REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

N° d'ordre: ....

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité

Mathématiques

Option

Mathématiques appliquées

Thème

Etude Mathématique de quelques problèmes aux limites en viscoélasticité et viscoplasticité

Présenté par :

KHELIFA CHADI

Soutenu le 24/10/2024

devant le jury:

KHALIL SAADI	**Professeur**	**Université de M'sila**	**Président**
MOHAMED SELMANI	**Professeur**	**Université de Sétif 1**	**Encadreur**
ABDELBAKI MEROUANI	**Professeur**	**Université de Sétif 1**	**Examinateur**
ELHADJ DAHIA	**Professeur**	**ENS Bou-Saada**	**Examinateur**
BRAHIM NOUIRI	**Professeur**	**Université de M'sila**	**Examinateur**
BACHIR GAGUI	**MCA**	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon Directeur de thèse, le professeur **Selmani Mohamed**, pour avoir accepté de superviser ce travail. Sa confiance inébranlable, ainsi que ses qualités humaines et scientifiques, ont joué un rôle déterminant dans la réalisation de cette thèse.

Je remercie également chaleureusement le professeur **Saadi Khalil** d'avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Je remercie sincèrement Pr **Merouani Abdelbaki,** Pr **Dahia Elhadj**, Pr **Nouiri Brahim** et Dr **Gagui Bachir** d'avoir accepté de lire mon travail et de faire partie du jury de cette thèse. Leur présences constituent un grand honneur. Merci pour vos remarques, vos critiques, vos conseils et simplement, pour l'intérêt que vous avez portés à mon travail.

Je tiens également à remercier tous les membres de la Faculté des Mathématiques et de l'Informatique (MI) à l'Université de M'sila et les membres Laboratoire Mathématiques Applications LaMA à l'Université du Sétif 1.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements et grande gratitude à mas parents, ma femme et mes enfants, mes soeurs, à mes proches pour leur soutien constant et encouragement. Et surtout de m'avoir supporté toutes ces années, et à qui je dédie ce travail.

Table des matières

Introduction

Les problèmes de contact, qu'ils impliquent ou non du frottement, entre des corps déformables ou non, jouent un rôle crucial dans de nombreux domaines, tant industriels que quotidiens. Par exemple, dans le secteur ferroviaire, le contact entre la roue et le rail, dans l'industrie automobile, l'étude des caractéristiques d'adhérence entre le pneu et la route ainsi que les tests de collision, dans le génie civil, où il est essentiel d'estimer les contraintes subies par les matériaux constituant les ponts ou les gratte-ciels, dans les mouvements des plaques tectoniques, et même dans le domaine de l'aéronautique, ne serait-ce que pour les propriétés d'absorption des chocs des trains d'atterrissage.

Étant donnée l'importance et la diversité de ces phénomènes, d'importantes études ont été menées. Ainsi, la littérature sur la mécanique du contact est vaste, couvrant des sujets allant de la modélisation à l'analyse mathématique et à l'approximation numérique des problèmes de contact. La théorie générale de la mécanique du contact a débuté avec la monographie de Duvaut et Lions [13], qui a présenté des formulations variationnelles initiales des problèmes et a démontré des résultats d'existence et d'unicité. D'autres références incontournables incluent de [40], [41], [29] et [27].

La condition de contact sans frottement est souvent adoptée dans plusieurs références pour simplifier l'analyse de certains modèles. Parallèlement, la loi de frottement la plus couramment utilisée dans la littérature est la loi de Coulomb, énoncée pour la première fois par Amontons en 1699. Cette loi, exprimée sous forme d'inégalités, se caractérise principalement par sa capacité à décrire le phénomène "adhérence-glissement". Diverses versions dépendantes de la loi de Coulomb ont également été largement employées, à la fois dans la littérature technique et mathématique, comme cela est expliqué dans [50].

Outre les phénomènes susmentionnés, il existe d'autres aspects réels d'une grande importance tels que l'endommagement des matériaux, l'usure, la lubrification, l'adhésion entre les corps, ainsi que les effets mécaniques, physiques et chimiques à différentes échelles. L'endommagement, en particulier, joue un rôle crucial en ingénierie car il influe directement sur la structure des machines. Une littérature abondante est consacrée à ce sujet, avec des modèles mathématiques qui prennent en compte l'impact de l'endommagement interne des matériaux.

Des modèles d'endommagement ont été développés dans [15] à partir du principe de la puissance virtuelle. L'analyse mathématique de ces problèmes, notamment en dimension un, peut être trouvée dans [18, 19, 20]. La fonction d'endommagement β varie entre 0 et 1. Lorsque $\beta = 1$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, tandis que lorsque $\beta = 0$, le matériau est complètement endommagé. Pour $0 < \beta < 1$, l'endommagement est partiel [17, 22, 25, 30, 32, 36, 45, 53].

L'usure est un problème majeur dans le domaine des matériaux. Lorsque deux corps entrent en contact avec frottement et glissement, les surfaces en contact subissent une usure, la surface la plus rigide s'usant de manière plus significative que l'autre surface. Les particules perdues des surfaces en contact forment alors une fine couche entre les deux corps. Des expériences ont montré que cette couche ainsi formée pouvait avoir un effet bénéfique sur les phénomènes de contact en améliorant le glissement. Il peut même se produire un enfoncement de l'un des corps dans l'autre, entraînant l'apparition d'aspérités.

La modélisation de l'usure devrait évidemment prendre en compte de nombreux paramètres, tels que les propriétés et la rugosité des corps via les lois de constitution, la température, les vitesses des corps, ainsi que de nombreux autres paramètres. Les premières modélisations incluant des lois de frottement et d'usure prenant en compte la thermodynamique peuvent être trouvées dans [2, 27, 31, 43, 46, 49, 51, 52], ainsi que dans [15].

