + \cdots + (50-50)^2}{6-1} = \frac{100+100+0+100+100+0}{5} = \frac{400}{5} = 80$$

- الطريقة الثانية:

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum X_{2i}}{n_2} = \frac{40+45+55+58+62}{5} = \frac{260}{5} = 52$$

$$S_2^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{(40-52)^2 + \cdots + (62-52)^2}{5-1} = \frac{144+49+9+36+100}{4} = \frac{338}{4} = 84{,}5$$

- بما أن الانحرافين المعياريين للمجتمعين متساويين، فسنقوم بتقديرهما بنفس المقدِّر، بالاعتماد على التباين المشترك، الذي يرمز له بالرمز S_p^2، حيث:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(6-1)\times 80 + (5-1)\times 84{,}5}{6+5-2} = \frac{400+338}{9} = 82$$

- بما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن: $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 51 - 53 = -2$

و $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{82\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)} = 5{,}48$، أي أن: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (-2)}{5{,}48}$ و $v = 9$

$$P(\bar{X}_1 < \bar{X}_2 + 7) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 7) = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{sp^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} < \frac{7-(-2)}{5{,}48}\right) = P(T < 1{,}64)$$

$$= 1 - P(T > 1{,}64) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$

ب- إذا كان الانحرافين المعياريين للإنتاج بالطريقتين غير متساويين:

بما أن الانحرافين المعياريين مجهولين وغير متساويين، أي: $\sigma_1 \neq \sigma_2$، وحجم العينتين صغير، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{80}{6} + \frac{84{,}5}{5}\right)^2}{\frac{\left(\frac{80}{6}\right)^2}{6-1} + \frac{\left(\frac{84{,}5}{5}\right)^2}{5-1}} = \frac{914{,}05}{35{,}55 + 71{,}40} = 8{,}54 \approx 9\text{، أي: } \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightarrow T_{v=9}$$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$،

- بما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن: $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 51 - 53 = -2$

و $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{80}{6}+\frac{84,5}{5}} = 5,50$، أي أن: $T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(-2)}{5,50}$ و $v = 9$

$$P(\bar{X}_1 < \bar{X}_2 + 7) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 7) = P\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} < \frac{7-(-2)}{5,50}\right) = P(T < 1,64)$$

$$= 1 - P(T > 1,64) = 1 - 0,05 = 0,95$$

3-3-2- إذا كان المجتمعين غير مستقلين (العينتين المسحوبتين مرتبطتين):

أحيانا، وأثناء المقارنة بين متوسطي مجتمعين، نجد أن العينتين المسحوبتين غير مستقلتين، أي أنهما مرتبطتين، حيث تكون القيمة الأولى في العينة الأولى والقيمة الأولى في العينة الثانية تابعتين لنفس الوحدة الإحصائية أو المفردة، وهكذا بالنسبة لباقي قيم العينتين، فمثلا لقياس فاعلية نظام غذائي معين على وزن الفرد، يتم قياس وزن عينة عشوائية من الأفراد قبل اتباعهم لذلك النظام الغذائي وقياس وزن العينة نفسها بعد اتباعهم له، وبالتالي نكون أمام وزنين مرتبطين للفرد نفسه، أحدهما في العينة الأولى والآخر في العينة الثانية.

إذا كان لدينا مجتمعين، المتغير العشوائي المدروس موزع طبيعيا في كليهما، أي: $X_1 \to N(\mu_1\ ;\ \sigma_1)$ و $X_2 \to N(\mu_2\ ;\ \sigma_2)$، وسحبنا كل العينات المتناظرة في المجتمعين، حيث أن كل قيمة X_{1i} من العينة الأولى بالمجتمع الأول تناظرها قيمة X_{2i} من العينة الثانية بالمجتمع الثاني، أي، نحصل على الأزواج التالية في كل عينتين: $(X_{11}\ ;\ X_{21}), (X_{12}\ ;\ X_{22}), (X_{13}\ ;\ X_{23}), \dots\dots, (X_{1n}\ ;\ X_{2n})$، وقمنا بحساب الفروق بين القيم D_i في كل عينتين متناظرتين، حيث: $D_i = X_{1i} - X_{2i}$، أي نحصل على عينات جديدة تمثل عينات الفروق بين القيم المتناظرة، متوسطها الحسابي في كل عينة جديدة هو $\bar{D}$، فإن توزيع المعاينة لمتوسط هذه الفروق $\bar{D}$ يكون كما يلي:

1- إذا كان حجم العينتين المسحوبتين $n \geq 30$، فإن توزيع المعاينة لمتوسط الفروق $\bar{D}$ يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط $\mu_{\bar{D}}$ وانحراف معياري $\sigma_{\bar{D}}$، أي: $\bar{D} \to N(\mu_{\bar{D}}\ ;\ \sigma_{\bar{D}})$، وبما أن المتوسط الحسابي لمتوسط الفروق $\mu_{\bar{D}}$ يكون مجهولا، فيمكن تقديره بواسطة متوسط الفروق للعينتين المسحوبتين $\hat{\mu}_{\bar{D}}$، حيث: $\hat{\mu}_{\bar{D}} = \frac{\sum D_i}{n}$، وبما أن الانحراف المعياري للفروق $\sigma_{\bar{D}}$ يكون مجهولا، فيمكن تقديره بواسطة الانحراف المعياري لفروق العينتين المسحوبتين $\hat{\sigma}_{\bar{D}}$.

حيث: $\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}$، و $S_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$، وبما أن طبيعة توزيع $\bar{D}$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{\bar{D}-\hat{\mu}_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}$

2- إذا كان حجم العينتين المسحوبتين $n < 30$، فإن توزيع المعاينة لمتوسط الفروق $\bar{D}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1$، وبما أن طبيعة توزيع $\bar{D}$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{\bar{D}-\hat{\mu}_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}$

حيث: $\hat{\mu}_{\bar{D}} = \frac{\sum D_i}{n}$ و $\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{S_{D_i}}{\sqrt{n-1}}$ و $S_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$

مثال15: البيانات التالية تمثل الكميات المباعة من سلعة معينة من طرف 7 محلات تجارية اختيروا عشوائيا، وذلك قبل القيام بحملة إعلانية عن هذه السلعة وبعدها.

المحلات	1	2	3	4	5	6	7
المبيعات قبل الحملة الإعلانية X_1	60	55	45	65	45	50	51
المبيعات قبل الحملة الإعلانية X_2	62	58	42	60	60	55	58

المطلوب: بافتراض أن المجتمعين موزعين طبيعيا، أوجد احتمال أن يكون متوسط الفرق ما بين المبيعات قبل وبعد الحملة الإعلانية يفوق عن 9 وحدات؟

الحل:

المحل	X_1	X_2	$D_i = X_2 - X_1$	$D_i - \bar{D}$	$(D_i - \bar{D})^2$
1	60	62	2	-1	1
2	55	58	3	0	0
3	45	42	-3	-6	36
4	65	60	-5	-8	64
5	48	60	12	9	81
6	50	55	5	2	4
7	51	58	7	4	16
المجموع	/	/	**21**	/	**202**

$$\bar{D} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{21}{7} = 3$$

$$s_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i - \bar{D})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{202}{7-1}} = 5{,}8$$

بما أن المجتمعين موزعين طبيعيين والعينتين مرتبطتين وحجم العينتين المسحوبتين $n < 30$، فإن توزيع المعاينة لمتوسط الفروق $\bar{D}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1 = 7 - 1 = 6$، وبما أن طبيعة توزيع $\bar{D}$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{\bar{D} - \hat{\mu}_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}$

حيث: $\hat{\mu}_{\bar{D}} = \frac{\sum D_i}{n} = 3$ و $\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}} = \frac{5{,}8}{\sqrt{7-1}} = 2{,}37$

$$P(\bar{D} > 9) = P\left(\frac{\bar{D} - \hat{\mu}_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} > \frac{9-3}{2{,}37}\right) = P(T > 2{,}53) = 0{,}025 = 2{,}5\%$$

4. توزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$:

4-1- تعريف توزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$:

توزيع المعاينة لنسبة العينة هو التوزيع الاحتمالي للنسب حول ظاهرة معينة، المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة ذات الحجم المتساوي n، والممكن سحبها من المجتمع.

4-2- متوسط توزيع المعاينة لنسبة العينة $\mu_{\hat{p}}$ وتباينه $\sigma^2_{\hat{p}}$:

إذا كان لدينا متغير عشوائي X في مجتمع، وسحبنا منه جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n،

وحسبنا نسبة ظاهرة معينة $\hat{p}$ لكل عينة عشوائية، حيث: $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{\text{عدد المفردات التي تتوفر فيهم الظاهرة المدروسة في العينة}}{\text{حجم العينة}}$، ثم

حسبنا متوسط تلك النسب $\mu_{\hat{p}}$ وتباينها $\sigma^2_{\hat{p}}$. فماذا تساوي قيمتهما؟ وما علاقتهما بالنسبة الحقيقية للمجتمع المدروس P؟

للإجابة على هذا السؤال نستعين بالمثال التالي: شركة يشتغل بها 4 موظفين، سألنا كل واحد منهم، هل يحمل شهادة جامعية أم لا، فكانت الإجابات كما يلي:

محمد	أحمد	سعيد	علي
نعم	لا	نعم	نعم

نقوم باستخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها من هذا المجتمع، لكن هنا يجب أن نعرف طريقة السحب، هل تمت بالإرجاع أم لا؟ لذا سنفرق بين الحالتين، كما يلي:

أ- **حالة السحب بالإرجاع:** المقصود بذلك، هو أنه أثناء إجراء السحب العشوائي لاختيار الموظفين ($n = 2$)، فإننا نسحب البطاقة الأولى ثم نعيدها، وبعد ذلك نقوم بسحب البطاقة الثانية، أي أنه يمكننا سحب الموظف الواحد مرتين.

- حساب كلا من نسبة الموظفين الذين يحملون شهادة جامعية في الشركة P والتباين σ^2:

$$P = \frac{\text{عدد الموظفين الذين يحملون شهادة جامعية}}{\text{العدد الإجمالي للموظفين}} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \Rightarrow q = 1 - P = 0{,}25$$

P: نسبة الموظفين الذين يحملون شهادة جامعية في الشركة. q: نسبة الموظفين الذين لا يحملون شهادة جامعية في الشركة

$$\sigma^2 = Pq = 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}1875$$

- استخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها مع الإرجاع، وحساب نسبة الموظفين الذين يملكون شهادة جامعية في كل منها:

العينات	الإجابات	النسبة $\hat{p}$	العينات	الإجابات	النسبة $\hat{p}$
محمد ، محمد	نعم ، نعم	1	سعيد ، محمد	نعم ، نعم	1
محمد ، أحمد	نعم ، لا	0,5	سعيد ، أحمد	نعم ، لا	0,5
محمد ، سعيد	نعم ، نعم	1	سعيد ، سعيد	نعم ، نعم	1
محمد ، علي	نعم ، نعم	1	سعيد ، علي	نعم ، نعم	1
أحمد ، محمد	لا ، نعم	0,5	علي ، محمد	نعم ، نعم	1
أحمد ، أحمد	لا ، لا	0	علي ، أحمد	نعم ، لا	0,5
أحمد ، سعيد	لا ، نعم	0,5	علي ، سعيد	نعم ، نعم	1
أحمد ، علي	لا ، نعم	0,5	علي ، علي	نعم ، نعم	1

- إيجاد توزيع المعاينة لنسبة العينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}$)

$\hat{p}$	0	0,5	1	$\sum P_i$
P_i	$1/16$	$6/16$	$9/16$	1

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة لنسبة العينة:

$\hat{p}$	الاحتمال P_i	$\hat{p}_i \times P_i$	$\hat{p}_i^2 \times P_i$
0	$1/16$	0	0
0,5	$6/16$	$3/16$	$1{,}5/16$
1	$9/16$	$9/16$	$9/16$
$\sum P_i$	1	$\frac{12}{16} = 0{,}75$	$\frac{10{,}5}{16} = 0{,}65625$

$$\mu_{\hat{p}} = \sum \hat{p}_i \times P_i = 0{,}75 = P$$

نلاحظ أن: نسبة المجتمع P تساوي متوسط توزيع المعاينة لنسبة العينة $\mu_{\hat{p}}$، أي: $\boldsymbol{\mu_{\hat{p}} = P}$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة لنسبة العينة: $\sigma_{\hat{p}}^2 = \sum \hat{p}_i^2 \times P_i - (\mu_{\hat{p}})^2 = 0{,}65625 - (0{,}75)^2 = 0{,}09375 \neq \sigma^2$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma^2}{n}$ ، فنجد: $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{0{,}1875}{2} = 0{,}09375 = \sigma_{\bar{X}}^2$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة لنسبة العينة $\sigma_{\hat{p}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة، أي: $\boldsymbol{\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}}$

ب- حالة السحب بدون إرجاع: المقصود بذلك، هو أنه أثناء إجراء السحب العشوائي لاختيار الموظفين ($n = 2$)، فإننا نسحب البطاقة الأولى دون إعادتها، وبعد ذلك نقوم بسحب البطاقة الثانية، أي أنه لا يمكننا سحب الموظف الواحد مرتين.

- استخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها دون إرجاع، وحساب نسبة الموظفين الذين يملكون شهادة جامعية في كل منها:

العينات	الإجابات	النسبة $\hat{p}$	العينات	الإجابات	النسبة $\hat{p}$
محمد ، أحمد	نعم ، لا	0,5	سعيد ، محمد	نعم ، نعم	1
محمد ، سعيد	نعم ، نعم	1	سعيد ، أحمد	نعم ، لا	0,5
محمد ، علي	نعم ، نعم	1	سعيد ، علي	نعم ، نعم	1
أحمد ، محمد	لا ، نعم	0,5	علي ، محمد	نعم ، نعم	1
أحمد ، سعيد	لا ، نعم	0,5	علي ، أحمد	نعم ، لا	0,5
أحمد ، علي	لا ، نعم	0,5	علي ، سعيد	نعم ، نعم	1

- إيجاد توزيع المعاينة لنسبة العينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}$)

$\hat{p}$	0,5	1	$\sum P_i$
P_i	$6/12$	$6/12$	1

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة لنسبة العينة:

$\hat{p}$	الاحتمال P_i	$\hat{p}_i \times P_i$	$\hat{p}_i^2 \times P_i$
0,5	$6/12$	$3/12$	$1{,}5/12$
1	$6/12$	$6/12$	$6/12$
$\sum P_i$	1	$\frac{9}{12} = 0{,}75$	$\frac{7{,}5}{12} = 0{,}625$

$$\mu_{\hat{p}} = \sum \hat{p}_i \times P_i = 0{,}75 = P$$

نلاحظ أن: نسبة المجتمع P تساوي متوسط توزيع المعاينة لنسبة للعينة $\mu_{\hat{p}}$، أي: $\boldsymbol{\mu_{\hat{p}} = P}$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة لنسبة العينة:

$$\sigma_{\hat{p}}^2 = \sum \hat{p}_i^2 \times p_i - (\mu_{\hat{p}})^2 = 0{,}625 - (0{,}75)^2 = 0{,}0625 \neq \sigma^2 \neq \frac{\sigma^2}{n}$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ ، فنجد: $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{0{,}1875}{2}\left(\frac{4-2}{4-1}\right) = 0{,}0625 = \sigma_{\hat{p}}^2$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة لنسبة العينة $\sigma_{\hat{p}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة مضروبا في المقدار $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، أي: $\boldsymbol{\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

- إذا تم سحب جميع العينات الممكنة ذات الحجم المتساوي n سواء بإرجاع أو بدون إرجاع من مجتمع حجمه N، فإن:

نسبة المجتمع P يساوي متوسط توزيع المعاينة لنسبة العينة $\mu_{\hat{p}}$، أي: $\boldsymbol{\mu_{\hat{p}} = P}$

- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$، فإن: تباين توزيع المعاينة لنسبة العينة $\sigma_{\hat{p}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة n ، أي: $\boldsymbol{\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}}$، وبما أن: $\sigma^2 = Pq$، فإن: $\boldsymbol{\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{Pq}{n}}$

- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$، فإن: تباين توزيع المعاينة لنسبة العينة $\sigma_{\hat{p}}^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 مقسوما على حجم العينة n مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، أي: $\boldsymbol{\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$، وبما أن: $\sigma^2 = Pq$، فإن: $\boldsymbol{\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{Pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

رياضيا يمكن أن نثبت أن: $\mu_{\hat{p}} = P$

$$\mu_{\hat{p}} = E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}nP = P$$

كما يمكن أن نثبت رياضيا أن: $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{Pq}{n}$

$$\sigma_{\hat{p}}^2 = V(\hat{p}) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{1}{n^2}nPq = \frac{Pq}{n}$$

في جميع الحالات السابقة فإن الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين، وعليه فإن:

$$\boldsymbol{\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{Pq}{n} \Rightarrow \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{Pq}{n}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{Pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \Rightarrow \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{Pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$$

4-3- طبيعة توزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$:

وفقا لنظرية النهاية المركزية، إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما، وسحبنا منه كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n. فتوزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$ سيقترب من التوزيع الطبيعي، ويتحقق ذلك عندما يكون: $nP \geq 5$ و $nq \geq 5$ أي: $X \rightarrow N(\mu\,;\,\sigma) \Rightarrow \hat{p} \rightarrow N\left(\mu_{\hat{p}}\,;\sigma_{\hat{p}}\right)$

بما أن طبيعة توزيع $\hat{p}$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{\hat{p}-\mu_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}}$،

وفقا للحالات التالية:

- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$، فإن: $\mu_{\hat{p}} = P$ و $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{Pq}{n}}$، أي أن: $Z = \frac{\hat{p}-P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}}$

- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$، فإن:

$\mu_{\hat{p}} = P$ و $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{Pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$، أي أن: $Z = \frac{\hat{p}-P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}}$

مثال15:

1- يبلغ عدد عمال إحدى الشركات 800 عاملا، منهم 240 عاملا أعمارهم تقل عن 30 سنة، فإذا سحبنا عينة عشوائية من عمال هذه الشركة تشمل 81 عاملا، ما هو احتمال أن تكون نسبة العمال في العينة الذين تقل أعمارهم عن 30 سنة هو 40%؟

2- أجب عن نفس السؤال إذا كان حجم العينة 36؟

الحل:

- نسبة العمال الذين أعمارهم تقل عن 30 سنة: $P = \frac{240}{800} = 0{,}30 = 30\%$

- نسبة العمال الذين أعمارهم تساوي أوتفوق 30 سنة: $q = \frac{560}{800} = 0{,}70 = 70\%$

1 – احتمال أن تكون نسبة العمال في العينة الذين تقل أعمارهم عن 30 سنة هو 45% إذا كان حجم العينة 81:

لدينا: $\frac{n}{N} = \frac{81}{800} = 0{,}10125 > 0{,}05$

ولدينا: $nP = 81 \times 0{,}3 = 24{,}3$ و $nq = 81 \times 0{,}7 = 56{,}7$

بما أن: $nP > 5$ و $nq > 5$ فإن توزيع المعاينة لنسبة العينة تتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$\hat{p} \to N(\mu_{\hat{p}}\ ; \sigma_{\hat{p}}) \quad => \hat{p} \to N\left(P\ ; \sqrt{\frac{Pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}\right) => \hat{p} \to N\left(0{,}3\ \ ; \sqrt{\frac{0{,}30 \times 0{,}70}{81}\left(\frac{800-81}{800-1}\right)}\right)$$
$$=> \hat{p} \to N(0{,}3\ \ ; 0{,}048)$$

$$P(\hat{p} < 0{,}40) = P\left(\frac{\hat{p}-P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < \frac{0{,}4-0{,}30}{0{,}048}\right) = P(Z < 2{,}08) = 0{,}9812 = 98{,}12\%$$

2- احتمال أن تكون نسبة العمال في العينة الذين تقل أعمارهم عن 30 سنة هو 45% إذا كان حجم العينة 36:

لدينا: $\frac{n}{N} = \frac{36}{800} = 0{,}045 < 0{,}05$

ولدينا: $nP = 36 \times 0{,}3 = 10{,}8$ و $nq = 36 \times 0{,}7 = 25{,}2$

بما أن: $nP > 5$ و $nq > 5$ فإن توزيع المعاينة لنسبة العينة تتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$\hat{p} \to N(\mu_{\hat{p}}\ ; \sigma_{\hat{p}}) \quad => \hat{p} \to N\left(P\ ; \sqrt{\frac{Pq}{n}}\right) => \hat{p} \to N\left(0{,}3\ \ ; \sqrt{\frac{0{,}30 \times 0{,}70}{36}}\right)$$
$$=> \hat{p} \to N(0{,}4\ \ ; 0{,}076)$$

$$P(\hat{p} < 0{,}40) = P\left(\frac{\hat{p}-P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < \frac{0{,}40-0{,}30}{0{,}076}\right) = P(Z < 1{,}32) = 0{,}9066 = 90{,}66\%$$

5. توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$:

5-1- تعريف توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$:

توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين هو التوزيع الاحتمالي للفروق ما بين جميع النسب المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول ذات الحجم المتساوي n_1، وجميع النسب المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني ذات الحجم المتساوي n_2.

2-5- متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ وتباينه $\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وسحبنا من المجتمع الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n_1. وحسبنا نسبة ظاهرة معينة $\hat{p}_1$ لكل عينة عشوائية، وسحبنا من المجتمع الثاني جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n_2. وحسبنا نسبة نفس الظاهرة $\hat{p}_2$ لكل عينة عشوائية، ثم حسبنا كل الفروق الممكنة بين جميع نسب العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول، وجميع نسب العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني، $\hat{p}_1-\hat{p}_2$، ثم حسبنا متوسط تلك الفروق $\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ وتباينها $\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$. فماذا تساوي قيمتهما؟ وما علاقتهما بمعالم المجتمعين المدروسين P_1 و P_2؟

أ- السحب بالإرجاع:

للإجابة على هذا السؤال نستعين بالمثال التالي: إذا كان لدينا معمل يشتغل به رجل (A)، وثلاث نساء $(B$ و C و $D)$، ومعمل آخر يشتغل به رجل (E)، وامرأة (F)، وسحبنا من المعمل الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_1=2$، وسحبنا من المعمل الثاني جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_2=3$، وأن العينات العشوائية المسحوبة من المعمل الأول مستقلة عن العينات العشوائية المسحوبة من المعمل الثاني، وأن السحب تم بالإرجاع. وليكن المتغير العشوائي المدروس في المعملين هو عدد الذكور.

- حساب كلا من نسبة الذكور للمعمل الأول P_1 وتباينه σ_1^2:

$$P_1=\frac{\text{عدد الذكور في المعمل الأول}}{\text{العدد الإجمالي للعمال}}=\frac{1}{4}=0{,}25 \Rightarrow q_1=1-P_1=0{,}75$$

P_1: نسبة الذكور في المعمل الأول.

q_1: نسبة الإناث في المعمل الأول.

$$\sigma_1^2=P_1q_1=0{,}25\times 0{,}75=0{,}1875$$

- استخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n=2$ الممكن سحبها مع الإرجاع، وحساب نسبة الذكور في كل منها:

النسبة $\hat{p}_1$	الإجابات	العينات	النسبة $\hat{p}_1$	الإجابات	العينات
0,5	ذكر ، أنثى	C ، A	1	ذكر ، ذكر	A ، A
0	أنثى ، أنثى	C ،B	0,5	أنثى ، ذكر	A ،B
0	أنثى ، أنثى	C ، C	0,5	أنثى ، ذكر	A ، C
0	أنثى ، أنثى	C ،D	0,5	أنثى ، ذكر	A ،D
0,5	ذكر ، أنثى	D ، A	0,5	ذكر ، أنثى	B ، A
0	أنثى ، أنثى	D ،B	0	أنثى ، أنثى	B ،B
0	أنثى ، أنثى	D ، C	0	أنثى ، أنثى	B ، C
0	أنثى ، أنثى	D ،D	0	أنثى ، أنثى	B ،D

- إيجاد توزيع المعاينة لنسبة العينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}_1$)

$\hat{p}_1$	0	0,5	1	$\sum P_i$
P_i	9/16	6/16	1/16	1

- حساب كلا من نسبة الذكور للمعمل الثاني P_2 وتباينه σ_2^2:

$$P_2 = \frac{\text{عدد الذكور في المعمل الثاني}}{\text{العدد الإجمالي للعمال}} = \frac{1}{2} = 0,5 \Rightarrow q_2 = 1 - P_2 = 0,5$$

P_2: نسبة الذكور في المعمل الثاني. q_2 : نسبة الإناث في المعمل الثاني.

$$\sigma_2^2 = P_2 q_2 = 0,5 \times 0,5 = 0,25$$

- استخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 3$ الممكن سحبها مع الإرجاع، وحساب نسبة الذكور في كل منها:

العينات	الإجابات	النسبة $\hat{p}_1$
E, E, E	ذكر، ذكر، ذكر	1
E, E, F	أنثى، ذكر، ذكر	0,67
E, F, E	ذكر، أنثى، ذكر	0,67
E, F, F	أنثى، أنثى، ذكر	0,33
F, E, E	ذكر، ذكر، أنثى	0,67
F, E, F	أنثى، ذكر، أنثى	0,33
F, F, E	ذكر، أنثى ، أنثى	0,33
F, F, F	أنثى ، أنثى ، أنثى	0

- إيجاد توزيع المعاينة لنسبة العينة: (التوزيع الاحتمالي لـ $\hat{p}_2$)

$\hat{p}_2$	0	0,33	0,67	1	$\sum P_i$
P_i	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$	1

- جدول الفروق $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$:

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	0	0,5	1
0	0	0,5	1
0,33	-0,33	0,17	0,67
0,67	-0,67	-0,17	0,33
1	-1	-0,5	0

- جدول احتمالات الفروق $P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$:

بما أن العينتين مستقلتين فإن احتمال كل فرق بين قيمتين يمثل حاصل ضرب احتمالهما. مثلا:

$$P\left((\hat{p}_1 = 0) - (\hat{p}_2 = 0)\right) = P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0) = P\left((\hat{p}_1 = 0)\right) \times P\left((\hat{p}_2 = 0)\right) = \frac{9}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{19}{128}$$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	0	0,5	1	$\sum P_i$
0	$9/128$	$6/128$	$1/128$	$16/128$
0,33	$27/128$	$18/128$	$3/128$	$48/128$
0,67	$27/128$	$18/128$	$3/128$	$48/128$
1	$9/128$	$6/128$	$1/128$	$16/128$
$\sum P_i$	$72/128$	$48/128$	$8/128$	1

ليكون التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$، كما يلي:

$\hat{p}_1-\hat{p}_2$	الاحتمال P_i	$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\times P_i$	$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)_i^2\times P_i$
-1	$9/128$	$-9/128$	$9/128$
-0,67	$27/128$	$-18{,}09/128$	$12/128$
-0,5	$6/128$	$-3/128$	$1{,}5/128$
-0.33	$27/128$	$-8{,}91/128$	$3/128$
-0,17	$18/128$	$-3{,}06/128$	$0{,}5/128$
0	$10/128$	0	0
0,17	$18/128$	$3{,}06/128$	$0{,}5/128$
0,33	$3/128$	$0{,}99/128$	$0{,}33/128$
0,5	$6/128$	$3/128$	$1{,}5/128$
0,67	$3/128$	$2{,}01/128$	$1{,}33/128$
1	$1/128$	$1/128$	$1/128$
$\sum P_i$	**1**	$\frac{-32}{128}=-0{,}25$	$30{,}6667/128$

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$:

$$\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sum(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\times P_i=\frac{-32}{128}=-0{,}25$$

نقوم بحساب المقدار P_1-P_2، فنجد: $P_1-P_2=0{,}25-0{,}5=-0{,}25$

نلاحظ أن: متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين يساوي الفرق ما بين نسبتي المجتمعين، أي:

$$\boldsymbol{\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=P_1-P_2}$$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$:

$$\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\left(\sum(\hat{p}_1-\hat{p}_2)_i^2\times P_i\right)-\mu^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\frac{30{,}6667}{128}-(-0{,}25)^2=0{,}177083$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$، فنجد: $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}=\frac{0{,}1875}{2}+\frac{0{,}25}{3}=0{,}177083=\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين يساوي تباين المجتمع الأول مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضافا إليه تباين المجتمع الثاني مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه، أي:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ب- السحب بدون الإرجاع:

نستعين بالمثال التالي: إذا كان لدينا معمل يشتغل به رجل (A)، وثلاث نساء $(D \text{ و } C \text{ و } B)$، ومعمل آخر يشتغل به رجلين $(F \text{ و } E)$، وامرأة (G). وسحبنا من المعمل الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_1=2$، وسحبنا من المعمل الثاني جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n_2=2$، وأن العينات العشوائية المسحوبة من المعمل الأول مستقلة عن العينات العشوائية المسحوبة من المعمل الثاني، وأن السحب تم بدون إرجاع. وليكن المتغير العشوائي المدروس في المعملين هو عدد الذكور.

- حساب كلا من نسبة الذكور للمعمل الأول P_1 وتباينه σ_1^2:

$$P_1=\frac{\text{عدد الذكور في المعمل الأول}}{\text{العدد الإجمالي للعمال}}=\frac{1}{4}=0{,}25\Rightarrow q_1=1-P_1=0{,}75$$

$$\sigma_1^2=P_1q_1=0{,}25\times0{,}75=0{,}1875$$

- استخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها دون ارجاع، وحساب نسبة الذكور في كل منها:

العينات	الإجابات	النسبة $\hat{p}_1$	العينات	الإجابات	النسبة $\hat{p}_1$
A ،B	أنثى ، ذكر	0,5	C ، A	ذكر ، أنثى	0,5
A ، C	أنثى ، ذكر	0,5	C ،B	أنثى ، أنثى	0
A ،D	أنثى ، ذكر	0,5	C ،D	أنثى ، أنثى	0
B ، A	ذكر ، أنثى	0,5	D ، A	ذكر ، أنثى	0,5
B ، C	أنثى ، أنثى	0	D ،B	أنثى ، أنثى	0
B ،D	أنثى ، أنثى	0	D ، C	أنثى ، أنثى	0

- إيجاد توزيع المعاينة لنسبة العينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}_1$)

$\hat{p}_1$	0	0,5	$\sum P_i$
P_i	$6/12$	$6/12$	1

- حساب كلا من نسبة الذكور للمعمل الثاني P_2 وتباينه σ_2^2:

$$P_2 = \frac{\text{عدد الذكور في المعمل الثاني}}{\text{العدد الإجمالي للعمال}} = \frac{2}{3} = 0{,}67 \Rightarrow q_2 = 1 - P_2 = 0{,}33$$

$$\sigma_2^2 = P_2 q_2 = 0{,}67 \times 0{,}33 = 0{,}22$$

- استخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها دون الإرجاع، وحساب نسبة الذكور في كل منها:

العينات	الإجابات	النسبة $\hat{p}_1$
E, F	ذكر، ذكر	1
E, G	أنثى، ذكر	0,5
F, E	ذكر، ذكر	1
F, G	أنثى، ذكر	0,5
G, E	ذكر، أنثى	0,5
G, F	ذكر، أنثى	0,5

- إيجاد توزيع المعاينة لنسبة العينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}_2$)

$\hat{p}_2$	0,5	1	$\sum P_i$
P_i	$4/6$	$2/6$	1

- جدول الفروق $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$:

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	0	0,5
0,5	-0,5	0
1	-1	-0,5

- جدول احتمالات الفروق $P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$:

بما أن العينتين مستقلتين فإن احتمال كل فرق بين قيمتين يمثل حاصل ضرب احتمالهما. مثلا:

$$P\left((\hat{p}_1 = 0) - (\hat{p}_2 = 0{,}5)\right) = P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = -0{,}5) = P\left((\hat{p}_1 = 0)\right) \times P\left((\hat{p}_2 = 0{,}5)\right) = \frac{6}{12} \times \frac{4}{6} = \frac{24}{72}$$

$\hat{p}_1-\hat{p}_2$	0	0,5	$\sum P_i$
0,5	$24/72$	$24/72$	$48/72$
1	$12/72$	$12/72$	$24/72$
$\sum P_i$	$36/72$	$36/72$	1

ليكون التوزيع الاحتمالي لـ: $\hat{p}_1-\hat{p}_2$، كما يلي:

$\hat{p}_1-\hat{p}_2$	الاحتمال P_i	$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\times P_i$	$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)_i^2\times P_i$
-1	$12/72$	$-12/72$	$12/72$
-0,5	$36/72$	$-18/72$	$9/72$
0	$24/72$	0	0
$\sum P_i$	1	$\frac{-30}{72}=-0,42$	$21/72$

- إيجاد متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$:

$$\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sum(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\times P_i=\frac{-30}{72}=-0{,}42$$

نقوم بحساب المقدار P_1-P_2، فنجد: $P_1-P_2=0{,}25-0{,}67=-0{,}42$

نلاحظ أن: متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين يساوي الفرق ما بين نسبتي المجتمعين، أي:

$$\boldsymbol{\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=P_1-P_2}$$

- إيجاد تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$:

$$\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\left(\sum(\hat{p}_1-\hat{p}_2)_i^2\times P_i\right)-\mu^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\frac{21}{72}-(-0{,}42)^2=0{,}12$$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$، فنجد: $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}=\frac{0{,}1875}{2}+\frac{0{,}22}{2}=0{,}20\neq\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$

- نقوم بحساب المقدار $\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\frac{N_2-n_2}{N_2-1}$، فنجد:

$$\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\frac{N_2-n_2}{N_2-1}=\frac{0{,}1875}{2}\times\frac{4-2}{4-1}+\frac{0{,}22}{2}\times\frac{3-2}{3-1}=0{,}0625+0{,}055=0{,}12=\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$$

نلاحظ أن: تباين توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين، يساوي تباين المجتمع الأول مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع، مضافا إليه تباين المجتمع الثاني مقسوما على حجم العينة المسحوبة منه مضروبا في معامل التصحيح أو الإرجاع، أي: $\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\frac{N_2-n_2}{N_2-1}}$

في جميع الحالات السابقة فإن الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين، وعليه فإن:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\times\frac{N_1-n_1}{N_1-1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\times\frac{N_2-n_2}{N_2-1}}}$$

5-3- طبيعة توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وسحبنا منهما عينتين كبيرتي الحجم، أي: $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فوفقا لنظرية النهاية المركزية، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ سيقترب من التوزيع الطبيعي، أي: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \to N(\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} ; \sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2})$

بما أن طبيعة توزيع $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ هو التوزيع الطبيعي، فإنه يحول إلى التوزيع الطبيعي المعياري Z كما يلي: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$، وفقا للحالات التالية:

- إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N} \leq 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N} \leq 0{,}05$ فإن: $\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = P_1 - P_2$ و $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1} + \frac{P_2q_2}{n_2}}$،

أي أن:
$$Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}}}$$

- إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N}$، $\frac{n_2}{N}$ أحدهما أو كلهما أكبر من 0,05 فإن:
$\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = P_1 - P_2$ و $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{P_2q_2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}$،

أي أن:
$$Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{P_2q_2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}}$$

مثال16: إذا كانت نسبة الناجحات من الطالبات في مقياس الإحصاء3 هو 60%، ونسبة الناجحين من الطلبة في نفس المقياس هو 55%. فإذا اخترنا عينتين مستقلتين، الأولى تشمل 100 طالبة، والثانية تشمل 150 طالبا، من الطلبة والطالبات الذين اشتركوا في هذا المقياس. ما احتمال أن تكون نسبة الناجحات في عينة الطالبات أكبر من نسبة الناجحين في عينة الطلبة بمقدار 8%.

الحل:

مجتمع الطالبات: $P_1 = 0{,}6$ ، $q_1 = 0{,}4$ ، $n_1 = 100$

مجتمع الطلبة: $P_2 = 0{,}55$ ، $q_2 = 0{,}45$ ، $n_2 = 150$

- احتمال أن تكون نسبة الناجحات في عينة الطالبات أكبر من نسبة الناجحين في عينة الطلبة بمقدار 8%:

بما أن حجم العينتين كبير، أي: $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فإن: $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$ تتوزع طبيعيا.

أي: $\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \to N(\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}, \sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2})$

حيث:
$$\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = P_1 - P_2 = 0{,}6 - 0{,}55 = 0{,}05$$
$$\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \sqrt{\frac{P_1 \times q_1}{n_1} + \frac{P_2 \times q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}6\times0{,}4}{100} + \frac{0{,}55\times0{,}45}{150}} = 0{,}064$$
$$P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 > 0{,}08) = P\left(\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}}{\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}} > \frac{0{,}08-0{,}05}{0{,}064}\right) = P(Z > 0{,}47) = P(Z < -0{,}47) = 0{,}3192$$

6. توزيع المعاينة لتباين العينة S^2:

6-1- تعريف توزيع المعاينة لتباين العينة S^2:

توزيع المعاينة لتباين العينة هو التوزيع الاحتمالي للتباينات، المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة ذات الحجم المتساوي n، والممكن سحبها من المجتمع.

6-2- طبيعة توزيع المعاينة لتباين العينة S^2:

إذا كان لدينا متغير عشوائي X موزع طبيعيا في مجتمع ما، تباينه σ^2 معلوم، وسحبنا منه جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n. وحسبنا التباين S^2 لكل عينة عشوائية، فإن توزيع المعاينة لتباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n - 1$. أي: $S^2 \to \chi^2_{v=n-1}$

بما أن طبيعة توزيع S^2 هو توزيع كاي مربع، فإنه يحول إلى χ^2 كما يلي: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$،

مثال17: سحبت عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع يتوزع طبيعيا، انحرافه المعياري هو 4. أوجد احتمال أن يكون تباين العينة يقل عن6.

الحل: بما أن المجتمع موزع طبيعيا فإن توزيع المعاينة لتباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 10 - 1 = 9$، أي: $s^2 \to \chi^2_9$

$$P(s^2 < 6) = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \frac{(10-1)\times 6}{(4)^2}\right) = P(\chi^2 < 3{,}375) = 1 - P(\chi^2 > 3{,}375) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

7. توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين $\frac{S_1^2}{S_2^2}$:

7-1- تعريف توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين $\frac{S_1^2}{S_2^2}$:

توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين، هو التوزيع الاحتمالي للنسب ما بين جميع التباينات المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول ذات الحجم المتساوي n_1، وجميع التباينات المحسوبة من جميع العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني ذات الحجم المتساوي n_2.

7-2- طبيعة توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين $\frac{S_1^2}{S_2^2}$:

إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وموزع طبيعيا في كليهما، وسحبنا من المجتمع الأول جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n_1. وحسبنا التباين S_1^2 لكل عينة عشوائية، وسحبنا من المجتمع الثاني جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم المتساوي n_2. وحسبنا التباين S_2^2 لكل عينة عشوائية، ثم حسبنا كل النسب الممكنة بين جميع تباينات العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الأول، وجميع تباينات العينات العشوائية المسحوبة من المجتمع الثاني $\frac{S_1^2}{S_2^2}$، فإن توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية: $v_1 = n_1 - 1$ و $v_2 = n_2 - 1$، أي: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \to F_{v_1,v_2}$

بما أن طبيعة توزيع $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ هو توزيع فيشر، فإنه يحول إلى F كما يلي: $F=\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$،

مثال18: أخذت عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي 8 و9 من مجتمعين طبيعيين تبايناهما على التوالي 20 و36.

- أوجد احتمال أن يكون تباين العينة الأولى أكبر من ضعف تباين العينة الثانية.

الحل:

- احتمال أن يكون تباين العينة الأولى أكبر من ضعف تباين العينة الثانية:

بما أن المجتمعين طبيعيين فإن توزيع المعاينة للنسبة ما بين تباينين يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية:

$v_1 = n_1 - 1 = 8 - 1 = 7$ و $v_2 = n_2 - 1 = 9 - 1 = 8$، أي: $\frac{s_1^2}{s_2^2} \to F_{(7\ ,\ 8)}$

$$P(s_1^2 > 2s_2^2) = P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} > 2\right) = P\left(\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} > \frac{2}{\frac{20}{36}}\right) = P(F > 3{,}6) = 0{,}05$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

يتكون مجتمع من أربع فئات اجتماعية، حجمه $N = 10000$، وحجم كل فئة هو كالتالي:

$$N_1 = 2000 \quad , \quad N_2 = 3600 \quad , N_3 = 3200 \quad , \quad N_4 = 1200$$

نريد سحب عينة عشوائية حجمها $n = 200$:

1- ما هي طبيعة المجتمع المدروس؟ ما اسم هذه العينة.

2- حدد عدد الوحدات الإحصائية التي يمكن سحبها من كل فئة.

التمرين الثاني:

1- نريد سحب عينة عشوائية بسيطة ذات الحجم 20 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 98. بالاستعانة بجدول الأرقام العشوائية، حدد أرقام مفردات العينة التي يمكن سحبها من هذا المجتمع الإحصائي.

2- نريد سحب عينة عشوائية منتظمة ذات الحجم 20 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 200. بافتراض أن مفرداته متوفرة ضمن قائمة مرتبة، حدد أرقام مفردات العينة التي يمكن سحبها من هذا المجتمع الإحصائي.

التمرين الثالث:

1- لتكن Z المتغيرة المعيارية، حيث $Z \rightarrow N(0\,,1)$. أحسب الاحتمالات التالية:

أ- $P(-2{,}44 < Z < 1{,}54)$، ب- $P(|Z| \leq 1{,}96)$، ج- $P(|Z| \leq 2{,}58)$، د- $P(|Z| \leq 1{,}64)$

2- حدد قيمة t في كل من الحالات التالية: $t(0{,}05\ ;\ 3)$ ، $t(0{,}99\ ;\ 11)$ ، $t(0{,}95\ ;\ 7)$

3- حدد قيمة x^2 في كل من الحالات التالية : $\chi^2(0{,}025\ ;\ 17)$ ، $\chi^2(0{,}995\ ;\ 8)$ ، $\chi^2(0{,}90\ ;\ 21)$

4- حدد قيمة f في كل حالة من الحالات التالية: $F(0{,}1\ ;\ 9\ ;17)$ ، $F(0{,}05\ ;\ 8\ ;4)$ ، $F(0{,}95\ ;\ 9\ ;\ 5)$

التمرين الرابع: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

في مصنع لإنتاج البطاريات تبين أن ساعات العمل للبطارية الواحدة X تتوزع كما يلي: $X \rightarrow N(500\,,10)$

1- ما هي القراءة الإحصائية للعبارة السابقة.

2- حدد معالم المتغير العشوائي X، ثم أكتب شكل دالة كثافته الاحتمالية.

3- أحسب احتمال أن بطارية ما ستعمل:

أ- ما بين 500 ساعة و515 ساعة. ب- أقل من 480 ساعة. ج- أكثر من 510 ساعة.