Les matériaux piézoélectriques, découverts au début du siècle par les époux Curie, sont des diélectriques particuliers capables de convertir l'énergie de déformation élastique en énergie électrique, et inversement. La piézoélectricité se manifeste par la capacité de certains matériaux à se polariser lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique, générant ainsi une charge à leur surface proportionnelle à la déformation subie. L'effet piézoélectrique inverse se produit lorsqu'une déformation est obtenue par l'application d'un champ électrique.

De manière plus générale, l'effet direct de la piézoélectricité peut être exploité dans la fabrication de capteurs (comme les capteurs de pression, par exemple), tandis que l'effet inverse permet la réalisation d'actionneurs (tels que les injecteurs à commande piézoélectrique en automobile ou les nanomanipulateurs).

L'utilisation de la piézoélectricité a connu une expansion remarquable ces dernières années et continue de croître. La capacité de ces matériaux à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique, et vice versa, représente une valeur inestimable pour les transducteurs acoustiques, l'échographie médicale, ainsi que pour la haute précision des pompes et des moteurs.

Les performances élevées des matériaux piézoélectriques ont également ouvert de nouvelles perspectives en termes de "récupération d'énergie", permettant d'utiliser le mouvement ambiant et les vibrations pour produire de l'électricité dans des situations où l'utilisation de piles ou d'autres sources d'énergie est impraticable ou non disponible [6, 8, 9, 13, 23, 47].

Un phénomène distinct sera abordé dans cette thèse, portant sur le contact accompagné d'effets thermiques. En effet, les processus de contact et de friction sont souvent associés à une production de chaleur, qui peut parfois être significative. Par exemple, un freinage soudain d'un véhicule peut engendrer une dissipation énergétique importante sous forme de chaleur. Cet effet thermique dans les interactions de contact modifie la structure et la rigidité des surfaces et génère des contraintes thermiques dans les corps en contact. L'influence de la chaleur sur les propriétés mécaniques des surfaces peut être partiellement intégrée en supposant, par exemple, que le coefficient de friction varie avec la température, comme indiqué dans [43]. Les modèles thermodynamiques requièrent généralement quatre éléments : une condition de génération de chaleur, une condition de transfert thermique entre le corps et son support, une relation constitutive et l'équation de l'énergie. Ces modèles ont fait l'objet de développements récents dans [16, 22, 31, 48, 55]. Les problématiques de contact dynamique avec endommagement ont été analysées par Andrews, Kuttler, et Shillor [3] dans un cadre unidimensionnel pour des corps thermo-viscoélastiques. L'existence d'une solution pour un problème thermo-élastique avec frottement a été démontrée pour la première fois par Figueredo et Trabucho [21].

L'objet de cette thèse est de proposer une contribution à l'étude mathématique de quelques problèmes de contact entre un corps déformable et une fondation. Sous l'hypothèse des petites déformations, nous étudions des processus quasi-statiques et dynamiques pour des matériaux élasto-viscoplastiques, thermo-viscoélastique et électro-viscoélastique. Les conditions aux limites sont du type compliance normale sans adhésion. Les lois de frottement utilisés sont des versions de la loi de Coulomb sans adhésion. Les conditions électriques sont introduites dans les cas où la fondation est conductrice, pour lesquels nous couplons à la fois l'endommagement du matériau et l'usure ou l'endommagement et l'effet thermique. Notre étude des phénomènes de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible . Ce manuscrit comporte deux parties, et est conçu comme suit.

Dans la première partie, nous introduisons des notions générales pour une bonne compréhension des problèmes traités dans la suite. Nous commençons par la description des lois de comportement des différents matériaux, ainsi que les conditions aux limites. Nous rappelons ensuite l'analyse fonctionnelle et les espaces des fonctions à valeurs vectorielles, nous passons en revu quelques résultats fondamentaux d'analyse concernant les équations, les inéquations variationnelles et les inéquations hémi-variationnelles elliptique ou parabolique . En complément, nous présentons les lemmes de Gronwall et le théorème de point fixe de Banach.

La deuxième partie contient les chapitres 3 à 6 et représente la partie principale de cette thèse. Elle est consacrée à la modélisation et à l'analyse des problèmes de contact avec ou sans frottement.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un modèle mathématique de contact sans frottement entre un orps des matériaux élasto-viscoplastique et une base déformable dans un processus quasi-statique. Le contact est modélisé par une compliance normale, la loi de comportement est élasto-viscoplastique avec variable interne d'état qui décrit l'endommagement du matériau causé par les déformations élastiques. Nous exposons les formulations mathématique et variationnelle du problème. On établit aussi les résultats principaux concernant l'existence et l'unicité de la solution faible. La démonstration est basée sur des arguments des équations non linéaires avec opérateurs monotones, d'inéquations paraboliques et des arguments de point fixe.

Au quatrième chapitre porte sur l'étude mathématique d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux élasto-viscoplastique dans un processus dynamique. Le contact étant avec une base déformable et mobile, il est modélisé par réponse normale instantanée impliquant l'usure. La loi de comportement est élasto-viscoplastique avec variable interne d'état qui décrit l'endommagement du matériau causé par les déformations plastiques. Pour ce problème ,après avoir établi la formulation variationnelle et après avoir posé les hypothèses nécessaires , un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible a été établi . Les démonstrations sont basées sur les inéquations variationnelles paraboliques de premier et deuxième types et des arguments de point fixe.

Le chapitre 5 aborde une analyse variationnelle d'un problème dynamique décrivant le contact avec frottement entre un corps thermo-viscoélastique et une fondation déformable. Le contact est modélisé avec une compliance normale et frottement. Le matériau est thermo-viscoélastique avec une longue mémoire et endommagement. Ce qui est nouveau ici, c'est que la température à la surface de contact entre le corps et la fondation est prise en compte. Un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible a été prouvé . La démonstration est basé sur des arguments de résultats classiques pour les inégalités variationnelles paraboliques du premier et du second type, sur une équation d'évolution du premier ordre et des arguments de point fixe. Ce travail est sanctionné par une publication [08].

Dans le quatrième et dernier problème de cette partie , Nous abordons un problème de contact avec frottement pour des matériaux électro-viscoélastiques dans un processus dynamique. La nouveauté du modèle réside dans le choix d'une loi de frottement sous-différentielle des surfaces de contact. Le problème se formule comme un système formé par une inéquation hémi-variationnelle hyperbolique par rapport au champ de déplacement, une inéquation hémi-variationnelle elliptique par rapport au champ potentiel électrique. Des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été considérés en utilisant la théorie des inéquations hémi-variationnelles, et des arguments de point fixe.

Notations

Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3)$, on

$\overline{\Omega}$	la clôture de Ω.
Γ	la bordure de Ω présumée régulière.
$\Gamma_i \quad \left(i = \overline{1,3}\right)$	un segment mesurable du bord Γ.
$mes\ \Gamma_1$	la mesure unidimensionnelle de Lebesgue de Γ_1.
$\boldsymbol{\nu}$	le vecteur normal externe unitaire à Γ.
$\mathbf{v}_\nu, \mathbf{v}_\tau$	les composantes normale et tangentielle d'un vecteur $\mathbf{v}$.
$C\left(\overline{\Omega}\right)$	l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$
$C^k\left(\overline{\Omega}\right)$	l'ensemble des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ sont dans $C\left(\overline{\Omega}\right)$.
$C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$	$\cap_{k=0}^{\infty} C^k\left(\overline{\Omega}\right)$.
$C_0^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$	l'ensemble des fonctions infiniment différentiables à support compact sur Ω.
$L^p(\Omega)$	l'espace des fonctions mesurables sur Ω tel que $\int_\Omega \lvert\mathbf{v}\rvert^p dx < +\infty,\ p \in [1, +\infty[$
$L^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions mesurables sur Ω tel que $\inf\limits_{\substack{mesM=0 \\ M\subset\Omega}} \sup\limits_{x\in\Omega\setminus M} \lvert\mathbf{v}(x)\rvert < +\infty,\ p \in [1, +\infty[$
$\lVert.\rVert_{L^p(\Omega)}$	la norme sur $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty[$
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'ensemble des fonctions réelles infiniment différentiables à support compact inclus dans Ω
$\mathcal{D}'\left(\overline{\Omega}\right)$	l'espace des distributions sur Ω

si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes

H^d	l'espace $\{x = (x_i) / x_i \in H\}$
$H^{d\times d}$	l'espace $\{x = (x_{ij}) / x_{ij} = x_{ij} \in H\}$
$(.,.)_H$	le produits calaire de H
$\lVert.\rVert_H$	la norme de H
H'	l'espace dual de H
$(.,.)_{H'\times H}$	le produit dualité entre $H' \times H$
ψ_K	la fonction indicatrice de $k \subset H$
2^K	l'ensemble de toutes les parties de k

Pour une fonctions f, on note

$dom f$	le domaine de f.
$\operatorname{supp} f$	le support de f.
$\dot{f}, \ddot{f}$	les dérivés premiére et seconde de f par rapport au temps.
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à laième composante x_i.
∇f	le gradient de f.
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de f qui vaut$\frac{1}{2}\left(\nabla f + \nabla^T f\right)$
$\operatorname{Div} f$	la divergence de f
∂f	le sousdifférentiel (classique)de f.

Si X et Y sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

$\mathcal{L}(X, Y)$	l'espace des applications linéaires et continues de X dans Y.
$\lvert . \rvert_{\mathcal{L}(X,Y)}$	la norme de $\mathcal{L}(X, Y)$.

On dresse mainte nant le reste de la liste des notations et les conventions utilisées le long

de cette

thèse.

$\dot{\mathbf{u}}$	le champ des vitesses.
$\ddot{\mathbf{u}}$	le le champ des accélérations.
$\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$	le champ des déplacements.
$\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_d$	le champ du tenseur des contraintes.
$\beta : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$	le champ d'endommagement.
$\theta : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}_+$	le champ de température.
$\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$	le champ des déplacements électriques.
$\varphi : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$	le champ potentiel électrique.

Partie I

Formulation des problémes aux limites et rappels d'analyse

Chapitre 1

Modélisation des problèmes de contact et préliminaires sur l'analyse fonctionnelle

Ce chapitre est dédié à l'introduction et à la formulation des problèmes mécaniques qui seront abordés par la suite, ainsi qu'à un rappel des notions principales de la mécanique des milieux continus et de l'analyse fonctionnelle nécessaire pour la compréhension de cette thèse. Dans ce chapitre nous présentons le cadre physique des problèmes étudiés, puis nous discutons des lois de comportement des divers matériaux, telles que la loi constitutive élasto-viscoplastique non linéaire avec endommagement, la loi thermo-élasto-viscoplastique avec mémoire longue et endommagement, ainsi que la loi électro-viscoélastique. Nous évoquons ensuite les différents types de conditions aux limites, avec ou sans frottement. Pour conclure, nous introduisons un rappel bref mais essentiel concernant les espaces fonctionnels à valeurs vectorielles, les inéquations variationnelles, quasi-variationnelles et hémivariationnelles, ainsi que le théorème du point fixe..