4- ما هو أدنى ساعات العمل لـ 2,5% من البطاريات الأكثر جودة؟

التمرين الخامس:

1- أثبت رياضيا أن لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطة حدية عظمى، فاصلتها تساوي المتوسط الحسابي للمجتمع μ وترتيبتها تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

2- أثبت رياضيا أن لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطتي انعطاف هما $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$، وترتيبتيهما تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

3- استنتج النقطة الحدية ونقطتي الانعطاف في حالة التوزيع الطبيعي المعياري.

التمرين السادس:

1- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 60، أي: $X \to \chi^2_{60}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة.

2- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 100، أي: $X \to \chi^2_{100}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة.

التمرين السابع:

1- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 4 و 12، أي: $X \to F_{4\ ,12}$، ما هي قيمة x التي يقع على يمينها 0,90 من المساحة.

2- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 1 و 14، أي: $X \to F_{1\ ,14}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة.

3- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 15 و $+\infty$، أي: $X \to F_{15,+\infty}$، أوجد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة.

التمرين الثامن:

متوسط الزمن اللازم لإكمال الطلبة عملية التسجيل بالجامعة هو 40 دقيقة. اقترح مدير الجامعة إجراءات جديدة لعملية التسجيل، بمقتضاها سجلت الأزمنة لـ 26 طالبا اختيروا عشوائيا، فكانت النتيجة أن متوسط زمن التسجيل في العينة 37,5 دقيقة بانحراف معياري يقدر بـ 4,5 دقيقة، بافتراض أن أزمنة التسجيل تتوزع طبيعيا. أوجد احتمال أن يكون متوسط الزمن للعينة يساوي أو يقل عن 37,5 دقيقة.

التمرين التاسع: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

في مصنع لصناعة لواحق السيارات قامت إدارة الجودة بمعاينة إنتاج المصنع من أسطوانات الفرامل، فتبين أن مدة صلاحيتها تتوزع طبيعيا بمتوسط قدره 36 شهرا، وانحراف معياري قدره شهرين.

1- سحبنا عشوائيا أسطوانة من أسطوانات الفرامل بهذا المصنع:

أ- ما احتمال أن تكون مدة صلاحيتها تفوق 33 شهرا. ب- ما احتمال أن تتراوح مدة صلاحيتها ما بين 34 و 40 شهرا.

2- سحبنا عينة عشوائية حجمها 49 أسطوانة من أسطوانات الفرامل بهذا المصنع، فوجدنا أن تباينها يساوي 6,25

- ما احتمال أن يكون متوسط مدة صلاحيتها يقل عن 37 شهرا.

التمرين العاشر: (امتحان سابق بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

ليكن μ المتوسط الحقيقي للمجتمع، وليكن $\bar{X}$ المتوسط المحسوب على عينة عشوائية ممثلة لهذا المجتمع حجمها n مسحوبة بالإرجاع، ولتكن العبارتين التاليتين: $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} \ldots\ldots\ldots (2)$ ، $\mu_{\bar{X}} = \mu \ldots\ldots\ldots (1)$

1- ماذا تمثل العبارتين (1) و (2)؟

2- لتكن لدينا القيم التالية: 2 ، 4 ، 6

أ- استخرج جميع العينات ذات الحجم $n = 2$ الممكن سحبها مع الارجاع، وأحسب متوسط كلا منها.

ب- تأكد حسابيا من صحة العلاقتين (1) و (2)، علما أن: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{4}{3}$

3- إذا كان: $n = 16$ و $X \to N(4\ ;\ 0{,}4)$، أحسب الإحتمالين التاليين: $P(X \leq 5)$ ، $P(\bar{X} \geq 4{,}2)$

التمرين الحادي عشر: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

بغرض دراسة الأجور الشهرية لعمال إحدى المؤسسات الاقتصادية، تم سحب عينة عشوائية منتظمة، فأعطت النتائج التالية:

ترتيب العامل	4	17	30	43	56	69	82	95	108	121	134
الأجر الشهري (10^3 دج)	12,5	16,5	13,5	25,5	32,0	41,5	16,5	25,5	24,5	19,5	47,5

1- حدد كلا من: المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الإحصائي ونوعه في هذه الدراسة.

2- ما هو حجم المجتمع الذي أجريت عليه هذه الدراسة؟ استخرج عينة عشوائية منتظمة أخرى ممكنة، يكون رقمها الأول هو 7.

3- أحسب قيمة متوسط الأجر الشهري لعمال هذه العينة.

4- إذا كان متوسط الأجر الشهري لعمال المؤسسة هو 28000 دج بتباين يساوي 2250000، وتم سحب جميع العينات العشوائية البسيطة الممكنة ذات الحجم 9 مع الإرجاع. أحسب كلا من متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي والخطأ المعياري.

التمرين الثاني عشر:

متوسط العمر الإنتاجي لمصابيح كهربائية ينتجها المصنع A هو 1400 ساعة وانحرافها المعياري هو 200 ساعة، بينما التي ينتجها المصنع B فمتوسط عمرها الإنتاجي هو 1200 ساعة وانحرافها المعياري هو 100 ساعة. سحبت عينة عشوائية حجمها 125 مصباح من كل مصنع.

أوجد احتمال أن يزيد متوسط العمر الإنتاجي لعينة مصابيح المصنع A عن متوسط العمر الإنتاجي لعينة مصابيح المصنع B بمقدار يفوق 250 ساعة.

التمرين الثالث عشر:

1- أخذت عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع إحصائي موزع طبيعيا وسطه 85، وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 16 من مجتمع إحصائي موزع طبيعيا وسطه 81، فإذا كان تبايني العينتين هما 5 و4 على التوالي، وكان تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين. أوجد الاحتمال التالي: $P(\bar{X}_1 < \bar{X}_2 + 7)$.

2- أجب على السؤال السابق إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

التمرين الرابع عشر:

يدرس في إحدى المدارس 600 تلميذ وتلميذة، منهم 240 ذكور، فإذا سحبنا عينة عشوائية من هذه المدرسة تشمل 30 تلميذا وتلميذة. ما هو احتمال أن تكون نسبة الذكور في العينة تفوق 50%؟

التمرين الخامس عشر:

إذا كانت نسبة المعجبين ببرنامج تلفزيوني للأطفال في بلدية ما هو 60%، ونسبة المعجبات في نفس البرنامج هو 52%. فإذا اخترنا عينتين مستقلتين لإجراء استفتاء حول هذا الموضوع، الأولى تشمل 125 طفلا، والثانية تشمل 100 طفلة. أوجد احتمال أن تكون نسبة المعجبين في عينة الأولاد تفوق نسبة المعجبات في عينة البنات بـ 10%.

التمرين السادس عشر: (امتحان سابق بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

أخذت عينتين عشوائيتين مستقلتين من طلبة قسمي الاقتصاد والتجارة بإحدى الجامعات للوقوف على مستوى الطلبة في مقياس الاحصاء3، بواقع $(n_1 = 25)$ طالب من قسم الاقتصاد و$(n_2 = 31)$ طالب من قسم التجارة، حيث أن علامات الطلبة بكل من قسمي الاقتصاد والتجارة يتوزعان طبيعيا تباينهما على التوالي: 16 و25.

1- ما احتمال أن يكون تباين علامات عينة طلبة قسم الاقتصاد يقل عن 22.

2- أوجد قيمة C التي تحقق الاحتمال: $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C\right) = 0,01$

الحلول

حل التمرين الأول:

يتكون مجتمع من أربع فئات اجتماعية، حجمه $N = 10000$، وحجم كل فئة هو كالتالي:

$$N_1 = 2000 \quad , \quad N_2 = 3600 \quad , N_3 = 3200 \quad , \quad N_4 = 1200$$

نريد سحب عينة عشوائية حجمها $n = 200$:

1- طبيعة المجتمع المدروس: غير متجانس لأنه يتكون من فئات اجتماعية متباينة.

- **اسم هذه العينة:** العينة الطبقية.

2- تحديد عدد الوحدات الإحصائية التي يمكن سحبها من كل فئة:

$$\boldsymbol{N \rightarrow n}$$

$$\boldsymbol{N_i \rightarrow n_i \quad \Rightarrow \quad n_i = \frac{N_i}{N} \times n}$$

$$n_1 = \frac{\mathrm{N_1}}{\mathrm{N}} \times n = \frac{2000}{10000} \times 200 = 40$$

$$n_2 = \frac{\mathrm{N_2}}{\mathrm{N}} \times n = \frac{3600}{10000} \times 200 = 72$$

$$n_3 = \frac{\mathrm{N_3}}{\mathrm{N}} \times n = \frac{3200}{10000} \times 200 = 64$$

$$n_4 = \frac{\mathrm{N_4}}{\mathrm{N}} \times n = \frac{1200}{10000} \times 200 = 24$$

حل التمرين الثاني:

1- لسحب عينة عشوائية بسيطة ذات الحجم 20 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 98، بالاستعانة بجدول الأرقام العشوائية نتبع الخطوات التالية:

- نعطي لكل مفردة عددا من الأعداد التالية: 01، 02، 03، ....، 98.

- من جدول الأرقام العشوائية نختار سطر أو عمود معين، ونأخذ منه جميع الأعداد المحصورة ضمن المجال المحدد (من 01 إلى غاية 98)، وفي حالة نفاذ أعداد السطر أو العمود دون الانتهاء من حجم العينة فإننا ننتقل للسطر أو العمود الموالي، وهكذا حتى يتم حصر العدد المطلوب من حجم العينة نختار مثلا السطر الثاني، فنجد العينة المطلوبة هي التي تحمل مفرداتها الأعداد التالية:

21، 59، 17، 91، 76، 83، 15، 86، 78، 87،

05، 43، 16، 93، 20، 54، 85، 36، 19، 73.

2- لسحب عينة عشوائية منتظمة ذات الحجم 20 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 200، نتبع الخطوات التالية:

- ترتيب المفردات عشوائيا من 1 إلى 200

- حساب طول الفترة كما يلي: $\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}} = \frac{200}{20} = 10$

- اختيار الرقم الأول عشوائيا على أن يكون أقل من أو يساوي طول الفترة أي 10، ثم نضيف طول الفترة في كل مرة لنحصل على العينة المطلوبة، ولنختار مثلا الرقم 3 من المفردات المرتبة عشوائيا فتكون العينة المطلوبة هي:

3، 13، 23، 33، 43، 53، 63، 73، 83، 93، 103، 113، 123، 133، 143، 153، 163، 173، 183، 193.

حل التمرين الثالث:

1- لتكن Z المتغيرة المعيارية، حيث $Z \to N(0\ ,1)$. حساب الاحتمالات التالية:

* $P(-2{,}44 < Z < 1{,}54) = P(Z < 1{,}54) - P(Z < -2{,}44) = 0{,}9382 - 0{,}0073 = 0{,}9309$

* $P(|Z| \leq 1{,}96) = P(Z \leq 1{,}96\ et\ -Z \leq 1{,}96\ ) = P(Z \leq 1{,}96\ et\ Z \geq -1{,}96\ )$

$= P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96\ ) = P(Z < 1{,}96) - P(Z < -1{,}96) = 0{,}9750 - 0{,}0250 = 0{,}95$

* $P(|Z| \leq 2{,}58) = P(Z \leq 2{,}58\ et\ -Z \leq 2{,}58\ ) = P(Z \leq 2{,}58\ et\ Z \geq -2{,}58\ )$

$= P(-2{,}58 \leq Z \leq 2{,}58\ ) = P(Z < 2{,}58) - P(Z < -2{,}58) = 0{,}9951 - 0{,}0049 = 0{,}99$

* $P(|Z| \leq 1{,}64) = P(Z \leq 1{,}64\ et\ -Z \leq 1{,}64\ ) = P(Z \leq 1{,}64\ et\ Z \geq -1{,}64\ )$

$= P(-1{,}64 \leq Z \leq 1{,}64\ ) = P(Z < 1{,}64) - P(Z < -1{,}64) = 0{,}9495 - 0{,}0505 = 0{,}90$

2- تحديد قيمة t في كل من الحالات التالية:

* $t(0{,}05\ ;\ 3)$: تمثل قيمة الإحصائية t التي يقع على يمينها 5% من المساحة بدرجة حرية تساوي 3، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع ستودنت، فنجد: $t(0{,}05\ ;\ 3) \Rightarrow P(T > t) = 0{,}05\ \Rightarrow t = 2{,}353$

* $t(0{,}99\ ;\ 11)$: تمثل قيمة الإحصائية t التي يقع على يمينها 99% من المساحة بدرجة حرية تساوي 11، أي تقع على يسارها 1% من المساحة، نستخرج قيمة t التي تقع على يمينها 1% من المساحة من جدول توزيع ستودنت ونسبقها بإشارة سالبة لأن توزيع ستودنت متناظر، فنجد: $t(0{,}99\ ;\ 11) \Rightarrow P(T > t) = 0{,}99\ \Rightarrow t = -\ 2{,}718$

* $t(0{,}95\ ;\ 7)$: تمثل قيمة الإحصائية t التي يقع على يمينها 95% من المساحة بدرجة حرية تساوي 7، أي تقع على يسارها 5% من المساحة، نستخرج قيمة t التي تقع على يمينها 5% من المساحة من جدول توزيع ستودنت ونسبقها بإشارة سالبة لأن توزيع ستودنت متناظر، فنجد: $t(0{,}95\ ;\ 7) \Rightarrow P(T > t) = 0{,}95\ \Rightarrow t = -\ 1{,}895$

3- تحديد قيمة x^2 في كل من الحالات التالية:

* $\chi^2(0{,}025\ ;\ 17)$: تمثل قيمة الإحصائية x^2 التي يقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية تساوي 17، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع كاي مربع: $\chi^2(0{,}025\ ;\ 17) \Rightarrow P(\chi^2 > x^2) = 0{,}025\ \Rightarrow x^2 = 30{,}191$

* $\chi^2(0{,}995\ ;\ 8)$: تمثل قيمة الإحصائية x^2 التي يقع على يمينها 99,5% من المساحة بدرجة حرية تساوي 8، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع كاي مربع: $\chi^2(0{,}995\ ;\ 8) \Rightarrow P(\chi^2 > x^2) = 0{,}995 \Rightarrow \chi^2 = 1{,}344$

* $\chi^2(0{,}90\ ;\ 21)$: تمثل قيمة الإحصائية x^2 التي يقع على يمينها 90% من المساحة بدرجة حرية تساوي 21، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع كاي مربع: $\chi^2(0{,}90\ ;\ 21) \Rightarrow P(\chi^2 > x^2) = 0{,}90 \Rightarrow \chi^2 = 13{,}240$

4- تحديد قيمة f في كل حالة من الحالات التالية:

* $F(0{,}1\ ;\ 9\ ;17)$: تمثل قيمة الإحصائية f التي يقع على يمينها 10% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 9 و 17، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع فيشر، فنجد: $F(0{,}1\ ;\ 9\ ;17) \Rightarrow P(F > f) = 0{,}1 \Rightarrow f = 2{,}03$

* $F(0{,}05\ ;8\ ;4)$: تمثل قيمة الإحصائية f التي يقع على يمينها 5% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 8 و 4، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع فيشر، فنجد: $F(0{,}05\ ;\ 8\ ;4)) \Rightarrow P(F > f) = 0{,}1 \Rightarrow f = 6{,}04$

* $F(0,95\ ;9;5)$: تمثل قيمة الإحصائية f التي يقع على يمينها 95% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 9 و 5، وبما أن النسبة كبيرة فإننا نستخرجها من جدول توزيع فيشر، بإيجاد قيمة f لـ 95% من المساحة عن طريق قيمة f لـ 5% من المساحة، وذلك بقسمة 1 على قيمة f لـ 5% مع تغيير درجتي الحرية. أي:

$$F(0{,}95\ ;9\ ;5)=\frac{1}{F(0{,}05\ ;5\ ;9)}\Rightarrow f=\frac{1}{3.48}=0{,}287$$

<u>حل التمرين الرابع:</u>

في مصنع لإنتاج البطاريات تبين أن ساعات العمل للبطارية الواحدة X تتوزع كما يلي: $X\rightarrow N(500\ ,10)$

1- القراءة الإحصائية للعبارة السابقة: المتغير العشوائي X (ساعات العمل للبطارية الواحدة) يتوزع طبيعيا بمتوسط قدره 500 ساعة وإنحراف معياري قيمته 10 ساعات.

2- تحديد معالم المتغير العشوائي X، ثم أكتب شكل دالة كثافته الاحتمالية:

- متوسط ساعات العمل للبطارية الواحدة هو 500 ساعة، أي: $\mu=500$
- الانحراف المعياري يساوي 10 ساعات، أي: $\sigma=10$
- شكل دالة كثافته الاحتمالية: $f(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-500}{10}\right)^2}$

3- حساب احتمال أن:

أ- بطارية ما ستعمل ما بين 500 ساعة و515 ساعة:

- $P(500<X<515)=P\left(\frac{500-500}{10}<\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{515-500}{10}\right)=P(0<Z<1{,}5)$
  $=P(Z<1{,}5)-P(Z<0)=0{,}9332-0{,}5=0{,}4332$

ب- بطارية ما ستعمل أقل من 480 ساعة:

- $P(X<480)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{480-500}{10}\right)=P(Z<-2)=0{,}0228$

ج- بطارية ما ستعمل أكثر من 510 ساعة:

- $P(X>510)=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}>\frac{510-500}{10}\right)=P(Z>1)=1-P(Z<1)=1-0{,}8413=0{,}1587$

4- أدنى ساعات العمل لـ 2,5% من البطاريات الأكثر جودة:

$$P\ (X>\alpha)=0{,}025\Leftrightarrow P\ (X<\alpha)=0{,}975\Leftrightarrow\ P\left(\frac{x-500}{10}<\frac{\alpha-500}{10}\right)=0{,}975$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z<\frac{\alpha-500}{10}\right)=0{,}975$$

من جدول التوزيع الطبيعي نجد: $Z=1{,}96$

أي أن: $\frac{\alpha-500}{10}=1{,}96$ أي: $\alpha=519{,}6\ \ kg$

<u>حل التمرين الخامس:</u>

1- إثبات رياضيا أن لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطة حدية عظمى، فاصلتها تساوي المتوسط الحسابي للمجتمع μ وترتيبها تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$:

يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الأولى لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر، كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)'e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)'e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-1}{2\sigma^3\sqrt{2\pi}}2(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

بوضع المشتقة الأولى لدالة التوزيع الطبيعي مساوية للصفر نجد:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-\mu)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\mu$$

بالتعويض بقيمة μ في دالة التوزيع الطبيعي نجد:

$$f(\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right)^2}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^0=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

وبالتالي: لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطة حدية عظمى، فاصلتها تساوي المتوسط الحسابي للمجتمع μ وترتيبتها تساوي $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma\sqrt{2\pi}}}$.

2- إثبات رياضيا أن لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطتي انعطاف هما $\boldsymbol{\mu-\sigma}$ و $\boldsymbol{\mu+\sigma}$، وترتيبتهما تساوي $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma\sqrt{2\pi e}}}$:

يمكن الحصول على ذلك بحساب المشتقة الثانية لدالة التوزيع الطبيعي ومساواتها للصفر، كما يلي:

$$f'(x)=\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)\right)'e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}+\left(\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)\right)\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right)'$$

$$f''(x)=\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}+\left(\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)\right)\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)'e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}+\left(\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)\right)\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)'e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}+\frac{1}{2\sigma^5\sqrt{2\pi}}(x-\mu)2(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}(x-\mu)^2\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

بوضع المشتقة الثانية لدالة التوزيع الطبيعي مساوية للصفر نجد:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}(x-\mu)^2\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}(x-\mu)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}(x-\mu)^2=\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2=1$$

$$\Leftrightarrow (x-\mu)^2 = \sigma^2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\mu = \sigma \\ x-\mu = -\sigma \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu+\sigma \\ x = \mu-\sigma \end{cases}$$

بالتعويض بقيمتي $\mu+\sigma$ و $\mu-\sigma$ في دالة التوزيع الطبيعي نجد:

$$f(\mu+\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$$
$$f(\mu-\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$$

وبالتالي: لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطتي انعطاف فاصلتيهما $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$، وترتيبتيهما تساوي $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

3- استنتاج النقطة الحدية ونقطتي الانعطاف في حالة التوزيع الطبيعي المعياري:

نعلم أن دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري معرفة بالصيغة التالية: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(z)^2}$

حيث: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ و $z \in \Omega_Z =]-\infty, +\infty[$، وبالتالي: $Z \to N(0,1)$

انطلاقا من المشتقة الأولى لدالة التوزيع الطبيعي، وجدنا أنها تنعدم عند الفاصلة $x=\mu$، أي:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mu$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-\mu}{\sigma}$$
$$\Leftrightarrow z = 0$$

بالتعويض بقيمة 0 في دالة التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(0)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

وبالتالي: لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري نقطة حدية عظمى، فاصلتها معدومة وترتيبتها تساوي $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$.

و انطلاقا من المشتقة الثانية لدالة التوزيع الطبيعي، وجدنا أنها تنعدم عند الفاصلتين: $\mu+\sigma$ و $\mu-\sigma$، أي:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu+\sigma \\ x = \mu-\sigma \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma} \\ \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = +1 \\ z = -1 \end{cases}$$

بالتعويض بقيمتي $+1$ و $+1$ في دالة التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$f(-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$$
$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$$

وبالتالي: لمنحنى التوزيع الطبيعي نقطتي انعطاف فاصلتيهما -1 و $+1$، وترتيبتيهما تساوي $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$.

<u>حل التمرين السادس:</u>

1- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 60، أي: $X \to \chi^2_{60}$، إيجاد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة:

أ- الطريقة الأولى: نقوم بحساب: $P(X < x) = 0{,}975$، لكن جدول كاي مربع يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي كما يلي:

$$P(X < x) = 0{,}975 \Leftrightarrow P(X \geq x) = 0{,}025$$

ومن خلال جدول كاي مربع بالملحق رقم 3، نجد: التقاطع بين: $v = 60$ و $\alpha = 0{,}025$ وهو القيمة $x = 83{,}298$

أي أن: $P(X < 83{,}298) = 0{,}975 \Leftrightarrow P(X \geq 83{,}298) = 0{,}025$

ب- الطريقة الثانية: بما أن: $30 \leq v < 100$: فإننا <u>نقرب</u> توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي المعياري بالتحويل التالي:

$$z = \sqrt{2x} - \sqrt{2v - 1}$$

نبحث عن قيمة z التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة، فنجد أنها: $z = +1{,}96$، فنجد:

$$z = \sqrt{2x} - \sqrt{2v-1} \Leftrightarrow 1{,}96 = \sqrt{2x} - \sqrt{2(60) - 1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x} = 10{,}91 + 1{,}96$$
$$\Leftrightarrow x = 82{,}83$$

مع ملاحظة أن هذه القيمة تقريبية لقيمة كاي مربع.

2- إذا كان X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية 100، أي: $X \to \chi^2_{100}$، إيجاد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة.

أ- الطريقة الأولى: نقوم بحساب: $P(X < x) = 0{,}975$، لكن جدول كاي مربع يتضمن الاحتمال أو المساحة التي تقع على يمين أي قيمة فقط، وبالتالي نقوم بتحويل المتباينة من أصغر إلى أكبر أو تساوي كما يلي:

$$P(X < x) = 0{,}975 \Leftrightarrow P(X \geq x) = 0{,}025$$

ومن خلال جدول كاي مربع بالملحق رقم 3، نجد: التقاطع بين: $v = 100$ و $\alpha = 0{,}025$ وهو القيمة $x = 129{,}561$

أي أن: $P(X < 129{,}561) = 0{,}975 \Leftrightarrow P(X \geq 129{,}561) = 0{,}025$

ب- الطريقة الثانية: بما أن: $v \geq 100$: فإننا <u>نقرب</u> توزيع كاي مربع من التوزيع الطبيعي المعياري بالتحويل التالي:

$$z = \frac{x - v}{\sqrt{2v}}$$

نبحث عن قيمة z التي يقع على يسارها 0,975 من المساحة، فنجد أنها: $z = +1{,}96$، فنجد:

$$z = \frac{x-v}{\sqrt{2v}} \Leftrightarrow 1{,}96 = \frac{x - 100}{\sqrt{2(100)}}$$
$$\Leftrightarrow x - 100 = 1{,}96\sqrt{2(100)}$$
$$\Leftrightarrow x - 100 = 27{,}72$$
$$\Leftrightarrow x = 127{,}72$$

مع ملاحظة أن هذه القيمة تقريبية لقيمة كاي مربع.

حل التمرين السابع:

1- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 4 و12، أي: $X \rightarrow F_{4,12}$، إيجاد قيمة x التي يقع على يمينها 0,90 من المساحة:

نقوم بحساب: $P(X > x) = 0,90$. لدينا: $1 - \alpha = 0,90 \Leftrightarrow \alpha = 0,1$

ومنه: $F_{(0,90),4,12} = \frac{1}{F_{(0,1),12,4}} = \frac{1}{3,90} = 0,256$

2- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 1 و14، أي: $X \rightarrow F_{1,14}$، إيجاد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة:

أ- الطريقة الأولى: تمثل القيمة x الإحصائية التي يقع على يمينها 10% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 1 و14، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع فيشر، فنجد: $F(0,1\ ;\ 1\ ; 14) \Rightarrow P(F > x) = 0,1 \Rightarrow x = 3,1$

ب- الطريقة الثانية: $F_{(0,1),1,14} = t^2_{\left(1-\frac{0,1}{2}\right),14} = t^2_{(0,95),14} = (-1,761)^2 = 3,1$

3- إذا كان X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 15 و $+\infty$، أي: $X \rightarrow F_{15,+\infty}$، إيجاد بطريقتين مختلفتين قيمة x التي يقع على يمينها 0,1 من المساحة:

أ- الطريقة الأولى: تمثل القيمة x الإحصائية التي يقع على يمينها 10% من المساحة بدرجتي حرية تساوي 15 و $+\infty$، نستخرجها مباشرة من جدول توزيع فيشر، فنجد: $F(0,1\ ;\ 15\ ; +\infty) \Rightarrow P(F > x) = 0,1 \Rightarrow x = 1,49$

ب- الطريقة الثانية: $F_{(0,1),15,\infty} = \frac{\chi^2_{(0,1),15}}{15} = \frac{22,307}{15} = 1,49$

حل التمرين الثامن:

- إيجاد احتمال أن يكون متوسط الزمن للعينة يساوي أو يقل عن 37,5 دقيقة:

المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، حجم العينة أقل من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية $v = n - 1 = 26 - 1 = 25$، أي: $\bar{X} \rightarrow T(25)$

$$P(\bar{X} \leq 37,5) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \leq \frac{-2,5}{\frac{4,5}{\sqrt{25}}}\right) = P(T \leq -2,78) = 0,005$$

حل التمرين التاسع:

في مصنع لصناعة لواحق السيارات قامت إدارة الجودة بمعاينة إنتاج المصنع من أسطوانات الفرامل، فتبين أن مدة صلاحيتها تتوزع طبيعيا بمتوسط قدره 36 شهرا، وانحراف معياري قدره شهرين.

1- سحبنا عشوائيا أسطوانة من أسطوانات الفرامل بهذا المصنع:

أ- احتمال أن تكون مدة صلاحيتها تفوق 33 شهرا:

$$P(X > 33) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{33-36}{2}\right) = P(Z > -1,5) = P(Z < 1,5) = 0,9332$$

ب- احتمال أن تتراوح مدة صلاحيتها ما بين 34 و 40 شهرا:

$$P(34 < X < 40) = P\left(\frac{34-36}{2} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{40-36}{2}\right) = P(-1 < Z < 2)$$
$$= P(Z < 2) - P(Z < -1) = 0,9772 - 0,1587 = 0,8185$$

2- سحبنا عينة عشوائية حجمها 49 أسطوانة من أسطوانات الفرامل بهذا المصنع، فوجدنا أن تباينها يساوي 6,25

- احتمال أن يكون متوسط مدة صلاحيتها يقل عن 37 شهرا:

المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، حجم العينة أكبر من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$X \to N(\mu\,;\sigma) \;\; => \bar{X} \to N\left(\mu\,;\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \;\; => \;\; \bar{X} \to N\left(36\,;\frac{\sqrt{6{,}25}}{\sqrt{49}}\right) => \;\; \bar{X} \to N(36 \; ; \; 0{,}357)$$

$$P(\bar{X} < 37) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < \frac{37-36}{0{,}357}\right) = P(Z < 2{,}8) = 0{,}9974$$

<u>**حل التمرين العاشر:**</u>

1- تمثل العبارتين:

$\boldsymbol{\mu_{\bar{X}} = \mu}$: متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يساوي متوسط المجتمع.

$\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}}$: تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يساوي تباين المجتمع مقسوما على حجم العينة المسحوبة.

2- أ- إستخراج جميع العينات ذات الحجم $\boldsymbol{n = 2}$ المكن سحبها مع الارجاع، وحساب متوسط كلا منها:

المتوسط $\bar{X}$	العينات
2	2,2
3	2,4
4	2,6
3	4,2
4	4,4
5	4,6
4	6,2
5	6,4
6	6,6

ب- التأكد حسابيا من صحة العلاقتين (1) و (2)، علما أن: $\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{4}{3}}$:

$$\mu = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{2+4+6}{3} = 4$$

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}_i}{n} = \frac{36}{9} = 4 = \mu$$

وبالتالي فإن: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ ، أي أن العلاقة (1) صحيحة.

$$\sigma^2 = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n} = \frac{(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = \; \sigma^2_{\bar{X}}$$

وبالتالي فإن: $\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}}$ ، أي أن العلاقة (2) صحيحة.

3- إذا كان: $\boldsymbol{n = 16}$ و $\boldsymbol{X \to N(4 \;\; ; \;\; 0,4)}$، حساب الاحتمالين التاليين: $\boldsymbol{P(X \le 5)}$ ، $\boldsymbol{P(\bar{X} \ge 4,2)}$

أ- حساب الاحتمال: $\boldsymbol{P(X \le 5)}$

$$P(X \le 5) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{5-4}{0{,}4}\right) = P(Z \le 2{,}5) = 0{,}9938$$

ب- حساب الاحتمال: $P(\bar{X} \geq 4,2)$

المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$X \to N(\mu\,;\sigma) \Rightarrow \bar{X} \to N\left(\mu\,;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \bar{X} \to N\left(4\,;\frac{0,4}{\sqrt{16}}\right) \Rightarrow \bar{X} \to N(4\ ;\ 0,1)$$

$$P(\bar{X} \geq 4,2) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{4,2-4}{0,1}\right) = P(Z \geq 2) = P(Z \leq -2) = 0,0228$$

حل التمرين الحادي عشر:

1- تحديد كلا من: المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، المتغير الإحصائي ونوعه في هذه الدراسة:

المجتمع الإحصائي	الوحدة الإحصائية	المتغير الإحصائي	نوعه
جميع عمال المؤسسة	العامل الواحد	الأجر الشهري	متغير كمي مستمر

2-أ- حجم المجتمع الذي أجريت عليه هذه الدراسة:

بما أن العينة المسحوبة هي عينة منتظمة فإننا نبحث عن الدور الذي يساوي:

134 – 121 = 121 – 108 = 108 – 95 = ...= 30 – 17 = 17 – 4 = 13

وبالتالي: $\frac{N}{n} = 13$ أي: $N = 13n = 13 \times 11 = 143$ لأن حجم العينة $n = 11$

ب- استخراج عينة عشوائية منتظمة أخرى ممكنة، يكون رقمها الأول هو7:

نبدأ بالرقم 7 وفي كل مرة نضيف قيمة الدور الذي يساوي 13 فتكون لدينا العينة التالية:

ترتيب العامل	7	20	33	46	59	72	85	98	111	124	137

3- حساب قيمة متوسط الأجر الشهري لعمال هذه العينة:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{275}{11} = 25\ \times 10^3\ DA$$

4- حساب كلا من متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\mu_{\bar{X}}$ والخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}}$:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 28000\ DA$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2250000}}{3} = 500\ DA$$

حل التمرين الثاني عشر:

- احتمال أن يزيد متوسط العمر الإنتاجي لعينة مصابيح المصنع A عن متوسط العمر الإنتاجي لعينة مصابيح المصنع B بمقدار يفوق 250 ساعة:

المجتمعين موزعين طبيعيا بتباينين معلومين، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين يتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$X_A \to N(\mu_A\,;\sigma_A)\ et\ X_B \to N(\mu_B\,;\sigma_B) \Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \to N\left(\mu_A - \mu_B\,;\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \to N\left(1400 - 1200\,;\sqrt{\frac{(200)^2}{125} + \frac{(100)^2}{125}}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X}_A - \bar{X}_B \to N(200\,;20)$$

$$P(\bar{X}_A-\bar{X}_B>250)=P\left(\frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}}>\frac{250-200}{20}\right)=P(Z>2,5)=P(Z<-2,5)=0,0062$$

حل التمرين الثالث عشر:

1- إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين، حساب الاحتمال: $P(\bar{X}_1<7+\bar{X}_2)$

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين، والعينتين صغيرتا الحجم، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v=n_1+n_2-2=10+16-2=24$ أي: $\bar{X}_1-\bar{X}_2\ \rightarrow t(24)$

التباين المشترك sp^2: $sp^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{(10-1)(5)+(16-1)(4)}{24}=4,375$

$$P(\bar{X}_1<\bar{X}_2+7)=P(\bar{X}_1-\bar{X}_2<7)=P\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{sp^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}<\frac{7-(85-81)}{\sqrt{4,375\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{16}\right)}}\right)=P\left(t<\frac{3}{0,84}\right)$$

$$=P(t<3,57)=1-P(t>3,57)=1-0,001=0,999$$

3- إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين، حساب الاحتمال: $P(\bar{X}_1<7+\bar{X}_2)$

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين، والعينتين صغيرتا الحجم، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}=\frac{\left(\frac{5}{10}+\frac{4}{16}\right)^2}{\frac{\left(\frac{5}{10}\right)^2}{10-1}+\frac{\left(\frac{4}{16}\right)^2}{16-1}}=\frac{0,5625}{0,032}=17,58\approx 18$

أي: $\bar{X}_1-\bar{X}_2\ \rightarrow t(18)$

$$P(\bar{X}_1<\bar{X}_2+7)=P(\bar{X}_1-\bar{X}_2<7)=P\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}<\frac{7-(85-81)}{\sqrt{\frac{5}{10}+\frac{4}{16}}}\right)=P\left(t<\frac{3}{0,866}\right)$$

$$=P(t<3,46)=1-P(t>3,46)=1-0,001=0,999$$

حل التمرين الرابع عشر:

احتمال أن تكون نسبة الذكور في العينة تفوق 50%:

نسبة الذكور: $p=\frac{240}{600}=0,40$ و نسبة التلميذات: $q=\frac{360}{600}=0,60$

وبالتالي: $np=30\times 0,4=12$ و $nq=30\times 0,6=18$

بما أن: $np>5$ و $nq>5$ فإن توزيع المعاينة لنسبة العينة تتبع التوزيع الطبيعي، أي:

$$\hat{p}\rightarrow N(\mu_{\hat{p}}\,;\sigma_{\hat{p}})\ \Rightarrow \hat{p}\rightarrow N\left(p\,;\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\Rightarrow \hat{p}\rightarrow N\left(0,4\ ;\sqrt{\frac{0,4\times 0,6}{30}}\right)\Rightarrow \hat{p}\rightarrow N(0,4\ ;0,089)$$

$$P(\hat{p} > 0{,}5) = P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} > \frac{0{,}5-0{,}4}{0{,}089}\right) = P(Z > 1{,}12) = P(Z < -1{,}12) = 0{,}1314$$

حل التمرين الخامس عشر:

- إيجاد احتمال أن تكون نسبة المعجبين في عينة الأولاد تفوق نسبة المعجبات في عينة البنات بـ 10%:

مجتمع الأولاد: $P_1 = 0{,}6$ ، $q_1 = 0{,}4$ ، $n_1 = 125$

مجتمع البنات: $P_2 = 0{,}52$ ، $q_2 = 0{,}48$ ، $n_2 = 100$

بما أن حجم العينتين كبير فإن: $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$ تتوزع طبيعيا، أي: $\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \to N\left(\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}, \sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}\right)$

حيث: $\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = P_1 - P_2 = 0{,}6 - 0{,}52 = 0{,}08$

و

$$\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \sqrt{\frac{P_1 \times q_1}{n_1} + \frac{P_2 \times q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}6 \times 0{,}4}{125} + \frac{0{,}52 \times 0{,}48}{100}} = 0{,}066$$

$$P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 > 0{,}10) = P\left(\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2) - \mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}}{\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}} > \frac{0{,}10-0{,}08}{0{,}066}\right) = P(Z > 0{,}30)$$

$$= P(Z < -0{,}30) = 0{,}3821$$

حل التمرين السادس عشر:

قسم الاقتصاد: علامات الطلبة موزعين طبيعيا ، $n_1 = 25$ ، $\sigma_1^2 = 16$

قسم التجارة: علامات الطلبة موزعين طبيعيا ، $n_2 = 31$ ، $\sigma_2^2 = 25$

1- احتمال أن يكون تباين علامات عينة طلبة قسم الاقتصاد يقل عن 22:

بما أن مجتمع طلبة قسم الاقتصاد موزع طبيعيا، فإن توزيع المعاينة لتباين عينة قسم الاقتصاد يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 25 - 1 = 24$، أي: $s_1^2 \to \chi^2_{24}$

$$P(s_1^2 < 22) = P\left(\frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2} < \frac{(25-1)\times 22}{16}\right) = P(\chi^2 < 33) = 1 - P(\chi^2 > 33) = 1 - 0{,}1 = 0{,}90$$

2- ايجاد قيمة C التي تحقق الاحتمال: $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C\right) = 0{,}01$

بما أن المجتمعين طبيعيين فإن توزيع المعاينة للنسبة ما بين تباينين يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية:

$v_1 = n_1 - 1 = 25 - 1 = 24$ و $v_2 = n_2 - 1 = 31 - 1 = 30$، أي: $\frac{s_1^2}{s_2^2} \to F_{(24\,;\,30)}$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} > C\right) = 0{,}01 \Rightarrow P\left(\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} > \frac{C}{\frac{20}{36}}\right) = P\left(F > \frac{36C}{20}\right) = 0{,}01$$

من جدول توزيع فيشر نجد: $\frac{36C}{20} = 2{,}47 \Rightarrow C = 1{,}37$

تمارين مقترحة

التمرين الأول

تتكون كلية الاقتصاد بجامعة المسيلة من خمس فئات طلابية موزعة كالتالي:

- عدد طلبة السنة الأولى هو: 4200 طالب. - عدد طلبة السنة الثانية هو: 3100 طالب.

- عدد طلبة السنة الثالثة هو: 2000 طالب. - عدد طلبة الماستر 1 هو: 400 طالب. - عدد طلبة الماستر 2 هو: 300 طالب.

نريد سحب عينة عشوائية حجمها $n = 200$:

1- ماهي طبيعة المجتمع المدروس؟ ما اسم هذه العينة.

2- حدد عدد الوحدات الإحصائية التي يمكن سحبها من كل فئة.

التمرين الثاني:

إذا كانت درجات 500 موظف في إحدى اختبارات الترقية تتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 70 درجة وانحراف معياري قدره 5 درجات، أحسب ما يلي:

1- عدد الموظفين الحاصلين على درجات محصورة ما بين 66 و 76.

2- عدد الموظفين الحاصلين على درجات تفوق 80.

3- عدد الموظفين الحاصلين على درجات تقل عن 60.

4- ما هي أقصى درجة لأضعف 2,5% من الموظفين؟

التمرين الثالث:

1- أحسب الاحتمالات التالية علما أن $Z \rightarrow N(0,1)$:

$P(Z \geq 1,67)$ ، $P(Z \leq -1,23)$ ، $P(|Z| \leq 1,43)$ ، $P(|Z| \geq 2,67)$ ، $P(1,04 \leq Z \leq 1,67)$

2- إذا كان $X \rightarrow N(20\ ,\ 5)$، حدد قيمة a في كل حالة من الحالات التالية:

$$P(X \leq a) = 0,975 \quad ، \quad P(X \leq a) = 0,025$$

3- إذا كان $X \rightarrow T(12)$ ، أوجد قيمة t فيما يلي، $P(T \geq t) = 0,01$ ، $P(T \leq t) = 0,05$

4- إذا كان $X \rightarrow T(10)$ ، أحسب الاحتمالات: $P(T \geq 2,228)$ ، $P(T \leq 1,372)$ ، $P(T \geq -2,764)$

5- إذا كان $X \rightarrow \chi^2(20)$، أوجد قيمة K فيما يلي: $P(\chi^2 \geq K) = 0,01$ ، $P(\chi^2 \leq K) = 0,05$

6- إذا كان $X \rightarrow \chi^2(14)$ ، أحسب الاحتمالات: $P(\chi^2 \geq 7,790)$ ، $P(T \leq 5,629)$

7- إذا كان $X \rightarrow F(8\ ,12)$، أوجد قيمة K فيما يلي: $P(F \geq K) = 0,01$ ، $P(F \leq K) = 0,95$

8- إذا كان $X \rightarrow F(6\ ,9)$ ، أحسب الاحتمالات: $P(F \geq 5,8)$ ، $P(F \leq 2,55)$

التمرين الرابع:

نريد سحب عينة عشوائية بسيطة ذات الحجم 16 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 200. بالاستعانة بجدول الأرقام العشوائية، حدد أرقام مفردات العينة التي يمكن سحبها من هذا المجتمع الإحصائي.

التمرين الخامس:

نريد سحب عينة عشوائية منتظمة ذات الحجم 20 من مجتمع إحصائي عدد مفرداته 400. بافتراض أن مفرداته متوفرة ضمن قائمة مرتبة، حدد أرقام مفردات العينة التي يمكن سحبها من هذا المجتمع الإحصائي.

التمرين السادس:

تتبع أطوال كل الشباب في مدينة المسيلة توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 170 سم، وتباين 36، فإذا سحبنا منهم عينة عشوائية تشمل 25 شابا، فما احتمال أن يكون متوسط الطول في العينة يفوق 172سم.

التمرين السابع:

إذا كانت رواتب كل الموظفين التابعين لشركة كبيرة لها وسط حسابي يساوي 26953 دج، بانحراف معياري 4573، فإذا سحبنا من هذه الشركة عينة عشوائية تشمل 49 موظفا، فما احتمال أن يكون وسطها الحسابي أقل من 26000 دج.

التمرين الثامن:

تتبع أوزان طلبة جامعة المسيلة توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره 72 كلغ، فإذا سحبنا منهم عينة عشوائية ووجدنا أن انحرافها المعياري يساوي 7 كلغ، فما احتمال أن يكون متوسط الوزن في العينة يفوق 70 كلغ في الحالتين التاليتين:

أ- حجم العينة يساوي 36. ب- حجم العينة يساوي 26.