1.1 Modélisation des problèmes élasto-viscoplastique et thermo-viscoélastique

1.1.1 Cadre physique.

Nous considérons le cadre physique général que nous décrivons dans ce qui suit. Un corps déformable occupe, dans la configuration de référence, un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$, supposé être Lipschitz. On note $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)$ le vecteur normal unitaire extérieur et par $\mathbf{x} = (x_i) \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ le vecteur position. Ici et ci-dessous, les indices i, j, k, l cours de 1 à d ; un index qui suit une virgule indique un dérivé avec par rapport à la composante correspondante de la variable spatiale $\mathbf{x}$ et à la somme une convention sur les indices répétés est adoptée. On note S_d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$ ou, de manière équivalente, l'espace des matrices symétriques d'ordre d. Nous rappelons que les produits internes canoniques et les normes correspondantes sur $\mathbb{R}^d$ et S_d sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathbf{u}.\mathbf{v} &= \mathbf{u}_i\mathbf{v}_i \ , \qquad \|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}.\mathbf{v})^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\ \mathbf{u} = (u_i)\,, \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij}\tau_{ij} \ , \quad \|\boldsymbol{\tau}\| = (\boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})\,, \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in S_d, \end{aligned}$$

respectivement.

Nous supposons également que la frontière est composée de trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3, tel que $mes\Gamma_1 > 0$. Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe, et des tractions de surface de densité f_2 dépendant du temps agissent sur Γ_2. Le corps est, ou peut arriver, en contact sur Γ_3 avec un obstacle, dit fondation. A chaque instant Γ_3 est divisé en deux parties : une partie où le corps et la fondation sont en contact et l'autre partie où ils sont séparés. La frontière de la partie contact est une frontière libre, déterminée par la solution du problème. Nous supposons que dans la configuration de référence, il peut y avoir un interstice, noté g_0, entre Γ_3 et la fondation, qui est mesuré le long de la normale extérieure $\boldsymbol{\nu}$. Nous nous intéressons aux modèles mathématiques qui décrivent l'évolution de l'état mécanique du corps pendant l'intervalle de temps $[0, T]$, avec $T > 0$. A cet effet, on note $\sigma = \sigma(\mathbf{x}, t) = (\sigma_{ij}(x, t))$ le champ de contraintes et par $\mathbf{u} = u(\mathbf{x}, t) = (u_i(x, t))$ le champ de déplacement où, ici et ci-dessous, t désigne la variable temps.

Les fonctions $\mathbf{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \Omega \times [0,T] \to S_d$ jouera le rôle des inconnues du problème de contact. De temps en temps, nous supprimons la dépendance explicite de diverses quantités à la variable spatiale $\mathbf{x}$, ou à la fois à $\mathbf{x}$ et à t ; c'est-à-dire que lorsque cela convient, nous écrivons $\sigma(t)$ et $\mathbf{u}(t)$, ou même σ et $\mathbf{u}$. Nous utiliserons ce cadre physique dans les chapitres 3 , 4 et 5 de la thèse.

Avant la description des modèles mathématiques associées au cadre physique présenté cidessus, nous devons décrire la condition aux limites sur Γ_3. Celles-ci se divisent naturellement entre les conditions dans la direction normale et celles dans les directions tangentielles. Pour les décrire nous utilisons les indices $\boldsymbol{\nu}$ et τ pour représenter la composante normale et la partie tangentielle des vecteurs et tenseurs. Par exemple, les déplacements normal et tangentiel sont donnés par

$$\mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}.\boldsymbol{\nu}, \qquad \mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\nu \boldsymbol{\nu}. \tag{1.1.1}$$

Nous utilisons des notations similaires pour les composantes normale et tangente du champ de vitesse $\dot{\mathbf{u}}$ sur la frontière, définie par

$$\dot{\mathbf{u}}_\nu = \dot{\mathbf{u}}.\boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\mathbf{u}}_\tau = \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_\nu \boldsymbol{\nu}. \tag{1.1.2}$$

On note par σ_ν et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ les composantes normales et tangentielles du champ de contraintes σ sur la frontière, c'est-à-dire

$$\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma\nu}).\boldsymbol{\nu}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}. \tag{1.1.3}$$

La composante $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ représente la contrainte tangentielle ou la force de frottement sur la surface de contact Γ_3. Évidemment, nous avons les relations d'orthogonalité $\mathbf{v}_\tau.\boldsymbol{\nu} = 0$, $\sigma_\tau.\boldsymbol{\nu} = 0$ et, de plus, la formule de décomposition suivante est vraie

$$(\boldsymbol{\sigma\nu}).\mathbf{v} = (\sigma_\nu \boldsymbol{\nu} + \sigma_\tau).(\mathbf{v}_\nu \boldsymbol{\nu} + \mathbf{v}_\tau) = \sigma_\nu \mathbf{v}_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau.\mathbf{v}_\tau, \tag{1.1.4}$$

Cette formule est utilisée dans les chapitres suivants de cette thèse, afin d'en dériver la formulation variationnelle de différents problèmes de contact.

1.1.2 Equations de mouvement et d'équilibre.

L'équation du mouvement qui régit l'évolution de l'état mécanique du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy

$$\mathrm{Div}\sigma = \rho\ddot{\mathbf{u}} - f_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T)\,, \tag{1.1.5}$$

où $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la densité de masse et f_0 est la densité des forces appliquées, telles que la gravité ou les forces électromagnétiques. Ici "Div " est l'opérateur de divergence, c'est-à-dire

$$\mathrm{Div}\sigma = (\sigma_{ij,j})$$

et, rappelons-le, $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$. Le processus d'évolution défini par (**1**.1.5) s'appelle processus dynamique. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le

cas où le champ des vitesses $\dot{\mathbf{u}}$ varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho\ddot{\mathbf{u}}$ peut être

négligé. Dans ce cas, le processus s'appelle quasistatique et l'équation (**1**.1.5) s'appelle l'équation

d'équilibre et devient

$$\mathrm{Div}\sigma + f = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T)\,, \tag{1.1.6}$$

Les processus modélisés par l'équation du mouvement (**1**.1.5) sont appelés processus dynamiques. Les processus modélisés par l'équation d'équilibre (**1**.1.6) sont dits quasistatiques,

Enfin parmi bien d'autres axiomes ou principes de base de la mécanique des milieux continus, nous citons également la loi de conservation de l'énergie qui est donnée par

$$\dot{\theta} - \mathrm{div}\,(K_c \nabla\theta) - q = r(\dot{\mathbf{u}}) \text{ dans } \quad \Omega \times (0, T)\,, \tag{1.1.7}$$

où θ est le champ de température, $K_c = (k_{ij})$ représente le tenseur de la conductivité thermique, avec $\mathrm{div}\,(K_c\nabla\theta) = (k_{ij}\theta_{,i})_{,i}$ et $q\,(t)$ est la densité de la source volumique de la chaleur.