التمرين التاسع:

عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع طبيعيا وسطه 28 انحرافه 3، وعينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى مسحوبة من مجتمع آخر يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه 25 وانحرافه 4، فإذا كان حجم كل عينة من العينتين يساوي 25، فأحسب الاحتمال التالي: $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 2 \geq 0)$

التمرين العاشر:

إذا كان لدينا مجتمعان طبيعيان لهما نفس الوسط الحسابي، وسحبنا من كل مجتمع عينة عشوائية تشمل 10 مفردات، فوجدنا أن تباين العينة الأولى يساوي 9، وتباين العينة الثانية يساوي 6، وكانت العينتان مستقلتين، فما احتمال أن يكون الفرق بين متوسط العينة الأولى ومتوسط العينة الثانية أكبر من 2 في الحالتين التاليتين:

أ- تبايني المجتمعين متساويين. ب- تبايني المجتمعين غير متساويين.

التمرين الحادي عشر:

1- إذا كانت نسبة الأمية للأشخاص الذين أعمارهم فوق 25 سنة في مدينة ما هو 12,60%، وتم اختيار من هذه المدينة عينة عشوائية تشمل 50 شخصا من الأشخاص الذين أعمارهم فوق 25 سنة، فما احتمال أن تكون نسبة الأمية في العينة أقل من 10%.

التمرين الثاني عشر:

إذا كانت نسبة التالف من إنتاج الآلة (أ) 7%، ونسبة التالف من إنتاج الآلة (ب) 5%، وسحبنا عينتين مستقلتين، الأولى من إنتاج الآلة الأولى، وتحتوي على 36 وحدة، والثانية من إنتاج الآلة الثانية وتحتوي على 64 وحدة، فما احتمال أن تكون نسبة التالف في عينة الآلة (أ) أكبر من نسبة التالف في عينة الآلة (ب) بمقدار 1,8% فأكثر؟

التمرين الثالث عشر:

سحبت عينة عشوائية حجمها 12 من مجتمع يتوزع طبيعيا، انحرافه المعياري هو 5. أوجد احتمال أن يكون تباين العينة يقل عن9؟

التمرين الرابع عشر:

أخذت عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي 10 و12 من مجتمعين طبيعيين انحرافهما على التوالي 2 و 4. أوجد احتمال أن يكون تباين العينة الأولى أكبر من نصف تباين العينة الثانية؟

الفصل الثاني

نظرية التقدير

نتطرق من خلال هذ الفصل إلى العناصر التالية:

- تمهيد

أولا: التقدير بنقطة

ثانيا: التقدير بمجال

- تمارين محلولة

- تمارين مقترحة

تمهيد:

إن إجراء أي دراسة إحصائية حول متغير عشوائي X متعلق بظاهرة ما (دخل الأسرة، أجر العمال، عدد الأطفال في الأسرة، ...إلخ)، يعني حساب مقاييس تعبر عن سلوك الظاهرة المدروسة، أهمها:

- مقاييس النزعة المركزية، التي تعبر عن مستوى الظاهرة (حيث يعتبر المتوسط الحسابي أحسنها)؛
- مقاييس التشتت، التي تعبر عن مدى تقارب أو تباعد بيانات الظاهرة عن بعضها (حيث يعتبر الانحراف المعياري أحسنها)؛
- نسبة انتشار ظاهرة معينة في المجتمع.

هذه المقاييس تتعلق بالمجتمع الإحصائي، فهي غالبا ما تكون مجهولة، لأنها تتطلب دراسة إحصائية شاملة، والتي يمكن أن تكون مكلفة أو مستحيلة، وعليه فإن علم الإحصاء يعطينا الحل، الذي يتمثل في **تقدير** قيم هذه المقاييس انطلاقا من بيانات عينة عشوائية تسحب بدقة من المجتمع الإحصائي المدروس.

تتمثل مهمة **نظرية التقدير** في البحث عن أحسن وأدق **المقدِّرات** للمقاييس الحقيقية للمجتمع انطلاقا من نتائج العينة العشوائية، رياضيا، عملية التقدير تعني السعي إلى بناء إحصائية عينة تعبر بأكبر قدر ممكن من الدقة على مقاييس المجتمع، باستعمال معطيات العينة، حيث تقدم لنا هذه النظرية نوعان من التقدير، التقدير بنقطة والتقدير بمجال.

أولا: التقدير بنقطة

1. تعريف التقدير بنقطة:

التقدير بنقطة يعني تقدير معالم المجتمع المجهولة بقيمة واحدة (قيمة نقطية)، حيث يمكن إعطاء العديد من التقديرات النقطية للمعالم الحقيقية للمجتمع، انطلاقا من معطيات العينة، لكن نظرية التقدير تسعى إلى البحث على أحسن وأدق المقدِّرات، لأنها في كل الأحوال تحتوي على هامش من الخطأ، نظرا لكونها محسوبة من بيانات عينة وليس من بيانات المجتمع، حيث يدعى هذا الخطأ بالخطأ العشوائي، رياضيا وإحصائيا، البحث على أدق مقدِّر يعني توفر جملة من المواصفات الرياضية والإحصائية في هذا المقدِّر.

2. مواصفات المقدِّر النقطي الجيد:

أ- عدم التحيز: نقول أن مقدِّرا عشوائيا $\hat{\theta}$ غير متحيز للمعلمة المجهولة θ، إذا كان التوقع الرياضي لهذا المقدِّر يساوي تماما قيمة المعلمة المقدَّرة، أي: $E(\hat{\theta}) = \theta$

إن اعتبار عدم التحيز من مواصفات المقدِّر الجيد، يعود لكون أن التوقع الرياضي أو المتوسط الحسابي للتوزيع يقع في مركز البيانات وأنه الأقرب من كل القيم من أي متوسط آخر، وبالتالي عندما يكون المتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للإحصائية $\hat{\theta}$ هو المعلمة θ فإننا سنكون متأكدين ومطمئنين أن القيمة المحسوبة من أي عينة لتقدير المعلمة θ ستكون قريبة من القيمة الحقيقية للمعلمة.

إذا كان المقدِّر متحيِّزا فإن: $E(\hat{\theta}) = \theta + Bias(\hat{\theta})$، حيث: $Bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ تمثل مقدار التحيز.

أما إذا كان المقدِّر غير متحيِّز فإن مقدار التحيز يكون معدوما، أي: $Bias(\hat{\theta}) = 0$.

مثال1: هل يمكن اعتبار أن المتوسط الحسابي $\bar{X}$، النسبة $\hat{p}$، والتباين S^2 مقاييس غير متحيزة؟

الحل:

1- المتوسط الحسابي $\bar{X}$:

أثبتنا في الفصل الأول، رياضيا وحسابيا، أن متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\mu_{\bar{X}}$ يساوي دائما المتوسط الحسابي للمجتمع μ ، سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع، أي : $E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu$، وبالتالي فإن المتوسط الحسابي الذي صيغته: $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$ يعتبر مقدِّر غير متحيِّز بالنسبة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

2- النسبة $\hat{p}$:

أثبتنا في الفصل الأول، رياضيا وحسابيا، أن متوسط توزيع المعاينة لنسبة العينة $\mu_{\hat{p}}$ يساوي دائما نسبة المجتمع P، سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع، أي : $E(\hat{p}) = P$، وبالتالي فإن النسبة الذي صيغتها: $\hat{p} = \frac{x}{n}$ تعتبر مقدِّر غير متحيِّز بالنسبة لنسبة للمجتمع P.

3- التباين S^2:

- حالة السحب مع الإرجاع: لدينا: $S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

$$E(S^2) = E\left(\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}E(\sum(X_i - \bar{X})^2) = \frac{1}{n-1}E(\sum(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2))$$
$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left((\sum X_i^2) - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left((\sum X_i^2) - n\bar{X}^2\right)$$
$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(\sum E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2))$$

تباين المجتمع يمكن حسابه كما يلي: $\sigma^2 = E(X_i^2) - \mu^2$

تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يمكن حسابه كما يلي: $\sigma_{\bar{X}}^2 = E(\bar{X}^2) - \mu^2$

بالتعويض عن $E(X_i^2)$ و $E(\bar{X}^2)$ نجد:

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum(\sigma^2 + \mu^2) - n(\sigma_{\bar{X}}^2 + \mu^2)\right)$$
$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - n\sigma_{\bar{X}}^2 - n\mu^2)$$
$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - n\sigma_{\bar{X}}^2)$$

بما أن السحب تم بالإرجاع، فإن: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$، وبالتالي:

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right)$$
$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2)$$
$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}((n-1)\sigma^2)$$
$$E(S^2) = \sigma^2$$

وبالتالي فإن: متوسط توزيع المعاينة لتباين العينة $E(S^2)$ يساوي دائما تباين المجتمع σ^2 ، وهذا في حالة السحب بالإرجاع، أي : $E(S^2) = \sigma^2$، وبالتالي فإن التباين الذي صيغته: $S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ يعتبر مقدِّر غير متحيِّز بالنسبة لتباين للمجتمع σ^2، وذلك في حالة السحب بالإرجاع.

- **حالة السحب دون إرجاع:** لدينا: $S^2=\frac{N-1}{N}\times\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$

$$E(S^2)=E\left(\frac{N-1}{N}\times\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}\right)=\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{n-1}E\left(\sum(X_i-\bar{X})^2\right)$$

$$E(S^2)=\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{n-1}\left(\sum E(X_i^2)-nE(\bar{X}^2)\right)$$

تباين المجتمع يمكن حسابه كما يلي: $\sigma^2=E(X_i^2)-\mu^2$

تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يمكن حسابه كما يلي: $\sigma_{\bar{X}}^2=E(\bar{X}^2)-\mu^2$

بالتعويض عن $E(X_i^2)$ و $E(\bar{X}^2)$ نجد: $E(S^{2*})=\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-n\sigma_{\bar{X}}^2\right)$

بما أن السحب تم دون إرجاع، فإن: $\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}\times\frac{N-n}{N-1}$، وبالتالي:

$$E(S^{2*})=\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\times\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$E(S^{2*})=\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-\sigma^2\times\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$E(S^{2*})=\left(\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{n-1}\left(n-\frac{N-n}{N-1}\right)\right)\sigma^2$$

لاحظ أن المقدار: $\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{n-1}\left(n-\frac{N-n}{N-1}\right)=1$ ، وبالتالي: $E(S^2)=\sigma^2$

وبالتالي فإن: متوسط توزيع المعاينة لتباين العينة $E(S^2)$ لا يساوي تباين المجتمع σ^2 ، وهذا في حالة السحب دون إرجاع.

أي : $E(S^2)\neq\sigma^2$، وبالتالي فإن التباين الذي صيغته: $S^2=\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$ يعتبر مقدِّر متحيِّز بالنسبة لتباين للمجتمع σ^2، وذلك في حالة السحب دون إرجاع. أما التباين الذي صيغته: $S^2=\frac{N-1}{N}\times\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$ فيعتبر مقدِّر غير متحيِّز بالنسبة لتباين للمجتمع σ^2، وذلك في حالة السحب دون إرجاع.

ب- الكفاءة:

إذا كان المقدِّرين $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ غير متحيزين للمعلمة θ. فإننا نختار المقدِّر الذي له أقل تباين لأنه يعتبر مقدِّراً ذو كفاءة، فعندما يكون تباين توزيع المعاينة للمقدِّر $\hat{\theta}_1$ أقل من تباين توزيع المعاينة للمقدِّر $\hat{\theta}_2$، أي: $\sigma_{\hat{\theta}_1}^2<\sigma_{\hat{\theta}_2}^2$، فإننا نكون أكثر ثقة في المقدِّر $\hat{\theta}_1$، لأن قيمه ستكون أقرب لوسطها الحسابي وهو المعلمة المجهولة θ.

المقدِّر غير المتحيز والذي له أقل تباين من بين جميع المقدِّرات غير المتحيزة، يسمى أفضل المقدِّرات غير المتحيزة.

مثال2: إذا كان لدينا مجتمع يضم القيم: 10، 12، 14، 16، وسحبنا منه بدون إرجاع جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n=3$. من بين المقدِّرين، المتوسط الحسابي $\bar{X}$ والوسيط M_e أيهما يعتبر أفضل مقدِّر غير متحيز بالنسبة للمتوسط الحقيقي المجهول μ.

الحل:

- حساب كلا من المتوسط الحسابي للمجتمع μ وتباينه σ^2:

$$\mu=\frac{\sum x_i}{N}=\frac{10+12+14+16}{4}=13\ ,\quad \sigma^2=\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{N}=\frac{(10-13)^2+(12-13)^2+(14-13)^2+(16-13)^2}{4}=5$$

- نستخرج جميع العينات العشوائية ذات الحجم $n = 3$ الممكن سحبها مع الإرجاع من المجتمع ، وحساب متوسطاتها ووسيطاتها:

العينات (الثلاثيات)	المتوسط $\bar{X}$	الوسيط M_e
10,12,14	12	12
10,12,16	12.67	12
10,14,12	12	12
10,14,16	13.33	14
10,16,12	12.67	12
10,16,14	13.33	14
12,10,14	12	12
12,10,16	12.67	12
12,14,10	12	12
12,14,16	14	14
12,16,10	12.67	12
12,16,14	14	14
14,10,12	12	12
14,10,16	13.33	14
14,12,10	12	12
14,12,16	14	14
14,16,10	13.33	14
14,16,12	14	14
16,10,14	13.33	14
16,10,12	12.67	12
16,12,10	12.67	12
16,12,14	14	14
16,14,10	13.33	14
16,14,12	14	14

- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: $\bar{X}$)

$\bar{X}$	12	12,67	13,33	14	$\sum P_i$
P_i	$6/24$	$6/24$	$6/24$	$6/24$	1

- نقوم بحساب $\mu_{\bar{X}}$ و $\sigma^2_{\bar{X}}$ كمايلي:

$\bar{X}$	12	12,67	13,33	14	$\sum$
P_i	$6/24$	$6/24$	$6/24$	$6/24$	1
$\bar{X}_i \times P_i$	$72/24$	$76,02/24$	$79,98/24$	$84/24$	$312/24$
$\bar{X}_i^2 \times P_i$	$864/24$	$963,1734/24$	$1066,1334/24$	$1176/24$	$4069,3068/24$

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \sum \bar{X}_i \times P_i = \frac{312}{24} = 13 = \mu$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = (\sum \bar{X}_i^2 \times P_i) - \mu^2_{\bar{X}} = \frac{4069,3068}{24} - (13)^2 = 0,55$$

- إيجاد توزيع المعاينة لوسيط للعينة: (التوزيع الاحتمالي لـ: M_e)

M_e	12	14	$\sum P_i$
P_i	$12/24$	$12/24$	1

- نقوم بحساب μ_{M_e} و $\sigma^2_{M_e}$، كمايلي:

M_e	12	14	$\sum$
P_i	12/24	12/24	1
$M_e \times P_i$	144/24	168/24	312/24
$M_e^2 \times P_i$	1728/24	2352/24	4080/24

$$\mu_{M_e} = E(M_e) = \sum M_e \times P_i = \frac{312}{24} = 13 = \mu$$
$$\sigma^2_{M_e} = \left(\sum M_e^2 \times P_i\right) - \mu^2_{M_e} = \frac{4080}{24} - (13)^2 = 1$$

بما أن: $\mu_{\bar{X}} = \mu_{M_e} = \mu = 13$، فإن كلا من المتوسط الحسابي والوسيط يعتبران مقدِّران غير متحيِّزان بالنسبة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

بما أن: $\sigma^2_{\bar{X}} < \sigma^2_{M_e}$، فإن المتوسط الحسابي $\bar{X}$ يعتبر مقدِّر ذو كفاءة، لأنه تباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة أقل من تباين توزيع المعاينة لوسيط العينة.

وبالتالي: يعتبر المتوسط الحسابي أفضل مقدِّر غير متحيز لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع μ، لأنه غير متحيز وله أقل تباين مقارنة بالوسيط.

ج-**الإتساق:** نقول أن مقدِّرا عشوائيا $\hat{\theta}$ متسقا أو تقاربيا للمعلمة المجهولة θ، إذا حقق الشرط التالي:

$$lim_{n\to\infty} P\left[\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right] = 1$$

حيث تقرأ هذه العبارة إحصائيا، كما يلي: "نحن متأكدون أنه كلما كان حجم العينة كبيرا $(n \to \infty)$، فإن الفرق بين المقياس الحقيقي للمجتمع θ ومقدِّره على العينة $\hat{\theta}$ يساوي مقدار متناهي الصغر ε".

يمكن أن نبرهن رياضيا على خاصية الإتساق بواسطة شرطان لازمان كافيان، إذا تحققا معا، نستنتج أن المقدِّر $\hat{\theta}$ متسقا، هذان الشرطان هما:

$$\begin{cases} lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}\right) = \theta \\ lim_{n\to\infty} \sigma^2_{\hat{\theta}} = 0 \end{cases}$$

مثال3: إذا كان لدينا مجتمع يضم علامات 10 طلبة، تباين علاماتهم يساوي5، وسحبنا منه بالإرجاع جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n = 3$. هل يمكن أن نعتبر أن المتوسط الحسابي $\bar{X}$ مقدِّرا متسقا للمتوسط الحقيقي μ.

الحل:

- الشرط الأول محقق دوما، لأنه مهما كان حجم العينة التي يتم سحبها فإن: $lim_{n\to\infty} E(\bar{X}) = \mu$.

- الشرط الثاني محقق دوما، لأنه عند السحب مع الإرجاع فإن: $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$، أي كلما زاد حجم العينة المسحوبة واقترب من ما لانهاية فإن المقدار $\frac{\sigma^2}{n}$ يقترب من الصفر، وبالتالي: $lim_{n\to\infty} \sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = 0$.

بما أن الشرطان محققان فإننا يمكن أن نعتبر أن المتوسط الحسابي $\bar{X}$ مقدِّرا متسقا للمتوسط الحقيقي μ.

3. استخدام طريقة المعقولية العظمى في إنشاء المقدِّر الجيد:

رأينا مما سبق أنه لكي يكون $\hat{\theta}$ المحسوب على العينة مقدّرا جيدا لـ θ (مقياس المجتمع المجهول)، لا بد أن يكون أفضل مقدِّر غير متحيز ومتسقا، ولكي ننشئ هذه التقديرات الجيدة توجد العديد من الطرق الرياضية الإحصائية، نذكر منها، طريقة المعقولية العظمى (الاحتمال الأكبر)، طريقة العزوم، وطريقة المسافة الصغرى، حيث سنكتفي بعرض طريقة المعقولية العظمى فقط، باعتبارها إحدى أهم وأكثر الطرق انتشارا في مجال التقدير.

طريقة المعقولية العظمى هي طريقة رياضية إحصائية، تهدف للحصول على مقدّرات جيدة لمعالم المجتمع على أساس بيانات عينة عشوائية، حيث يمكن عرض الخطوات المنهجية لهذه الطريقة كما يلي:

- لتكن العينة العشوائية $(X_1, X_2, \dots, X_n)$، التي حجمها n، ولنفرض أن $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ متغيرات عشوائية مستقلة، لكل متغير عشوائي X_i دالة كثافة احتمالية تعبر على توزيعه الاحتمالي، نرمزلها بـ $f(x_i)$، هذه الدالة تشتمل على متغير واحد مجهول، وهو X_i، بالإضافة إلى المعلمة المجهولة للمجتمع θ، والذي نسعى إلى تقديره، فتصبح $f(x_i)$ من الصيغة $f(x_i, \theta)$.
- تحديد صيغة دالة المعقولية $L(x,\theta)$: وهي عبارة عن حاصل ضرب دوال الكثافة الاحتمالية لكل المتغيرات العشوائية المشكلة للعينة، لأننا اعتبرنا أن $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ متغيرات عشوائية مستقلة، وعليه يكون:

$$L(x,\theta) = f(x_1,\theta) \times f(x_2,\theta) \times \dots\dots \times f(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x,\theta)$$

- حساب المشتقة الأولى للدالة $L(x,\theta)$ بالنسبة لـ θ ومساواتها للصفر، فنحصل على معادلة ذات مجهول واحد هو θ، بحلها نحصل على صيغة θ، وللتأكد من أن $L(x,\theta)$ بلغت نهايتها العظمى عند θ، يجب ان يكون المشتق الثاني سالبا.

نلخص ذلك في ما يلي:
$$\begin{cases} \frac{\delta L(x,\theta)}{\delta\theta} = 0 \\ \frac{\delta^2 L(x,\theta)}{\delta\theta} < 0 \end{cases}$$

كما بينت التجربة أنه من الأفضل تحويل $L(X_i,\theta)$ إلى صيغة لوغاريتمية لكي نسهل عملية الاشتقاق، وعليه يمكن صياغة الشرطين السابقين كما يلي:
$$\begin{cases} \frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = 0 \\ \frac{\delta^2 lnL(x,\theta)}{\delta^2\theta} < 0 \end{cases}$$

مثال4: لتكن العينة العشوائية $(X_1, X_2, \dots, X_n)$، من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x} \qquad x_i > 0 \qquad \theta > 0$$

المطلوب: أوجد مقدِّر المعلمة θ باستخدام طريقة المعقولية العظمى.

الحل: نقوم بتحديد صيغة دالة المعقولية العظمى، كما يلي:

$$L(x,\theta) = f(x_1,\theta) \times f(x_2,\theta) \times \dots\dots \times f(x_n,\theta)$$
$$L(x,\theta) = \theta e^{-\theta x_1} \times \theta e^{-\theta x_2} \times \dots\dots \times \theta e^{-\theta x_n}$$
$$L(x,\theta) = \theta^{1+1+\dots+1} e^{-\theta x_1 - \theta x_2 - \dots - \theta x_n}$$
$$L(x,\theta) = \theta^{n} e^{-\theta \sum x_i}$$

نقوم بتحويل الصيغة السابقة لدالة المعقولية العظمى إلى الصيغة اللوغاريتمية، كما يلي:

$$lnL(x,\theta) = ln\theta^n e^{-\theta\sum x_i} = ln\theta^n + lne^{-\theta\sum x_i} = nln\theta - \theta\sum x_i$$

نقوم بحساب المشتقة الأولى لدالة المعقولية العظمى بالنسبة لـ θ، ثم نساويها للصفر، كما يلي:

$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum x_i$$

$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\theta} - \sum x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\sum x_i}{n}$$

وبالتالي فإن مقدِّر المعقولية العظمى للمعلمة θ هو: $\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}$

نقوم بحساب المشتقة الثانية لدالة المعقولية العظمى بالنسبة لـ θ، للتأكد من أنها أقل من الصفر، كما يلي:

$$\frac{\delta^2 lnL(x,\theta)}{\delta^2\theta} = \frac{-n}{\theta^2} < 0$$

مثال5: لتكن العينة العشوائية $(X_1,\ X_2, \dots, X_n\ )$، من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x-\mu)^2}$$

المطلوب: أوجد مقدِّر المعلمة θ^2 باستخدام طريقة المعقولية العظمى.

الحل: نقوم بتحديد صيغة دالة المعقولية العظمى، كما يلي:

$$L(x,\theta) = f(x_1,\theta) \times f(x_2,\theta) \times \dots\dots \times f(x_n,\theta)$$

$$L(x,\theta) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x_1-\mu)^2} \times \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x_2-\mu)^2} \times \dots\dots \times \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x_n-\mu)^2}$$

$$L(x,\theta) = \left(\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\theta^2}(x_1-\mu)^2-\frac{1}{2\theta^2}(x_2-\mu)^2-\dots-\frac{1}{2\theta^2}(x_n-\mu)^2}$$

$$L(x,\theta) = \frac{1}{(\theta\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum(x_i-\mu)^2}$$

نقوم بتحويل الصيغة السابقة لدالة المعقولية العظمى إلى الصيغة اللوغاريتمية، كما يلي:

$$lnL(x,\theta) = ln\frac{1}{(\theta\sqrt{2\pi})^n} + lne^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum(x_i-\mu)^2} = ln1 - ln(\theta\sqrt{2\pi})^n - \frac{1}{2\theta^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$lnL(x,\theta) = 0 - nln\theta\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\theta^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$lnL(x,\theta) = -nln\theta\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\theta^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

نقوم بحساب المشتقة الأولى لدالة المعقولية العظمى بالنسبة لـ θ، ثم نساويها للصفر، كما يلي:

$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = -n\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\theta\sqrt{2\pi}}\right) + \frac{4\theta}{(2\theta^2)^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\delta lnL(x_i,\theta)}{\delta\theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}\sum(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}\sum(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\theta} = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\theta^3}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\theta^2}$$

$$\Leftrightarrow \theta^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}$$

وبالتالي فإن مقدِّر المعقولية العظمى للمعلمة θ^2 هو: $\hat{\theta}^2 = \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{n}$

نقوم بحساب المشتقة الثانية لدالة المعقولية العظمى بالنسبة لـ θ، للتأكد من أنها أقل من الصفر، كما يلي:

$$\frac{\delta^2 lnL(x,\theta)}{\delta^2\theta} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{3\theta^2}{\theta^6}\sum(x_i-\mu)^2 = \frac{n\theta^2}{\theta^4} - \frac{3}{\theta^4}\sum(x_i-\mu)^2 = \frac{n\theta^2 - 3\sum(x_i-\mu)^2}{\theta^4}$$

كما نعلم أن: $\theta^2 = \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n} \Leftrightarrow n\theta^2 = \sum(X_i-\mu)^2$

وبالتعويض في المشتقة الثانية، نجد: $\frac{\delta^2 lnL(x,\theta)}{\delta^2\theta} = \frac{n\theta^2-3\sum(x_i-\mu)^2}{\theta^4} = \frac{n\theta^2-3n\theta^2}{\theta^4} = \frac{-2n\theta^2}{\theta^4} < 0$

خلاصة عامة:

- أفضل مقدِّر غير متحيز ومتسق للمتوسط الحسابي للمجتمع μ بواسطة العينة العشوائية ذات الحجم n هو المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لهذه العينة سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع، أي: $\boldsymbol{\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}}$
- أفضل مقدِّر غير متحيز ومتسق للنسبة الحقيقية للمجتمع P بواسطة العينة العشوائية ذات الحجم n هي النسبة $\hat{p}$ لهذه العينة سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع، أي: $\boldsymbol{\hat{P} = \hat{p} = \frac{x}{n}}$
- المقدِّر غير المتحيز لتباين المجتمع في حالة السحب مع الإرجاع هو $\boldsymbol{S^2 = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$
- المقدِّر غير المتحيز لتباين المجتمع في حالة السحب مع عدم الإرجاع هو $\boldsymbol{S^2 = \frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$:

ثانيا: التقدير بمجال

يعتبر التقدير بنقطة أحد الطرق الإحصائية المستخدمة في تقدير أي معلمة مجهولة، لكن مهما كان المقدِّر المستخدم يتمتع بالمواصفات الجيدة فإننا لا نتوقع أن تكون قيمته مساوية تماما للقيمة الحقيقية المجهولة، لذلك نلجأ إلى طريقة أخرى، وهي تقدير المعالم الحقيقية للمجتمع بواسطة مجموعة من القيم، تعرض على شكل مجال.

1- تعريف التقدير بمجال:

التقدير بمجال هو تقدير معلمة المجتمع المجهولة بمجموعة من القيم تعرض على شكل مجال نرمز له بـ I_n، حيث أن هذا المجال عشوائي لأنه يبنى على أساس عينة عشوائية، وبالتالي فهو مرتبط باحتمال P، يدعى درجة الثقة، التي يعبر على نسبة الحظوظ أن يكون مجال الثقة I_n يحوي معلمة المجتمع المجهولة θ، وأما الاحتمال المكمل لـ P (احتمال عدم احتواء مجال الثقة عن المعلمة المجهولة) نرمز له بالرمز α، ونسميه درجة المخاطرة.

نعبر على مجال الثقة بالعلاقة التالية: $P(\theta \in I_n) = P = 1-\alpha$، عادة ما تكون درجة الثقة P أو درجة المخاطرة α من اختيار الباحث، حسب درجة الدقة التي يبحث عليها.

نعتمد في حساب الحد الأعلى والحد الأدنى لمجال الثقة على الإحصائية المستخدمة كأفضل مقدِّر للمعلمة المجهولة، وعلى توزيع المعاينة لهذا المقدِّر وعلى خطئه المعياري، وعلى حجم العينة، وعلى معامل الثقة المرغوب فيه، حيث نقصد بمعامل الثقة احتمال احتواء مجال الثقة على المعلمة المجهولة.

فإذا رمزنا للمعلمة المجهولة بالرمز θ فإن مجال الثقة لها هو: $\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U$ ، حيث: $\hat{\theta}_L$: تمثل الحد الأدنى

لمجال الثقة، و$\hat{\theta}_U$: تمثل الحد الأقصى لمجال الثقة. وإذا رمزنا لمعامل الثقة بـ: $1-\alpha$، حيث $0<1-\alpha<1$ فيعني ذلك: $P(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U)=1-\alpha$ ، أي إذا سحبنا من المجتمع كل العينات العشوائية الممكنة، ولكل عينة حسبنا مجال الثقة $[\hat{\theta}_L - \hat{\theta}_U]$ فإن نسبة الفترات التي تحتوي على المعلمة المجهولة θ تساوي $100(1-\alpha)\%$.

فمثلا: إذا كان $1-\alpha=0{,}95$، فيعني ذلك: $P(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U)=0{,}95$ ، أي إذا سحبنا من المجتمع كل العينات العشوائية الممكنة، ولكل عينة حسبنا مجال الثقة $[\hat{\theta}_L - \hat{\theta}_U]$ سنجد 95% من الفترات تحتوي على المعلمة المجهولة θ و5% من الفترات لا تحتوي على θ. تسمى النسبة 95% بمستوى الثقة والنسبة 5% تسمى مستوى المخاطرة.

2-التقدير بمجال للمتوسط الحسابي للمجتمع μ:

أ- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- مما سبق توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$
- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0<1-\alpha<1$؛
- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$
$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

- تقدير قيمة μ بمجال، بإخراج باقي العناصر ، كما يلي:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \leq \bar{X}-\mu \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right)=1-\alpha$$
$$P\left(-\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \leq -\mu \leq -\bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right)=1-\alpha$$
$$P\left(\bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \geq \mu \geq \bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right)=1-\alpha$$
$$P\left(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right)=1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ μ هو:

$$\boldsymbol{\mu \in I_n=\left[\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \;\; ; \;\; \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]}$$

حيث: $\bar{X}$: يمثل المتوسط الحسابي للعينة (لمقدّر النقطي). n: حجم العينة.

$\sigma_{\bar{X}}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$.

$\sigma_{\bar{X}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N}>0{,}05$.

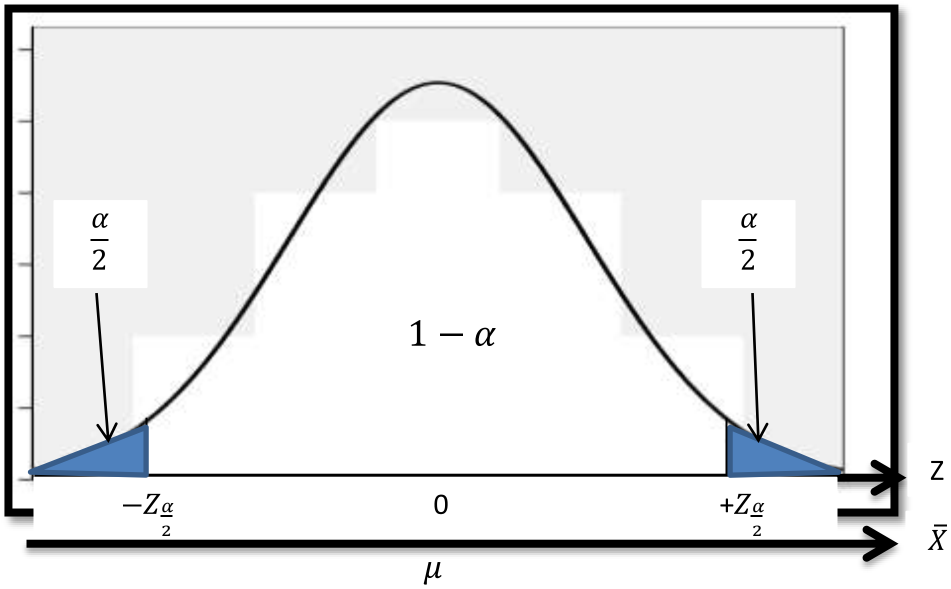
$Z_{\frac{\alpha}{2}}$: قيمة نظرية تقرأ من الجدول الطبيعي المعياري بدلالة درجة المخاطرة α.

$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$: يمثل الحد الأدنى لمجال الثقة.

$\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$: يمثل الحد الأعلى لمجال الثقة.

يمكن عرض ذلك من خلال الشكل التالي:

الشكل(2-1): منحنى التوزيع الطبيعي المعياري



المصدر: إعداد الباحث

- **محور المتغير العشوائي Z:** يمثل التوزيع الطبيعي المعياري، وأن $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$ تمثل قيمة المتغير Z التي يقع على يمينها $\left(\frac{\alpha}{2}\times 100\right)\%$ من المساحة، بينما $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ تمثل قيمة المتغير Z التي يقع على يسارها $\left(\frac{\alpha}{2}\times 100\right)\%$ من المساحة. كما أن المساحة ما بين $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$ تساوي $\left((1-\alpha)100\right)\%$. فمثلا إذا كان $\alpha = 0{,}05$ فإن قيمة المتغير Z التي يقع على يمينها $\left(\frac{0{,}05}{2}\times 100\right)\%$ أي $2{,}5\%$ من المساحة هي: $+Z_{0{,}025} = +1{,}96$. وبما أن التوزيع متناظر فإن قيمة المتغير Z التي يقع على يسارها $2{,}5\%$ من المساحة هي: $-Z_{0{,}025} = -1{,}96$ ، كما أن المساحة ما بين $-Z_{0{,}025}$ و $+Z_{0{,}025}$ تساوي 95%.
- **محور المتغير العشوائي $\bar{X}$:** يمثل التوزيع الطبيعي للمتوسط الحسابي للعينة. فانطلاقا من القاعدة التالية: إذا كان المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع هو μ معلوم، وقمنا باستخراج جميع العينات العشوائية ذات الحجم المتساوي n، وحسبنا لكل عينة مجال الثقة، فإننا سنجد أن $\left((1-\alpha)100\right)\%$ من مجالات الثقة ستضم المعلمة الحقيقية للمجتمع μ. بناء على هذه القاعدة، فإذا كان μ مجهولا وأخذنا عينة عشوائية، وحسبنا مجال الثقة عند معامل الثقة $1-\alpha$ فإننا سنكون واثقين بنسبة $\left((1-\alpha)100\right)\%$ أن المجال المحصل عليه من هذه العينة سيضم المعلمة الحقيقية للمجتمع، مع مستوى مخاطرة $\left((\alpha)100\right)\%$ أن يكون المجال المحصل عليه لا يضم المعلمة الحقيقية للمجتمع، لكن ونظرا لأن مستوى الثقة كبير جدا مقارنة بمستوى المخاطرة فإننا سنعتمد على هذا المجال في الدراسة.

مثال6: إذا كان لدينا متغير عشوائي X في مجتمع حجمه 500، موزع طبيعيا، وانحرافه المعياري 10، وسحبنا منه عينة عشوائية حجمها n بدون إرجاع. ووجدنا أن متوسطها يساوي 75. فقدّر بمجال المتوسط الحقيقي μ للمجتمع عند مستوى ثقة 95% في الحالتين التاليتين: 1- حجم العينة: $n = 16$ 2- حجم العينة: $n = 36$

الحل:

1- حجم العينة: $n = 16$:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مجهول.

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{16}{500} = 0{,}032 < 0{,}05$، فإن:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2{,}5$، وبالتالي: $\bar{X} \to N(\mu ; 2{,}5)$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\mu \in I_n = [75 - 1{,}96(2{,}5) \quad ; \quad 75 + 1{,}96(2{,}5)\,] \Rightarrow \mu \in I_0 = [70{,}1 \quad ; \quad 79{,}9\,]$$

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع يتراوح ما بين 70,1 و 79,9

2- حجم العينة: $n = 36$:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مجهول.

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{36}{500} = 0{,}072 > 0{,}05$، فإن:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{10}{\sqrt{36}}\sqrt{\left(\frac{500-36}{500-1}\right)} = 1{,}61$، وبالتالي: $\bar{X} \to N(\mu ; 1{,}61)$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\mu \in I_n = [75 - 1{,}96(1{,}61) \quad ; \quad 75 + 1{,}96(1{,}61)\,] \Rightarrow \mu \in I_0 = [71{,}84 \quad ; \quad 78{,}15\,]$$

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع يتراوح ما بين 71,84 و 78,15

ب- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ مجهول و حجم العينة أكبر أو يساوي 30 أي: $n \geq 30$، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0<1-\alpha<1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ μ هو:

$$\boldsymbol{\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]}$$

حيث: $\bar{X}$: يمثل المتوسط الحسابي للعينة (لمقدِّر النقطي). n: حجم العينة.

$\sigma_{\bar{X}}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$: إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$.

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$.

بما أن الانحراف معياري σ مجهول، فإننا نقدره بالانحراف المعياري للعينة المسحوبة S، حيث:

$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع.

$S = \sqrt{\frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

مثال7: إذا كانت أوزان طلبة جامعة الجزائر تتوزع طبيعيا، وسحبنا منهم عينة عشوائية حجمها 36 طالبا، ووجدنا أن متوسطها يساوي 72 كلغ، وإنحرافها المعياري يساوي 7 كلغ، فقدِّر بمجال المتوسط الحقيقي لأوزان طلبة جامعة الجزائر μ عند مستوى ثقة 90%.

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع (أوزان الطلبة) موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول وحجم العينة أكبر من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \rightarrow N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مجهول.

- بما أن المجتمع غير محدود فإن: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{36}} = 1,17$، وبالتالي: $\bar{X} \rightarrow N(\mu ; 1,17)$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

حيث: $1-\alpha = 0,90 \Rightarrow \alpha = 0,10$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0,10}{2}} = Z_{0,05} = 1,64$

$$\mu \in I_n = [72 - 1,64(1,17) \quad ; \quad 72 + 1,64(1,17)\ ] \Rightarrow \mu \in I_0 = [70,08 \quad ; \quad 73,92\ ]$$

الشرح: لدينا 90% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي لأوزان طلبة جامعة الجزائر يتراوح ما بين 70,08 كلغ و 73,92 كلغ.

ج-إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أقل من 30:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ مجهول و حجم العينة أقل من 30 أي: $n < 30$، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيتوزع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1$. ،

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

- نختار معامل ثقة معين $1 - \alpha$، حيث $0 < 1 - \alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ μ هو:

$$\boldsymbol{\mu \in I_n = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \quad ; \quad \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]}$$

حيث: $\bar{X}$: يمثل المتوسط الحسابي للعينة (المقدِّر النقطي). n: حجم العينة.

$\sigma_{\bar{X}}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$: إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$.

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$.

بما أن الانحراف معياري σ مجهول، فإننا نقدره بالانحراف المعياري للعينة المسحوبة S، حيث:

$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع.

$S = \sqrt{\frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

مثال8: حل المثال السابق، إذا كان حجم العينة 26 طالبا.

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول وحجم العينة أقل من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1 = 26 - 1 = 25$

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مجهول.

- بما أن المجتمع غير محدود فإن: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{7}{\sqrt{26-1}} = 1{,}4$، وبالتالي: $\bar{X} \to T(\mu\ ; 1{,}4)$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \quad ; \quad \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow \alpha = 0{,}10$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}10}{2}} = t_{0{,}05}$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 5% من المساحة بدرجة حرية $v = n - 1 = 25$ ، وذلك من خلال جدول

توزيع ستودنت فنجدها: $t_{0,05} = 1,708$

$$\mu \in I_n = [72 - 1,708(1,4) \quad ; \quad 72 + 1,708(1,4)\ ] \Rightarrow \mu \in I_0 = [69,61 \quad ; \quad 74,39\ ]$$

الشرح: لدينا 90% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي لأوزان طلبة جامعة الجزائر يتراوح ما بين 69,61 كلغ و 74,39 كلغ.

د- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمع غير موزع طبيعيا، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- مما سبق توصلنا إلى أنه وفقا لنظرية النهاية المركزية، إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما، وسطه الحسابي μ، انحرافه المعياري σ، وحجم العينة أكبر أو يساوي 30 أي: $n \geq 30$، فتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي. بمتوسط قدره $\mu_{\bar{X}}$، وانحراف معياري قدره $\sigma_{\bar{X}}$، أي:

$$X \to N(\mu\ ;\ \sigma) \Rightarrow \bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}}\ ; \sigma_{\bar{X}})$$

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$:

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ μ هو:

$$\boldsymbol{\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]}$$

حيث: $\bar{X}$: يمثل المتوسط الحسابي للعينة (لمقدِّر النقطي). n: حجم العينة.

$\sigma_{\bar{X}}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$.

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$.

مثال9: إذا كانت رواتب 540 موظف في أحد الشركات لا تتوزع طبيعيا، بانحراف معياري 4573 دج، وقمنا بسحب عينة عشوائية تشمل81 موظفا من هذه الشركة بدون إرجاع، فوجد أن وسطها الحسابي يساوي 26953 دج، فقدِّر بمجال المتوسط الحقيقي لرواتب الموظفين بالشركة μ عند مستوى ثقة 99%.

الحل:

- المتغير العشوائي X في المجتمع توزيعه الاحتمالي ليس طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وحجم العينة أكبر من 30، وبالتالي، فحسب نظرية النهاية المركزية فإن: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يقترب من التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}}\ ; \sigma_{\bar{X}})$، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مجهول.

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{81}{540} = 0{,}15 > 0{,}05$، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{4573}{\sqrt{81}}\sqrt{\left(\frac{540-81}{540-1}\right)} = 468{,}89$$ ، وبالتالي: $\bar{X} \rightarrow N(\mu\,;468{,}89)$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

حيث: $1-\alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}01}{2}} = Z_{0{,}005} = 2{,}58$

$$\mu \in I_n = [26953 \ - 2{,}58(468{,}89) \quad ; \quad 26953 \ + 2{,}58(468{,}89)\ ]$$

$$\mu \in I_0 = [25743{,}26 \quad ; \quad 28162{,}74\ ]$$

الشرح:

لدينا 99% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع يتراوح ما بين 25743,26 دج و 28162,74 دج.

هـ- تحديد حجم العينة:

يمثل خطأ المعاينة أقصى انحراف ممكن أن يحصل بالزيادة أو بالنقصان بين المتوسط الحسابي المحسوب من العينة $\bar{X}$ والقيمة الحقيقية المجهولة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ، وذلك انطلاقا من مستوى الثقة المحدد وحجم العينة المعتمد، فقد يكون خطأ المعاينة يساوي الصفر، وهذا في حالة تساوي كلا من المتوسط الحسابي المحسوب من العينة والقيمة الحقيقية المجهولة للمتوسط الحسابي للمجتمع، أما إذا كانا غير متساويين، فما هو أقصى انحراف ممكن أن يحصل بينهما؟

إن أقصى انحراف ممكن أن يحصل بالزيادة أو بالنقصان بين المتوسط الحسابي المحسوب من العينة $\bar{X}$ والقيمة الحقيقية المجهولة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ، يكون عندما يساوي المتوسط الحسابي للمجتمع الحد الأعلى أو الحد الأدنى لمجال الثقة، أي: $\mu = \bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$ أو $\mu = \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$، في هذه الحالة فإن:

$$\begin{cases}\mu = \bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \\ \mu = \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\bar{X} - \mu = +Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \\ \bar{X} - \mu = -Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} - \mu = \mp Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{d = \mp Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}}$$

حيث: d: تمثل خطأ المعاينة. وأن الإشارة $\mp$ تدل الزيادة أو النقصان.

وبالتالي فإنه يمكن كتابة العبارة السابقة بالصيغة التالية: $d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$، وهي تمثل أقصى انحراف ممكن بين $\bar{X}$ و μ إما بالزيادة أو بالنقصان.

كما نعلم أن طول مجال الثقة نقوم بحسابه عن طريق الفرق بن الحدين الأعلى والأدنى لمجال الثقة ، أي:

$$\Delta I_n = \left(\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right) - \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right) = \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} - \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = 2Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = d \Rightarrow \boldsymbol{d = \frac{\Delta I_n}{2}}$$

أي أن خطأ المعاينة يساوي نصف طول مجال الثقة. وعليه فإنه كلما كان خطأ المعاينة كبيرا كلما زاد مجال الثقة، وبالتالي تقل دقة التقدير، والعكس صحيح، ولجعل مجال الثقة صغيرا، يحدد الباحث مستوى ثقة معين ثم يتحكم في طول مجال الثقة بتغيير حجم العينة n. لأننا نعلم أنه في حالة السحب بالإرجاع فإن: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، وبما أن n تقع في المقام فإنه

كلما زادت قيمتها أي حجم العينة، فإن ذلك يؤدي إلى تخفيض قيمة المقدار $\sigma_{\bar{X}}$، وبالتالي تصغير طول مجال الثقة، والعكس صحيح.

يمكن ايجاد حجم العينة المناسب، انطلاقا من مستوى الثقة المحدد وخطأ المعاينة المطلوب، انطلاقا من صيغة خطأ المعاينة $d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}$، وذلك حسب الحالات السابقة التي ذكرت في توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة:

- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم:

- حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$، فإن:

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{d}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{n}\right)^2 = \left(Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{d}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{n = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.\sigma^2}{d^2}}$$

- حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$، فإن:

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.\sigma^2.N}{N.d^2 - d^2 + Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.\sigma^2}}$$

ملاحظة: يمكن تطبيق الحالات نفسها، إذا كان المتغير X في المجتمع غير موزع طبيعيا، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30.

- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أكبر أو يساوي 30:

-حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$، فإن:

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2}{d^2}}$$

- حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$، فإن:

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2.N}{N.d^2 - d^2 + Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2}}$$

- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أقل من 30:

-حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0,05$، فإن:

$$d = t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n-1}} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2}{d^2} + 1}$$

- حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0,05$، فإن:

$$d = t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \Leftrightarrow \boldsymbol{n = \frac{N.d^2 - d^2 + t_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2.N}{N.d^2 - d^2 + t_{\frac{\alpha}{2}}^2.s^2}}$$

مثال10: أجريت دراسة إحصائية حول أجور عمال أحد المؤسسات، بواسطة عينة حجمها $n = 26$، سحبت بدون إرجاع. بعد جمع البيانات تبين أن الأجر المتوسط الشهري يقدر بـ 12500دج، بانحراف معياري قدره 140دج.

إذا علمت أن أجور العمال بالشركة تتوزع طبيعيا، وأن عدد العمال الإجمالي بالشركة هو 400 عامل.

1- أعط تقديرا نقطيا غير منحاز للأجر المتوسط الحقيقي في هذه المؤسسة.

2- أعط تقديرا بمجال للأجر المتوسط الحقيقي في هذه المؤسسة عند مستوى ثقة 90% ثم 95% ثم 99%. ماذا تستنتج؟

3- ما هو خطأ المعاينة المرتكب في تقدير الأجر المتوسط الحقيقي عند مستوى ثقة 95%. اشرح النتيجة؟

4- إذا أردنا تحسين دقة التقدير بـ 50%، ما هو حجم العينة اللازم لتحقيق هذا الهدف عند مستوى ثقة 95%؟

الحل: $n = 26$ ، $\bar{X} = 12500\ DA$ ، $s = 140\ DA$

1- إعطاء تقديرا نقطيا غير منحاز للأجر المتوسط الحقيقي في هذه المؤسسة:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = 12500\ DA$$

2- إعطاء تقديرا بمجال للأجر المتوسط الحقيقي في هذه المؤسسة عند مستوى ثقة 90% ثم 95% ثم 99%:

- المتغير العشوائي X (أجور العمال) في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع مجهول وحجم العينة أقل من 30، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية:

$$v = n - 1 = 26 - 1 = 25$$

- بما أن المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{26}{400} = 0{,}065 > 0{,}05$، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{140}{\sqrt{26-1}}\sqrt{\left(\frac{400-26}{400-1}\right)} = 27{,}11$$ ، وبالتالي: $\bar{X} \to N(\mu\,; 27{,}11)$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \quad ; \quad \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

أ- مستوى ثقة 90%:

$$1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow \alpha = 0{,}10$$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}10}{2}} = t_{0{,}05}$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 5% من المساحة بدرجة حرية $v = n - 1 = 25$ ، وذلك من خلال جدول توزيع ستودنت فنجدها: $t_{0{,}05} = 1{,}708$

$$\mu \in I_n = [12500 - 1{,}708(27{,}11) \quad ; \quad 12500 + 1{,}708(27{,}11)\ ]$$
$$\Rightarrow \mu \in I_0 = [12453{,}70 \quad ; \quad 12546{,}30\ ]$$

الشرح: لدينا 90% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي لأجور العمال بالشركة يتراوح ما بين 12453,70 دج و 12546,30 دج.

ب- مستوى ثقة 95%:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}05}{2}} = t_{0{,}025}$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية $v = n - 1 = 25$ ، وذلك من خلال جدول توزيع ستودنت فنجدها: $t_{0{,}025} = 2{,}060$

$$\mu \in I_n = [12500 - 2{,}060(27{,}11) \quad ; \quad 12500 + 2{,}060(27{,}11)\ ]$$

$$\Rightarrow \mu \in I_0 = [12444{,}15 \quad ; \quad 12555{,}85\,]$$

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي لأجور العمال بالشركة يتراوح ما بين 12444,15 دج و 12555,85 دج.

ب- مستوى ثقة 99%:

$$1-\alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01 \quad \text{أي:} \quad t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}01}{2}} = t_{0{,}005}$$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 0,5% من المساحة بدرجة حرية $v = n-1 = 25$ ، وذلك من خلال جدول توزيع ستودنت فنجدها: $t_{0{,}025} = 2{,}787$

$$\mu \in I_n = [12500 - 2{,}787(27{,}11) \quad ; \quad 12500 + 2{,}787(27{,}11)\,]$$
$$\Rightarrow \mu \in I_0 = [12424{,}44 \quad ; \quad 12575{,}55\,]$$

الشرح: لدينا 99% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي لأجور العمال بالشركة يتراوح ما بين 12424,44 دج و 12575,55 دج.

- **الاستنتاج:** من خلال مجالات الثقة السابقة نلاحظ أن أطوالها تزيد كلما زاد مستوى الثقة مع ثبات حجم العينة.
- مجال الثقة عند مستوى الثقة 90% يساوي: $\Delta I_0 = 12546{,}30 - 12453{,}70 = 92{,}6\ DA$
- مجال الثقة عند مستوى الثقة 95% يساوي: $\Delta I_0 = 12555{,}85 - 12444{,}15 = 111{,}7\ DA$
- مجال الثقة عند مستوى الثقة 99% يساوي: $\Delta I_0 = 12575{,}55 - 12424{,}44 = 151{,}11\ DA$

وبالتالي نستنتج أن العلاقة بين مستوى الثقة وطول مجال الثقة هي علاقة طردية، فكلما زاد مستوى الثقة زاد طول المجال وبالتالي تنقص دقة التقدير، والعكس صحيح.

3- خطأ المعاينة المرتكب في تقدير الأجر المتوسط الحقيقي عند مستوى ثقة 95%، مع شرح النتيجة:

بما أن المتغير X في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أقل من 30، وحجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$، فإن:

$$d = t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = 2{,}060 \times \frac{140}{\sqrt{26-1}}\sqrt{\left(\frac{400-26}{400-1}\right)} = \mp 55{,}8$$

كما يمكن ايجادها من خلال العلاقة: $d = \frac{\Delta I_0}{2} = \frac{111{,}7}{2} = \mp 55{,}8$

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن لا يتجاوز خطأ المعاينة في تقدير المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع المقدار 55,8 دج بالزيادة أو بالنقصان.

4- إذا أردنا تحسين دقة التقدير بـ 50%، حجم العينة اللازم لتحقيق هذا الهدف عند مستوى ثقة 95%:

تحسين دقة البيانات بـ 50%، يعني أن تصبح $d = \mp 55{,}8\left(\frac{50}{100}\right) = \mp 27{,}9$

يمكن إيجاد قيمة n من خلال الصيغة التالية:

$$d = t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \Leftrightarrow n = \frac{N.d^2 - d^2 + t^2_{\frac{\alpha}{2}}.s^2.N}{N.d^2 - d^2 + t^2_{\frac{\alpha}{2}}.s^2} = \frac{400(27{,}9)^2 - (27{,}9)^2 + (2{,}060)^2(140)^2(400)}{400(27{,}9)^2 - (27{,}9)^2 + (2{,}060)^2(140)^2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{33580409{,}59}{393760{,}15} = 85{,}28 \approx 86$$

2- التقدير بمجال للفرق ما بين متوسطين حسابيين لمجتمعين $\mu_1 - \mu_2$:

2-1- إذا كان المجتمعين مستقلين (العينتين المسحوبتين غير مرتبطتين):

أ- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمعين يتوزع طبيعيا بإنحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- مما سبق توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 معلوم في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 معلوم في المجتمع الثاني، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$:

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} \le +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- تقدير قيمة $\mu_1 - \mu_2$ بمجال، بإخراج باقي العناصر ، فنحصل على:

$$P\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{X}_1-\bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$ هو:

$$\boldsymbol{\mu_1-\mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \quad ; \quad (\bar{X}_1-\bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]}$$

حيث: $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$: إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} \le 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} \le 0{,}05$.

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} > 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0{,}05$

مثال11: إذا كانت الأجور الشهرية لـ 600 عاملا في الشركة A تتوزع طبيعيا بمتوسط حسابي μ_A، وانحراف معياري 4500 دج، والأجور الشهرية لـ 800 عاملا في الشركة B تتوزع طبيعيا بمتوسط حسابي μ_B، وانحراف معياري 4200 دج، وسحبنا عينتين مستقلتين بدون إرجاع، العينة الأولى من الشركة A، حجمها 25 عاملا، وجدنا أن متوسطها الحسابي يساوي 30000 دج، والعينة الثانية من الشركة B حجمها 36 عاملا، وجدنا أن متوسطها الحسابي يساوي 29400 دج.

- أعط تقديرا بنقطة ثم بمجال للفرق ما بين متوسطي الأجرين الحقيقيين في الشركتين عند مستوى ثقة 95%.

الحل:

لدينا المعطيات التالية: المتغير العشوائي المدروس X يمثل الأجور الشهرية للعمال.

الشركة A: X: يتوزع طبيعيا ، $N_A = 600$ ، $\bar{X}_A = 30000\ DA$ ، $\sigma_A = 4500\ DA$ ، $n_A = 25$

الشركة B: X: يتوزع طبيعيا ، $N_B = 800$ ، $\bar{X}_B = 29400\ DA$ ، $\sigma_B = 4200\ DA$ ، $n_B = 36$

1- التقدير بنقطة للفرق ما بين متوسطي الأجرين الحقيقيين في الشركتين:

$$\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B = \bar{X}_A - \bar{X}_B = 30000 - 29400 = 600\ DA$$

2- التقدير بمجال للفرق ما بين متوسطي الأجرين الحقيقيين في الشركتين عند مستوى ثقة 95%:

بما أن المتغير العشوائي المدروس X (الأجور الشهرية للعمال) يتوزع طبيعيا في كلا الشركتين، بانحرافين معياريين معلومين، والعينتين مستقلتين، فإن: توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_A - \bar{X}_B$ يتوزع توزيعا طبيعيا، أي: $\bar{X}_A - \bar{X}_B \to N\left(\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\,;\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}\right)$، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين هو: $\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B$ مجهول.

- بما أن حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع،

و $\frac{n_A}{N_A} = \frac{25}{600} = 0{,}042 < 0{,}05$ و $\frac{n_B}{N_B} = \frac{36}{800} = 0{,}045 < 0{,}05$ ، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(4500)^2}{25} + \frac{(4200)^2}{36}} = 1140{,}175\ DA$$

أي أن: $\bar{X}_A - \bar{X}_B \to N(\mu_A - \mu_B\ ;\ 1140{,}175)$

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\ ;\ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = [600 - 1{,}96(1140{,}175)\ ;\ 600 + 1{,}96(1140{,}175)\ ]$$
$$\Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \in I_0 = [-1634{,}743\ ;\ 2834{,}743\ ]$$

ب- إذا كان المتغير العشوائي المدروس لا يتوزع طبيعيا في كلا المجتمعين، بإنحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين، وحجم العينتين كبير، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$:

- مما سبق توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما لا يتوزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 معلوم في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 معلوم في المجتمع الثاني، وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين حجمهما أكبر أو يساوي 30، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فحسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$.

هذه الحالة تنطبق على الحالة السابقة، وبالتالي يتم معالجتها مثلما عالجنا الحالة أ.

ج- إذا كان الانحرافين المعياريين σ_1 و σ_2 مجهولين، وحجم العينتين كبير، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$:

- مما سبق توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه

المعياري σ_1 مجهول في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 مجهول في المجتمع الثاني، وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين حجمهما أكبر أو يساوي 30، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فحسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتوزع توزيعا طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$.

هذه الحالة تنطبق على الحالة السابقة، وبالتالي يتم معالجتها مثلما عالجنا الحالتين أ ، ب، مع تقدير الانحرافين المعياريين المجهولين للمجتمعين σ_1 و σ_2 بالانحرافين المعياريين للعينتين المسحوبتين S_1 و S_2، كما يلي:

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$: إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} \leq 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} \leq 0{,}05$.

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{S_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1} > 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N_2} > 0{,}05$.

$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع.

$S = \sqrt{\frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

ملاحظة: بالنسبة لطبيعة توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين في هذه الحالة، فهي تصلح بغض النظر عن طبيعة توزيع المجتمعين سواء أكانا طبيعيين أو غير طبيعيين.

د- إذا كان المتغير المدروس يتوزع طبيعيا في كلا المجتمعين بانحرافين مجهولين، وحجم أحد العينتين على الأقل صغير:

د-1- إذا كان الانحرافين المعياريين المجهولين متساويين، أي $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- مما سبق توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين، المتغير العشوائي المدروس فيهما موزع طبيعيا، وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 مجهول في المجتمع الأول، ووسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 مجهول في المجتمع الثاني، وكان الانحرافين المعياريين المجهولين متساويين، أي: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$، وسحبنا من هذين المجتمعين عينتين عشوائيتين حجم إحداهما على الأقل صغير، فتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ سيتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n_1 + n_2 - 2$، ، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- تقدير قيمة $\mu_1-\mu_2$ بمجال، بإخراج باقي العناصر ، فنحصل على:

$$P\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\le \mu_1-\mu_2\le (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)=1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_1-\mu_2$ هو:

$$\boldsymbol{\mu_1-\mu_2\in I_n=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\quad;\quad(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]}$$

حيث: $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$: إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1}\le 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2}\le 0,05$. حيث: $S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{1}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)\right)}$: إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1}>0,05$ و $\frac{n_2}{N_2}>0,05$

$S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع. $S=\sqrt{\frac{N-1}{N}\times\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

د-2- إذا كان الانحرافين المعياريين المجهولين غير متساويين، أي $\sigma_1\neq\sigma_2$:

نقوم ببناء مجال الثقة باتباع نفس الحالات الواردة في د-1، مع استبدال درجة الحرية بالمقدار: $v=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_1-\mu_2$ هو:

$$\boldsymbol{\mu_1-\mu_2\in I_n=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\quad;\quad(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]}$$

حيث: $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين)، الذي يساوي:

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)}$: إذا كان حجم المجتمعين غير محدود أو حجمهما محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجمهما محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1}\le 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2}\le 0,05$.

$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right)+\frac{S_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)\right)}$: إذا كان حجم المجتمعين محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N_1}>0,05$ و $\frac{n_2}{N_2}>0,05$

$S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب بالإرجاع.

$S=\sqrt{\frac{N-1}{N}\times\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$: إذا كان السحب مع عدم الإرجاع.

مثال12: أستخدمت طريقتان لإنتاج سلعة معينة، حيث توضح المعطيات التالية الوقت بالدقائق المستغرق في إنتاج الوحدة بالنسبة لـ 6 وحدات أنتجت بالطريقة الأولى، و5 وحدات أنتجت بالطريقة الثانية، حيث X_1 يمثل الوقت المستغرق عند إستعمال الطريقة الأولى، و X_2 يمثل الوقت المستغرق عند استعمال الطريقة الثانية:

$$\bar{X}_1 = 50 \qquad \bar{X}_2 = 52 \qquad S_1^2 = 80 \qquad S_2^2 = 84{,}5$$

إذا علمت أن الوقت المستغرق في الإنتاج بالطريقتين يتوزع توزيعا طبيعيا، فقدِّر بمجال الفرق ما بين متوسطي الوقتين الحقيقيين لإنتاج هذه السلعة، عند مستوى ثقة 95%، في الحالتين التاليتين:

1- إذا كان الانحرافين المعيارين للإنتاج بالطريقتين متساويين.

2- إذا كان الانحرافين المعيارين للإنتاج بالطريقتين غير متساويين.

الحل:

التقدير بمجال للفرق ما بين متوسطي الوقتين الحقيقيين لإنتاج هذه السلعة، عند مستوى ثقة 95%:

1- إذا كان الانحرافين المعيارين للإنتاج بالطريقتين متساويين:

بما أن المتغير العشوائي المدروس X (الوقت المستغرق للإنتاج) يتوزع طبيعيا في كلا الطريقتين، بانحرافين معياريين مجهولين ومتساويين، والعينتين مستقلتين وصغيرتين، فإن: توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v = n_1 + n_2 - 2 = 6 + 5 - 2 = 9$ أي: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightarrow T_{v=9}$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$،

- متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين هو: $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$ مجهول.

- بما أن الانحرافين المعياريين للمجتمعين متساويين، فسنقوم بتقديرهما بنفس المقدِّر، بالاعتماد على التباين المشترك، الذي يرمز له بالرمز S_p^2، حيث: $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(6-1)\times 80 + (5-1)\times 84{,}5}{6+5-2} = \frac{400+338}{9} = 82$

- بما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{82\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)} = 5{,}48،$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \quad ; \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}05}{2}} = t_{0{,}025} = 2{,}262$

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = [(50 - 52) - 2{,}262(5{,}48) \quad ; \quad (50 - 52) + 2{,}262(5{,}48)]$$

$$\Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \in I_0 = [-14{,}39 \quad ; \quad -10{,}39]$$

2- إذا كان الانحرافين المعياريين للإنتاج بالطريقتين غير متساويين:

بما أن المتغير العشوائي المدروس X (الوقت المستغرق للإنتاج) يتوزع طبيعيا في كلا الطريقتين، بانحرافين معياريين مجهولين ومتساويين، والعينتين مستقلتين وصغيرتين، فإن: توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين

$\bar{X}_1-\bar{X}_2$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}=\frac{\left(\frac{80}{6}+\frac{84,5}{5}\right)^2}{\frac{\left(\frac{80}{6}\right)^2}{6-1}+\frac{\left(\frac{84,5}{5}\right)^2}{5-1}}=\frac{914,05}{35,55+71,40}=8,54\approx 9$،

أي: $\bar{X}_1-\bar{X}_2\to T_{v=9}$

بما أن طبيعة توزيع $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$،

- بما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{80}{6}+\frac{84,5}{5}}=5,50،$$

$$\mu_1-\mu_2\in I_n=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\quad;\quad(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]$$

حيث: $1-\alpha=0,95\Rightarrow\alpha=0,05$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}}=t_{\frac{0,05}{2}}=t_{0,025}=2,262$

$$\mu_1-\mu_2\in I_n=[(50-52)-2,262(5,50)\quad;\quad(50-52)+2,262(5,50)\,]$$
$$\Rightarrow\mu_1-\mu_2\in I_0=[-14,44\quad;\ -10,44\,]$$

2-2- إذا كان المجتمعين غير مستقلين (العينتين المسحوبتين مرتبطتين):

نعلم أنه كان لدينا مجتمعين، المتغير العشوائي المدروس موزع طبيعيا في كليهما، أي: $X_1\to N(\mu_1\,;\,\sigma_1)$ و $X_2\to N(\mu_2\,;\,\sigma_2)$، وسحبنا كل العينات المتناظرة في المجتمعين، وقمنا بحساب الفروق بين القيم D_i في كل عينتين متناظرتين، حيث: $D_i=X_{1i}-X_{2i}$، أي نحصل على عينات جديدة تمثل عينات الفروق بين القيم المتناظرة، متوسطها الحسابي في كل عينة جديدة هو $\bar{D}$، فإن توزيع المعاينة لهذه الفروق $\bar{D}$ يكون كما يلي:

أ- إذا كان حجم العينتين المسحوبتين $n\geq 30$:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z=\frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\sigma_{\bar{D}}}=\frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}=\frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}}=\frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}}$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0<1-\alpha<1$:

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\leq Z\leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\leq\frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}}\leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

- تقدير قيمة $\mu_{\bar{D}}$ بمجال، بإخراج باقي العناصر ، فنحصل على:

$$P\left(\bar{D}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}\leq\mu_{\bar{D}}\leq\bar{D}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_{\bar{D}}$ هو:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{D}}\in I_n=\left[\bar{D}-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}\quad;\quad\bar{D}+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_{D_i}}{\sqrt{n}}\right]}$$

حيث: $s_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$

أ- إذا كان حجم العينتين المسحوبتين $n < 30$:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\sigma_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}} = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}}$ ، درجة حرية: $v = n-1$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$:

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}} \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- تقدير قيمة $\mu_{\bar{D}}$ بمجال، بإخراج باقي العناصر ، فنحصل على:

$$P\left(\bar{D} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}} \leq \mu_{\bar{D}} \leq \bar{D} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_{\bar{D}}$ هو:

$$\boldsymbol{\mu_{\bar{D}} \in I_n = \left[\bar{D} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}} \quad ; \quad \bar{D} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}\right]}$$

حيث: $s_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$

مثال13: متوسط الفروق للكميات المباعة من سلعة معينة من طرف 7 محلات تجارية أختيروا عشوائيا، وذلك قبل القيام بحملة إعلانية عن هذه السلعة وبعدها، هو 3، أي: $\bar{D} = 3$، بانحراف معياري قدره 5,8 أي: $s_{D_i} = 5{,}8$.

بافتراض أن المجتمعين موزعين طبيعيا، قدِّر بمجال المتوسط الحقيقي $\mu_{\bar{D}}$، عند مستوى ثقة 90%.

الحل:

بما أن المجتمعين موزعين طبيعيين والعينتين مرتبطتين وحجم العينتين المسحوبتين $n < 30$، فإن توزيع المعاينة للفروق $\bar{D}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n-1 = 7-1 = 6$، وبما أن طبيعة توزيع $\bar{D}$ هو توزيع ستودنت، فإنه يحول إلى T كما يلي: $T = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}}$

حيث: $\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}} = \frac{5{,}8}{\sqrt{7-1}} = 2{,}37$

و $1-\alpha = 0{,}90 \Rightarrow \alpha = 0{,}10$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}10}{2}} = t_{0{,}05} = 1{,}943$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\mu_{\bar{D}}$ هو: $\mu_{\bar{D}} \in I_n = \left[\bar{D} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}} \quad ; \quad \bar{D} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}\right]$

$$\mu_{\bar{D}} \in I_n = [3 - 1{,}943.(2{,}37) \quad ; \quad 3 + 1{,}943.(2{,}37)]$$

$$\mu_{\bar{D}} \in I_0 = [-1{,}60 \quad ; \quad 7{,}60]$$

3- التقدير بمجال لنسبة العينة P:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- نعلم أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما، وحجم العينة المسحوبة كبيرا، أي: $n \geq 30$، فتوزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$ سيقترب من التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\hat{p}-\mu_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p}-P}{\sigma_{\hat{p}}}$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p}-P}{\sigma_{\hat{p}}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- تقدير قيمة P بمجال، بإخراج باقي العناصر ، كما يلي:

$$P\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}} \leq P \leq \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ P هو:

$$\boldsymbol{P \in I_n = \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}} \quad ; \quad \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}}\right]}$$

حيث: $\sigma_{\hat{p}}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لنسبة العينة)، الذي يساوي:

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$: إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$.

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} > 0{,}05$.

مثال14: يبلغ عدد عمال إحدى الشركات 800 عاملا، سحبنا منهم عينة عشوائية دون إرجاع تشمل 36 عاملا، ووجدنا أن منهم 9 عمال أعمارهم تقل عن 30 سنة. قدِّر بمجال النسبة الحقيقية للعمال التي تقل أعمارهم عن 30 سنة بالشركة، عند مستوى ثقة 99%.

الحل:

بما أن حجم العينة كبير، فإن مجال الثقة لـ P هو: $P \in I_n = \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}} \quad ; \quad \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}}\right]$

- نسبة العمال الذين أعمارهم تقل عن 30 سنة في العينة: $\hat{p} = \frac{9}{36} = 0{,}25 = 25\%$

- نسبة العمال الذين أعمارهم تساوي أوتفوق 30 سنة في العينة: $\hat{q} = \frac{27}{36} = 0{,}75 = 75\%$

- السحب تم بدون إرجاع و $\frac{n}{N} = \frac{36}{800} = 0{,}045 < 0{,}05$، وعليه فإن: $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}25\times 0{,}75}{36}} = 0{,}072$

حيث: $1-\alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}025} = 2{,}58$

$$P \in I_n = [0{,}25 - 2{,}58(0{,}072) \quad ; 0{,}25 + 2{,}58(0{,}072)]$$

$$P \in I_0 = [0{,}06 \quad ; \ 0{,}44]$$

4- التقدير بمجال للفرق ما بين نسبتي عينتين $P_1 - P_2$:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- نعلم أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وسحبنا منهما عينتين كبيرتي الحجم، أي: $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فوفقا لنظرية النهاية المركزية، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ سيقترب من التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} \leq +Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- تقدير قيمة $P_1 - P_2$ بمجال، بإخراج باقي العناصر، كما يلي:

$$P\left((\hat{p}_1-\hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} \leq P_1 - P_2 \leq (\hat{p}_1-\hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ P هو:

$$\boldsymbol{P_1 - P_2 \in I_n = \left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} \quad ; (\hat{p}_1-\hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right]}$$

حيث: $\sigma_{\hat{p}}$: الخطأ المعياري (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين)، الذي يساوي:

$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{P}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{P}_2\hat{q}_2}{n_2}}$: إذا كان حجم المجتمع غير محدود أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بإرجاع، أو حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N} \leq 0{,}05$ و $\frac{n_2}{N} \leq 0{,}05$

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{P}_1\hat{q}_1}{n_1}\left(\frac{N_1-n_1}{N_1-1}\right) + \frac{\hat{P}_2\hat{q}_2}{n_2}\left(\frac{N_2-n_2}{N_2-1}\right)}$: إذا كان حجم المجتمع محدود والسحب تم بدون إرجاع و $\frac{n_1}{N}$ ، $\frac{n_2}{N}$ أحدهما أو كليهما أكبر من 0,05

مثال15: سحبت عينتان عشوائيتان مستقلتان، الأولى تحتوي على 100 طالب فوجد بها 8 طلبة قامتهم تفوق 190سم، والثانية تحتوي على 150 طالبة فوجد بها 4 طالبات تفوق قامتهن 190سم. قدّر بمجال الفرق الحقيقي بين نسبة الطلبة الذين تفوق قامتهم 190سم ونسبة الطالبات التي تفوق قامتهن 190سم، عند مستوى ثقة 90%.

الحل:

بما أن العينتان العشوائيتان مستقلتان، و $n_1 = 100 > 30$ و $n_2 = 150 > 30$، فإن مجال الثقة لـ P هو:

$$P_1 - P_2 \in I_n = \left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} \quad ; (\hat{p}_1-\hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right]$$

- عينة الطلبة: $\hat{p}_1 = \frac{8}{100} = 0{,}08 \quad , \quad \hat{q}_1 = \frac{92}{100} = 0{,}92$

- عينة الطالبات: $\hat{p}_2 = \frac{6}{150} = 0{,}04 \quad , \quad \hat{q}_2 = \frac{144}{100} = 0{,}96$

- المجتمع غير محدود، وعليه فإن: $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0,08\times0,92}{100} + \frac{0,04\times0,96}{150}} = 0,031$

حيث: $1-\alpha = 0,90 \Rightarrow \alpha = 0,10$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0,10}{2}} = Z_{0,05} = 1,64$

$$P_1 - P_2 \in I_n = [(0,08-0,04) - 1,64(0,031) \quad ; \ (0,08-0,04) + 1,64(0,031)]$$
$$P_1 - P_2 \in I_n = [0,04 - 1,64(0,031) \quad ; \ 0,04 + 1,64(0,031)]$$
$$P_1 - P_2 \in I_0 = [-0,01 \quad ; \ 0,09]$$

5- التقدير بمجال لتباين العينة σ^2:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- نعلم أنه إذا كان لدينا المتغير العشوائي المدروس موزع طبيعيا في مجتمع ما، تباينه σ^2 معلوم، فإن توزيع المعاينة لتباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n-1$. أي: $S^2 \rightarrow \chi^2_{v=n-1}$. والإحصائية الملائمة هي:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$
$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- تقدير قيمة σ^2 بمجال، بإخراج باقي العناصر، كما يلي:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ σ^2 هو:

$$\boldsymbol{\sigma^2 \in I_n = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \quad ; \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right]}$$

- أما مجال الثقة للانحراف المعياري للمجتمع، فهو:

$$\boldsymbol{\sigma \in I_n = \left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right]}$$

مثال16: إذا علمت أن أوزان علب الطماطم ذات وزن 500 غرام في أحد المصانع تتوزع طبيعيا، وسحبنا عينة عشوائية حجمها 10 علب، فوجدنا أن انحرافها المعياري هو 4 غرام. فقدِّر بمجال كلا من التباين والانحراف المعياري لأوزان علب الطماطم بالمصنع، عند مستوى الثقة 95%.

الحل:

بما أن أوزان علب الطماطم ذات وزن 500 غرام بالمصنع موزعة طبيعيا فإن توزيع المعاينة لتباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n-1 = 10-1 = 9$، أي: $S^2 \rightarrow \chi^2_9$

وبالتالي يكون مجال الثقة لـ σ^2 هو:

$$\sigma^2 \in I_n = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \quad ; \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

حيث نبحث عن القيمتين $\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ كما يلي:

أي: $1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$: $\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{\left(\frac{0,05}{2}\right)} = \chi^2_{(0,025)}$

أي نبحث عن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية $v = n-1 = 9$ ، وذلك من خلال جدول توزيع كاي مربع فنجدها: $\chi^2_{(0,025)} = 19,023$ ،

أي: $1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$: $\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{\left(1-\frac{0,05}{2}\right)} = \chi^2_{(1-0,025)} = \chi^2_{(0,975)}$

أي نبحث عن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها 97,5% من المساحة بدرجة حرية $v = n-1 = 9$ ، وذلك من خلال جدول توزيع كاي مربع فنجدها: $\chi^2_{(0,975)} = 2,700$

$$\sigma^2 \in I_n = \left[\frac{(10-1)(4)^2}{19,023} \quad ; \quad \frac{(10-1)(4)^2}{2,700}\right] => \sigma^2 \in I_0 = [7,57 \quad ; \quad 53,33\,]$$

مجال الثقة لـ σ هو:

$$\sigma \in I_n = \left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}}\right] = \left[\sqrt{7,57} \quad ; \quad \sqrt{53,33}\,\right] = [2,75 \quad ; \quad 7,30\,]$$

6- التقدير بمجال لنسبة تباينين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

نقوم ببناء مجال الثقة في هذه الحالة باتباع الخطوات التالية:

- نعلم أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وموزع طبيعيا في كليهما، فإن توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية: $v_1 = n_1 - 1$ و $v_2 = n_2 - 1$، أي: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \to F_{v_1, v_2}$

بما أن طبيعة توزيع $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ هو توزيع فيشر، فإنه يحول إلى F كما يلي: $F = \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$،

- نختار معامل ثقة معين $1-\alpha$، حيث $0 < 1-\alpha < 1$؛

- نبني الاحتمال التالي بواسطة الإحصائية ومعامل الثقة الذي تم اختياره:

$$P\left(F_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq F \leq F_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(F_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \leq F_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

- تقدير قيمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ بمجال، بإخراج باقي العناصر ، كما يلي:

$$P\left(\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

- وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ هو:

$$\boldsymbol{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_n = \left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\frac{\alpha}{2}}} \quad ; \quad \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right]}$$

مثال17: أخذت عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي 8 و9 من مجتمعين طبيعيين، فوجد أن تبايناهما على التوالي 20 و36. قدِّر بمجال لنسبة تباينين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$، عند مستوى الثقة 95%.

الحل:

بما أن المجتمعين طبيعيين فإن توزيع المعاينة للنسبة ما بين تباينين يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية:

$v_1 = n_1 - 1 = 8 - 1 = 7$ و $v_2 = n_2 - 1 = 9 - 1 = 8$، أي: $\frac{s_1^2}{s_2^2} \to F_{(7\ ,\ 8)}$

وبالتالي يكون مجال الثقة لـ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ هو: $$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_n = \left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\frac{\alpha}{2}}}\quad ;\quad \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

حيث نبحث عن القيمتين $F_{\frac{\alpha}{2}}$ و $F_{1-\frac{\alpha}{2}}$ كما يلي:

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ أي: $F_{\frac{\alpha}{2}} = F_{\frac{0,05}{2}} = F_{0,025}$

أي نبحث عن قيمة F التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجتي حرية: $v_1 = 7$ و $v_2 = 8$، وذلك من خلال جدول توزيع فيشر فنجدها: $F_{0,025} = 4,53$ ،

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ أي: $F_{1-0,025}F_{1-\frac{\alpha}{2}} = F_{1-\frac{0,05}{2}} = F_{0,975} =$

أي نبحث عن قيمة F التي تقع على يمينها 97,5% من المساحة بدرجتي حرية: $v_1 = 7$ و $v_2 = 8$، وذلك من خلال جدول توزيع فيشر فنجدها: $F_{(0,975)} = \frac{1}{F_{(0,025)}}$

مع ملاحظة أنه يجب عكس درجات الحرية عند استخراج القيمة $F_{(0,025)}$ فتصبح $v_1 = 8$، $v_2 = 7$

$$F_{(0,975)} = \frac{1}{F_{(0,025)}} = \frac{1}{4,9} = 0,20$$

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_n = \left[\frac{\frac{20}{36}}{4,53}\quad ;\quad \frac{\frac{20}{36}}{0,20}\right] \Rightarrow \sigma^2 \in I_0 = [0,12\quad ;\quad 2,78\ ]$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

1- فيما تتمثل مهمة نظرية التقدير.

2- يمكن التمييز بين نوعين من التقدير، أذكرهما مع الشرح.

3- ما هي أهم المقاييس الإحصائية موضوع التقدير في الدراسات الإحصائية؟ ما هي مقدراتها بواسطة العينة؟

التمرين الثاني:

لتكن العينة العشوائية $(X_1,\ X_2,\dots,X_n)$، من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x,\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} & 0 < x < 1 \\ f(x,\theta) = 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

- أوجد مقدِّر المعلمة θ باستخدام طريقة المعقولية العظمى.

التمرين الثالث:

لتكن العينة العشوائية $(X_1,\ X_2,\dots,X_n)$، من مجتمع يتبع توزيع بواسون، دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x,\theta) = \frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$$

- أوجد مقدِّر المعلمة θ باستخدام طريقة المعقولية العظمى.

التمرين الرابع: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

ليكن المتغير العشوائي X يتبع قانون طبيعي، الإنحراف المعياري للمجتمع معلوم ويساوي 4. ندرس هذه الخاصة X على عينة حجمها $n = 25$. بعد جمع البيانات تم حساب المتوسط الحسابي فوجد أنه يساوي 20.

1- ما هو التقدير النقطي للمتوسط الحسابي للمجتمع μ؟

2- أعط تقديرا بمجال لـ μ بمستوى ثقة يساوي 95%.

3- ما هو خطأ المعاينة في تقدير μ؟

4- ما هو حجم العينة اللازم إذا أردنا أن لا يتجاوز خطأ المعاينة في تقدير μ الهامش $d = \mp 0{,}5$؟

5- بفرض أن الإنحراف المعياري للمجتمع مجهولا، ما هو مجال الثقة لـ μ بمستوى ثقة يساوي 95% في الحالتين التاليتين:

أ- حجم العينة $n = 100$ ، علما أن: $\bar{X} = 25$ و $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 3564$

ب- حجم العينة $n = 17$ ، علما أن: $\bar{X} = 25$ و $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 1176$

التمرين الخامس: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

أولا- يعتبر طول أقطار الأنابيب المعدنية التي تنتجها آلة صناعية متغيرا عشوائيا من أنبوب إلى آخر في أحد المؤسسات، أخذت عينة من 10 أنابيب من الإنتاج وتم قياس طول قطرها بدقة فكانت النتائج التالية (بالسنتمتر):

رقم الأنبوب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
طول قطر الأنبوب X_i	2	1,9	3,0	1,84	1,95	1,99	2,07	2,1	2,09	1,96

إذا علمت أن أطوال أقطار الأنابيب بالمصنع تتوزع طبيعيا، وأن: $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 0{,}9801$

1- قدِّر نقطيا كلا من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمجتمع.

2- قدِّر بمجال المتوسط الحسابي للمجتمع μ بمستوى ثقة 95%.

3- قدِّر بمجال الإنحراف المعياري للمجتمع σ بمستوى ثقة 95%.

ثانيا- بغرض مراقبة نسبة المعيب من الأنابيب المعدنية بالمؤسسة، تم سحب عينة جديدة حجمها 80 أنبوبا فوجد بها 4 أنابيب معيبة.

1- قدر بنقطة ثم بمجال نسبة الأنابيب المعدنية المعيبة بالمؤسسة عند مستوى الثقة 90%.

2- ما هو خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير نسبة الأنابيب المعدنية المعيبة بالمؤسسة عند مستوى الثقة 90%؟

3- ما هو حجم العينة اللازم لو أردنا تخفيض خطأ المعاينة بالربع عند مستوى الثقة 90%.

التمرين السادس:

لمقارنة متوسط أطوال نوع معين من الأنابيب المنتجة من المصنع (1) بأطوال الأنابيب المنتجة من المصنع (2)، سحبنا عينة عشوائية من المصنع (1) تحتوي على 20 أنبوبة، فكان المتوسط الحسابي لأطوالها هو 3,8 سم، وسحبنا عينة عشوائية مستقلة عن العينة الأولى من المصنع (2) تحتوي على 25 أنبوبة، فكان المتوسط الحسابي لأطوالها هو 3,2 سم، فإذا كانت أطوال الأنابيب المنتجة من المصنع (1) تتبع التوزيع الطبيعي بتباين 0,81، وأطوال الأنابيب المنتجة في المصنع (2) تتبع التوزيع الطبيعي بتباين 0,64.

أعط تقديرا بمجال بمستوى ثقة يساوي 90% للفرق بين متوسطي الأطوال في المصنعين $\mu_1 - \mu_2$.

التمرين السابع:

مجتمعان يتوزعان طبيعيا، سحبنا منهما عينتين صغيرتين وغير متساويتين في الحجم $(n_1 > n_2)$، فوجدنا أن المتوسط الحسابي للعينة الأولى هو 4 بينما المتوسط الحسابي للعينة الثانية هو 3. إذا علمت أن فترة الثقة بمستوى 95% للفرق ما بين المتوسطين الحقيقيين $\mu_1 - \mu_2$ محصور ما بين (3,72-) و (5,72)، وأن التباين المشترك $s_p^2 = 20{,}8$، أما درجة الحرية فهي 15. ما هو حجم العينتين اللتين أجريتا عليهما الدراسة، علما أن تبايني المجتمعين متساويين؟

التمرين الثامن:

إذا اخترنا عشوائيا 500 طالب من طلبة جامعة المسيلة، ووجدنا أن 180 منهم يملكون هواتف نقالة، فَقَدِّرْ بنقطة نسبة الطلبة الذين يملكون هواتف نقالة في جامعة المسيلة ككل، ثم قَدِّرْ بمجال هذه النسبة باستخدام مستوى الثقة 99%.

التمرين التاسع: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

سحبت عينتان عشوائيتان مستقلتان مع الإرجاع، الأولى تحتوي على 120 وحدة منتجة بالآلة (1) فوجد بها 6 وحدات معيبة، والثانية تحتوي على 200 وحدة منتجة بالآلة (2) فوجد بها 9 وحدات معيبة.

- قَدِّر الفرق بين نسبة الوحدات التي بها عيوب في الإنتاج الكلي للألة (1) ونسبة الوحدات التي بها عيوب في الإنتاج الكلي للآلة (2) وذلك باستخدام مستوى الثقة 95%.

التمرين العاشر:

إذا علمت أن درجات طلبة المرحلة الثانوية في مادة الرياضيات تتوزع طبيعيا، وسحبنا من طلبة هذه المرحلة عينة عشوائية تحتوي على 10 طلبة، فكانت درجاتهم كما يلي:

40 , 72 , 50 , 65 , 55 , 38 , 81 , 49 , 67 , 69

أ- قَدِّرْ بنقطة التباين والانحراف المعياري.

ب- قَدِّرْ بمجال التباين والانحراف المعياري بمستوى الثقة 99%.

التمرين الحادي عشر: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

إذا علمت أن مجتمع أطوال الطالبات ومجتمع أطوال الطلبة في جامعة المسيلة يتبع التوزيع الطبيعي، وسحبنا من الطالبات عينة عشوائية تشمل 25 طالبة، ومن الطلبة عينة تشمل 21 طالبا، وكانت العينتان مستقلتين، ووجدنا أن تباين أطوال عينة الطالبات يساوي 64، وتباين أطوال عينة الطلبة يساوي 36. أوجد فترة الثقة لنسبة تباين مجتمع أطوال الطالبات إلى تباين مجتمع أطوال الطلبة، وذلك باستخدام مستوى الثقة 95%.