Toutes ces équations citées antérieurement restent insuffsantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations qui dépendent de comportement du matériau lui même,ou bien lesdites lois de comportement.

1.1.3 Lois de comportement

Comme nous l'avons noté dans la sous-section précédente, les équations (**1**.1.1) - (**1**.1.7) ne constituent pas une description complète de l'évolution d'un corps continu. Pour obtenir un modèle complet, valable pour un matériau donné, il faut ajouter la loi de comportement du matériau. Bien qu'elles doivent satisfaire certains axiomes de base et principes d'invariance, les lois de comportement proviennent principalement de l'expérience. sans parler du sujet des dommages qui est extrêmement important dans l'ingénierie de conception. Nous développons dans cette thèse trois lois de comportement des différentes catégories de matériaux, telles que ; matériau élasto-viscoplastique avec endommagement ,thermo-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement, et électro-viscoélastique.

Lois de comportement élasto-viscoplastique avec endommagement

Une loi de constitutive la plus courante d'un matériau élasto-viscoplastique avec endommagement est donné par

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t), \beta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma\,(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)))\ \mathrm{d}s \quad ; \qquad (\mathbf{1}.1.8)$$

où $\mathbf{u}$ désigne le champ de déplacement, σ, $\varepsilon(\mathbf{u})$ le tenseur des contraintes, $\varepsilon(\mathbf{u})$ est le tenseur de déformation linéarisé. En outre $\mathcal{A}$ est l'opérateur de viscosité, $\mathcal{F}$ est l'opérateurs d'élasticité et dépendant d'endommagement β et $\mathcal{G}$ est une fonction constitutive non linéaire qui décrit le comportement viscoplastique du matériau. L'évolution du champ d'endommagement est décrite par

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_Y(\beta) \ni S(\varepsilon(\mathbf{u}),\beta); \qquad (\mathbf{1}.1.9)$$

où

$$Y = \{\xi \in H^1(\Omega)/0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{p.p. dans } \ \Omega\}, \qquad (\mathbf{1}.1.10)$$

est l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles .

k est une constante strictement positive, qui représente le coefficient de diffusion microfissuré, $\partial\varphi$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice φ_Y et S est une fonction constitutive donnée, dépendant aussi d'endommagement β.

Lorsque $\mathcal{G} = 0$ la loi de constitutive (**1**.1.8) se réduit à la loi de constitutive viscoélastique donnée par

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t), \beta). \qquad (\mathbf{1}.1.11)$$

On cite également parmi les lois élasto-viscoplastiques avec endommagement, une autre loi de comportement du système provoquée par les déformations plastiques. est donné par

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma\,(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \beta(s))\ \mathrm{d}s \quad ; \qquad (\mathbf{1}.1.12)$$

L'endommagement β est décrit par

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_Y(\beta) \ni S(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}), \varepsilon(\mathbf{u}), \beta), \qquad (\mathbf{1}.2.13)$$

où Y défini par (**1**.1.10).

Loi de comportement thermo-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement

La loi de comportement d'un matériau thermo-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement donné par

$$\sigma\,(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t M(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \beta(s), \theta(s))\mathrm{d}s \qquad (\mathbf{1}.1.14)$$

où $\mathbf{u}$ est le champ de déplacement, σ et $\varepsilon(\mathbf{u})$ sont respectivement la contrainte et le tenseur de déformation linéarisé. Ici $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ sont des opérateurs décrivant respectivement les propriétés purement visqueuses et élastiques du matériau. M est une fonction de comportement non linéaire générale qui dépend de la variable d'état interne β décrivant l'endommagement du matériau et de la température θ. L'évolution de l'endommagement dans le matériau est décrite par l'inclusion suivante

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_Y(\beta) \ni S(\varepsilon(\mathbf{u}), \beta, \theta), \qquad (\mathbf{1}.1.15)$$

où Y est l'ensemble des fonctions admissibles d'endommagement défini par (**1**.1.10).

Lorsque $\mathcal{A} = 0$, la loi de comportement (**1**.1.14) se réduit à la loi de comportement thermoviscoélastique à mémoire longue et endommagement donné par

$$\sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t M(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \beta(s), \theta(s))\mathrm{d}s.$$

Lorsque $M = 0$ la loi de comportement (**1**.1.14) se réduit à la loi de comportement viscoélastique de Kelvin-Voigt donnée par

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)).$$

Enfin, pour achever la formulation mathématique décrivant l'évolution du corps, il est nécessaire de spécifier les conditions aux frontières sur Γ_3. Celles-ci concernent les conditions de contact ainsi que les lois de friction ou sans friction, que nous détaillerons dans le paragraphe suivant.

1.1.4 Conditions aux limites de contact et lois de frottement

La représentation d'un phénomène de contact est définie par les hypothèses considérées dans son explication. Ces hypothèses peuvent modifier soit la forme et la structure du système d'équations différentielles partielles, soit les conditions aux frontières du modèle mathématique associé. Les conditions aux frontières sur la surface de contact sont spécifiées à la fois dans la direction normale et dans le plan tangent, et sont appelées conditions de frottement. Il est important de noter que la frontière Γ est segmentée en trois parties disjointes et mesurables Γ_1,$\Gamma_2$et Γ_3 telles que $mes\,(\Gamma_1) > 0$. Dans cette section, nous énonçons les conditions aux frontières pour chacune des trois parties.

Conditions limites de déplacement et de traction.