الحلول

حل التمرين الأول:

1- تتمثل مهمة نظرية التقدير في: البحث عن أحسن وأدق **المقدّرات** للمقاييس الحقيقية للمجتمع انطلاقا من نتائج العينة العشوائية، رياضيا، عملية التقدير تعني السعي إلى بناء إحصائية عينة تعبر بأكبر قدر ممكن من الدقة على مقاييس المجتمع، باستعمال معطيات العينة.

2- يمكن التمييز بين نوعين من التقدير، هما:

أ- التقدير بنقطة: يعني تقدير معالم المجتمع المجهولة بقيمة واحدة (قيمة نقطية)، حيث يمكن إعطاء العديد من التقديرات النقطية للمعالم الحقيقية للمجتمع، انطلاقا من معطيات العينة، لكن نظرية التقدير تسعى إلى البحث على أحسن وأدق المقدِّرات، لأنها في كل الأحوال تحتوي على هامش من الخطأ، نظرا لكونها محسوبة من بيانات عينة وليس من بيانات المجتمع، حيث يدعى هذا الخطأ بالخطأ العشوائي، رياضيا وإحصائيا، البحث على أدق مقدّر يعني توفر جملة من المواصفات الرياضية والإحصائية في هذا المقدّر، وهي: عدم التحيز، الكفاءة، والإتساق.

ب- التقدير بمجال: هو تقدير معلمة المجتمع المجهولة بمجموعة من القيم تعرض على شكل مجال نرمز له بـ I_n، حيث أن هذا المجال عشوائي لأنه يبنى على أساس عينة عشوائية، وبالتالي فهو مرتبط باحتمال P، يدعى درجة الثقة، التي يعبر على نسبة الحظوظ أن يكون مجال الثقة I_n يحوي معلمة المجتمع المجهولة θ، وأما الاحتمال المكمل لـ P (احتمال عدم احتواء مجال الثقة عن المعلمة المجهولة) نرمز له بالرمز α، ونسميه درجة المخاطرة.

3- أهم المقاييس الإحصائية موضوع التقدير في الدراسات الإحصائية، ومقدراتها بواسطة العينة:

- أفضل مقدِّر غير متحيز ومتسق للمتوسط الحسابي للمجتمع μ بواسطة العينة العشوائية ذات الحجم n هو المتوسط الحسابي $\bar{X}$ لهذه العينة سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع، أي: $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$

- أفضل مقدِّر غير متحيز ومتسق للنسبة الحقيقية للمجتمع P بواسطة العينة العشوائية ذات الحجم n هي النسبة $\hat{p}$ لهذه العينة سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع، أي: $\hat{P} = \hat{p} = \frac{x}{n}$

- المقدّر غير المتحيز لتباين المجتمع في حالة السحب مع الإرجاع هو $S^2 = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$

- المقدّر غير المتحيز لتباين المجتمع في حالة السحب مع عدم الإرجاع هو: $S^2 = \frac{N-1}{N} \times \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$

حل التمرين الثاني:

لتكن العينة العشوائية $(X_1, X_2, \dots, X_n)$، من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x,\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} & 0 < x < 1 \\ f(x,\theta) = 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

- إيجاد مقدِّر المعلمة θ باستخدام طريقة المعقولية العظمى:

نقوم بتحديد صيغة دالة المعقولية العظمى، كما يلي:

$$L(x,\theta) = f(x_1,\theta) \times f(x_2,\theta) \times \dots\dots \times f(x_n,\theta)$$

$$L(x,\theta) = \theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1} \times \theta^{x_2}(1-\theta)^{1-x_2} \times \dots\dots \times \theta^{x_n}(1-\theta)^{1-x_n}$$
$$L(x,\theta) = \theta^{x_1+x_2+\dots+x_n}(1-\theta)^{1-x_1+1-x_2+\dots+1-x_n}$$
$$L(x,\theta) = \theta^{x_1+x_2+\dots+x_n}(1-\theta)^{(1+1+\dots+1)-(x_1+x_2+\dots+x_n)}$$
$$L(x,\theta) = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}$$

نقوم بتحويل الصيغة السابقة لدالة المعقولية العظمى إلى الصيغة اللوغاريتمية، كما يلي:

$$lnL(x,\theta) = ln\theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i} = (\sum x_i)ln\theta + (n-\sum x_i)ln(1-\theta)$$

نقوم بحساب المشتقة الأولى لدالة المعقولية العظمى بالنسبة لـ θ، ثم نساويها للصفر، كما يلي:

$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{n-\sum x_i}{1-\theta}$$
$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{n-\sum x_i}{1-\theta} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sum x_i}{\theta} = \frac{n-\sum x_i}{1-\theta}$$
$$\Leftrightarrow \sum x_i - \theta\sum x_i = n\theta - \theta\sum x_i$$
$$\Leftrightarrow \sum x_i = n\theta$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\sum x_i}{n}$$

وبالتالي فإن مقدِّر المعقولية العظمى للمعلمة θ هو: $\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}$

حل التمرين الثالث:

لتكن العينة العشوائية $(X_1, X_2, \dots, X_n)$، من مجتمع يتبع توزيع بواسون، دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي: $f(x,\theta) = \frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$

- إيجاد مقدِّر المعلمة θ باستخدام طريقة المعقولية العظمى:

نقوم بتحديد صيغة دالة المعقولية العظمى، كما يلي:

$$L(x,\theta) = f(x_1,\theta) \times f(x_2,\theta) \times \dots\dots \times f(x_n,\theta)$$
$$L(x,\theta) = \frac{\theta^{x_1}}{x_1!}e^{-\theta} \times \frac{\theta^{x_2}}{x_2!}e^{-\theta} \times \dots\dots \times \frac{\theta^{x_n}}{x_n!}e^{-\theta}$$
$$L(x,\theta) = \frac{\theta^{x_1+x_2+\dots+x_n}}{x_1!x_2!\dots x_n!}e^{-(\theta+\theta+\dots+\theta)}$$
$$L(x,\theta) = \frac{\theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!}e^{-n\theta}$$

نقوم بتحويل الصيغة السابقة لدالة المعقولية العظمى إلى الصيغة اللوغاريتمية، كما يلي:

$$lnL(x,\theta) = (\sum x_i)ln\theta - ln\prod x_i! - n\theta lne = (\sum x_i)ln\theta - ln\prod x_i! - n\theta$$

نقوم بحساب المشتقة الأولى لدالة المعقولية العظمى بالنسبة لـ θ، ثم نساويها للصفر، كما يلي:

$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - n$$
$$\frac{\delta lnL(x,\theta)}{\delta\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sum x_i}{\theta} - n = 0$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\sum x_i}{n}$$

وبالتالي فإن مقدِّر المعقولية العظمى للمعلمة θ هو: $\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}$

حل التمرين الرابع:

1- التقدير النقطي للمتوسط الحسابي للمجتمع μ: $\hat{\mu} = \bar{X} = 20$

2- إعطاء تقديرا بمجال لـ μ بمستوى ثقة يساوي 95%:

- المتغير العشوائي X في المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري للمجتمع معلوم $\sigma = 4$، وبالتالي فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، أي: $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} ; \sigma_{\bar{X}})$ ، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة هو: $\mu_{\bar{X}} = \mu$ مجهول.

- بما أن المجتمع غير محدود، فإن: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$، وبالتالي: $\bar{X} \to N(\mu ; 0,8)$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0,05}{2}} = Z_{0,025} = 1,96$

$$\mu \in I_n = [20 - 1,96(0,8) \quad ; \quad 20 + 1,96(0,8)\ ] \Rightarrow \mu \in I_0 = [18,43 \quad ; \quad 21,57\ ]$$

الشرح: لدينا 95% من الثقة أن يكون المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع يتراوح ما بين 18,43 و 21,57

3- خطأ المعاينة في تقدير μ: $d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \times \frac{4}{\sqrt{25}} = \mp 1,568$

4- حجم العينة اللازم إذا أردنا أن لا يتجاوز خطأ المعاينة في تقدير μ الهامش $d = \mp 0,5$:

يمكن إيجاد قيمة n من خلال الصيغة التالية:

$$d = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = \frac{Z^2_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma^2}{d^2} = \frac{(1,96)^2.(4)^2}{(0,5)^2} = 245,86 \approx 246$$

5- بفرض أن الإنحراف المعياري للمجتمع مجهولا. مجال الثقة لـ μ بمستوى ثقة يساوي 95% في الحالتين التاليتين:

أ- حجم العينة $n = 100$ ، علما أن: $\bar{X} = 25$ و $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 3564$

بما أن المجتمع موزع طبيعيا، الإنحراف المعياري مجهول، حجم العينة أكبر من 30، فإن مجال الثقة هو:

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{3564}{100-1}} = 6$$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\mu \in I_n = \left[25 - 1,96\frac{6}{\sqrt{100}} \quad ; \quad 25 + 1,96\frac{6}{\sqrt{100}}\right]$$

$$\mu \in I_0 = [23,82 \quad ; \quad 26,18\ ]$$

ب- حجم العينة $n = 17$ ، علما أن: $\bar{X} = 25$ و $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 1176$

بما أن المجتمع موزع طبيعيا، الإنحراف المعياري مجهول، حجم العينة أقل من 30، فإن مجال الثقة هو:

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1176}{25-1}} = 7$$

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}} \quad ; \quad \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0,05}{2}} = t_{0,025}$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية $v = n - 1 = 16$ ، وذلك من خلال جدول توزيع ستودنت، فنجدها: $t_{0,025} = 2,120$

$$\mu \in I_n = \left[25 - 2{,}120\frac{7}{\sqrt{16}} \quad ; \quad 25 + 2{,}120\frac{7}{\sqrt{16}}\right] \Rightarrow \mu \in I_0 = [21{,}29 \quad ; \quad 28{,}71\,]$$

حل التمرين الخامس:

أولا- 1- تقدير بنقطة كلا من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمجتمع:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{20{,}9}{10} = 2{,}09 \qquad . \qquad \hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}9801}{9}} = 0{,}33$$

2- تقدير بمجال المتوسط الحسابي للمجتمع μ بمستوى ثقة 95%:

بما أن المجتمع موزع طبيعيا، الانحراف المعياري مجهول، حجم العينة أقل من 30، فإن مجال الثقة هو:

$$\mu \in I_n = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}} \quad ; \quad \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

حيث: $1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ ، أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}05}{2}} = t_{0{,}025}$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية: $v = n-1 = 9$ ، وذلك من خلال جدول توزيع ستودنت فنجدها: $t_{0{,}025} = 2{,}262$

$$\mu \in I_n = \left[2{,}09 - 2{,}262\frac{0{,}33}{\sqrt{9}} \quad ; \quad 2{,}09 + 2{,}262\frac{0{,}33}{\sqrt{9}}\right] \Rightarrow \mu \in I_0 = [1{,}84 \quad ; \quad 2{,}34\,]$$

3- تقدير بمجال الإنحراف المعياري للمجتمع σ بمستوى ثقة 95%:

بما أن المجتمع موزع طبيعيا فإن مجال الثقة لـ σ هو:

$$\sigma \in I_n = \left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}}\right]$$

حيث نبحث عن القيمتين $\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ كما يلي:

$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{\left(\frac{0{,}05}{2}\right)} = \chi^2_{(0{,}025)}$

أي نبحث عن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجة حرية: $v = n-1 = 9$، وذلك من خلال جدول توزيع كاي مربع فنجدها: $\chi^2_{(0{,}025)} = 19{,}023$

$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{\left(1-\frac{0{,}05}{2}\right)} = \chi^2_{(1-0{,}025)} = \chi^2_{(0{,}975)}$

أي نبحث عن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها 97,5% من المساحة بدرجة حرية: $v = n-1 = 9$، وذلك من خلال جدول توزيع كاي مربع فنجدها: $\chi^2_{(0{,}975)} = 2{,}700$

$$\sigma \in I_n = \left[\sqrt{\frac{9\times0{,}1089}{19{,}023}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{9\times0{,}1089}{2{,}700}}\right] = \left[\sqrt{0{,}051} \quad ; \quad \sqrt{0{,}363}\right] = [0{,}23 \quad ; \quad 0{,}60\,]$$

ثانيا- 1- تقدير بنقطة ثم بمجال نسبة الأنابيب المعدنية المعيبة بالمؤسسة عند مستوى الثقة 90%:

أ- تقدير بنقطة نسبة الأنابيب المعدنية المعيبة بالمؤسسة: $P_r = \hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{4}{80} = 0{,}05$

ب- تقدير بمجال هذه النسبة باستخدام مستوى الثقة 90%:

بما أن حجم العينة كبيرا فإن مجال الثقة لـ P هو:

$$P \in I_n = \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \quad ; \quad \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

حيث: $1-\alpha = 0{,}90 \Rightarrow \alpha = 0{,}10$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}10}{2}} = Z_{0{,}05} = 1{,}64$ و $\hat{q} = 1-\hat{p} = 0{,}95$

$$P \in I_n = \left[0{,}05 - 1{,}64\sqrt{\frac{(0{,}05)(0{,}95)}{80}} \quad ; 0{,}05 + 1{,}64\sqrt{\frac{(0{,}05)(0{,}95)}{80}}\right]$$

$$P \in I_0 = [0{,}01 \quad ; \quad 0{,}09\ ]$$

2- خطأ المعاينة المحتمل ارتكابه في تقدير نسبة الأنابيب المعدنية المعيبة بالمؤسسة عند مستوى الثقة 90%:

$$d = \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \pm 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}05\times 0{,}95}{80}} = 0{,}04$$

- كما يمكن حساب خطأ المعاينة بحساب نصف طول مجال الثقة كما يلي: $d = \frac{0{,}09-0{,}01}{2} = \mp 0{,}04$

3- حجم العينة اللازم لو أردنا تخفيض خطأ المعاينة بالربع عند مستوى الثقة 90%:

تخفيض خطأ المعاينة بالربع يعني أنها تصبح تساوي: $d = 0{,}04 - 0{,}04 \times \frac{1}{4} = \mp 0{,}03$

$$d = \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} => n = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \times \hat{p}\hat{q}}{d^2} = \frac{(1{,}64)^2\times 0{,}05\times 0{,}95}{(0{,}03)^2} = 141{,}95 \approx 142$$

<u>**حل التمرين السادس:**</u>

- **المصنع (1):** $n = 20$ ، $\bar{X}_1 = 3{,}8$ ، $\sigma^2 = 0{,}81$ ، التوزيع طبيعي
- **المصنع (2):** $n = 25$ ، $\bar{X}_2 = 3{,}2$ ، $\sigma^2 = 0{,}64$ ، التوزيع طبيعي

- إعطاء تقديرا بمجال بمستوى ثقة يساوي 90% للفرق بين متوسطي الأطوال في المصنعين $\mu_1 - \mu_2$:

بما أن المتغير العشوائي المدروس X (أطوال الأنابيب) يتوزع طبيعيا في كلا المصنعين، بانحرافين معياريين معلومين، والعينتين مستقلتين، فإن: توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يتوزع توزيعا طبيعيا، أي: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to N\left(\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} ; \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right)$، حيث أن:

- متوسط توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين هو: $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$ مجهول.

- بما أن حجم المجتمعين غير محدود، فإن: $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}81}{20}+\frac{0{,}64}{25}} = 0{,}257$

أي أن: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to N(\mu_1 - \mu_2 \quad ; \quad 0{,}257)$

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \quad ; \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]$$

حيث: $1-\alpha = 0{,}90 \Rightarrow \alpha = 0{,}10$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}10}{2}} = Z_{0{,}05} = 1{,}64$

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = [(3{,}8-3{,}2) - 1{,}64\times 0{,}257 \quad ; \quad (3{,}8-3{,}2) + 1{,}64\times 0{,}257\ ]$$

$$\Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \in I_0 = [0{,}178 \quad ; \quad 1{,}021\ ]$$

<u>**حل التمرين السابع:**</u>

- حجم العينتين اللتين أجريتا عليهما الدراسة، علما أن تبايني المجتمعين متساويين:

بما أن تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين وحجم العينتين صغير فإن مجال الثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$ هو:

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \quad ; \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\ \right]$$

وبما أن حدي مجال الثقة بمستوى 95% معطى كما يلي: $\mu_1-\mu_2 \in I_0 = [-3{,}72 \quad ; \quad 5{,}72\ ]$

فإننا نستنتج بالمطابقة بين العبارتين السابقتين أن:

$$\begin{cases}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = -3{,}72\\ (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \ \ 5{,}72\end{cases}$$

حيث: $1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{\frac{0{,}05}{2}} = t_{0{,}025}$

أي نبحث عن قيمة t التي تقع على يمينها **2,5%** من المساحة بدرجة حرية: $v = 15$ ، وذلك من خلال جدول توزيع ستودنت فنجدها: $t_{0{,}025} = 2{,}131$.

$$\begin{cases}(4-3)-2{,}131\sqrt{20{,}8\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = -3{,}72\\ (4-3)+2{,}131\sqrt{20{,}8\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \ \ 5{,}72\end{cases}$$

بطرح الحد السفلي من الحد العلوي نجد:

$$2\times 2{,}131\sqrt{20{,}8\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = 9{,}44 \Rightarrow \sqrt{20{,}8\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = 2{,}215$$

بتربيع الطرفين نجد: $20{,}8\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right) = 4{,}91 \Rightarrow \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right) = 0{,}236$

بإجراء عمليات حسابية بسيطة نجد: $\frac{n_1+n_2}{n_1\times n_2} = 0{,}236$

ولدينا بالمقابل درجة الحرية تساوي 15 أي: $v = n_1+n_2-2 = 15 \Rightarrow n_1+n_2 = 17$

بالتعويض نجد: $\frac{n_1+n_2}{n_1\times n_2} = \frac{17}{n_1\times n_2} = 0{,}236 \Rightarrow n_1\times n_2 = 72$

ولدينا: $n_1+n_2 = 17 \Rightarrow n_2 = 17-n_1$

نجد أن: $n_1\times n_2 = 72 \Rightarrow n_1(17-n_1) = 72 \quad \Rightarrow -n_1^2+17n_1-72 = 0$

بحل المعادلة من الدرجة الثانية باستخدام المميز، وبما أن: $(n_1 > n_2)$، فإن: $(n_1 = 9 \quad , \quad n_2 = 8)$

__حل التمرين الثامن:__

أ- **تقدير بنقطة نسبة الطلبة الذين يملكون هواتف نقالة في جامعة المسيلة ككل:** $P_r = \hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{180}{500} = 0{,}36$

ب- **تقدير بمجال هذه النسبة باستخدام مستوى الثقة 99%:**

بما أن حجم العينة كبيرا فإن مجال الثقة لـ P هو: $P \in I_n = \left[\hat{p}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \quad ; \quad \hat{p}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$

حيث: $1-\alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}01}{2}} = Z_{0{,}005} = 2{,}58$ و $\hat{q} = 1-\hat{p} = 0{,}64$

$$P \in I_n = \left[0{,}36 - 2{,}58\sqrt{\frac{(0{,}36)(0{,}64)}{500}} \quad ; \quad 0{,}36 + 2{,}58\sqrt{\frac{(0{,}36)(0{,}64)}{500}}\right]$$

$$P \in I_0 = [0{,}30 \quad ; \quad 0{,}41\,]$$

حل التمرين التاسع:

- تقدير الفرق بين نسبة الوحدات التي بها عيوب في الإنتاج الكلي للألة (1) ونسبة الوحدات التي بها عيوب في الإنتاج الكلي للآلة (2) وذلك باستخدام مستوى الثقة 95%:

الآلة (1): $\hat{p}_1 = \frac{6}{120} = 0{,}05$ ، $\hat{q}_1 = 0{,}95$ ، $n_1 = 120$

الآلة (2): $\hat{p}_2 = \frac{9}{200} = 0{,}045$ ، $\hat{q}_2 = 0{,}955$ ، $n_2 = 200$

بما أن حجم العينتين كبير فإن مجال الثقة لـ $P_1 - P_2$ هو:

$$P_1 - P_2 \in I_n = \left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\,\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\,\hat{q}_2}{n_2}} \quad ; \quad (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\,\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\,\hat{q}_2}{n_2}}\right]$$

حيث: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ أي: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0{,}05 - 0{,}045 = 0{,}005$$

$$P_1 - P_2 \in I_n = \left[0{,}005 - 1{,}96\sqrt{\frac{(0{,}05)(0{,}95)}{120} + \frac{(0{,}045)(0{,}955)}{200}} \quad ; \quad 0{,}005 + 1{,}96\sqrt{\frac{(0{,}05)(0{,}95)}{120} + \frac{(0{,}045)(0{,}955)}{200}}\right]$$

$$P_1 - P_2 \in I_n = [0{,}005 - 1{,}96(0{,}025) \quad ; \quad 0{,}005 + 1{,}96(0{,}025)\,]$$

$$P_1 - P_2 \in I_0 = [-0{,}044 \quad ; \quad 0{,}054\,]$$

حل التمرين العاشر:

أ- التقدير بنقطة للتباين والانحراف المعياري:

- تباين المجتمع σ^2 نقدره بواسطة التباين المحسوب من العينة المسحوبة أي: $\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{586}{10} = 58{,}6$$

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{1850{,}4}{9} = 205{,}6$$

- الانحراف المعياري للمجتمع σ ونقدره بواسطة الإنحراف المعياري المحسوب من العينة أي:

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = 14{,}34$$

ب- التقدير بمجال للتباين والانحراف المعياري بمستوى الثقة 99%:

بما أن المجتمع موزع طبيعيا فإن مجال الثقة لـ σ^2 هو: $\sigma^2 \in I_n = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$

حيث نبحث عن القيمتين $\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ كما يلي:

$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01$ أي: $\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{\left(\frac{0{,}01}{2}\right)} = \chi^2_{(0{,}005)}$

أي نبحث عن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها 0,5% من المساحة بدرجة حرية: $v = n - 1 = 9$، وذلك من خلال جدول توزيع كاي مربع فنجدها: $\chi^2_{(0,005)} = 23,589$

أي: $1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow \alpha = 0,01$ $\quad \chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{\left(1-\frac{0,01}{2}\right)} = \chi^2_{(0,995)}$

أي نبحث عن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها 99,5% من المساحة بدرجة حرية: $v = n - 1 = 9$، وذلك من خلال جدول توزيع كاي مربع فنجدها: $\chi^2_{(0,995)} = 1,735$

$$\sigma^2 \in I_n = \left[\frac{(9)(205,6)}{23,589} \quad ; \quad \frac{(9)(205,6)}{1,735}\right] => \sigma^2 \in I_0 = [78,44 \quad ; \quad 1066,51\ ]$$

مجال الثقة لـ σ هو:

$$\sigma \in I_n = \left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}}\right] = \left[\sqrt{78,44} \quad ; \quad \sqrt{1066,51}\right] = [8,86 \quad ; \quad 32,66\ ]$$

<u>حل التمرين الحادي عشر:</u>

- فترة الثقة لنسبة تباين مجتمع أطوال الطالبات إلى تباين مجتمع أطوال الطلبة، عند مستوى الثقة 95%:

مجتمع الطالبات: $S_1^2 = 64$ ، $n_1 = 25$ ، **مجتمع الطلبة:** $S_2^2 = 36$ ، $n_2 = 21$

بما أن المجتمعين موزعين طبيعيا فإن مجال الثقة لـ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ هو: $\quad \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_n = \left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$

حيث نبحث عن القيمتين $F_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ كما يلي:

أي: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ $\quad F_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = F_{\left(\frac{0,05}{2}\right)} = F_{(0,025)}$

أي نبحث عن قيمة F التي تقع على يمينها 2,5% من المساحة بدرجتي حرية:

$v_1 = n_1 - 1 = 24$ و $v_2 = n_2 - 1 = 20$

وذلك من خلال جدول توزيع فيشر فنجدها: $F_{(0,025)} = 2,41$

أي: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ $\quad \chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{\left(1-\frac{0,05}{2}\right)} = \chi^2_{(1-0,025)} = \chi^2_{(0,975)}$

أي نبحث عن قيمة F التي تقع على يمينها 97,5% من المساحة بدرجتي حرية: $v_1 = 24$ و $v_2 = 20$

وذلك من خلال جدول توزيع فيشر فنجدها: $F_{(0,975)} = \frac{1}{F_{(0,025)}}$

مع ملاحظة أنه يجب عكس درجات الحرية عند إستخراج القيمة $F_{(0,025)}$ فتصبح $v_1 = 20$، $v_2 = 24$

$$F_{(0,975)} = \frac{1}{F_{(0,025)}} = \frac{1}{2,33} = 0,43$$

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_n = \left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right] = \left[\frac{\frac{64}{36}}{2,41} \quad ; \quad \frac{\frac{64}{36}}{0,43}\right] \Rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_0 = [0,74 \quad ; \quad 4,14\ ]$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

لتكن العينة العشوائية $(X_1,\ X_2, \dots , X_n\ )$، من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\theta_2^2}(x-\theta_1)^2}$$

- أوجد مقدِّر المعلمتين θ_1 و θ_2^2 باستخدام طريقة المعقولية العظمى.

التمرين الثاني: (امتحان سابق بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

لمراقبة عملية صنع أقراص دواء، سحبنا 10 أقراص عشوائيا وقمنا بوزنهم فحصلنا على النتائج التالية (مغ):

40، 44، 43، 45، 46، 45، 40، 43، 44، 41

علما أن أوزان أقراص الدواء تتوزع طبيعيا.

1- قدِّر بنقطة كلا من المتوسط الحقيقي لوزن أقراص الدواء والتباين.

2- قدِّر بمجال المتوسط الحقيقي للوزن والانحراف المعياري الحقيقي بمستوى ثقة 90%.

3- ماذا يمثل المقدار: $\frac{S}{\sqrt{n-1}} \times \mp t_{\frac{\alpha}{2}}$ ؟ أحسبه وأشرح النتيجة. علما أن: $\alpha = 0,05$

التمرين الثالث: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

يعتبر وزن الصابون المسحوق الذي تضعه آلة صناعية متغيرا عشوائيا من علبة إلى أخرى مقارنة بالوزن المعياري، نريد أن نقدر الوزن المتوسط الحقيقي μ لوزن الصابون في العلبة الواحدة، لهذا الغرض أخذت عينة من 10 علب من الإنتاج وتم وزنها بدقة فكانت النتائج التالية (بالغرام):

595 598 605 600 602 599 603 600 606 597

إذا علمت أن وزن الصابون المسحوق يتوزع طبيعيا:

1- أعط تقديرا نقطيا لكل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري الحقيقيين للمجتمع.

2- أعط تقدير بمجال لـ: μ بمستوى ثقة 95%. إشرح النتيجة.

3- أجريت دراسة على عينة جديدة مكونة من 100 علبة، فوجد أن متوسط وزن الصابون المسحوق للعلبة الواحدة يقدر بـ 600 غرام وأن تباينها يقدر بـ 7,84، ماهو مجال الثقة الجديد لـ: μ بمستوى الثقة 95%؟

التمرين الرابع: (امتحان سابق بكلية العلو م الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير – جامعة المسيلة)

ينتج مصنع للمواد الغذائية قطع حلوى من نوع معين، متوسط أوزان كل القطع المنتجة هو 40 غرام وتباينها هو 4، فإذا سحبنا من إنتاج هذا المصنع عينة عشوائية من 100 قطعة.

1- أحسب إحتمال أن يكون متوسط أوزان هذه القطع يتراوح ما بين 39,8 غرام و 40,3 غرام.

2- أحسب قيمة الثابت k الذي يحقق: $P(\bar{X} \leq k) = 0,975$.

3- إذا كان متوسط أوزان كل القطع مجهولا، وكان مجموع أوزان القطع المسحوبة في العينة هو 3950 غرام. فقدِّر بمجال القيمة الحقيقية لمتوسط كل القطع بمستوى ثقة 90%.

التمرين الخامس:

بإستخدام عينة حجمها 16، تم تقدير بمجال المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع، بمستوى ثقة 95%، فوجد أنه يتراوح ما بين 18,25 و 21,75، فإذا علمت أن هذا المجتمع يتوزع طبيعيا بتباين يساوي9.

1- ما هو المتوسط الحسابي للعينة المسحوبة؟

2- ما هو خطأ المعاينة المرتكب في تقدير المتوسط الحسابي الحقيقي للمجتمع؟

3- نريد تخفيض خطأ المعاينة إلى النصف، أي تحسين الدقة بـ 50%، ما هو حجم العينة اللازم لذلك؟

التمرين السادس:

لدراسة مرض السكر عند الذكور والإناث في أحد البلديات سحبت عينتين عشوائيتين من كل فئة، وسجلت قراءة مستوى السكر في دمهم (غ/ل) فكانت كالتالي:

الإناث X_1	0,85	3	1,05	2,2	2,3	0,7	1,16	1,5	1,1
الذكور X_2	1,9	3,5	4	0,94	1,6	1,65	0,85	3	/

لتكن لدينا المعطيات التالية: $\sum_{i=1}^{9} X_{1i} = 13{,}86$ ، $\sum_{i=1}^{8} X_{2i} = 17{,}44$ ، $\sum_{i=1}^{9}(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 = 4{,}8672$

$\sum_{i=1}^{8}(X_{2i} - \bar{X}_2)^2 = 9{,}7468$ ، $X_1 \to N(0{,}95\ .\ \sigma_1)$ ، $X_2 \to N(1{,}1\ .\ \sigma_2)$ ، $\sigma_1 \neq \sigma_2$

1- حدد من خلال هذه الدراسة المتغير الإحصائي ونوعه.

2- ما احتمال أن يكون متوسط مستوى السكر في عينة الذكور يقل عن 1,65 غ/ل.

3- ما احتمال أن يكون متوسط مستوى السكر في عينة الإناث يفوق 1,45 غ/ل.

4- ما احتمال أن يكون الفرق بين متوسط مستوى السكر في الدم عند الذكور يفوق متوسط مستوى السكر في الدم عند الإناث بمقدار 0,8 غ/ل.

5- بفرض أن متوسط مستوى السكر في الدم لمجتمعي الذكور والإناث مجهولا.

أ- قَدِّرْ بنقطة ثم بمجال المتوسط الحقيقي لمستوى السكر في الدم عند الذكور بمستوى ثقة 95%.

ب- ما هو خطأ المعاينة في تقدير المتوسط الحقيقي لمستوى السكر في الدم عند الذكور؟

ج- إذا أردنا تخفيض خطأ المعاينة في تقدير المتوسط الحقيقي لمستوى السكر في الدم عند الذكور بنسبة 80%، ما هو حجم العينة اللازم لذلك؟

د- قَدِّرْ بنقطة ثم بمجال المتوسط الحقيقي لمستوى السكر في الدم عند الإناث بمستوى ثقة 95%.

هـ- قَدِّرْ بنقطة ثم بمجال الانحراف المعياري الحقيقي لمستوى السكر في الدم عند الذكور بمستوى ثقة 90%.

و- قَدِّرْ بنقطة ثم بمجال الانحراف المعياري الحقيقي لمستوى السكر في الدم عند الإناث بمستوى ثقة 95%.

ز- قَدِّرْ بنقطة ثم بمجال الفرق بين متوسطي مستوى السكر في الدم بين الذكور والإناث بمستوى الثقة 95%.

ح- قَدِّرْ بنقطة ثم بمجال نسبة تبايني مجتمعي الذكور والإناث بمستوى الثقة 99%.

التمرين السابع:

عينة عشوائية تشمل 150 شخصا مختارة من مدينة كبيرة، وجد من بينهم 42 شخصا أميًّا. قَدِّرْ نسبة الأميَّة في هذه المدينة باستخدام مستوى الثقة 95%.

التمرين الثامن:

عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين مجهول، فإذا كان حجم العينة المسحوبة هو 13، وكان $\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 128{,}41$. قَدِّرْ التباين والانحراف المعياري للمجتمع باستخدام مستوى الثقة 95%.

التمرين التاسع:

مجتمعان يتوزعان توزيعا طبيعيا، الأول تباينه 49 والثاني تباينه 25، سحبنا منهما عينتين مستقلتين، الأولى من المجتمع الأول وكان وسطها الحسابي 35، والثانية من المجتمع الثاني وكان وسطها الحسابي 33، فإذا كان حجم العينة الأولى9، وحجم العينة الثانية 16، أوجد فترة الثقة لـ: $(\mu_1 - \mu_2)$، وذلك باستخدام مستوى الثقة 99%.

التمرين العاشر:

أستخدمت طريقتان لتدريس مادة الإحصاء لطلبة أحد الجامعات، ولدراسة الفرق بين هاتين الطريقتين أختيرت عينتان عشوائيتان مستقلتان، الأولى من طلبة الطريقة الأولى وكانت تحتوي على 10 طلبة، والثانية من طلبة الطريقة الثانية وكانت تحتوي على 12 طالبا، وأجري لهم إمتحان موحد. توضح البيانات التالية الوسط الحسابي والتباين لدرجات كل عينة:

$$\bar{X}_1 = 77 \qquad \bar{X}_2 = 82 \qquad S_1^2 = 5 \qquad S_2^2 = 6$$

إذا كان المجتمعان يتوزعان توزيعا طبيعيا، أوجد فترة الثقة للفرق بين متوسطي الطريقتين$(\mu_1 - \mu_2)$، وذلك باستخدام مستوى الثقة 95% في الحالتين: أ- إذا كان: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ، ب- إذا كان: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

التمرين الحادي عشر:

في إستفتاء خاص ببرنامج تلفزيوني للأطفال، أختيرت عينة عشوائية تشمل 125 طفلا، وعينة عشوائية مستقلة عنها تشمل 100 طفلة، فكان من المعجبين بالبرنامج من الأولاد 80 طفلا، وعدد المعجبين من البنات 75 طفلة. أوجد فترة ثقة 90% للفرق بين نسبة كل المعجبين من الأولاد ونسبة المعجبين من البنات.

التمرين الثاني عشر:

مجتمعان، الأول توزيعه $N(\mu_1, \sigma_1)$، والثاني توزيعه $N(\mu_2, \sigma_2)$، سحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها 5، ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية مستقلة عن العينة الأولى حجمها 7، وحصلنا على البيانات التالية:

$$\bar{X}_1 = 525{,}3 \qquad \bar{X}_2 = 510{,}8 \qquad S_1^2 = 2273 \qquad S_2^2 = 1759$$

- قَدِّرْ بمجال نسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ باستخدام مستوى الثقة 95%.

الفصل الثالث

اختبار الفرضيات

نتطرق من خلال هذ الفصل إلى العناصر التالية:

- تمهيد

أولا: مفاهيم أساسية مرتبطة باختبار الفرضيات

ثانيا: اختبار الفرضيات حول المتوسط الحسابي للمجتمع μ

ثالثا: اختبار الفرضيات حول الفرق بين متوسطين حسابيين لمجتمعين $\mu_1 - \mu_2$

رابعا: اختبار الفرضيات حول نسبة المجتمع P

خامسا: اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتي مجتمعين $P_1 - P_2$

سادسا: اختبار الفرضيات حول تباين المجتمع σ^2

سابعا: اختبار الفرضيات حول النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

- تمارين محلولة

- تمارين مقترحة

تمهيد:

تطرقنا في الفصل السابق إلى الطريقة الأولى من طرق الاستدلال الإحصائي، والمتمثلة في التقدير، حيث أشرنا من خلاله إلى أن نظرية التقدير تتمثل مهمتها في البحث عن أحسن وأدق المقدِّرات للمقاييس الحقيقية للمجتمع انطلاقا من نتائج العينة العشوائية، حيث تقدم لنا هذه النظرية نوعان من التقدير، هما، التقدير بنقطة والتقدير بمجال، أما الطريقة الثانية فتتمثل في اختبار الفرضيات، حيث تتمثل مهمتها في وضع تخمين معين حول معلمة المجتمع المجهولة، ومن ثم إثبات صحته أو نفيه، وذلك بناء على النتائج المحصل عليها من بيانات العينة العشوائية المسحوبة من ذلك المجتمع.

أولا: مفاهيم أساسية مرتبطة باختبار الفرضيات

1. الفرض الإحصائي:

هو عبارة عن تخمين أو ادعاء حول المعالم المجهولة لمجتمع أو أكثر، قد يتم قبوله أو رفضه، وذلك بعد اخضاعه للاختبار الإحصائي، باستخدام عينة عشوائية يتم سحبها من المجتمع، فمثلا، إذا ادعى صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات سابقة، أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالمصنع هو 5 كلغ، فإن ذلك يعتبر فرضا إحصائيا، قد يتم قبوله وقد يرفض، ولمعرفة مدى صحة ادعائه فإننا نقوم بسحب عينة عشوائية من الإنتاج الكلي لهذه المادة، ومن ثم نحسب متوسط وزن أكياس مادة السكر بالعينة، ثم نخضع ذلك المتوسط للاختبار الاحصائي، كما سيرد لاحقا، في هذه الحالة فإن معلمة المجتمع المجهولة هي المتوسط الحسابي الحقيقي لأوزان أكياس مادة السكر μ، أما الإحصائية المستخدمة للاختبار فهي متوسط وزن أكياس مادة السكر بالعينة $\bar{X}$. وإذا ادعى من خلال بيانات سابقة أن نسبة أكياس السكر المعيبة بالمصنع هي 2%، ففي هذه الحالة فإن معلمة المجتمع المجهولة هي النسبة الحقيقة لأكياس السكر المعيبة بالمصنع P، أما الإحصائية المستخدمة للاختبار فهي نسبة أكياس السكر المعيبة بالعينة $\hat{p}$، وهكذا بالنسبة لأي معلمة أخرى.

2. فرض العدم والفرض البديل:

لإجراء أي اختبار، فإننا نستخدم فرضين، هما:

أ- فرض العدم:

هو الفرض الذي يريد الباحث اختباره، ويعتقد أنه صحيح إلى أن يثبت عكس ذلك، ويرمز له بالرمز H_0.

ب- الفرض البديل

هو الفرض الذي يقبل كبديل لفرض العدم عند رفض هذا الأخير، ويرمز له بالرمز H_1.

3. الاختبار ثنائي الاتجاه والاختبار أحادي الاتجاه:

يمكن تحديد فرض العدم والفرض البديل حسب طبيعة الاختبار، فقد يكون ثنائي الاتجاه (ذو طرفين أو ذو ذيلين)، وقد يكون أحادي الاتجاه (ذو طرف واحد أو ذو ذيل واحد).