Le corps est encastré dans une situation fixe sur la partie Γ_1, le champ des

déplacements $\mathbf{u}$ est par conséquent nul

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T)\,.$$

Ce qui représente la condition aux limites de déplacement. Les tractions connues de densité $\mathbf{f}_2$ affectent la partie Γ_2, et donc,

$$\sigma\nu = \mathbf{f}_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T).$$

est aux limites de *traction.*

Conditions de contact

Contact bilatéral Le contact est bilatéral, c'est-à-dire que le contact est maintenu pendant le mouvement et qu'il n'y a pas de séparation entre le corps et une fondation rigide. La composante normale du champ de déplacement sur la surface de contact s'annule et ainsi :

$$\mathbf{u}_\nu = 0.$$

Contact unilatéral Cette condition modélise le contact avec une fondation rigide. Puisque la fondation est considérée rigide, elle ne subira donc pas de déformation. Le corps ne pourra pas donc y pénétrer. Cette propriété se traduit par la relation mathématique

$$\mathbf{u}_\nu \leq 0. \tag{\textbf{1}.1.16}$$

Aux points de Γ_3 tel que $\mathbf{u}_\nu < 0$,le corps déformable quitte la base rigide et les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent nous obtenons:

$$\mathbf{u}_\nu < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0. \tag{\textbf{1}.1.17}$$

Aux points de Γ_3 tel que $\mathbf{u}_\nu = 0$, le contact est maintenu et la base rigide exerce une réaction normale orientée vers Ω et donc, nous pouvons écrire

$$\mathbf{u}_\nu = 0 \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0. \tag{\textbf{1}.1.18}$$

Les conditions de contact d'écrit par (**1**.1.16), (**1**.1.17) et (**1**.1.18), s'appellent conditions de contact unilatéral.

Contact avec compliance nomale La fondation est supposée déformable. Dans ce cas la contrainte normale σ_ν satisfait

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\mathbf{u}_\nu).$$

Cette condition est appelée « *compliance nomale* ». Où p_ν est une fonction positive donnée, telle que

$$p_\nu(\mathbf{u}_\nu) = 0 \quad \text{si } \mathbf{u}_\nu < 0$$

Ce cas montre que lors de la pénétration, la fondation réagit au corps déformé, et alors

$$\mathbf{u}_\nu \geq 0 \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0.$$

Lorsqu'il y a séparation, la contrainte normale s'annule, donc

$$\mathbf{u}_\nu < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0.$$

Lois des frottements.

a) contact sans frottement La condition de contact est dite sans frottement dans la quelle la partie tangentielle de la contrainte (la force de frottement) est nulle, c'est-à-dire

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T).$$

b) Contact bilatéral avec frottement modélisé par sous-différentielle. Au chapitre 6, nous utilisons la condition au limite de Contact donnée par

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\nu(t) = 0, \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \in \partial j_\tau(t, \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)) \end{cases} \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \tag{\textbf{1}.1.19}$$

où j_τ est une fonction donnée et le symbole ∂j_τ désigne le sous-différentiel de Clarke de j_τ par rapport à la dernière variable. Notez que la dépendance explicite de la fonction j_τ par rapport à la variable de temps rend le modèle plus général et permet de décrire des situations où la condition de frottement dépend de la température, qui joue le rôle d'un paramétre.

c) Contact avec compliance nomale sans frottement Nous supposons que le contact avec compliance normale et d'autre part, le glissement est parfait (sans frottement). Ceci se traduit par la relation :

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(\mathbf{u}_\nu), \\ \sigma_\tau = 0 \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T)\,. \tag{1.1.20}$$

C'est ce que nous utilisons dans le troisième chapitre de cette thèse.

d) Loi de Coulomb Dans le cas où la force de frottement σ_τ ne disparaît pas sur le contact surface, le contact est frictionnel. Le contact frictionnel est généralement modélisé avec la loi Coulomb du frottement sec ou ses variantes. La version statique de cette loi, couramment utilisée dans les problèmes de contact frottant décrivant l'équilibre des corps élastiques, est formulée comme suit :

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq F_b, \\ \sigma_\tau = F_b \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{|\dot{\mathbf{u}}_\tau|} \quad \text{si} \quad \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T)\,. \tag{1.1.21}$$

Ici, $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ est la vitesse de tangentiel ou glissement et F_b représente la limite de frottement. Sur une surface non homogène, F_b dépend explicitement de la position $\mathbf{x}$ sur la surface $F_b = F_b(\mathbf{x})$.

e) Loi de Coulomb dépendant de la vitesse de glissement avec compliance nomale Nous supposons que la composante normale du contrainte et imposée sur la surface de contact. Donc, Ce choix dans (**1**.1.21)

$$F_b = F_b(\sigma_\nu) = -\mu\sigma_\nu,$$

où $\mu > 0$ est le coefficient de frottement. Conduit à la version classique de la loi de Coulomb dépendant de la vitesse de glissement avec contrainte normale imposée est donnée par :

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(\mathbf{u}_\nu), \\ |\sigma_\tau| \leq \mu p_\nu(\mathbf{u}_\nu) \text{ et} \\ \sigma_\tau = -\mu p_\nu(\mathbf{u}_\nu) \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{|\dot{\mathbf{u}}_\tau|} \quad \text{si} \quad \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T)\,. \tag{1.1.22}$$

Nous utilisons ces conditions aux limites pour étudier le problème du contact avec compliance normale et frottement, dans le cinquième chapitre de la thèse.