أ- الاختبار ثنائي الاتجاه (ذو طرفين أو ذو ذيلين):

يستعمل هذا الاختبار في حالة اختبار فرض العدم بأن معلمة ما تساوي قيمة معينة، في مقابل فرض بديل مفاده أن تلك المعلمة لا تساوي تلك القيمة المفترضة، ومعنى ذلك أن الفرض البديل يحتمل قيمتين، قيمة أقل من القيمة المفترضة وأخرى أكبر منها، وبالرجوع للمثال السابق، إذا افترضنا أن صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات

سابقة، يدعي أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالمصنع هو 5 كلغ، فإن هذا يعتبر اختبار ثنائي الاتجاه، حيث أن فرض العدم هو أن المتوسط الحقيقي يساوي 5 كلغ، أي: $H_0: \mu = 5$، بينما الفرض البديل هو أن يكون متوسط الوزن لا يساوي 5كلغ، ومعنى ذلك أن متوسط الوزن الحقيقي قد يكون أكبر من 5 كلغ وقد يكون أقل منها، وفي هذه الحالة فإن الفروض تكتب كما يلي:

$$H_0: \mu = 5$$
$$H_1: \mu \neq 5$$

عموما إذا كانت θ معلمة مجهولة وأردنا اجراء اختبار ثنائي الاتجاه بأنها تساوي قيمة ثابتة هي θ_0، فإن الفروض في هذه الحالة تكتب كما يلي:

$$H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

هناك حالة أخرى قد يكون فيها فرض العدم يعبر عن مساواة بين معلمتين، من مجتمعين مختلفين، فمثلا يدعي صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات سابقة، أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالوحدة الإنتاجية الأولى μ_1 يساوي متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالوحدة الإنتاجية الثانية μ_2، فهذا الاختبار يعتبر اختبار ثنائي الاتجاه، حيث أن فرض العدم هو: $H_0: \mu_1 = \mu_2$، الذي يمكن كتابته كما يلي: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$، بينما الفرض البديل هو أن يكون الفرق بين المتوسطين لا يساوي الصفر، ومعنى ذلك أن الفرق بين المتوسطين قد يكون أكبر من الصفر وقد يكون أصغر من الصفر، وفي هذه الحالة فإن الفروض تكتب كما يلي:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad\qquad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \qquad \text{أو} \qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

عموما إذا كانت θ_1 معلمة مجهولة من المجتمع الأول، وθ_2 معلمة مجهولة من المجتمع الثاني، وأردنا اجراء اختبار ثنائي الاتجاه بأن المعلمتين متساويتين، فإن الفروض في هذه الحالة تكتب كما يلي:

$$H_0: \theta_1 = \theta_2 \qquad\qquad H_0: \theta_1 - \theta_2 = 0$$
$$H_1: \theta_1 \neq \theta_2 \qquad \text{أو} \qquad H_1: \theta_1 - \theta_2 \neq 0$$

ب- الاختبار أحادي الاتجاه (ذو طرف واحد أو ذو ذيل واحد):

ب-1- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين:

يستعمل هذا الاختبار في حالة اختبار فرض العدم بأن معلمة ما تقل أو تساوي قيمة معينة، في مقابل فرض بديل مفاده أن تلك المعلمة تفوق تلك القيمة المفترضة، ومعنى ذلك أن الفرض البديل يحتمل قيمة واحدة تقع في الطرف الأيمن من القيمة المفترضة، وبالرجوع للمثال السابق، إذا افترضنا أن صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات سابقة، يدعي أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالمصنع يقل أو يساوي 5 كلغ، فإن هذا يعتبر اختبار أحادي الاتجاه من اليمين، حيث أن فرض العدم هو أن المتوسط الحقيقي يقل أو يساوي 5 كلغ، أي: $H_0: \mu \leq 5$، بينما الفرض البديل هو أن يكون متوسط الوزن يفوق 5كلغ، وفي هذه الحالة فإن الفروض تكتب كما يلي: $H_0: \mu \leq 5$ ، $H_1: \mu > 5$

نستطيع في هذه الحالة أن نكتب فرض العدم بإشارة المساواة فقط، أي: $H_0: \mu = 5$، لأن الفرض البديل يحتوي على إشارة أكبر من فقط، ويفهم ضمنيا من ذلك أن إشارة أقل من يجب أن تكون في فرض العدم حتى ولو لم تذكر صراحة، وعليه يمكن صياغة الفرضين السابقين كما يلي: $H_0: \mu = 5$ ، $H_1: \mu > 5$

عموما إذا كانت θ معلمة مجهولة وأردنا اجراء اختبار أحادي الاتجاه من اليمين، فإن الفروض في هذه الحالة تكتب كما يلي: $H_1: \theta > \theta_0$ ، $H_0: \theta \leq \theta_0$ أو $H_1: \theta > \theta_0$ ، $H_0: \theta = \theta_0$

هناك حالة أخرى قد يكون فيها فرض العدم يعبر عن علاقة بين معلمتين، من مجتمعين مختلفين، فمثلا يدعي صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات سابقة، أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالوحدة الإنتاجية الأولى μ_1 يقل أو يساوي متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالوحدة الإنتاجية الثانية μ_2، فهذا الاختبار يعتبر اختبار أحادي الاتجاه من اليمين، حيث أن فرض العدم هو: $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$، الذي يمكن كتابته كما يلي: $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$، بينما الفرض البديل هو أن يكون الفرق بين المتوسطين يفوق الصفر، وفي هذه الحالة فإن الفروض تكتب كما يلي:

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \qquad H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \qquad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 > \mu_2 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$$

عموما إذا كانت θ_1 معلمة مجهولة من المجتمع الأول، وθ_2 معلمة مجهولة من المجتمع الثاني، وأردنا اجراء اختبار أحادي الاتجاه من اليمين، فإن الفروض في هذه الحالة تكتب كما يلي:

$$H_0: \theta_1 \leq \theta_2 \qquad H_0: \theta_1 - \theta_2 \leq 0 \qquad H_0: \theta_1 - \theta_2 = 0$$
$$H_1: \theta_1 > \theta_2 \quad \text{أو} \quad H_1: \theta_1 - \theta_2 > 0 \quad \text{أو} \quad H_1: \theta_1 - \theta_2 > 0$$

ب-1- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار:

يستعمل هذا الاختبار في حالة اختبار فرض العدم بأن معلمة ما تفوق أو تساوي قيمة معينة، في مقابل فرض بديل مفاده أن تلك المعلمة تقل عن تلك القيمة المفترضة، ومعنى ذلك أن الفرض البديل يحتمل قيمة واحدة تقع في الطرف الأيسر من القيمة المفترضة، وبالرجوع للمثال السابق، إذا افترضنا أن صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات سابقة، يدعي أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالمصنع يفوق أو يساوي 5 كلغ، فإن هذا يعتبر اختبار أحادي الاتجاه من اليسار، حيث أن فرض العدم هو أن المتوسط الحقيقي يفوق أو يساوي 5 كلغ، أي: $H_0: \mu \geq 5$، بينما الفرض البديل هو أن يكون متوسط الوزن يقل عن 5كلغ، وفي هذه الحالة فإن الفروض تكتب كما يلي:

$$H_0: \mu \geq 5 \quad ، \quad H_1: \mu < 5$$

نستطيع في هذه الحالة أن نكتب فرض العدم بإشارة المساواة فقط، أي: $H_0: \mu = 5$، لأن الفرض البديل يحتوي على إشارة أقل من فقط، ويفهم ضمنيا من ذلك أن إشارة أكبر من يجب أن تكون في فرض العدم حتى ولو لم تذكر صراحة، وعليه يمكن صياغة الفرضين السابقين كما يلي: $H_0: \mu = 5$ ، $H_1: \mu < 5$

عموما إذا كانت θ معلمة مجهولة وأردنا اجراء اختبار أحادي الاتجاه من اليسار، فإن الفروض في هذه الحالة تكتب كما يلي: $H_1: \theta < \theta_0$ ، $H_0: \theta \geq \theta_0$ أو $H_1: \theta < \theta_0$ ، $H_0: \theta = \theta_0$

هناك حالة أخرى قد يكون فيها فرض العدم يعبر عن علاقة بين معلمتين، من مجتمعين مختلفين، فمثلا يدعي صاحب مصنع لإنتاج مادة السكر من خلال بيانات سابقة، أن متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالوحدة الإنتاجية الأولى μ_1 يفوق أو يساوي متوسط أوزان أكياس مادة السكر بالوحدة الإنتاجية الثانية μ_2، فهذا الاختبار يعتبر اختبار أحادي الاتجاه من اليسار، حيث أن فرض العدم هو: $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$، الذي يمكن كتابته كما يلي: $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0$،

بينما الفرض البديل هو أن يكون الفرق بين المتوسطين يقل عن الصفر، وفي هذه الحالة فإن الفروض تكتب كما يلي:

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \qquad H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \qquad H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1: \mu_1 < \mu_2 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$$

عموما إذا كانت θ_1 معلمة مجهولة من المجتمع الأول، وθ_2 معلمة مجهولة من المجتمع الثاني، وأردنا اجراء اختبار أحادي الاتجاه من اليسار، فإن الفروض في هذه الحالة تكتب كما يلي:

$$H_0: \theta_1 \geq \theta_2 \qquad H_0: \theta_1 - \theta_2 \geq 0 \qquad H_0: \theta_1 - \theta_2 = 0$$
$$H_1: \theta_1 < \theta_2 \quad \text{أو} \quad H_1: \theta_1 - \theta_2 < 0 \quad \text{أو} \quad H_1: \theta_1 - \theta_2 < 0$$

4- إحصائية الاختبار:

هي متغير عشوائي ذو توزيع احتمالي معلوم عندما يكون فرض العدم صحيحا، حيث تحسب قيمة إحصائية الاختبار من بيانات العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع المدروس، ويتم مقارنتها بالقيمة الحرجة المستخرجة من جداول خاصة من أجل اتخاذ القرار برفض أو قبول فرض العدم H_0.

5- منطقة القبول:

هي المنطقة التي تحتوي على قيم إحصائية الاختبار التي تؤدي إلى قبول فرض العدم H_0 ورفض الفرض البديل H_1.

6- منطقة الرفض:

هي المنطقة التي تحتوي على قيم إحصائية الاختبار التي تؤدي إلى رفض فرض العدم H_0 وقبول الفرض البديل H_1.

7- القيمة الحرجة:

هي القيمة التي تفصل بين منطقتي الرفض والقبول.

عند وقوع قيمة إحصائية الاختبار المحسوبة من بيانات العينة العشوائية المسحوبة في منطقة القبول فإننا نقبل فرض العدم، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة. أما إذا وقعت قيمة إحصائية الاختبار في منطقة الرفض فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وليس ناتجا عن أخطاء المعاينة، بل سببه الاختلاف الحقيقي بين القيمة المفترضة للمعلمة المجهولة والقيمة الحقيقية لها.

تسمى هذه الطريقة المستخدمة في اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية، وهناك طريقة أخرى تعتمد على مجال الثقة تسمى بطريقة مجال الثقة، والتي سنتطرق إليها لاحقا.

عند اتخاذ القرار بقبول أو رفض فرض معين، فإن ذلك القرار لا يعني بالضرورة أنه سليم، بمعنى أن القرار المتخذ يكون أيضا معرضا للخطأ.

8- أنواع الأخطاء:

إذا كانت العينة المسحوبة لا تمثل المجتمع أحسن تمثيل، فإننا نكون بصدد نوعن من الأخطاء، هما:

أ- **الخطأ من النوع الأول:** هو رفض فرض العدم بينما هو في الواقع صحيحا، يرمز له بالرمز α، ويسمى مستوى المعنوية.

ب- **الخطأ من النوع الثاني:** هو قبول فرض العدم بينما هو في الواقع غير صحيح، يرمز له بالرمز β.

يمكن تلخيص الحالات التي يتعرض لها متخذ القرار في الجدول التالي:

جدول (3-1): أنواع الأخطاء

القرار	فرض العدم في الواقع	
	صحيح	خاطئ
قبول	قرار سليم	خطأ من النوع الثاني β
رفض	خطأ من النوع الأول α	قرار سليم

ثانيا: اختبار الفرضيات حول المتوسط الحسابي للمجتمع μ

1- تذكير بتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$:

مما سبق، توصلنا إلى أن أفضل مقدِّر غير متحيز للمتوسط الحسابي للمجتمع μ هو المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$، وأن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة قد يكون توزيع طبيعي وقد يكون توزيع ستودنت، وعليه تكون إحصائية الاختبار المستخدمة في اختبار الفرضيات حول المتوسط الحسابي للمجتمع حسب الحالات التالية:

أ- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}}$

ب- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}}$

ج- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ مجهول، وحجم العينة أقل من 30، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيتوزع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v=n-1$. ، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{T=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}}$

د- إذا كان المتغير المدروس في المجتمع غير موزع طبيعيا، وحجم العينة أكبر من أو يساوي 30: فتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}}$

بالنسبة للخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}}$، فإن علاقته تتغير بحسب طبيعة المجتمع، هل هو محدود أو غير محدود، السحب تم بالإرجاع أو بدون إرجاع، وهو ما تم الاشارة إليه سابقا وبالتفصيل في الفصلين الأول والثاني.

2- اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية:

لو أخذنا مثلا الحالة الأولى، أي أن المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم، وأردنا اختبار فرضية معينة حول المتوسط الحسابي للمجتمع، فإننا نكون أمام حالة من الحالات التالية:

2-1- الاختبار ثنائي الاتجاه: إذا أردنا اختبار فرض أن متوسط المجتمع μ يساوي قيمة ثابتة μ_0، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \mu=\mu_0$ ، $H_1: \mu\neq\mu_0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم.

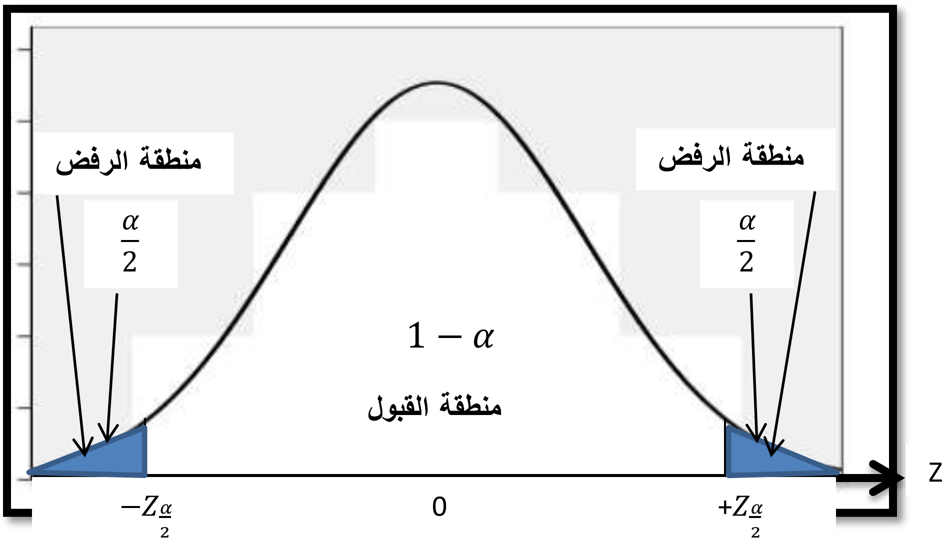
ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة $\bar{X}$ المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة μ_0 المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$، والتي تسمى بـ Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: والتي تمثل مساحة منطقة الرفض، بينما المساحة المتبقية $1-\alpha$ فتمثل مساحة منطقة القبول، أي أننا ننطلق من منطلق أنه لو كان فرض العدم صحيحا في الواقع، فإن $(1-\alpha)100\%$ من المتوسطات ستكون داخل منطقة القبول، وهي نسبة كبيرة جدا تجعلنا واثقين بأن القرار الذي سنتخذه سيكون صائبا، لأنه من النادر الحصول على قيمة للمتوسط الحسابي للعينة تقع خارج منطقة القبول وفرض العدم في الواقع صحيح. عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: بما أن فرض العدم هو أن المتوسط الحقيقي يساوي قيمة ثابتة أي: $H_0: \mu = \mu_0$، بينما الفرض البديل هو أن يكون ذلك المتوسط لا يساوي μ_0، فإن ذلك يعني أن المتوسط الحقيقي قد يكون أكبر من μ_0 وقد يكون أقل منها، وبالتالي فإن منطقة الرفض تكون في الجزئين العلوي والسفلي من المساحة الكلية، ومساحة كل منها تساوي $\frac{\alpha}{2}$، أما المساحة بين هاتين المنطقتين فتمثل منطقة القبول، ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي يمكن استخراج القيمة الجدولية، التي تمثل إحصائية الاختبار النظرية أو القيمة الحرجة، وبما أن هناك منطقتين للرفض فإن ذلك يعني أن هناك قيمتين حرجتين، $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$، نحدهما انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي وباستخدام خاصية التناظر للتوزيع الطبيعي، وهذا يعني أن القيمة الحرجة التي على اليمين هي نفسها القيمة الحرجة على اليسار مع اختلاف الإشارة، والشكل التالي يوضح ذلك:

الشكل(3-1): اختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

و- **اتخاذ القرار المناسب:** وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $|Z_c| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $|Z_c| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين: إذا أردنا اختبار فرض أن متوسط المجتمع μ يساوي أو يقل عن قيمة ثابتة μ_0، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \mu \leq \mu_0$ ، $H_1: \mu > \mu_0$

يمكن صياغة الفرضين السابقين، كما يلي: $H_0: \mu = \mu_0$ ، $H_1: \mu > \mu_0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن المتوسط أكبر من قيمة معينة فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

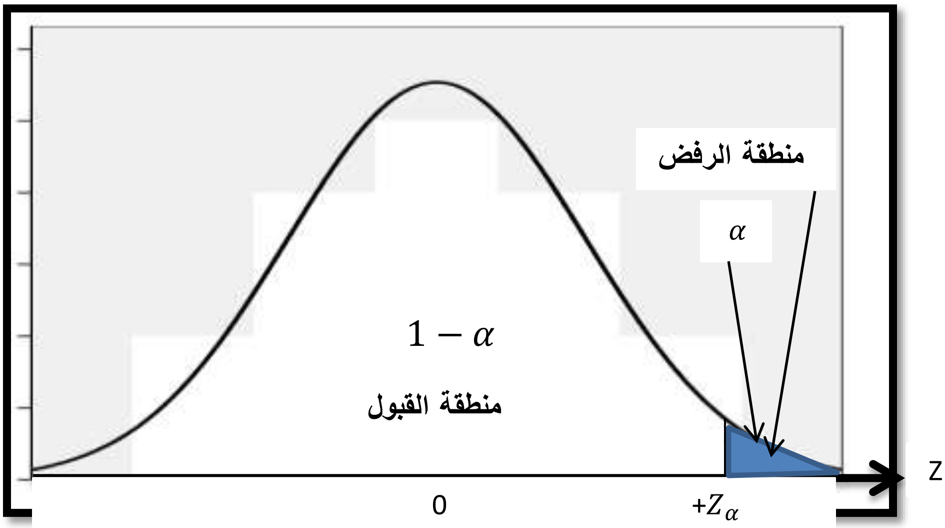
ب- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

ج- **حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:** بتعويض قيمة $\bar{X}$ المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة μ_0 المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$، والتي تسمى بـ Z المحسوبة.

د- **تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α:** عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- **تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:** بما أن فرض العدم هو أن المتوسط الحقيقي يساوي أو يقل عن قيمة ثابتة أي: $H_0: \mu \leq \mu_0$، بينما الفرض البديل هو أن يكون ذلك المتوسط يفوق μ_0، فإن ذلك يعني أن منطقة الرفض تكون في الجزء العلوي من المساحة الكلية، ومساحتها تساوي α، أما المساحة المتبقية على اليسار فتمثل منطقة القبول، ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي يمكن استخراج القيمة الجدولية، التي تمثل إحصائية الاختبار النظرية أو القيمة الحرجة، وبما أن هناك منطقة رفض واحدة فإن ذلك يعني أن هناك قيمة حرجة واحدة Z_α، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي، والشكل التالي يوضح ذلك:

الشكل(3-2): اختبار أحادي الاتجاه من اليمين للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c > Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-3- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار: إذا أردنا اختبار فرض أن متوسط المجتمع μ يساوي أو يزيد عن قيمة ثابتة μ_0، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu \geq \mu_0$ ، $H_1: \mu < \mu_0$

يمكن صياغة الفرضين السابقين، كما يلي: $H_0: \mu = \mu_0$ ، $H_1: \mu < \mu_0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن المتوسط أقل من قيمة معينة فإن فرض العدم يكون أكبر أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: إذا كان المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، بانحراف معياري σ معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

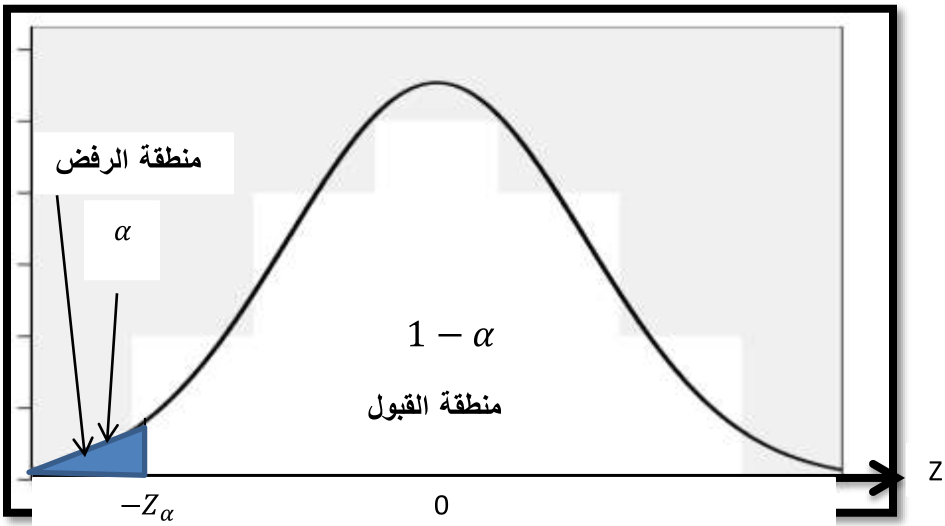
ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة $\bar{X}$ المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة μ_0 المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$، والتي تسمى بـ: Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: بما أن فرض العدم هو أن المتوسط الحقيقي يساوي أو يزيد عن قيمة ثابتة أي: $H_0: \mu \geq \mu_0$، بينما الفرض البديل هو أن يكون ذلك المتوسط يقل عن μ_0، فإن ذلك

يعني أن منطقة الرفض تكون في الجزء السفلي من المساحة الكلية، ومساحتها تساوي α، أما المساحة المتبقية على اليمين فتمثل منطقة القبول، ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي يمكن استخراج القيمة الجدولية، التي تمثل إحصائية الاختبار النظرية أو القيمة الحرجة، وبما أن هناك منطقة رفض واحدة فإن ذلك يعني أن هناك قيمة حرجة واحدة $-Z_\alpha$، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي، والشكل التالي يوضح ذلك:

الشكل(3-3): اختبار أحادي الاتجاه من اليسار للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

و- **اتخاذ القرار المناسب:** وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq -Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c > -Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.

ملاحظة: يتم اتباع نفس الخطوات في باقي الحالات الخاصة باختبار الفرضيات حول المتوسط الحسابي للمجتمع.

مثال1: يدعي مدير مصنع لصناعة المسامير أن صناعة هذه المسامير في مصنعه دقيقة جدا، ومطابقة للمواصفات، وأن المتوسط الحسابي لأطوال كل المسامير المنتجة يساوي 10 سم، بتباين يساوي 2,25. للتأكد من صحة ادعائه سحبت عينة عشوائية من الإنتاج الكلي للمصنع تحتوي على 25 مسمارا، فكان متوسط أطوالها هو 9,92 سم، علما أن أطوال المسامير تتبع التوزيع الطبيعي. اختبر صحة ادعاء مدير المصنع باستخدام مستوى معنوية 5%.

الحل:

أ- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \mu = 10$ ، $H_1: \mu \neq 10$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

ب- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** بما أن المتغير المدروس في المجتمع – أطوال المسامير - موزع طبيعيا، بانحراف معياري معلوم، $\sigma = \sqrt{2,25} = 1,5\ cm$، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتوزع طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{9,92-10}{\frac{1,5}{\sqrt{25}}} = \frac{-0,08}{0,3} = -0,267$،

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05$

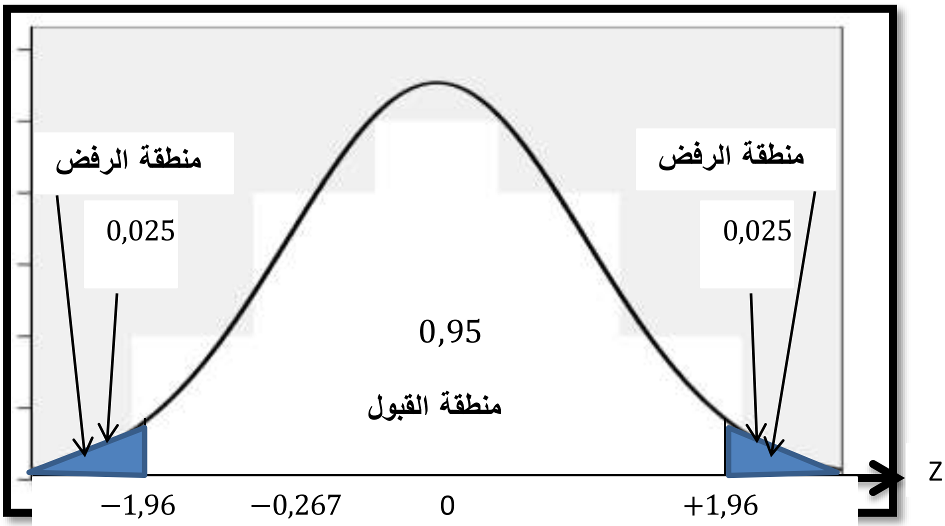
هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025 \Rightarrow Z_{0,025} = 1,96$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $|-0,267| < 1,96$، أي: $|Z_c| < Z_{\frac{\alpha}{2}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل ادعاء صاحب المصنع بأن المتوسط الحسابي لأطوال كل المسامير المنتجة يساوي 10 سم، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة.

الشكل(3-4): اختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

مثال2: في دراسة إحصائية سابقة، وجد أن متوسط الإنتاج السنوي للمنْتِج في مصنع للسجاد هو 14 سجادة، فإذا اتبع هذا المصنع أسلوب جديد للإنتاج واخترنا عينة عشوائية تحتوي على 9 منتجين، وكان إنتاجهم السنوي: 11، 16، 14، 11، 15، 19، 17، 23، 18، بافتراض أن إنتاج المنْتِج سنويا يتوزع طبيعيا. اختبر ما إذا كانت الطريقة الجديدة قد أدت إلى تغيير الوسط الحسابي للإنتاج السنوي لكل المنتجين، وذلك باستخدام مستوى معنوية 10%.

الحل:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu = 14$ ، $H_1: \mu \neq 14$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمع – الإنتاج السنوي للمنْتِج من السجاد - موزع طبيعيا، بانحراف معياري مجهول، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 9 - 1 = 8$ ، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$T_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{11+16+14+11+15+19+17+23+18}{9} = \frac{144}{9} = 16$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{118}{8}} = 3{,}84$$

$$T_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{16-14}{\frac{3{,}84}{\sqrt{8}}} = \frac{-0{,}08}{0{,}3} = 1{,}80$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}10$

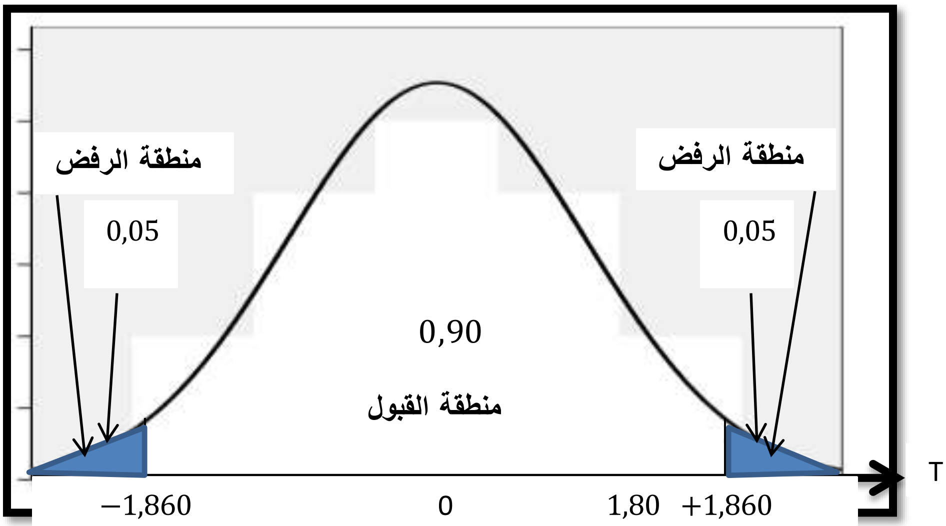
هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0{,}10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}10}{2} = 0{,}05 \Rightarrow T_{0{,}05} = 1{,}860$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $|1{,}80| < 1{,}860$، أي: $|T_c| < T_{\frac{\alpha}{2}}$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل أن الطريقة الجديدة لم تؤد إلى تغيير الوسط الحسابي للإنتاج السنوي لكل المنتجين، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة.

الشكل(3-5) : اختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

مثال3: يدعي مدير مصنع لصناعة المصابيح الكهربائية أن متوسط مدة الاشتغال لكل المصابيح المنتجة يفوق 900 ساعة، بانحراف معياري يساوي 100 ساعة. للتأكد من صحة ادعائه سحبت عينة عشوائية من الإنتاج الكلي للمصنع تحتوي على 121 مصباحا، فكان متوسط مدة الاشتغال بها هو 960 ساعة، علما أن مدة اشتغال المصابيح تتبع التوزيع الطبيعي. اختبر صحة ادعاء مدير المصنع باستخدام مستوى معنوية 5%.

الحل:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu = 900$ ، $H_1: \mu > 900$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليمين.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمع – مدة اشتغال المصابيح - موزع طبيعيا، بانحراف معياري معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{960-900}{\frac{100}{\sqrt{121}}} = 6{,}6$

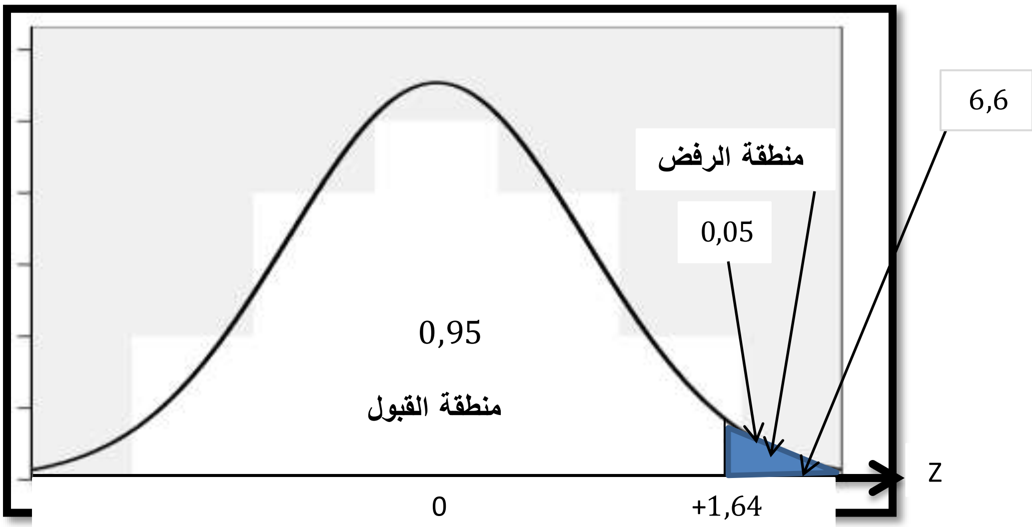
د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow Z_{0{,}05} = 1{,}64$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $6{,}6 > 1{,}64$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل ادعاء مدير المصنع بأن متوسط مدة الاشتغال لكل المصابيح المنتجة يفوق 900 ساعة، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وليس ناتجا عن أخطاء المعاينة.

الشكل(3-6): اختبار أحادي الاتجاه من اليمين للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

مثال4: يعتقد مدير مدرسة ابتدائية أن متوسط أوزان التلاميذ بها يساوي أو يفوق 35 كلغ، وقصد التأكد من صحة اعتقاده سحبنا عينة عشوائية حجمها 17 تلميذا، فوجدنا أن متوسطها يساوي 33 كلغ وانحرافها المعياري يساوي 3 كلغ، فإذا كانت أوزان تلاميذ المدرسة تتبع توزيعا طبيعيا، اختبر صحة هذا الاعتقاد عند مستوى معنوية 1%.

الحل:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu = 35$ ، $H_1: \mu < 35$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمع – أوزان التلاميذ - موزع طبيعيا، بانحراف معياري مجهول، وحجم العينة أقل من 30، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية:

$v = n - 1 = 17 - 1 = 16$، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $T_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{33-35}{\frac{3}{\sqrt{17-1}}} = -2,67$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,01$

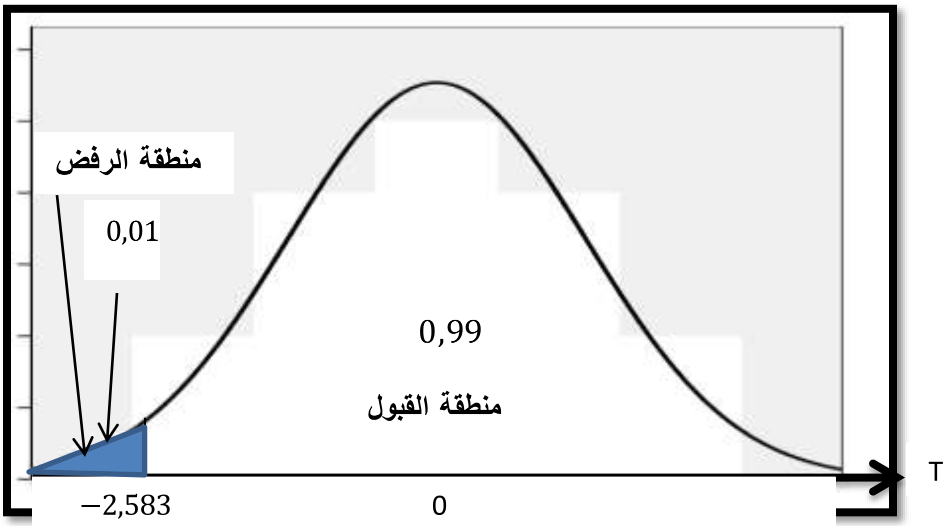
هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0,01 \Rightarrow T_{0,01} = -2,583$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $-2,583 > -2,67$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أننا نرفض ادعاء مدير المدرسة بأن متوسط أوزان التلاميذ بها يساوي أو يفوق 35 كلغ، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وهو ليس ناتج عن أخطاء المعاينة.

الشكل(3-7): اختبار أحادي الاتجاه من اليسار للمتوسط الحسابي



المصدر: إعداد الباحث.

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام مستوى المعنوية الناتج $(P - Value)$، حيث تمثل هاته الأخيرة احتمال أن تأخذ إحصائية الاختبار قيمة تساوي القيمة المشاهدة أو أي قيمة أخرى تؤيد الفرض البديل أكثر من القيمة المشاهدة، وذلك بافتراض أن فرض العدم صحيح، وهي عبارة عن مساحة قد تكون أكبر أو تساوي أو تقل عن مستوى المعنوية α. فإذا افترضنا أن إحصائية الاختبار تتبع التوزيع الطبيعي فإن مستوى المعنوية الناتج $(P - Value)$ يحسب حسب الحالات الممكنة التالية:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** $P - Value = P(Z \leq -Z_c) + P(Z \geq Z_c) = 2P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** $P - Value = P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** $P - Value = P(Z \leq -Z_c)$

وفي جميع الحالات السابقة الذكر، فإننا نتخذ القرار بقبول فرض العدم أو رفضه كما يلي:

- إذا كان: $P - Value \geq \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0؛
- إذا كان: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0.

مثال5: بالرجوع إلى الأمثلة 2، 3، و4، أحسب قيمة مستوى المعنوية الناتج ثم اختبر صحة الفرضيات.

- **بالنسبة للمثال2:**

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه، و$\alpha = 0{,}10$ ، والقيمة المشاهدة $T_c = 1{,}80$، و$v = 8$، فإن:

$$P - Value = 2P(T \geq T_c) = 2P(T \geq 1{,}80)$$

من خلال جدول توزيع ستودنت بالملحق رقم 3، نلاحظ أن القيمة 1,80 تقع بين القيمتين 1,397 و1,860، وهذا يبين أن المساحة على يمين 1,80 تفوق 0,05 وبضرب هذه المساحة في 2 نجد أنها تفوق 0,1، أي أنها تفوق α، وبالتالي نتخذ القرار التالي: بما أن: $P - Value > \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

- **بالنسبة للمثال3:**

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين ، و$\alpha = 0{,}05$ ، والقيمة المشاهدة $Z_c = 6{,}6$، فإن:

$$P - Value = P(Z \geq Z_c) = P(Z \geq 6{,}6) = P(Z \leq -6{,}6) \approx 0$$

بما أن: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

- **بالنسبة للمثال4:**

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار ، و$\alpha = 0{,}01$ ، والقيمة المشاهدة $T_c = -2{,}67$، و $v = 16$، فإن:

$$P - Value = P(T \leq -T_c) = P(T \leq -2{,}67) = P(T \geq 2{,}67) = 0{,}0038$$

من خلال جدول توزيع ستودنت بالملحق رقم 3، نلاحظ أن القيمة $(-2{,}67)$ تقع بين القيمتين $(-2{,}583)$ و$(-2{,}921)$، وهذا يبين أن المساحة على يسار $(-2{,}67)$ تقل عن 0,01، أي أنها تقل عن α، وبالتالي نتخذ القرار التالي:

بما أن: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- اختبار الفرضيات بطريقة مجال الثقة:

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام طريقة مجال الثقة، وذلك ببناء مجال الثقة للمعلمة المجهولة μ – الذي سبق وأن تم التفصيل فيه في الفصل الثاني –، فإذا كانت قيمة μ_0 المفترضة تنتمي لمجال الثقة فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، وإذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لمجال الثقة فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. فإذا افترضنا أن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة يتبع التوزيع الطبيعي، وتباين المجتمع معلوم، فإنه يمكن اختبار فرض معين حول القيمة μ_0 في هذه الحالة، كما يلي:

أ- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** مجال الثقة هو: $I_n = \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

إذا كان: $\mu_0 \in \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\mu_0 \notin \left[\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ب- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين: نقوم بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة العلوية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يسار القيمة الحرجة العلوية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\mu_0 \geq \bar{X} - Z_\alpha.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\mu_0 < \bar{X} - Z_\alpha.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ج- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار: نقوم بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\mu_0 \leq \bar{X} + Z_\alpha.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\mu_0 > \bar{X} + Z_\alpha.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

مثال6: بالرجوع إلى الأمثلة 2، 3، و4، اختبر صحة الفرضيات باستخدام فترة الثقة.

- بالنسبة للمثال2:

بما أن المتغير المدروس في المجتمع – الإنتاج السنوي للمنتِج من السجاد - موزع طبيعيا، بانحراف معياري مجهول، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v = 8$ ، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$.

وبما أن الاختبار ثنائي الاتجاه و $\alpha = 0{,}10$، فإن مجال الثقة هو:

$$I_n = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n-1}} \quad ; \quad \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$$

$$I_n = \left[16 - t_{0{,}05}.\frac{3{,}84}{\sqrt{9-1}} \quad ; \quad 16 + t_{0{,}05}.\frac{3{,}84}{\sqrt{9-1}}\right]$$

$$I_n = \left[16 - 1{,}860.\frac{3{,}84}{\sqrt{8}} \quad ; \quad 16 + 1{,}860.\frac{3{,}84}{\sqrt{8}}\right]$$

$$I_0 = [13{,}47 \quad ; \quad 18{,}52\,]$$

نلاحظ أن: $(\mu_0 = 14) \in I_0 = [13{,}47 \quad ; \quad 18{,}52\,]$، وبالتالي نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

- بالنسبة للمثال3:

بما أن المتغير المدروس في المجتمع – مدة اشتغال المصابيح - موزع طبيعيا، بانحراف معياري معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين و $\alpha = 0{,}05$، فإننا نكتفي بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة، كما يلي:

$$\bar{X} - Z_\alpha.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 960 - Z_{0{,}05}.\frac{100}{\sqrt{121}} = 960 - 1{,}64.\frac{100}{\sqrt{121}} = 945{,}09$$

نلاحظ أن: $(\mu_0 = 900) < 945{,}09$، وبالتالي نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

- بالنسبة للمثال4:

بما أن المتغير المدروس في المجتمع – أوزان التلاميذ - موزع طبيعيا، بانحراف معياري مجهول، وحجم العينة أقل من 30، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية: $v = n - 1 = 17 - 1 = 16$ ، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار و $\alpha = 0,01$، فإننا نكتفي بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة، كما يلي:

$$\bar{X} + t_{\alpha}.\frac{s}{\sqrt{n}} = 33 - t_{0,01}.\frac{3}{\sqrt{17-1}} = 33 + 2,583.\frac{3}{\sqrt{16}} = 34,94$$

نلاحظ أن: $(\mu_0 = 35) > 34,94$، وبالتالي نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

ثالثا: اختبار الفرضيات حول الفرق بين متوسطين حسابيين لمجتمعين $\mu_1 - \mu_2$

1- تذكير بتوزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

مما سبق، توصلنا إلى أن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ قد يكون توزيع طبيعي وقد يكون توزيع ستودنت، وعليه تكون إحصائية الاختبار المستخدمة في اختبار الفرضيات حول الفرق بين متوسطين حسابيين للمجتمع حسب الحالات التالية:

أ- إذا كان المجتمعين مستقلين (العينتين المسحوبتين غير مرتبطتين):

- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمعين يتوزع طبيعيا بإنحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يتوزع توزيعا طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

- إذا كان المتغير العشوائي المدروس لا يتوزع طبيعيا في كلا المجتمعين، بإنحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين، وحجم العينتين كبير، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فإنه حسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يتوزع توزيعا طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$

- إذا كان الانحرافين المعياريين σ_1 و σ_2 مجهولين، وحجم العينتين كبير، أي $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$، فإنه حسب نظرية النهاية المركزية، توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$، يتوزع توزيعا طبيعيا، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$

- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمعين يتوزع طبيعيا بانحرافين معياريين مجهولين، وحجم أحد العينتين على الأقل صغير، والانحرافين المعياريين المجهولين متساويين، أي $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v = n_1 + n_2 - 2$، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

- إذا كان المتغير العشوائي المدروس في المجتمعين يتوزع طبيعيا بانحرافين معياريين مجهولين، وحجم أحد العينتين على الأقل صغير، والانحرافين المعياريين المجهولين غير متساويين، $\sigma_1 \neq \sigma_2$، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية: $v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$،

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}}$

بالنسبة للخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، فإن علاقته تتغير بحسب طبيعة المجتمع، هل هو محدود أو غير محدود، السحب تم بالإرجاع أو بدون إرجاع، وهو ما تم الاشارة إليه سابقا وبالتفصيل في الفصلين الأول والثاني.

ب- إذا كان المجتمعين غير مستقلين (العينتين المسحوبتين مرتبطتين):

- إذا كان حجم العينتين المسحوبتين $n \geq 30$، فإن توزيع المعاينة للمتوسط الفروق $\bar{D}$ يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{Z = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\sigma_{\bar{D}}}}$، وبما أن الانحراف المعياري للفروق $\sigma_{\bar{D}}$ يكون مجهولا، فيمكن تقديره بواسطة الانحراف المعياري لفروق العينتين المسحوبتين $\hat{\sigma}_{\bar{D}}$. حيث: $\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{s_{D_i}}{\sqrt{n}}$ و $s_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$، وبالتالي تصبح الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{Z = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}}$.

- إذا كان حجم العينتين المسحوبتين $n < 30$، فإن توزيع المعاينة لمتوسط الفروق $\bar{D}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية $v = n - 1$، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{T = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\sigma_{\bar{D}}}}$. وبما أن الانحراف المعياري للفروق $\sigma_{\bar{D}}$ يكون مجهولا، فيمكن تقديره بواسطة الانحراف المعياري لفروق العينتين المسحوبتين $\hat{\sigma}_{\bar{D}}$. حيث: $\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}$ و $s_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$،

وبالتالي تصبح الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\boldsymbol{T = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}}$.

2- اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية:

لو أخذنا مثلا الحالة الأولى، أي أن المتغير العشوائي المدروس في مجتمعين مستقلين يتوزع طبيعيا بإنحرافين معياريين σ_1 و σ_2 معلومين، وأردنا اختبار فرضية معينة حول الفرق ما بين المتوسطين الحسابيين للمجتمعين، فإننا نكون أمام حالة من الحالات التالية:

2-1- الاختبار ثنائي الاتجاه: إذا أردنا اختبار فرض أن المتوسطين الحسابيين للمجتمعين μ_1 و μ_2 متساويين، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ، $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ، $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$

ج- **حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:** بتعويض قيمتي $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $\mu_1 - \mu_2 = 0$ المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-0}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، والتي تسمى بـ: Z المحسوبة.

د- **تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α:** عادة ما تكون: $\alpha = 0,01$ أو $\alpha = 0,05$ أو $\alpha = 0,1$

ه- **تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:** توجد قيمتين حرجتين، $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$، نحددهما انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي وباستخدام خاصية التناظر للتوزيع الطبيعي، وهذا يعني أن القيمة الحرجة التي على اليمين هي نفسها القيمة الحرجة على اليسار مع اختلاف الإشارة.

و- **اتخاذ القرار المناسب:** وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $|Z_c| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $|Z_c| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-2- **الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** إذا أردنا اختبار فرض أن متوسط المجتمع الأول μ_1 يساوي أو يقل عن متوسط المجتمع الثاني μ_2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ، $H_1: \mu_1 > \mu_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي:

$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ ، $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ أو $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ، $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن الفرق ما بين المتوسطين أكبر من الصفر فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

ب- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$

ج- **حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:** بتعويض قيمتي $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $\mu_1 - \mu_2 = 0$ المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-0}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، والتي تسمى بـ: Z المحسوبة.

د- **تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α:** عادة ما تكون: $\alpha = 0,01$ أو $\alpha = 0,05$ أو $\alpha = 0,1$

ه- **تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:** توجد قيمة حرجة واحدة Z_α، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي.

و- **اتخاذ القرار المناسب:** وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.

- إذا كان: $Z_c > Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-3- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار: إذا أردنا اختبار فرض أن متوسط المجتمع الأول μ_1 يساوي أو يفوق متوسط المجتمع الثاني μ_2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ ، $H_1: \mu_1 < \mu_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي:

$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ ، $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ أو $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ، $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن الفرق ما بين المتوسطين أقل من الصفر فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $\mu_1 - \mu_2 = 0$ المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-0}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$، والتي تسمى بـ: Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة $-Z_\alpha$، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \geq -Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c < -Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

ملاحظة: يتم اتباع نفس الخطوات في باقي الحالات الخاصة باختبار الفرضيات حول الفرق ما بين متوسطين حسابيين لمجتمعين.