Contact avec frottement et usure (Loi d'Archard) Dans le cas où le contact se fait avec une base déformable et mobile, il est modélisé par une réponse normale instantanée impliquant l'usure. L'évolution de l'usure de la surface de contact est décrite par une version de la loi d'Archard, où la fonction d'usure $\omega : \Gamma_3 \times [0, T] \to \mathbb{R}_+$, est définie par :

$$\dot{\omega} = -k_\omega \sigma_\nu \left| \dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^* \right|, \tag{\textbf{1}.1.23}$$

où k_ω est le coefficient d'usure, $\mathbf{v}^*$ est la vitesse transverse de la base et $|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*|$ représente la vitesse de glissement relative entre la surface de contact et la base. Nous supposons également que, à l'échelle temporelle du processus quasi-statique, la surface se réorganise de manière à ce que le glissement soit constant, et pour des raisons de simplification, nous supposons qu'il est constant et positif. Nous utilisons donc la version suivante de la loi d'Archard :

$$\dot{\omega} = -k_\omega \mathbf{v}^* \sigma_\nu, \tag{\textbf{1}.1.24}$$

où $\mathbf{v}^* = cst$. Une fois le problème mécanique résolu, l'usure ω peut être obtenue par l'intégration de l'équation (**1**.1.24). Cependant, nous pouvons également représenter les effets de l'usure comme un recul de Γ_3. Étant donné que la condition $\mathbf{u}_\nu = 0$ signifie que le corps dans sa configuration de référence est en contact avec la base, nous imposons la condition

$$\mathbf{u}_\nu = -\omega \text{ sur } \Gamma_3 \tag{\textbf{1}.1.25}$$

L'utilisation de la loi simplifiée (**1**.1.24) pour l'évolution de l'usure évite certaines difficultés mathématiques dans l'étude du problème de contact. Nous pouvons maintenant éliminer la fonction inconnue ω du problème. Soit $\zeta = k_\omega v^*$ qui est une fonction positive, et posons $\alpha_\omega = \frac{1}{\zeta}$. D'après (1.1.25), nous trouvons que $\dot{u}_\nu = -\dot{\omega}$ et donc d'après (**1**.1.24), nous déduisons que

$$\sigma_\nu = \alpha_\omega \dot{\mathbf{u}}_\nu \tag{\textbf{1}.1.26}$$

Ensuite, nous utilisons la loi de *Coulomb* pour le frottement sec, et étant donné qu'il n'y a que le contact de glissement, nous obtenons

$$|\sigma_\tau| = \mu \left| \dot{\mathbf{u}}_\nu \right| \ , \quad \sigma_\tau = -\lambda \left(\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^* \right) \quad \lambda \geq 0, \tag{\textbf{1}.1.27}$$

où $\mu > 0$ est le coefficient de frottement. Maintenant, $\dot{\omega} \geq 0$ est nécessaire pour interpréter ω comme une usure de surface ayant un sens. Ainsi, d'après (**1**.1.24) et (**1**.1.25), nous trouvons que $\dot{\mathbf{u}}_\nu \leq 0$ et $\sigma_\nu \leq 0$ sur Γ_3. En conséquence, d'après (**1**.1.26) et (**1**.1.27), nous pouvons imposer les conditions de contact avec usure suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_\nu = -\alpha|\dot{u}_\nu|, \quad |\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\nu \text{ et} \\ \quad \sigma_\tau = -\lambda\left(\dot{u}_\tau - \mathbf{v}^*\right) \quad , \quad \lambda \geq \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T)\,. \qquad (\mathbf{1}.1.28)$$

La condition de contact (**1**.1.28) est utilisée par beaucoup d'auteurs dans cestravaux, citant par exemple [44], [51], et elle sera introduite un des problèmes étudiés dans cette thèse

g) Conditions aux limites thermiques Les conditions d'échange de la chaleur ponctuelle sur la frontière Γ sont habituellement données par

$$k_{ij}\theta_{,i}\eta_j = h_\tau(|\dot{\mathbf{u}}_\tau|) - k_e(\theta - \theta_R) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T) \qquad (\mathbf{1}.1.29)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0,T); \qquad (\mathbf{1}.1.30)$$

Où k_{ij} sont les composantes du tenseur de conductivité thermique, η_j sont les composantes de la normale $\mathbf{n}$, θ est la température de la surface ponctuelle, $h_\tau(.)$ est la puissance générée par le frottement sous forme de chaleur, qui dépend de la vitesse tangentielle $\dot{\mathbf{u}}_\tau$, k_e est le coefficient d'échange thermique entre le corps et l'obstacle et θ_R est la température connue de la fondation.

1.2 Modélisation des problèmes de contact piézoélectriques

1.2.1 Cadre physique

Pour modéliser les problèmes de contact avec les matériaux piézoélectriques, nous nous basons sur le cadre physique décrit ci-après. Nous considérons un corps déformable occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, avec une frontière de Lipschitz Γ, divisée en trois parties disjointes et mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3, ainsi qu'une partition de $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ en deux parties disjointes et mesurables Γ_a et Γ_b, telles que $mes\Gamma_1 > 0$ et $mes\Gamma_a > 0$. Soit $T > 0$, et $[0, T]$ l'intervalle de temps étudié. Le corps est encastré sur Γ_1, de sorte que le champ de déplacement y est nul. Des forces surfaciques de densité f_2 agissent sur Γ_2 et des forces volumiques de densité f_0 agissent dans Ω. De plus, le potentiel électrique est nul sur Γ_a, tandis qu'une charge électrique de densité surfacique q_b est appliquée sur Γ_b. Le corps est en contact avec une fondation sur Γ_3.

Nous nous intéressons aux modèles mathématiques décrivant l'évolution de l'état mécanique et électrique du corps piézoélectrique durant l'intervalle $[0, T]$. Outre le champ des contraintes $\sigma = \sigma(x, t)$ et le champ de déplacement $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$, nous introduisons le champ de déplacement électrique $\mathbf{D} = \mathbf{D}(x, t)$ et le potentiel électrique $\varphi = \varphi(x, t)$. Les inconnues du problème de contact piézoélectrique sont donc $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_d$, φ $: \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$. L'équation d'équilibre pour le champ de contraintes est donnée par (**1**.1.5) pour un processus mécanique dynamique et (**1**.1.6) pour un processus mécanique statique. L'équation d'équilibre pour le champ de déplacement électrique est

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(t) = q_0(t) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \tag{1.2.1}$$

si le processus dépend du temps, et

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{1.2.2}$$

où q_0 est la densité des charges électriques volumiques et "div" est l'opérateur de divergence, c'est-à-dire $\operatorname{div} \mathbf{D} = (\mathbf{D}_{i,i})$.