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام مستوى المعنوية الناتج $(P - Value)$، فإذا افترضنا أن إحصائية الاختبار تتبع التوزيع الطبيعي فإن مستوى المعنوية الناتج $(P - Value)$ يحسب حسب الحالات الممكنة التالية:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** $P - Value = P(Z \leq -Z_c) + P(Z \geq Z_c) = 2P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** $P - Value = P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** $P - Value = P(Z \leq -Z_c)$

وفي جميع الحالات السابقة الذكر، فإننا نتخذ القرار بقبول فرض العدم أو رفضه كما يلي:

- إذا كان: $P - Value \geq \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0؛
- إذا كان: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0.

2- اختبار الفرضيات بطريقة مجال الثقة:

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام طريقة مجال الثقة، وذلك ببناء مجال الثقة للفرق ما بين متوسطي المجتمعين المجهول – الذي سبق وأن تم التفصيل فيه في الفصل الثاني –، فإذا كانت قيمة الفرق المفترضة تنتمي لمجال الثقة فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، وإذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لمجال الثقة فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. فإذا افترضنا أن توزيع المعاينة للفرق ما بين متوسطين حسابيين لعينتين يتبع التوزيع الطبيعي، وتبايني المجتمعين معلومين، فإنه يمكن اختبار فرض معين حول الفرق $\left(\mu_1 - \mu_2\right)$ في هذه الحالة، كما يلي:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** مجال الثقة هو:

$$\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \quad ; \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]$$

إذا كان: $\mu_1 - \mu_2 \in I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \quad ; \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\mu_1 - \mu_2 \notin I_n = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} \quad ; \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}\right]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** نقوم بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة العلوية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يسار القيمة الحرجة العلوية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\mu_1 - \mu_2 \geq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\alpha}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\alpha}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** نقوم بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\alpha}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\mu_1 - \mu_2 > (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\alpha}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ملاحظة: جميع الحالات السابقة لاختبار الفرضيات الخاصة بالفرق بين متوسطين حسابيين لمجتمعين تمت على أساس فرض العدم يساوي الصفر، يساوي أو يفوق الصفر، يساوي أو يقل عن الصفر، ويمكن أيضا اختبار أن الفرق بين متوسطين يساوي، يساوي أو يفوق، يساوي أو يقل عن قيمة معينة وليس الصفر فقط، باتباع نفس الخطوات السابقة.

مثال7: إذا كانت الأجور الشهرية لـ 600 عاملا في الشركة A تتوزع طبيعيا بانحراف معياري يساوي 4500 دج، والأجور الشهرية لـ 800 عاملا في الشركة B تتوزع طبيعيا بانحراف معياري يساوي 4200 دج، وسحبنا عينتين مستقلتين بدون إرجاع، العينة الأولى من الشركة A، حجمها 64 عاملا، وجدنا أن متوسطها الحسابي يساوي 30000 دج، والعينة الثانية من

الشركة B حجمها 81 عاملا، وجدنا أن متوسطها الحسابي يساوي 29400 دج. اختبر صحة فرضية أن متوسطي الأجر الشهري للشركتين متساوي، بطريقة مستوى المعنوية، وطريقة مستوى المعنوية الناتج، وطريقة مجال الثقة، عند مستوى المعنوية 5%.

الحل:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu_A = \mu_B$ ، $H_1: \mu_A \neq \mu_B$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ ، $H_1: \mu_A - \mu_B \neq 0$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمعين – الأجور الشهرية - موزع طبيعيا، بانحرافين معياريين معلومين، فإن الفرق ما بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}$$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 30000 - 29400 = 600\ DA$$

$$\mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 0$$

بما أن المجتمعين محدودين، والسحب تم دون ارجاع، و $\frac{n_A}{N_A} = \frac{64}{600} = 0,11 > 0,05$

و $\frac{n_B}{N_B} = \frac{81}{800} = 0,10 > 0,05$، فإن:

$$\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}\left(\frac{N_A - n_A}{N_A - 1}\right) + \frac{\sigma_B^2}{n_B}\left(\frac{N_B - n_B}{N_B - 1}\right)} = \sqrt{\frac{(4500)^2}{64}\left(\frac{600-64}{600-1}\right) + \frac{(4200)^2}{81}\left(\frac{800-81}{800-1}\right)}$$

$$\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = 692,17\ DA$$

$$Z_c = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}} = \frac{600-0}{692,17} = 0,87$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025 \Rightarrow Z_{0,025} = 1,96$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $|0,87| < 1,96$ أي: $|Z_c| < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل أن متوسطي الأجر الشهري للشركتين متساوي، وأن الفرق ما بين الفرق الحقيقي لمتوسطي المجتمعين والفرق بين المتوسطين المقدرين من بيانات العينتين هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه، و $\alpha = 0,05$ ، والقيمة المشاهدة $Z_c = 0,87$، فإن:

$$P - Value = 2P(Z \geq Z_c) = 2P(Z \geq 0{,}87) = 2P(Z \leq -0{,}87) = 2(0{,}1922) = 0{,}3844$$

بما أن: $P - Value > \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه و $\alpha = 0{,}05$، فإن مجال الثقة هو:

$$I_n = \left[(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} \quad ; \quad (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}\right]$$

$$I_n = [600 - 1{,}96(692{,}17) \quad ; \quad 600 + 1{,}96(692{,}17)]$$

$$I_0 = [-756{,}65 \quad ; \quad 1956{,}65\,]$$

نلاحظ أن: $(\mu_A - \mu_B = 0) \in I_0 = [-756{,}65 \quad ; \quad 1956{,}65\,]$، وبالتالي نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

مثال8: أخذت عينتان من مجتمعين طبيعيين مستقلين، والجدول التالي يبين بعض احصاءاتها:

	حجم العينة	متوسط العينة	تباين العينة
المجتمع الأول A	5	5,8	3,7
المجتمع الثاني B	6	9,33	7,076

يدعي أحد الباحثين أن متوسط المجتمع الأول أقل من متوسط المجتمع الثاني، بافتراض أن الانحرافين المعياريين الحقيقيين المجهولين للمجتمعين متساويين. اختبر صحة هذا الادعاء عند مستوى المعنوية 5%. بطريقة مستوى المعنوية، ومستوى المعنوية الناتج، ومجال الثقة.

الحل:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \mu_A = \mu_B$ ، $H_1: \mu_A < \mu_B$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ ، $H_1: \mu_A - \mu_B < 0$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

ب- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** بما أن المتغير المدروس في المجتمعين موزع طبيعيا، بانحرافين معياريين مجهولين ومتساويين وحجم العينتين صغير، فإن الفرق ما بين متوسطي العينتين يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية:

$$v = n_1 + n_2 - 2 = 6 + 5 - 2$$

$$\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \sqrt{S_P^2\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}$$

$$S_P^2 = \frac{(n_A-1)S_A^2 + (n_B-1)S_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{(5-1)(3{,}7)+(6-1)(7{,}076)}{5+6-2} = 5{,}57$$

$= 9$، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \dfrac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}$

ج- **حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:**

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 5{,}8 - 9{,}33 = -3{,}53$$

$$\mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 0$$

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}=\sqrt{5{,}57\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)}=1{,}43$$

$$T_c=\frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}=\frac{-3{,}53-0}{1{,}43}=-2{,}47$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha=0{,}05$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha=0{,}05\Rightarrow T_{0,05}=-1{,}833$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $-2{,}47<-1{,}833$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل ادعاء الباحث بأن متوسط المجتمع الأول أقل من متوسط المجتمع الثاني ، وأن الفرق ما بين الفرق الحقيقي لمتوسطي المجتمعين والفرق بين المتوسطين المقدرين من بيانات العينتين هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وهو ليس ناتج عن أخطاء المعاينة.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار، و$\alpha=0{,}05$ ، والقيمة المشاهدة $T_c=-2{,}47$، و $v=9$، فإن:

$$P-Value\ =P(T\le T_c)=P(T\le -2{,}47)=0{,}3844$$

من خلال جدول توزيع ستودنت بالملحق رقم 3، نلاحظ أن القيمة $(-2{,}47)$ تقع بين القيمتين $(-2{,}262)$ و $(-2{,}821)$، وهذا يبين أن وهذا يبين أن المساحة على يسار $(-2{,}67)$ تقل عن 0,05، أي أنها تقل عن α، وبالتالي نتخذ القرار التالي: بما أن: $P-Value\ <\alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار و $\alpha=0{,}05$، و $v=9$، فإننا نكتفي بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة، كما يلي: $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{0,05}.\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=-3{,}53+1{,}833(1{,}43)=-0{,}91$

نلاحظ أن: $(\mu_A-\mu_B=0)>-0{,}91$، وبالتالي نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

مثال9: البيانات التالية تمثل علامات 6 طلبة في مقياس الإحصاء3، قبل وبعد استخدام طريقة جديدة في المراجعة.

الطالب	1	2	3	4	5	6
قبل (A)	14	14	13	14	12	14
بعد (B)	15	16	16	17	14	18

المطلوب: هل ساهمت الطريقة الجديدة المتبعة في المراجعة في جعل متوسط علامات الطلبة أكبر من متوسطهم قبل اتباعها، عند مستوى معنوية 10%، علما أن علامات الطلبة تتبع التوزع الطبيعي.

الحل:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0:\ \mu_{\bar{D}}=0$ ، $H_1:\ \mu_{\bar{D}}>0$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليمين.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس موزع طبيعيا، والمجتمعين غير مستقلين (العينتين المسحوبتين مرتبطتين)، وحجم العينتين المسحوبتين $n < 30$، فإن توزيع المعاينة لمتوسط الفروق $\bar{D}$ يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 6 - 1 = 5$.

وبما أن طبيعة توزيع $\bar{D}$ هو توزيع ستودنت، فإن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\sigma_{\bar{D}}}$. وبما أن الانحراف المعياري للفروق $\sigma_{\bar{D}}$ يكون مجهولا، فيمكن تقديره بواسطة الانحراف المعياري لفروق العينتين المسحوبتين $\hat{\sigma}_{\bar{D}}$. حيث:

$\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{s_{D_i}}{\sqrt{n-1}}$ و $s_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$، وبالتالي تصبح الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}$.

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

الطالب	1	2	3	4	5	6	المجموع
قبل (A)	14	14	13	14	12	14	/
بعد (B)	15	16	16	17	14	18	/
D_i	1	2	3	3	2	4	15
$(D_i - \bar{D})^2$	2,25	0,25	0,25	0,25	0,25	2,25	5,5

$$\bar{D} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{15}{6} = 2{,}5$$

$$s_{D_i} = \sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{5{,}5}{5}} = 1{,}05$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{D}} = \frac{1{,}05}{\sqrt{6-1}} = 0{,}47$$

$$T_c = \frac{\bar{D}-\mu_{\bar{D}}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{2{,}5-0}{0{,}47} = 5{,}32$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}10$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$v = 5 \quad , \quad \alpha = 0{,}10 \Rightarrow T_{0,10} = 1{,}476$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $5{,}32 > 1{,}476$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل أن الطريقة الجديدة المتبعة في المراجعة ساهمت في جعل متوسط علامات الطلبة أكبر من متوسطهم قبل اتباعها.

رابعا: اختبار الفرضيات حول نسبة المجتمع P

1- تذكير بتوزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$:

مما سبق، توصلنا إلى أن أفضل مقدّر غير متحيز للنسبة الحقيقية لظاهرة معينة في المجتمع P، هو نسبة تلك الظاهرة في العينة $\hat{p}$، وأنه إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمع ما، وحجم العينة المسحوبة كبيرا، أي: $n \geq 30$، فتوزيع المعاينة لنسبة العينة $\hat{p}$ سيقترب من التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\hat{p}-P}{\sigma_{\hat{p}}}$

بالنسبة للخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}}$، فإن علاقته تتغير بحسب طبيعة المجتمع، هل هو محدود أو غير محدود، السحب تم بالإرجاع أو بدون إرجاع، وهو ما تم الاشارة إليه سابقا وبالتفصيل في الفصلين الأول والثاني.

2- اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية:

لو أردنا اختبار فرضية معينة حول النسبة الحقيقية لظاهرة ما في للمجتمع، فإننا نكون أمام حالة من الحالات التالية:

2-1- الاختبار ثنائي الاتجاه: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية لظاهرة ما في المجتمع P تساوي قيمة ثابتة P_0، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P = P_0$ ، $H_1: P \neq P_0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{\hat{p}-P}{\sigma_{\hat{p}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة $\hat{p}$ المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة P_0 المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$، والتي تسمى بـ Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمتين حرجتين، $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$، نحدهما انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي وباستخدام خاصية التناظر للتوزيع الطبيعي، وهذا يعني أن القيمة الحرجة التي على اليمين هي نفسها القيمة الحرجة على اليسار مع اختلاف الإشارة.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $|Z_c| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $|Z_c| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-2-الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية لظاهرة ما في المجتمع P تساوي أو تقل عن قيمة ثابتة P_0، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P \leq P_0$ ، $H_1: P > P_0$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: P = P_0$ ، $H_1: P > P_0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية أكبر من قيمة معينة فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{\hat{p}-P}{\sigma_{\hat{p}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة $\hat{p}$ المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة P_0 المفترضة، وقيمة

الخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$، والتي تسمى بـ Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0,01$ أو $\alpha = 0,05$ أو $\alpha = 0,1$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة Z_α، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c > Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-3-الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية لظاهرة ما في المجتمع P تساوي أو تزيد عن قيمة ثابتة P_0، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P \geq P_0$ ، $H_1: P < P_0$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: P = P_0$ ، $H_1: P < P_0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية أقل من قيمة معينة فإن فرض العدم يكون أكبر أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{\hat{p}-P}{\sigma_{\hat{p}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمة $\hat{p}$ المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة P_0 المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}}$، فنحصل على: $Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$، والتي تسمى بـ Z المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0,01$ أو $\alpha = 0,05$ أو $\alpha = 0,1$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة $-Z_\alpha$، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq -Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c > -Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام مستوى المعنوية الناتج $(P - Value)$، حيث يحسب حسب الحالات الممكنة التالية:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** $P - Value = P(Z \leq -Z_c) + P(Z \geq Z_c) = 2P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** $P - Value = P(Z \geq Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** $P - Value = P(Z \leq -Z_c)$

وفي جميع الحالات السابقة الذكر، فإننا نتخذ القرار بقبول فرض العدم أو رفضه كما يلي:

- إذا كان: $P-Value \geq \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0؛
- إذا كان: $P-Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0.

3- اختبار الفرضيات بطريقة مجال الثقة:

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام طريقة مجال الثقة، وذلك ببناء مجال الثقة للمعلمة المجهولة P – الذي سبق وأن تم التفصيل فيه في الفصل الثاني –، فإذا كانت قيمة P_0 المفترضة تنتمي لمجال الثقة فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، وإذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لمجال الثقة فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. يمكن اختبار فرض معين حول القيمة P_0 في هذه الحالة، كما يلي:

أ- في حالة اختبار ثنائي الاتجاه: مجال الثقة هو: $I_n = \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}} \quad ; \quad \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}}\right]$

إذا كان: $P_0 \in \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}} \quad ; \quad \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}}\right]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $P_0 \notin \left[\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}} \quad ; \quad \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}}\right]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ب- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين: نقوم بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة العلوية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يسار القيمة الحرجة العلوية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $P_0 \geq \hat{p} - Z_{\alpha}.\sigma_{\hat{p}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $P_0 < \hat{p} - Z_{\alpha}.\sigma_{\hat{p}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ج- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار: نقوم بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $P_0 \leq \hat{p} + Z_{\alpha}.\sigma_{\hat{p}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $P_0 > \hat{p} + Z_{\alpha}.\sigma_{\hat{p}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

مثال10: وُجِدَ في مدينة ما أن نسبة الأمية للأشخاص الذين أعمارهم فوق 25 سنة هو 12,60%، فتم اعتماد برنامج جديد للقضاء على هذه الظاهرة، وللتأكد من أن البرنامج ساهم في تخفيض نسبة الأمية، اختيرت عشوائيا عينة من 200 شخص يقطنون بتلك المدينة، فوجد أن منهم 15 شخصا أميا. اختبر مدى نجاعة البرنامج عند مستوى معنوية 5%، باستخدام طريقة مستوى المعنوية، طريقة مستوى المعنوية الناتج، طريقة مجال الثقة.

الحل:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P = 0,126$ ، $H_1: \mu < 0,126$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن حجم العينة كبير، فإن نسبة العينة $\hat{p}$ تتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{15}{200} = 0{,}075 \Rightarrow \hat{q} = 1-\hat{p} = 1-0{,}075 = 0{,}925$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}075\times 0{,}925}{200}} = 0{,}019$$

$$Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}} = \frac{0{,}075-0{,}126}{0{,}019} = -2{,}68$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow Z_{0{,}05} = -1{,}64$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $-2{,}68 < -1{,}64$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أن البرنامج ساهم في تخفيض نسبة الأمية، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وليس ناتجا عن أخطاء المعاينة.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار، و $\alpha = 0{,}05$ ، والقيمة المشاهدة $Z_c = -2{,}68$، فإن:

$$P-Value = P(Z \le Z_c) = (Z \le -2{,}68) = 0{,}0037$$

بما أن: $P-Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار و $\alpha = 0{,}05$، فإننا نكتفي بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة، كما يلي:

$$\hat{p} + Z_\alpha . \sigma_{\hat{p}} = 0{,}075 + 1{,}64(0{,}019) = 0{,}106$$

نلاحظ أن: $(P_0 = 0{,}126) > 0{,}106$، وبالتالي نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

خامسا: اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتي مجتمعين $P_1 - P_2$

1- تذكير توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$:

مما سبق، توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وسحبنا منهما عينتين كبيرتي الحجم، أي: $n_1 \ge 30$ و $n_2 \ge 30$، فوفقا لنظرية النهاية المركزية، فإن توزيع المعاينة للفرق ما بين نسبتي عينتين $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$ سيقترب من التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$\boldsymbol{Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}}$$

بالنسبة للخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$، فإن علاقته تتغير بحسب طبيعة المجتمع، هل هو محدود أو غير محدود، السحب

تم بالإرجاع أو بدون إرجاع، وهو ما تم الاشارة إليه سابقا وبالتفصيل في الفصلين الأول والثاني.

2- اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية:

لو أردنا اختبار فرضية معينة حول الفرق بين نسبتي مجتمعين $(P_1 - P_2)$، فإننا نكون أمام حالة من الحالات التالية:

2-1- الاختبار ثنائي الاتجاه: إذا أردنا اختبار فرض أن نسبتي المجتمعين الحقيقيتين متساويتين، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P_1 = P_2$ ، $H_1: P_1 \neq P_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: P_1 - P_2 = 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 \neq 0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي $\hat{p}_1$ و $\hat{p}_2$ المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $(P_1 - P_2 = 0)$ المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$، فنحصل على Z المحسوبة التالية:

$$Z_c = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمتين حرجتين، $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $+Z_{\frac{\alpha}{2}}$، نحدهما انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي وباستخدام خاصية التناظر للتوزيع الطبيعي، وهذا يعني أن القيمة الحرجة التي على اليمين هي نفسها القيمة الحرجة على اليسار مع اختلاف الإشارة.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $|Z_c| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $|Z_c| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية للمجتمع الأول P_1 تساوي أو تقل عن النسبة الحقيقية للمجتمع الثاني P_2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P_1 \leq P_2$ ، $H_1: P_1 > P_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي:

$H_0: P_1 - P_2 \leq 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 > 0$ أو $H_0: P_1 - P_2 = 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 > 0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية للمجتمع الأول أكبر من النسبة الحقيقية للمجتمع الثاني فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي $\hat{p}_1$ و $\hat{p}_2$ المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $(P_1 - P_2 = 0)$ المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$، فنحصل على Z المحسوبة التالية:

$$Z_c = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة Z_α، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c > Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-3- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية للمجتمع الأول P_1 تساوي أو تفوق النسبة الحقيقية للمجتمع الثاني P_2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P_1 \geq P_2$ ، $H_1: P_1 < P_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي:

$H_0: P_1 - P_2 \geq 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 < 0$ أو $H_0: P_1 - P_2 = 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 < 0$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن النسبة الحقيقية للمجتمع الأول أقل من النسبة الحقيقية للمجتمع الثاني فإن فرض العدم يكون أكبر أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي $\hat{p}_1$ و $\hat{p}_2$ المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $(P_1 - P_2 = 0)$ المفترضة، وقيمة الخطأ المعياري $\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$، فنحصل على Z المحسوبة التالية:

$$Z_c = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة $-Z_\alpha$، نحددها انطلاقا من جدول التوزيع الطبيعي

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $Z_c \leq -Z_\alpha$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $Z_c > -Z_\alpha$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام مستوى المعنوية الناتج $(P-Value)$، حيث يحسب حسب الحالات الممكنة التالية:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** $P-Value=P(Z\le -Z_c)+P(Z\ge Z_c)=2P(Z\ge Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** $P-Value=P(Z\ge Z_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** $P-Value=P(Z\le -Z_c)$

وفي جميع الحالات السابقة الذكر، فإننا نتخذ القرار بقبول فرض العدم أورفضه كما يلي:

- إذا كان: $P-Value\ge\alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0؛
- إذا كان: $P-Value<\alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0.

3- اختبار الفرضيات بطريقة مجال الثقة:

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام طريقة مجال الثقة، وذلك ببناء مجال الثقة للفرق بين نسبتين حقيقيتين لمجتمعين (P_1-P_2) – الذي سبق وأن تم التفصيل فيه في الفصل الثاني –، فإذا كانت قيمة (P_1-P_2) المفترضة تنتمي لمجال الثقة فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، وإذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لمجال الثقة فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

يمكن اختبار فرض معين حول الفرق (P_1-P_2) في هذه الحالة، كما يلي:

أ- في حالة اختبار ثنائي الاتجاه: مجال الثقة هو:

$$I_n=\left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\quad;\quad(\hat{p}_1-\hat{p}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right]$$

إذا كان: $(P_1-P_2=0)\in\left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\quad;\quad(\hat{p}_1-\hat{p}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $(P_1-P_2=0)\notin\left[(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\quad;\quad(\hat{p}_1-\hat{p}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}\right]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ب- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين: نقوم بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة العلوية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يسار القيمة الحرجة العلوية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $(P_1-P_2=0)\ge(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $(P_1-P_2=0)<(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ج- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار: نقوم بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $(P_1-P_2=0)\le(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $(P_1 - P_2 = 0) < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ملاحظة: جميع الحالات السابقة لاختبار الفرضيات الخاصة بالفرق بين نسبتي مجتمعين تمت على أساس فرض العدم يساوي الصفر، يساوي أو يفوق الصفر، يساوي أو يقل عن الصفر، ويمكن أيضا اختبار أن الفرق بين متوسطين يساوي، يساوي أو يفوق، يساوي أو يقل عن قيمة معينة وليس الصفر فقط، باتباع نفس الخطوات السابقة.

مثال11: مصنع لإنتاج البطاريات يستخدم آلتين للإنتاج، الآلة(1) والآلة(2)، يدعي صاحب المصنع أن نسبة المعيب الذي تنتجه الآلة(1) أكبر مما تنتجه الآلة(2)، وللتأكد من مدى صحة ادعائه سحبنا عينتين مستقلتين، الأولى من إنتاج الآلة الأولى، وتحتوي على 50 بطارية، فوجدنا بها 8% من البطاريات معيبة، والثانية من إنتاج الآلة الثانية وتحتوي على 100 بطارية، فوجدنا بها 5% من البطاريات معيبة. اختبر صحة ادعاء صاحب المصنع عند مستوى معنوية 5%، باستخدام طريقة مستوى المعنوية، طريقة مستوى المعنوية الناتج، طريقة مجال الثقة.

الحل:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P_1 = P_2$ ، $H_1: P_1 > P_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: P_1 - P_2 = 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 > 0$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليمين.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0{,}08 - 0{,}05 = 0{,}03$$

$$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}08\times0{,}92}{50} + \frac{0{,}05\times0{,}95}{100}} = 0{,}044$$

$$Z_c = \frac{0{,}03}{0{,}044} = 0{,}68$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow Z_{0{,}05} = 1{,}64$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $0{,}68 < 1{,}64$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أن ادعاء صاحب المصنع أن نسبة المعيب الذي تنتجه الآلة(1) أكبر مما تنتجه الآلة(2) ليس صحيحا.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين، و$\alpha = 0{,}05$ ، والقيمة المشاهدة $Z_c = 0{,}68$، فإن:

$$P - Value = P(Z \geq Z_c) = P(Z \geq 0{,}68) = P(Z \leq -0{,}68) = 0{,}2483$$

بما أن: $P - Value > \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين و $\alpha = 0,05$، فإننا نكتفي بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة، كما يلي:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - Z_\alpha . \sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = 0,03 - 1,64(0,044) = -0,042$$

نلاحظ أن: $(P_1 - P_2 = 0) > -0,042$، وبالتالي نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

سادسا: اختبار الفرضيات حول تباين المجتمع σ^2

1- تذكير بتوزيع المعاينة لتباين العينة S^2:

مما سبق، توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا المتغير العشوائي المدروس موزع طبيعيا في مجتمع ما، تباينه σ^2 معلوم، فإن توزيع المعاينة لتباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n - 1$. أي: $S^2 \to \chi^2_{v=n-1}$. والإحصائية الملائمة هي: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

2- اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية:

لو أردنا اختبار فرضية معينة حول تباين المجتمع الحقيقي، فإننا نكون أمام حالة من الحالات التالية:

2-1- الاختبار ثنائي الاتجاه: إذا أردنا اختبار فرض أن تباين المجتمع الحقيقي σ^2 يساوي قيمة ثابتة σ_0^2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ ، $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم.

ب- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

ج- **حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:** بتعويض قيمة S^2 المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة σ_0^2 المفترضة، فنحصل على: $\chi_c^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$، والتي تسمى بـ: χ^2 المحسوبة.

د- **تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α:** عادة ما تكون: $\alpha = 0,01$ أو $\alpha = 0,05$ أو $\alpha = 0,1$

هـ- **تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:** توجد قيمتين حرجتين، $\chi^2_{\left(v\,,\ \frac{\alpha}{2}\right)}$ و $\chi^2_{\left(v\,,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}$، نحدهما انطلاقا من جدول توزيع كاي مربع.

و- **اتخاذ القرار المناسب:** وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $\chi_c^2 \in \left[\chi^2_{\left(v\,,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} , \chi^2_{\left(v\,,\ \frac{\alpha}{2}\right)}\right]$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $\chi_c^2 \notin \left[\chi^2_{\left(v\,,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} , \chi^2_{\left(v\,,\ \frac{\alpha}{2}\right)}\right]$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين: إذا أردنا اختبار فرض أن تباين المجتمع الحقيقي σ^2 يساوي أو يقل عن قيمة ثابتة σ_0^2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ ، $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ، $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن التباين الحقيقي أكبر من قيمة معينة فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

ب- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

ج- **حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:** بتعويض قيمة S^2 المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة σ_0^2 المفترضة، فنحصل على: $\chi_c^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$، والتي تسمى بـ: χ^2 المحسوبة.

د- **تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α:** عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- **تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:** توجد قيمة حرجة واحدة هي: $\chi^2_{(v\,,\ \alpha)}$، نحدها انطلاقا من جدول توزيع كاي مربع.

و- **اتخاذ القرار المناسب:** وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $\chi_c^2 \leq \chi^2_{(v\,,\ \alpha)}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $\chi_c^2 > \chi^2_{(v\,,\ \alpha)}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-3- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار: إذا أردنا اختبار فرض أن تباين المجتمع الحقيقي σ^2 يساوي أو يفوق قيمة ثابتة σ_0^2، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ ، $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ، $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن التباين الحقيقي أقل من قيمة معينة فإن فرض العدم يكون أكبر أو يساوي.

ب- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

ج- **حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:** بتعويض قيمة S^2 المحسوبة من بيانات العينة، وقيمة σ_0^2 المفترضة، فنحصل على: $\chi_c^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$، والتي تسمى بـ: χ^2 المحسوبة.

د- **تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α:** عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- **تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:** توجد قيمة حرجة واحدة هي: $\chi^2_{(v\,,\ 1-\alpha)}$، نحدها انطلاقا من جدول توزيع كاي مربع.

و- **اتخاذ القرار المناسب:** وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $\chi_c^2 \geq \chi^2_{(v\,,\ 1-\alpha)}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.

- إذا كان: $\chi_c^2 < \chi^2_{(v\,,1-\,\alpha)}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام مستوى المعنوية الناتج $(P-Value)$، حيث يحسب حسب الحالات الممكنة التالية:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** $P-Value \;=2P(\chi^2 \geq \chi_c^2)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** $P-Value\;= P(\chi^2 \geq \chi_c^2)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** $P-Value\;= P(\chi^2 \leq \chi_c^2)$

وفي جميع الحالات السابقة الذكر، فإننا نتخذ القرار بقبول فرض العدم أو رفضه كما يلي:

- إذا كان: $P-Value\; \geq \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0؛
- إذا كان: $P-Value\; < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0.

3- اختبار الفرضيات بطريقة مجال الثقة:

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام طريقة مجال الثقة، وذلك ببناء مجال الثقة للمعلمة المجهولة σ^2 – الذي سبق وأن تم التفصيل فيه في الفصل الثاني –، فإذا كانت قيمة σ_0^2 المفترضة تنتمي لمجال الثقة فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، وإذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لمجال الثقة فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. يمكن اختبار فرض معين حول القيمة σ_0^2 في هذه الحالة، كما يلي:

أ- في حالة اختبار ثنائي الاتجاه: مجال الثقة هو: $I_n = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v\,,\,\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v\,,\,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$

إذا كان: $\sigma_0^2 \in \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v\,,\,\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v\,,\,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\sigma_0^2 \notin \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v\,,\,\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v\,,\,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ب- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين: نقوم بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة العلوية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يسار القيمة الحرجة العلوية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\sigma_0^2 \geq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(v\,,\,\alpha)}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\sigma_0^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(v\,,\,\alpha)}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ج- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار: نقوم بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\sigma_0^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(v\,,\,1-\alpha)}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(v\ ,\ 1-\alpha)}} < \sigma_0^2$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

مثال12: يدعي مدير مصنع لصناعة نوع معين من الأنابيب، أن سمك جدار الأنابيب المنتجة يتوزع طبيعيا بتباين يساوي 0,0009 ، غير أن مسؤول الرقابة على الجودة بالمصنع لم يقتنع بذلك، فقام بسحب عينة عشوائية تحتوي على 20 أنبوبا، فوجد أن تباين سمك جدار الأنابيب بالعينة يساوي 0,0016. اختبر صحة ادعاء مدير المصنع عند مستوى معنوية 5%، باستخدام طريقة مستوى المعنوية، مستوى المعنوية الناتج، مستوى الثقة.

الحل:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \sigma^2 = 0,0009$ ، $H_1: \sigma^2 \neq 0,0009$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

ب- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** بما أن المتغير المدروس في المجتمع – سمك جدار الأنابيب - موزع طبيعيا، فإن تباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 20 - 1 = 19$.

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

ج- **حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:**

$$\chi_c^2 = \frac{(20-1)0,0016}{0,0009} = 33,78$$

د- **تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α:** $\alpha = 0,05$

هـ- **تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:**

$$\alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025 \Rightarrow \begin{cases} \chi^2_{\left(v\ ,\ \frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(19\ ,\ 0,025)} = 32,852 \\ \chi^2_{\left(v\ ,1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \chi^2_{(19\ ,\ 0,975)} = 8,907 \end{cases}$$

و- **اتخاذ القرار المناسب:**

بما أن: $33,78 \notin [8,907 \quad , \ 32,852\ ]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أن ادعاء مدير المصنع ليس صحيحا ومسؤول الجودة كان محقا في عدم قناعته بهذا الادعاء، وأن الفرق ما بين التباين الحقيقي والتباين المقدر من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وهو ليس ناتج عن أخطاء المعاينة.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه، و$\alpha = 0,05$ ، والقيمة المشاهدة $\chi_c^2 = 33,78$، و$v = 19$، فإن:

$$P - Value = 2P(\chi^2 \geq \chi_c^2) = 2P(Z \geq 33,78)$$

من خلال جدول توزيع كاي مربع بالملحق رقم 4، نلاحظ أن القيمة (33,78) تقع بين القيمتين (32,852) و (36,191)، وهذا يبين أن وهذا يبين أن المساحة على يسار (33,78) تقل عن 0,025، وبضرب هذه المساحة في 2 نجد أنها تقل عن 0,05، أي أنها تقل عن α، وبالتالي نتخذ القرار التالي: بما أن: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه و $\alpha = 0{,}05$، فإن مجال الثقة هو: $I_n = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v\,,\,\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(v\,,\,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$

$$I_n = \left[\frac{(20-1)0{,}0016}{32{,}852} \quad ; \quad \frac{(20-1)0{,}0016}{8{,}907}\right]$$
$$I_0 = [0{,}000925 \quad ; \quad 0{,}0034\ ]$$

نلاحظ أن: $(\sigma_0^2 = 0{,}0009) \notin I_0 = [0{,}000925 \quad ; \quad 0{,}0034\ ]$، وبالتالي نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

سابعا: اختبار الفرضيات حول النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

1- تذكير بتوزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين $\frac{S_1^2}{S_2^2}$:

مما سبق، توصلنا إلى أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي مدروس في مجتمعين مستقلين، وموزع طبيعيا في كليهما، فإن توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية: $v_1 = n_1 - 1$ و $v_2 = n_2 - 1$، أي: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \to F_{v_1,v_2}$، وبما أن طبيعة توزيع $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ هو توزيع فيشر، فإنه يحول إلى F كما يلي: $F = \dfrac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$

2- اختبار الفرضيات بطريقة مستوى المعنوية:

لو أردنا اختبار فرضية معينة حول النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$، فإننا نكون أمام حالة من الحالات التالية:

2-1- الاختبار ثنائي الاتجاه: إذا أردنا اختبار فرض أن تبايني مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 متساويين، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad , \quad H_1: \sigma_2^2 \neq \sigma_2^2$

يمكن صياغة الفرضين السابقين كما يلي: $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad , \quad H_1: \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $F = \dfrac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي S_1^2 و S_2^2 المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ المفترضة، فنحصل على: $F_c = \dfrac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{1} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$، والتي تسمى بـ F المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمتين حرجتين، $F_{\left(v_1,v_2\,,\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $F_{\left(v_1,v_2\,,1-\frac{\alpha}{2}\right)}$، نحددهما انطلاقا من جدول توزيع فيشر.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $F_c \in \left[F_{\left(v_1,v_2,1-\frac{\alpha}{2}\right)} , F_{\left(v_1,v_2,\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $F_c \notin \left[F_{\left(v_1,v_2,1-\frac{\alpha}{2}\right)} , F_{\left(v_1,v_2,\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

2-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ يساوي أو يقل عن الواحد الصحيح، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$ ، $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ، $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن النسبة بين تبايني مجتمعين أكبر من الواحد الصحيح فإن فرض العدم يكون أقل أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $F = \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي S_1^2 و S_2^2 المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ المفترضة، فنحصل على: $F_c = \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{1} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$، والتي تسمى بـ: F المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة هي: $F_{(v_1,v_2,\alpha)}$، نحدها انطلاقا من جدول توزيع فيشر.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $F_c \leq F_{(v_1,v_2,\alpha)}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $F_c > F_{(v_1,v_2,\alpha)}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

3-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار: إذا أردنا اختبار فرض أن النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ يساوي أو يفوق الواحد الصحيح، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1$ ، $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ، $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$

تجدر الإشارة إلى أن رمز المساواة يكون دائما مرتبط بفرض العدم، بحيث إذا طلب منا اختبار فرض أن النسبة بين

تبايني مجتمعين أقل من الواحد الصحيح فإن فرض العدم يكون أكبر أو يساوي.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $F = \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: بتعويض قيمتي S_1^2 و S_2^2 المحسوبتين من بيانات العينتين المسحوبتين، وقيمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ المفترضة، فنحصل على: $F_c = \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{1} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$، والتي تسمى بـ: F المحسوبة.

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: عادة ما تكون: $\alpha = 0{,}01$ أو $\alpha = 0{,}05$ أو $\alpha = 0{,}1$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: توجد قيمة حرجة واحدة هي: $F_{(v_1,v_2\,,1-\alpha)}$، نحدها انطلاقا من جدول توزيع فيشر.

و- اتخاذ القرار المناسب: وذلك بالمقارنة بين القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار(المحسوبة) واحصائية الاختبار النظرية (الجدولية)، كما يلي:

- إذا كان: $F_c \geq F_{(v_1,v_2\,,1-\alpha)}$: نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1.
- إذا كان: $F_c < F_{(v_1,v_2\,,1-\alpha)}$: نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1.

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام مستوى المعنوية الناتج $(P - Value)$، حيث يحسب حسب الحالات الممكنة التالية:

- **في حالة اختبار ثنائي الاتجاه:** $P - Value = 2P(F \geq F_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين:** $P - Value = P(F \geq F_c)$
- **في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار:** $P - Value = P(F \leq F_c)$

وفي جميع الحالات السابقة الذكر، فإننا نتخذ القرار بقبول فرض العدم أو رفضه كما يلي:

- إذا كان: $P - Value \geq \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0؛
- إذا كان: $P - Value < \alpha$، فإننا نرفض فرض العدم H_0.

3- اختبار الفرضيات بطريقة مجال الثقة:

يمكن اجراء اختبار الفرضيات باستخدام طريقة مجال الثقة، وذلك ببناء مجال الثقة للمعلمة المجهولة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ – الذي سبق وأن تم التفصيل فيه في الفصل الثاني –، فإذا كانت قيمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ المفترضة تنتمي لمجال الثقة فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1، وإذا كانت هذه القيمة لا تنتمي لمجال الثقة فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1. يمكن اختبار فرض معين حول القيمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ في هذه الحالة، كما يلي:

أ- في حالة اختبار ثنائي الاتجاه: مجال الثقة هو: $I_n = \left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(v_1,v_2\,,\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(v_1,v_2\,,1-\frac{\alpha}{2}\right)}} \right]$

إذا كان: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(v_1,v_2,1-\frac{\alpha}{2}\right)}} \;;\; \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(v_1,v_2,\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \notin \left[\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(v_1,v_2,1-\frac{\alpha}{2}\right)}} \;;\; \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{\left(v_1,v_2,\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$، فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ب- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليمين: نقوم بحساب الحد الأدنى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة العلوية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يسار القيمة الحرجة العلوية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{(v_1,v_2,\alpha)}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{(v_1,v_2,\alpha)}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ج- في حالة اختبار أحادي الاتجاه من اليسار: نقوم بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة فقط، لأنه في هذه الحالة يوجد منطقتين فقط، واحدة تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية والأخرى على يسارها، أي أن منطقة القبول تمثل المساحة الكبيرة التي تقع على يمين القيمة الحرجة السفلية، وفي هذه الحالة:

إذا كان: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{(v_1,v_2,1-\alpha)}}$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1.

إذا كان: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{F_{(v_1,v_2,1-\alpha)}}$ فإننا نرفض فرض العدم H_0، ونقبل الفرض البديل H_1.

ملاحظة: جميع الحالات السابقة لاختبار الفرضيات الخاصة بنسبة تبايني مجتمعين تمت على أساس فرض العدم يساوي الواحد الصحيح، يساوي أو يفوق الواحد الصحيح، يساوي أو يقل عن الصحيح، ويمكن اختبار أن نسبة تبايني مجتمعين يساوي، يساوي أو يفوق، يساوي أو يقل عن قيمة معينة وليس الواحد الصحيح فقط، باتباع نفس الخطوات السابقة.

مثال13: بغرض معرفة معنوية الفرق بين تبايني أوزان أكياس الدقيق في المؤسسين A و B، سحبت عينة عشوائية مكونة من 7 أكياس من المؤسسة A، فوجد أن تباينها يساوي 0,039، وعينة عشوائية أخرى مكونة من 6 أكياس من المؤسسة B، فوجد أن تباينها يساوي 0,022. اختبر تساوي تبايني أوزان أكياس الدقيق عند مستوى معنوية 5%، بطريقة مستوى المعنوية، طريقة مستوى المعنوية الناتج، طريقة مستوى الثقة، علما أن أوزان أكياس الدقيق في المؤسسين موزع طبيعيا.

الحل:

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ ، $H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

يمكن صياغة الفرضين السابقين كما يلي: $H_0: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$ ، $H_1: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq 1$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمعين – أوزان أكياس الدقيق - موزع طبيعيا، فإن نسبة تبايني العينتين يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية:

$v_1 = n_A - 1 = 7 - 1 = 6$ و $v_2 = n_B - 1 = 6 - 1 = 5$، أي: $\frac{S_A^2}{S_B^2} \to F_{6,7}$،

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $F = \dfrac{\frac{S_A^2}{S_B^2}}{\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $F_c = \dfrac{\frac{S_A^2}{S_B^2}}{1} = \dfrac{\frac{0{,}039}{0{,}022}}{1} = 1{,}77$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05$

ه- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025 \Rightarrow \begin{cases} F_{\left(v_1, v_2, \frac{\alpha}{2}\right)} = F_{(6{,}5\,,\ 0{,}025)} = 6{,}98 \\ F_{\left(v_1, v_2, 1-\frac{\alpha}{2}\right)} = F_{(6{,}5\,,\ 0{,}975)} = \dfrac{1}{F_{(5{,}6,\ 0{,}025)}} = \dfrac{1}{5{,}99} = 0{,}17 \end{cases}$$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $1{,}77 \in [0{,}17 \quad , \quad 6{,}98\ ]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أن تبايني أوزان أكياس الدقيق في المؤسسين A و B متساويين، وأن الفرق ما بين نسبتي التباين الحقيقي ونسبتي التباين المقدر من بيانات العينتين هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه، و$\alpha = 0{,}05$ ، والقيمة المشاهدة $F_c = 1{,}77$، و $v_1 = 6$، و$v_2 = 5$، فإن:

$$P - Value = 2P(F \geq F_c) = 2P(F \geq 1{,}77)$$

من خلال جدول توزيع فيشر بالملحق رقم 5، نلاحظ أن القيمة $(1{,}77)$ المساحة على يسار القيمة $(1{,}77)$ تفوق 0,1، وبضرب هذه المساحة في 2 نجد أنها تفوق 0,05، أي أنها تفوق α، وبالتالي نتخذ القرار التالي:

بما أن: $P - Value > \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار ثنائي الاتجاه و $\alpha = 0{,}05$، فإن مجال الثقة هو: $I_n = \left[\dfrac{\frac{S_A^2}{S_B^2}}{F_{\left(v_1, v_2, \frac{\alpha}{2}\right)}} \quad ; \quad \dfrac{\frac{S_A^2}{S_B^2}}{F_{\left(v_1, v_2, 1-\frac{\alpha}{2}\right)}} \right]$

$$I_n = \left[\frac{\frac{0{,}039}{0{,}022}}{6{,}98} \quad ; \quad \frac{\frac{0{,}039}{0{,}022}}{0{,}17} \right]$$

$$I_0 = [0{,}25 \quad ; \quad 10{,}43\ ]$$

نلاحظ أن: $\left(\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1\right) \in I_0 = [0{,}25 \quad ; \quad 10{,}43\ ]$، وبالتالي نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

تمارين محلول

التمرين الأول:

عرف باختصار المصطلحات التالية:

- الفرض الاحصائي؛ - فرض العدم؛ - الفرض البديل؛ - إحصائية الاختبار؛
- منطقة القبول؛ - القيمة الحرجة؛ - الاختبار ذو طرفين.

التمرين الثاني:

إذا كانت أوزان تلاميذ أحد المدارس الابتدائية موزعة طبيعيا، بانحراف معياري يساوي 3 كلغ، وسحبت منها عينة عشوائية قوامها 10 تلاميذ، فوجد أن متوسطها الحسابي يساوي 24 كلغ. اختبر صحة الادعاء القائل بأن متوسط أوزان التلاميذ في المدرسة يقل عن 25 كلغ، عند مستوى معنوية 5%، باستخدام طريقة مستوى المعنوية الناتج.

التمرين الثالث:

في دراسة أجريت على أحد المحلات التجارية، وجد أن عدد الزبائن الذين يرتادونها يوميا يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط يساوي 40 زبونا، وبهدف زيادة عدد زبائن المحل، اتبعت طريقة جديدة في عرض البضائع، وتم تسجيل عدد المترددين على المحل يوميا، لمدة 10 أيام بعد اتباع الطريقة الجديدة، فكانت البيانات كما يلي:

53، 40، 42، 39، 50، 45، 51، 43، 38، 39.

اختبر فيما إذا كانت الطريقة الجديدة قد أدت إلى زيادة متوسط عدد الزبائن عند مستوى معنوية 10%.

التمرين الرابع:

أجريت دراسة إحصائية حول درجات الحرارة بمنطقتين مختلفتين A و B، فوجد أن درجات الحرارة بالمنطقة A تتوزع طبيعيا بانحراف معياري يساوي 6 درجات، بينما بالمنطقة B فتتوزع طبيعيا بانحراف معياري قدره 5 درجات. وقصد التأكد من وجود فرق معنوي في درجات الحرارة بالمنطقتين، تم تتبع هذه الظاهرة بالمنطقة A لمدة 16 يوما فوجد أن متوسطها يساوي 30 درجة، كما تم تتبعها بالمنطقة B لمدة 12 يوما فوجد أن متوسطها يساوي 33 درجة. اختبر وجود فرق معنوي من عدمه لمتوسط درجة الحرارة بالمنطقتين عند مستوى معنوية 1%.

التمرين الخامس:

بهدف التأكد من صحة الادعاء القائل بأن متوسط الكمية المنتجة من مادة معينة بالمصنع A أقل مما ينتجه المصنع B، تم تسجيل كمية الانتاج بالمصنع A لمدة 15 يوما، فوجد أن متوسطها يساوي 225 قنطار بانحراف معياري قدره 10 قناطير، كما تم تسجيل كمية الانتاج بالمصنع B لمدة 10 أيام، فوجد أن متوسطها يساوي 210 قنطار بانحراف معياري قدره 7 قناطير. إذا علمت أن الكمية المنتجة من هذه المادة بالمصنعين تتوزع طبيعيا بتباينين غير متساويين، اختبر صحة هذا الادعاء عند مستوى معنوية 5%.

التمرين السادس:

الجدول التالي يبين نتائج دراسة احصائية أجريت على عينة من عمال مؤسستين مختلفتين، حول الأجور الشهرية:

	حجم العينة	متوسط الأجور الشهرية – دج-	الانحراف المعياري
المؤسسة (1)	36	27000	300
المؤسسة (2)	49	25000	400

إذا علمت أن الأجور الشهرية بالمؤسستين تتبع التوزيع الطبيعي، اختبر الفرضيتين التاليتين عند مستوى معنوية 10%.

$$H_0:\ \mu_A - 1800 = \mu_B \qquad\qquad H_1:\ \mu_A - 1800 \neq \mu_B$$

التمرين السابع:

سحبت عينة عشوائية من مصنع لإنتاج عجلات السيارات، تحتوي على 80 عجلة، فوجد أن بها 4 عجلات تالفة، فهل نستطيع القول أن نسبة العجلات التالفة في الإنتاج الكلي للمصنع تقل عن 7%، عند مستوى معنوية 5%، باستخدام طريقة مستوى المعنوية، طريقة مستوى المعنوية الناتج، طريقة مجال الثقة.

التمرين الثامن:

نسبة مستعملي حزام الأمان في السيارات قبل اصدار قانون يلزم استعماله هو 60% في أحد الولايات، وقصد معرفة ما إذا كانت النسبة قد زادت بعد اصدار قانون الزام الاستعمال، اختيرت عينة عشوائية مكونة من 300 سائق، فوجد منهم 195 يستعملون الحزام. اختبر فرضية زيادة نسبة مستعملي حزام الأمان بالولاية عند مستوى معنوية 5%.

التمرين التاسع:

سحبت عينتان عشوائيتان من منتجات آلتين مستقلتين لإنتاج نوع معين من الأكياس البلاستيكية، فأعطتا النتائج المرفقة بالجدول التالي:

	حجم العينة	عدد الأكياس المعيبة
الآلة الأولى (1)	50	6
الآلة الثانية (2)	70	7

اختبر فرضية وجود فرق معنوي بين نسبة المعيب في الآلتين عند مستوى معنوية 10%.

التمرين العاشر:

مجتمعان مستقلان، الأول سحبنا منه عينة عشوائية بها 40 شخصا، فوجدنا 30 منهم يملكون شهادات جامعية، والثاني سحبنا منه عينة عشوائية بها 50 شخصا، فوجدنا 26 منهم يملكون شهادات جامعية. هل يمكن أن نقول أن الفرق ما بين نسبة الذين يملكون شهادات جامعية بالمجتمع الأول والمجتمع الثاني يساوي الربع، وذلك عند مستوى معنوية 5%.

التمرين الحادي عشر:

عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين مجهول، فإذا كان حجم العينة المسحوبة هو 25، وكان: $\sum_{i=1}^{25}(X_i - \bar{X})^2 = 2880$. اختبر فرضية أن تباين المجتمع يقل عن 144 عند مستوى معنوية 5%.

التمرين الثاني عشر:

مجتمعان، الأول توزيعه $N(\mu_1, \sigma_1)$، والثاني توزيعه $N(\mu_2, \sigma_2)$، سحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها 5، ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية مستقلة عن العينة الأولى حجمها 7، وحصلنا على البيانات التالية:

$$S_1^2 = 2273 \qquad\qquad S_2^2 = 1759$$

اختبر فرضية أن تباين المجتمع الأول يساوي ضعف تباين المجتمع الثاني باستخدام مستوى معنوية 10%.

الحلول

حل التمرين الأول:

التعريف بالمصطلحات التالية:

- **الفرض الاحصائي:** هو عبارة عن تخمين أو ادعاء حول المعالم المجهولة لمجتمع أو أكثر، قد يتم قبوله أو رفضه، وذلك بعد اخضاعه للاختبار الإحصائي، باستخدام عينة عشوائية يتم سحبها من المجتمع.

- **فرض العدم:** هو الفرض الذي يريد الباحث اختباره، ويعتقد أنه صحيح إلى أن يثبت عكس ذلك، ويرمز له بالرمز H_0.

- **الفرض البديل:** هو الفرض الذي يقبل كبديل لفرض العدم عند رفض هذا الأخير، ويرمز له بالرمز H_1.

- **إحصائية الاختبار:** هي متغير عشوائي ذو توزيع احتمالي معلوم عندما يكون فرض العدم صحيحا، حيث تحسب قيمة إحصائية الاختبار من بيانات العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع المدروس، ويتم مقارنتها بالقيمة الحرجة المستخرجة من جداول خاصة من أجل اتخاذ القرار برفض أو قبول فرض العدم H_0.

- **منطقة القبول:** هي المنطقة التي تحتوي على قيم إحصائية الاختبار التي تؤدي إلى قبول فرض العدم H_0 ورفض الفرض البديل H_1.

- **القيمة الحرجة:** هي القيمة التي تفصل بين منطقتي الرفض والقبول.

- **الاختبار ذو طرفين:** يستعمل هذا الاختبار في حالة اختبار فرض العدم بأن معلمة ما تساوي قيمة معينة، في مقابل فرض بديل مفاده أن تلك المعلمة لا تساوي تلك القيمة المفترضة، ومعنى ذلك أن الفرض البديل يحتمل قيمتين، قيمة أقل من القيمة المفترضة وأخرى أكبر منها.

حل التمرين الثاني:

1- حساب مستوى المعنوية الناتج:

- **تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:** $H_0: \mu = 25$ ، $H_1: \mu < 25$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

- **اختيار إحصائية الاختبار المناسبة:** بما أن المتغير المدروس في المجتمع – أوزان التلاميذ - موزع طبيعيا، بانحراف معياري معلوم، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

- **حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:** $Z_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{24-25}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = -1{,}05$

وعليه فإن مستوى المعنوية الناتج هو:

$$P-Value = P(Z \le Z_c) = P(Z \le -1{,}05) = 0{,}1469$$

2- اختبار صحة الادعاء:

بما أن: $(P-Value = 0{,}1469) > (\alpha = 0{,}05)$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1،

أي أننا نرفض الادعاء بأن متوسط أوزان التلاميذ في المدرسة يقل عن 25 كلغ، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة فقط.

حل التمرين الثالث:

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu = 40$ ، $H_1: \mu > 40$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليمين.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمع – عدد الزبائن - موزع طبيعيا، بانحراف معياري مجهول، وحجم العينة أقل من 30، فإن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية: $v = n - 1 = 10 - 1 = 9$، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $T_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{53+40+42+39+50+45+51+43+38+39}{10} = \frac{440}{10} = 44$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{270}{9}} = \sqrt{30,44} = 5,52$$

$$T_c = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{44-40}{\frac{5,52}{\sqrt{10-1}}} = 2,17$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,10$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0,10 \Rightarrow T_{0,10} = 1,383$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $2,17 > 1,383$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أن الطريقة الجديدة قد أدت إلى زيادة عدد الزبائن، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وهو ليس ناتج عن أخطاء المعاينة.

حل التمرين الرابع:

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu_A = \mu_B$ ، $H_1: \mu_A \neq \mu_B$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ ، $H_1: \mu_A - \mu_B \neq 0$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمعين – درجات الحرارة - موزع طبيعيا، بانحرافين معياريين معلومين، فإن الفرق ما بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}$$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 30 - 33 = -3$$

$$\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 0$$

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(6)^2}{16} + \frac{(5)^2}{12}} = 2,08$$

$$Z_c = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}} = \frac{-3-0}{2,08} = -1,44$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,01$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0,01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,01}{2} = 0,005 \Rightarrow Z_{0,005} = 2,58$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $|-1,44| < 2,58$ أي: $Z_c < \left|Z_{\frac{\alpha}{2}}\right|$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل أن متوسطي درجات الحرارة بالمنطقتين متساوي، وأن الفرق ما بين الفرق الحقيقي لمتوسطي المجتمعين والفرق بين المتوسطين المقدرين من بيانات العينتين هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة.

<u>حل التمرين الخامس</u>:

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \mu_A = \mu_B$ ، $H_1: \mu_A < \mu_B$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ ، $H_1: \mu_A - \mu_B < 0$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمعين موزع طبيعيا، بانحرافين معياريين مجهولين وغير متساويين وحجم العينتين صغير، فإن الفرق ما بين متوسطي العينتين يتبع توزيع ستودنت، بدرجة حرية:

$$v = \frac{\left(\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_A^2}{n_A}\right)^2}{n_A - 1} + \frac{\left(\frac{S_B^2}{n_B}\right)^2}{n_B - 1}} = \frac{\left(\frac{(7)^2}{10} + \frac{(10)^2}{15}\right)^2}{\frac{\left(\frac{(7)^2}{10}\right)^2}{10-1} + \frac{\left(\frac{(10)^2}{15}\right)^2}{15-1}} = 22,90 \approx 23$$

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $T = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B = 210 - 225 = -15$$

$$\mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \mu_A - \mu_B = 0$$

$$\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(7)^2}{10} + \frac{(10)^2}{15}} = 3,40$$

$$T_c = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - \mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}} = \frac{-15-0}{3,40} = -4,41$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0,05 \Rightarrow T_{0,05} = -1,714$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $-4{,}41 < -1{,}714$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أننا نقبل الادعاء القائل بأن متوسط الكمية المنتجة من مادة معينة بالمصنع A أقل مما ينتجه المصنع B، وأن الفرق ما بين الفرق الحقيقي لمتوسطي المجتمعين والفرق بين المتوسطين المقدرين من بيانات العينتين هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وهو ليس ناتج عن أخطاء المعاينة.

__حل التمرين السادس:__

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول:

$$H_1: \mu_1 - 1800 \neq \mu_2 \quad ، \quad H_0: \mu_1 - 1800 = \mu_2$$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 1800$ ،$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 1800$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمعين – الأجور الشهرية- موزع طبيعيا، بانحرافين معياريين مجهولين، وحجم العينتين كبير أي: $n_1 > 30$ و $n_2 > 30$، فإن الفرق ما بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 27000 - 25000 = 2000$$

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 1800$$

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(300)^2}{36} + \frac{(400)^2}{49}} = 75{,}93$$

$$Z_c = \frac{(\bar{X}_A-\bar{X}_B)-\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}}{\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}} = \frac{2000-1800}{75{,}93} = 2{,}63$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}10$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0{,}10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}10}{2} = 0{,}05 \Rightarrow Z_{0,05} = 1{,}64$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $2{,}63 > 1{,}64$، فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أن الفرق ما بين متوسط الأجر الشهري بالمؤسستين لا يساوي 1800دج.

__حل التمرين السابع:__

1- طريقة مستوى المعنوية:

أ- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P = 0{,}07$ ، $H_1: P < 0{,}07$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

ب- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن حجم العينة كبير، فإن نسبة العينة $\hat{p}$ تتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

ج- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{4}{80} = 0,05 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,05 = 0,95$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0,05\times 0,95}{80}} = 0,024$$

$$Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}} = \frac{0,05-0,07}{0,024} = -0,83$$

د- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05$

هـ- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05 \Rightarrow Z_{0,05} = -1,64$

و- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $-0,83 > -1,64$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أن نسبة العجلات التالفة في الإنتاج الكلي للمصنع لا تقل عن 7%، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ليس ذو أهمية أو معنوية، وهو ناتج عن أخطاء المعاينة.

2- طريقة مستوى المعنوية الناتج:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار، و$\alpha = 0,05$ ، والقيمة المشاهدة $Z_c = -0,83$، فإن:

$$P - Value = P(Z \leq Z_c) = (Z \leq -0,83) = 0,2033$$

بما أن: $P - Value > \alpha$، فإننا نقبل فرض العدم H_0، وهو نفس القرار المتخذ بالطريقة السابقة.

3- طريقة مجال الثقة:

بما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار و $\alpha = 0,05$، فإننا نكتفي بحساب الحد الأقصى لمجال الثقة، كما يلي:

$$\hat{p} + Z_\alpha . \sigma_{\hat{p}} = 0,05 + 1,64(0,024) = 0,089$$

نلاحظ أن: $(P_0 = 0,07) < 0,089$، وبالتالي نقبل فرض العدم H_0، ونرفض الفرض البديل H_1. وهو نفس القرار المتخذ بالطريقتين السابقتين.

<u>حل التمرين الثامن:</u>

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P = 0,6$ ، $H_1: \mu > 0,6$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليمين.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن حجم العينة كبير، فإن نسبة العينة $\hat{p}$ تتبع التوزيع الطبيعي، وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $Z = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}}$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{195}{300} = 0,65 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,65 = 0,35$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0,65\times0,35}{300}} = 0,027$$

$$Z_c = \frac{\hat{p}-P_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}} = \frac{0,65-0,60}{0,027} = 1,85$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,05 \Rightarrow Z_{0,05} = 1,64$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $1,85 > 1,64$ فإننا نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أي أن نسبة مستعملي حزام الأمان قد زادت بعد اصدار قانون الزام الاستعمال، وأن الفرق بين القيمة الحقيقية المجهولة والقيمة المقدرة من بيانات العينة هو فرق ذو أهمية أو معنوية، وهو ليس ناتج عن أخطاء المعاينة.

حل التمرين التاسع:

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: P_1 = P_2$ ، $H_1: P_1 \neq P_2$

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: P_1 - P_2 = 0$ ، $H_1: P_1 - P_2 \neq 0$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

$$\hat{p}_1 = \frac{6}{50} = 0,12 \Rightarrow \hat{q}_1 = 1-\hat{p}_1 = 1-0,12 = 0,88$$

$$\hat{p}_2 = \frac{7}{70} = 0,10 \Rightarrow \hat{q}_2 = 1-\hat{p}_2 = 1-0,10 = 0,90$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0,12 - 0,10 = 0,02$$

$$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0,12\times0,88}{50}+\frac{0,10\times0,90}{70}} = 0,058$$

$$Z_c = \frac{0,02}{0,058} = 0,34$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,10$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0,10 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0,10}{2}} = Z_{0,05} = 1,64$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $|0,34| < 1,64$ أي: $|Z_c| < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أنه لا يوجد فرق معنوي بين نسبة المعيب في الآلتين.

حل التمرين العاشر:

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: ،

هذين الفرضين يمكن صياغتهما كما يلي: $H_0: P_1 - P_2 = 0{,}25$ ، $H_1: P_1 - P_2 \neq 0{,}25$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: $Z = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $Z_c = \frac{(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-0{,}25}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}$

$$\hat{p}_1 = \frac{30}{40} = 0{,}75 \Rightarrow \hat{q}_1 = 1 - \hat{p}_1 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$$

$$\hat{p}_2 = \frac{26}{50} = 0{,}52 \Rightarrow \hat{q}_2 = 1 - \hat{p}_2 = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0{,}75 - 0{,}52 = 0{,}23$$

$$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}75\times0{,}25}{40} + \frac{0{,}52\times0{,}48}{50}} = 0{,}098$$

$$Z_c = \frac{0{,}23-0{,}25}{0{,}098} = -0{,}204$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0{,}05}{2}} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $|-0{,}204| < 1{,}64$ أي: $|Z_c| < Z_{\frac{\alpha}{2}}$ فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي يمكن القول بأن الفرق ما بين نسبة الذين يملكون شهادات جامعية بالمجتمع الأول والمجتمع الثاني يساوي الربع.

حل التمرين الحادي عشر:

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \sigma^2 = 144$ ، $H_1: \sigma^2 < 144$

وهو اختبار أحادي الاتجاه من اليسار.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمع موزع طبيعيا، فإن تباين العينة يتبع توزيع كاي مربع، بدرجة حرية: $v = n - 1 = 25 - 1 = 24$.

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25}(X_i-\bar{X})^2}{n-1} = \frac{2880}{25-1} = 120$$

$$\chi_c^2 = \frac{(25-1)120}{144} = 20$$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0{,}05$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0,05 \Rightarrow \chi^2_{(v\,,1-\,\alpha)} = \chi^2_{(24\,,\ \ 0,95)} = 13,848$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $20 < 13,848$، فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أن تباين المجتمع لا يقل عن 144.

<u>التمرين الثاني عشر:</u>

1- تحديد الفرضيات، وذلك بصياغة فرض العدم وفرض القبول: $H_0: \sigma_A^2 = 2\sigma_B^2$ ، $H_1: \sigma_A^2 \neq 2\sigma_B^2$

يمكن صياغة الفرضين السابقين كما يلي: $H_0: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 2$ ، $H_1: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq 2$

وهو اختبار ثنائي الاتجاه.

2- اختيار إحصائية الاختبار المناسبة: بما أن المتغير المدروس في المجتمعين موزع طبيعيا، فإن نسبة تبايني العينتين يتبع توزيع فيشر، بدرجتي حرية:

$v_1 = n_A - 1 = 5 - 1 = 4$ و $v_2 = n_B - 1 = 7 - 1 = 6$، أي: $\frac{S_A^2}{S_B^2} \to F_{4,6}$،

وأن الإحصائية الملائمة لذلك هي: $F = \dfrac{\frac{S_A^2}{S_B^2}}{\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}}$

3- حساب القيمة المشاهدة لإحصائية الاختبار: $F_c = \dfrac{\frac{S_A^2}{S_B^2}}{2} = \dfrac{\frac{2273}{1759}}{2} = 0,67$

4- تحديد مستوى الدلالة أو المعنوية α: $\alpha = 0,10$

5- تحديد احصائية الاختبار النظرية المقابلة لمستوى الدلالة أو المعنوية α:

$$\alpha = 0,10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,10}{2} = 0,05 \Rightarrow \begin{cases} F_{\left(v_1,v_2\,,\frac{\alpha}{2}\right)} = F_{(4,6\,,\ \ 0,05)} = 4,53 \\ F_{\left(v_1,v_2\,,1-\,\frac{\alpha}{2}\right)} = F_{(4,6\,,\ \ 0,95)} = \frac{1}{F_{(6,4,\ \ 0,05)}} = \frac{1}{6,16} = 0,16 \end{cases}$$

6- اتخاذ القرار المناسب:

بما أن: $0,67 \in [0,16\ \ ,\ \ 4,53\ ]$، فإننا نقبل فرض العدم H_0 ونرفض الفرض البديل H_1، أي أن تباين المجتمع الأول يساوي ضعف تباين المجتمع الثاني.

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

عرف باختصار المصطلحات التالية:

- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين؛ - الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار؛ - منطقة الرفض؛

- الخطأ من النوع الأول.؛ - الخطأ من النوع الثاني؛ - مستوى المعنوية الناتج.

التمرين الثاني:

إذا كانت أوزان تلاميذ أحد المدارس الابتدائية موزعة طبيعيا، وسحبت منها عينة عشوائية قوامها 10 تلاميذ، فوجد أن متوسطها الحسابي يساوي 26 كلغ، وتباينها يساوي 16. اختبر صحة الادعاء القائل بأن متوسط أوزان التلاميذ في المدرسة يفوق 25 كلغ عند مستوى معنوية 10% باستخدام طريقة مجال الثقة.

التمرين الثالث:

في دراسة أجريت على أحد المحلات التجارية، وجد أن عدد الزبائن الذين يرتادونها يوميا يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط يساوي 40 زبونا وتباين يساوي 25، وبهدف زيادة عدد زبائن المحل، اتبعت طريقة جديدة في عرض البضائع، وتم تسجيل عدد المترددين على المحل يوميا، لمدة 10 أيام بعد اتباع الطريقة الجديدة، فوجد أنه يساوي 41 زبونا.

اختبر فيما إذا كانت الطريقة الجديدة قد أدت إلى زيادة متوسط عدد الزبائن عند مستوى معنوية 1%. باستخدام طريقة مستوى المعنوية، طريقة مستوى المعنوية الناتج وطريقة مجال الثقة.

التمرين الرابع:

بهدف التأكد من صحة الادعاء القائل بأن متوسط نسبة الرطوبة بالمنطقة A أقل منها في المنطقة B، تم تتبع هذه الظاهرة بالمنطقة A لمدة 35 يوما فوجد أن متوسطها يساوي 30% بانحراف معياري قدره 3%، كما تم تتبعها بالمنطقة B لمدة 40 يوما فوجد أن متوسطها يساوي 35% بانحراف معياري قدره 4%.

إذا علمت أن نسبة الرطوبة بالمنطقتين تتوزع طبيعيا، اختبر صحة هذا الادعاء عند مستوى معنوية 5% باستخدام طريقة مستوى المعنوية الناتج، وطريقة مجال الثقة.

التمرين الخامس:

أخذت عينتان من مجتمعين طبيعيين مستقلين، والجدول التالي يبين بعض احصاءاتها:

	حجم العينة	متوسط العينة	تباين العينة
المجتمع الأول A	8	25,5	3,5
المجتمع الثاني B	9	22,3	9,4

يدعي أحد الباحثين أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني، بافتراض أن الانحرافين المعياريين الحقيقيين المجهولين للمجتمعين غير متساويين. اختبر صحة هذا الادعاء عند مستوى المعنوية 5%. بطريقة مستوى المعنوية، ومستوى المعنوية الناتج، ومجال الثقة.

التمرين السادس:

البيانات التالية تمثل أوزان 10 أشخاص، قبل وبعد استخدام حمية غذائية معينة لإنقاص الوزن.

الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
قبل (A)	74	84	73	87	92	93	105	76	85	94
بعد (B)	72	81	67	81	86	86	97	70	79	87

المطلوب: هل ساهمت الحمية الغذائية المتبعة في جعل متوسط أوزان الأشخاص أقل من متوسطهم قبل اتباعها، عند مستوى معنوية 5%، علما أن أوزان الأشخاص تتبع التوزع الطبيعي.

التمرين السابع:

سحبت عينة عشوائية من مصنع لإنتاج نوع معين من خراطيم المياه، تحتوي على 50 خرطوما، فوجد أن بها 4 خراطيم تالفة، فهل نستطيع القول أن نسبة الخراطيم التالفة في الإنتاج الكلي للمصنع تساوي 5%، عند مستوى معنوية 10%، باستخدام طريقة مستوى المعنوية، طريقة مستوى المعنوية الناتج، طريقة مجال الثقة.

التمرين الثامن:

نسبة مستعملي البطاقة الذهبية لسحب النقود بواسطة الموزع الآلي هو 40% في أحد الولايات، وقصد معرفة ما إذا كانت النسبة قد زادت بعد الحملة الاشهارية التي قامت بها مصالح البريد والمواصلات، اختيرت عينة عشوائية مكونة من 200 مواطن، فوجد منهم 170 يستعملون البطاقة الذهبية والسحب من الموزع الآلي. اختبر فرضية زيادة نسبة مستعملي البطاقة الذهبية والسحب من الموزع الآلي بالولاية عند مستوى معنوية 5%.

اختبر فرضية وجود فرق معنوي بين نسبة المعيب في الآلتين عند مستوى معنوية 5%.

التمرين التاسع:

مجتمعان مستقلان، الأول سحبنا منه عينة عشوائية حجمها 80 شخصا، فوجدنا أن 50 منهم يملكون أجهزة كمبيوتر، والثاني سحبنا منه عينة عشوائية حجمها 70 شخصا، فوجدنا أن 40 منهم يملكون أجهزة كمبيوتر. هل يمكن أن نقول أن الفرق ما بين نسبة الذين يملكون أجهزة كمبيوتر بالمجتمع الأول والمجتمع الثاني يفوق 5%، وذلك عند مستوى معنوية 10%.

التمرين العاشر:

عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين مجهول، فإذا كان حجم العينة المسحوبة هو 17، وكان $\sum_{i=1}^{17}(X_i - \bar{X})^2 = 576$. اختبر فرضية أن تباين المجتمع يساوي 33 عند مستوى معنوية 10%.

التمرين الحادي عشر:

مجتمعان، الأول توزيعه $N(\mu_1, \sigma_1)$، والثاني توزيعه $N(\mu_2, \sigma_2)$، سحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها 15، ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية مستقلة عن العينة الأولى حجمها 18، وحصلنا على البيانات التالية:

$$S_1^2 = 36 \qquad S_2^2 = 25$$

اختبر فرضية أن تباين المجتمع الأول أكبر من ضعف تباين المجتمع الثاني باستخدام مستوى معنوية 10%.

المراجع

أولا: المراجع باللغة العربية

1- أحمد السيد عامر، **الإحصاء الوصفي والتحليلي**، (دار الفجر للنشر والتوزيع، القاهرة، 2007).

2- الكيخيا نجاة إبراهيم، **أساسيات الإحصاء الإستدلالي**، (دار المريخ للنشر، الرياض، 2007).

3- السعدي رجال، **نظرية الإحتمالات**، (ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2008).

4- السيفو ولد إسماعيل، **أساسيات الأساليب الإحصائية**، (زمزم ناشرون وموزعون، عمان، 2010).

5- أمحمد معتوق، **الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية**، (ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015).

6- أنيس كنجو، **الإحصاء الرياضي**، (مديرية الكتب الجامعية، دمشق، 1979).

7- إمتثال محمد حسن وآخرون، **مقدمة في أساليب الإستدلال الإحصائي والتنبؤ**، (مكتبة الوفاء القانونية، الإسكندرية، 2012).

8- كامل فليفل وفتحي حمدان، **الإحصاء**، (دار المناهج، عمان، 2005).

9- محمد حسين محمد رشيد القادري، **مبادئ الإحصاء والإحتمالات ومعالجتها بإستخدام برنامج SPSS**، (دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع، 2012).

10- محمد صبحي أبو صالح، **الطرق الإحصائية**، (دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، 2000).

11- موراي سبيجل، **الإحصاء والإحتمالات**، (أكاديميا، بيروت، 1998).

12- نعمة الله نجيب إبراهيم، **مقدمة في الاقتصاد القياسي**، (مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، 2012).

13- صالح رشيد بطارسة، **الإحصاء والإحتمالات**، (دار أسامة للنشر والتوزيع، عمان، 2010).

14- عزام صبري، **الإحصاء الرياضي**، (دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع، عمان، 2010).

15- عماد عصاب عبابنة وسالم عيسى بدر، **مبادئ الإحصاء الوصفي والإستدلالي**، (دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، 2007).

ثانيا: المراجع باللغة الأجنبية

16- *Chamoun Chamoun*, ***Elements de statistiques et la probabilités***, *(office des publications universitaires, Alger, 2010).*

17- Jean-Pierre Lecoutre, ***Statistique et probabilités,*** *(Malakoff : Dunod, 2016).*

18- Rachid Souidi, ***Statistique inférentielle,*** *(OPU, Alger, 1999).*

19- Mohamed Benali moncef, ***Statistique mathématique : rappels de cours avec exercices corriges,*** *(Centre de publication universitaire, Tunis, 2002).*

20- Besma Belhadj, ***Statistique mathématique, inférence statistique : introduction à l'économiétrie et aux techniques des sondages : cours, exercices corrigés et sujets d'examens, problèmes concrets,*** *(Centre de publication universitaire, Tunis, 2010).*

21- Bernard Verlant, ***Statistiques et Probabilités : Manuel de cours, Exercices corrigés – Sujets d'examens*** *(BERTI Editions, Alger, 2008).*

22- Maurice Lethielleux, ***Probabilités, estimation statistique,*** *(Dunod, Paris, 2016).*

23- Ahmed Chibat, ***Cours de statistiques,*** *(Universié mentouri de constantine, Alger, 2000).*

الملاحـــــــــــــــــــــق

الملحق رقم 1: جدول الأرقام العشوائية

TABLE 1 - RANDOM DIGITS

11164	36318	75061	37674	26320	75100	10431	20418	19228	91792
21215	91791	76831	58678	87054	31687	93205	43685	19732	08468
10438	44482	66558	37649	08882	90870	12462	41810	01806	02977
36792	26236	33266	66583	60881	97395	20461	36742	02852	50564
73944	04773	12032	51414	82384	38370	00249	80709	72605	67497
49563	12872	14063	93104	78483	72717	68714	18048	25005	04151
64208	48237	41701	73117	33242	42314	83049	21933	92813	04763
51486	72875	38605	29341	80749	80151	33835	52602	79147	08868
99756	26360	64516	17971	48478	09610	04638	17141	09227	10606
71325	55217	13015	72907	00431	45117	33827	92873	02953	85474
65285	97198	12138	53010	94601	15838	16805	61004	43516	17020
17264	57327	38224	29301	31381	38109	34976	65692	98566	29550
95639	99754	31199	92558	68368	04985	51092	37780	40261	14479
61555	76404	86210	11808	12841	45147	97438	60022	12645	62000
78137	98768	04689	87130	79225	08153	84967	64539	79493	74917
62490	99215	84987	28759	19177	14733	24550	28067	68894	38490
24216	63444	21283	07044	92729	37284	13211	37485	10415	36457
16975	95428	33226	55903	31605	43817	22250	03918	46999	98501
59138	39542	71168	57609	91510	77904	74244	50940	31553	62562
29478	59652	50414	31966	87912	87154	12944	49862	96566	48825
96155	95009	27429	72918	08457	78134	48407	26061	58754	05326
29621	66583	62966	12468	20245	14015	04014	35713	03980	03024
12639	75291	71020	17265	41598	64074	64629	63293	53307	48766
14544	37134	54714	02401	63228	26831	19386	15457	17999	18306
83403	88827	09834	11333	68431	31706	26652	04711	34593	22561
67642	05204	30697	44806	96989	68403	85621	45556	35434	09532
64041	99011	14610	40273	09482	62864	01573	82274	81446	32477
17048	94523	97444	59904	16936	39384	97551	09620	63932	03091
93039	89416	52795	10631	09728	68202	20963	02477	55494	39563
82244	34392	96607	17220	51984	10753	76272	50985	97593	34320
96990	55244	70693	25255	40029	23289	48819	07159	60172	81697
09119	74803	97303	88701	51380	73143	98251	78635	27556	20712
57666	41204	47589	78364	38266	94393	70713	53388	79865	92069
46492	61594	26729	58272	81754	14648	77210	12923	53712	87771
08433	19172	08320	20839	13715	10597	17234	39355	74816	03363
10011	75004	86054	41190	10061	19660	03500	68412	57812	57029
92420	65431	16530	05547	10683	88102	30176	84750	10115	69220
35542	55865	07304	47010	43233	57022	52161	82976	47981	46588
86595	26247	18552	29491	33712	32285	64844	69395	41387	87195
72115	34985	58036	09137	47482	06204	24138	24272	16196	04393
07428	58863	96023	88936	51343	70958	96768	74317	27176	29600
35379	27922	28906	55013	26937	48174	04197	36074	65315	12537
10982	22807	10920	26299	23593	64629	57801	10437	43965	15344
90127	33341	77806	12446	15444	49244	47277	11346	15884	28131
63002	12990	23510	68774	48983	20481	59815	67248	17076	78910
40779	86382	48454	65269	91239	45989	45389	54847	77919	41105
43216	12608	18167	84631	94058	82458	15139	76856	86019	47928
96167	64375	74108	93643	09204	98855	59051	56492	11933	64958
70975	62693	35684	72607	23026	37004	32989	24843	01128	74658
85812	61875	23570	75754	29090	40264	80399	47254	40135	69916

الملحق رقم 2: التوزيع الطبيعي

$\Phi(z) = P(Z \leq z), \ -3.49 \leq z \leq 0 , \quad Z \sim N(0,1)$ بعي

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3829
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

الملحق رقم 2: التوزيع الطبيعي - تابع -

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

الملحق رقم 3: توزيع كاي مربع

$$P(X \geq \text{a}), \qquad X \sim x^2(\alpha, \vartheta)$$

ϑ \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	-	-	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

الملحق رقم 4: توزيع ستودنت

$P(X \geq a)$, $X \sim t(\vartheta)$ t

ϑ \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

الملحق رقم 5: توزيع فيشر

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.05, \vartheta_1, \vartheta_2)$

$\vartheta_2 \backslash \vartheta_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75
inf	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67

الملحق رقم 5: توزيع فيشر – تابع -

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.05, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
inf	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

الملحق رقم 5: توزيع فيشر – تابع -

$$P(X \geq a), \qquad X\sim F(0.1, \vartheta_1, \vartheta_2)$$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	39.86	49.5	53.59	55.83	57.24	58.2	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22
2	8.53	9	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.2
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.9	3.87
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.4	3.37	3.34	3.32	3.3	3.27	3.24
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.9	2.87
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.7	2.67	2.63
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.5	2.46
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.3	2.27	2.25	2.21	2.17
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.1
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.2	2.16	2.14	2.1	2.05
14	3.1	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.1	2.05	2.01
15	3.07	2.7	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.1	2.06	2.03	2	1.96	1.91
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.2	2.13	2.08	2.04	2	1.98	1.93	1.89
19	2.99	2.61	2.4	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2	1.96	1.94	1.89	1.84
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.9	1.86	1.81
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.8
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.1	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76
27	2.9	2.51	2.3	2.17	2.07	2	1.95	1.91	1.87	1.85	1.8	1.75
28	2.89	2.5	2.29	2.16	2.06	2	1.94	1.9	1.87	1.84	1.79	1.74
29	2.89	2.5	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.6
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.9	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.6	1.55
inf	2.71	2.3	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.6	1.55	1.49

الملحق رقم 5: توزيع فيشر – تابع -

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.1, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	61.74	62	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.84	3.83	3.82	3.8	3.79	3.78	3.76
5	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
6	2.84	2.82	2.8	2.78	2.76	2.74	2.72
7	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	2.42	2.4	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	2.3	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	2.2	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	2.12	2.1	2.08	2.05	2.03	2	1.97
12	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.9
13	2.01	1.98	1.96	1.93	1.9	1.88	1.85
14	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.8
15	1.92	1.9	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	1.81	1.79	1.76	1.73	1.7	1.67	1.63
20	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	1.76	1.73	1.7	1.67	1.64	1.6	1.57
23	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	1.73	1.7	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.5
27	1.7	1.67	1.64	1.6	1.57	1.53	1.49
28	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.5	1.46
40	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.4	1.35	1.29
120	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
inf	1.42	1.38	1.34	1.3	1.24	1.17	1

الملحق رقم 5: توزيع فيشر – تابع -

$$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.025, \vartheta_1, \vartheta_2)$$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	647.79	799.5	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63	976.71	984.87
2	38.51	39	39.17	39.25	39.3	39.33	39.36	39.37	39.39	39.4	39.41	39.43
3	17.44	16.04	15.44	15.1	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25
4	12.22	10.65	9.98	9.6	9.36	9.2	9.07	8.98	8.9	8.84	8.75	8.66
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43
6	8.81	7.26	6.6	6.23	5.99	5.82	5.7	5.6	5.52	5.46	5.37	5.27
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.9	4.82	4.76	4.67	4.57
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.3	4.2	4.1
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.2	4.1	4.03	3.96	3.87	3.77
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33
12	6.55	5.1	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18
13	6.41	4.97	4.35	4	3.77	3.6	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05
14	6.3	4.86	4.24	3.89	3.66	3.5	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95
15	6.2	4.77	4.15	3.8	3.58	3.41	3.29	3.2	3.12	3.06	2.96	2.86
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.5	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.1	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67
19	5.92	4.51	3.9	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.8	2.73	2.64	2.53
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.7	2.6	2.5
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.9	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.7	2.64	2.54	2.44
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.1	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.8	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.9	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34
29	5.59	4.2	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.9	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06
120	5.15	3.8	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.3	2.22	2.16	2.05	1.95
inf	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83

الملحق رقم 5: توزيع فيشر – تابع -

$$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.025, \vartheta_1, \vartheta_2)$$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	993.1	997.25	1001.41	1005.6	1009.8	1014.02	1018.26
2	39.45	39.46	39.47	39.47	39.48	39.49	39.5
3	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.9
4	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.9	4.85
7	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.2	4.14
8	4	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.42	3.37	3.31	3.26	3.2	3.14	3.08
11	3.23	3.17	3.12	3.06	3	2.94	2.88
12	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.73
13	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.6
14	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	2.76	2.7	2.64	2.59	2.52	2.46	2.4
16	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.62	2.56	2.5	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.56	2.5	2.45	2.38	2.32	2.26	2.19
19	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.2	2.13
20	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.39	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2
23	2.36	2.3	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.3	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.25	2.19	2.13	2.07	2	1.93	1.85
28	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.2	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.07	2.01	1.94	1.88	1.8	1.72	1.64
60	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
inf	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1

الملحق رقم 5: توزيع فيشر – تابع -

$$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.01, \vartheta_1, \vartheta_2)$$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	4052.18	4999.5	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.85	6106.32	6157.29
2	98.5	99	99.17	99.25	99.3	99.33	99.36	99.37	99.39	99.4	99.42	99.43
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87
4	21.2	18	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.8	14.66	14.55	14.37	14.2
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72
6	13.75	10.93	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.1	7.98	7.87	7.72	7.56
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.8	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.2	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.4	4.25
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.5	4.39	4.3	4.16	4.01
13	9.07	6.7	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.3	4.19	4.1	3.96	3.82
14	8.86	6.52	5.56	5.04	4.7	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.8	3.66
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4	3.9	3.81	3.67	3.52
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.2	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41
17	8.4	6.11	5.19	4.67	4.34	4.1	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.02	3.84	3.71	3.6	3.51	3.37	3.23
19	8.19	5.93	5.01	4.5	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.3	3.15
20	8.1	5.85	4.94	4.43	4.1	3.87	3.7	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.4	3.31	3.17	3.03
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98
23	7.88	5.66	4.77	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.3	3.21	3.07	2.93
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.9	3.67	3.5	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82
27	7.68	5.49	4.6	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.9	2.75
29	7.6	5.42	4.54	4.05	3.73	3.5	3.33	3.2	3.09	3.01	2.87	2.73
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.7	3.47	3.3	3.17	3.07	2.98	2.84	2.7
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.8	2.67	2.52
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.5	2.35
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19
inf	6.64	4.61	3.78	3.32	3.02	2.8	2.64	2.51	2.41	2.32	2.19	2.04

الملحق رقم 5: توزيع فيشر – تابع -

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.01, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	6208.73	6234.63	6260.65	6286.78	6313.03	6339.39	6365.86
2	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.5
3	26.69	26.6	26.51	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	9.55	9.47	9.38	9.29	9.2	9.11	9.02
6	7.4	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.36	5.28	5.2	5.12	5.03	4.95	4.86
9	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.4	4.31
10	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4	3.91
11	4.1	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.6
12	3.86	3.78	3.7	3.62	3.54	3.45	3.36
13	3.67	3.59	3.51	3.43	3.34	3.26	3.17
14	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3
15	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.26	3.18	3.1	3.02	2.93	2.85	2.75
17	3.16	3.08	3	2.92	2.84	2.75	2.65
18	3.08	3	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3	2.93	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	2.94	2.86	2.78	2.7	2.61	2.52	2.42
21	2.88	2.8	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	2.83	2.75	2.67	2.58	2.5	2.4	2.31
23	2.78	2.7	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	2.74	2.66	2.58	2.49	2.4	2.31	2.21
25	2.7	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	2.66	2.59	2.5	2.42	2.33	2.23	2.13
27	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.2	2.1
28	2.6	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	2.57	2.5	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.55	2.47	2.39	2.3	2.21	2.11	2.01
40	2.37	2.29	2.2	2.11	2.02	1.92	1.81
60	2.2	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.6
120	2.04	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
inf	1.88	1.79	1.7	1.59	1.47	1.33	1

فهرس المحتويات