1.2.2 Lois de comportement

Le champ électrique E est défini par la relation :

$$E(\varphi) = -\nabla\varphi = -\left(\varphi_{,i}\right),$$

où $\varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$. Comme pour les corps déformables, nous avons besoin d'une loi de comportement pour décrire le matériau. Une loi de comportement électroélastique générale est donnée par :

$$\sigma = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) - \mathcal{E}^{\top}E\varphi(t) \quad \text{dans} \;\; \Omega \times (0,T), \tag{1.2.3}$$

où $\mathcal{F}$ est l'opérateur d'élasticité supposé non linéaire, $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre et $\mathcal{E}^{\top}$ désigne sa transposée. Rappelons que les tenseurs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^{\top}$ satisfont à l'égalité

$$\mathcal{E}\sigma.\mathbf{v} = \sigma.\mathcal{E}^{\top}\mathbf{v} \qquad \forall\sigma \in S_d\,,\; v \in \mathbb{R}^d. \tag{1.2.4}$$

Les composantes du tenseur $\mathcal{E}^{\top}$ sont données par $e_{ijk}^{\top} = (e_{kij})$. Nous complétons (**1**.2.5) par une équation constitutive du champ de déplacement électrique de la forme :

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}E(\varphi) \;\; \text{dans} \;\; \Omega, \tag{1.2.5}$$

où $\mathcal{B} = (b_{ij})$ est le tenseur de permittivité électrique, généralement $b_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$ et satisfait aux propriétés de symétrie et d'ellipticité usuelles, c'est-à-dire

$$b_{ij} = b_{ji}$$

et il existe $m_b > 0$ tel que

$$b_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq m_b\,||\boldsymbol{\xi}||_{\mathbb{R}^d}^2 \;\text{Pour tout}\;\; \boldsymbol{\xi} = (\xi_i) \in \mathbb{R}^d.$$

Dans le cas linéaire, les lois de comportement s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= f_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(t)) + e_{kij}\varphi_{,k}, \\ D_i &= e_{ijk}\varepsilon_{jk}(\mathbf{u}) - b_{ij}\varphi_{,j}, \end{aligned}$$

où f_{ijkl} sont les composantes du tenseur d'élasticité $\mathcal{F}$.

Une loi de comportement électro-viscoélastique générale est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \, = \mathcal{A}\left(t, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))\right) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) - \mathcal{E}^{\top} E\varphi\left(t\right) \quad \text{dans} \;\; \Omega \times (0,T)\,, \tag{1.2.6}$$

où $\mathcal{A}$ est l'opérateur de viscosité, supposé non linéaire, $\mathcal{F}$ est l'opérateur d'élasticité, et $\mathcal{E}^{\top}$ représente la transposée du tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}$. L'équation (**1**.2.6) est complétée par la relation constitutive linéaire (**1**.2.5) pour le champ de déplacement électrique.

Il est à noter que l'opérateur $\mathcal{A}$ peut dépendre explicitement du temps, notamment lorsque les propriétés de viscosité du matériau sont influencées par le champ de température, qui joue le rôle de paramètre, c'est-à-dire que son évolution dans le temps est préalablement définie. L'équation (**1**.2.6) montre que les propriétés mécaniques du matériau sont décrites par une relation constitutive viscoélastique non linéaire prenant en compte la dépendance du champ de contraintes vis-à-vis du champ électrique. Cette approche a déjà été utilisée, voir par exemple [38] et les références citées.

Dans le cas où $\mathcal{E} = 0$, l'équation (**1**.2.6) se simplifie pour devenir la loi de comportement purement viscoélastique :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \, = \mathcal{A}\left(t, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))\right) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) \quad \text{dans} \;\; \Omega \times (0,T)\,. \tag{1.2.7}$$

Ces lois de comportement seront utilisées dans le chapitre 6 de cette thèse.

1.2.3 Conditions aux limites électriques

Passons maintenant aux conditions aux limites sur $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_a$ et Γ_b. Comme le corps piézoélectrique est fixé sur Γ_1, nous imposons la condition aux limites de déplacement. En outre, il y a une condition aux limites de traction sur Γ_2. Puisque le potentiel électrique est nul sur Γ_a pendant le processus, nous imposons la condition aux limites :

$$\varphi = 0 \quad \text{sur} \; \Gamma_a \times (0,T)\,, \tag{1.2.8}$$

De plus, une charge électrique de densité surfacique q_b est donnée sur Γ_b, donc :

$$\mathbf{D}.\boldsymbol{\nu} = q_b \quad \text{sur} \; \Gamma_b \times (0,T)\,. \tag{1.2.9}$$

Pour les problèmes de contact électrique sur Γ_3, nous introduisons les lois électriques suivantes

$$\mathbf{D}.\boldsymbol{\nu} \in h_e(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\nu}} - g_0)\partial j_e\left(\varphi - \varphi_0\right) \quad \text{sur} \;\; \Gamma_3 \times (0,T), \tag{1.2.10}$$

où h_e et j_e sont des fonctions à valeur réelle. En l'absence de contact ($\mathbf{u}_{\boldsymbol{\nu}} < g_0$), il n'y a pas de charges électriques libres sur la surface et la composante normale du champ de déplacement électrique est nulle :

$$\mathbf{u}_{\boldsymbol{\nu}} < g_0 \Rightarrow \mathbf{D}.\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T). \tag{\textbf{1}.2.11}$$

Lorsqu'il y a contact ($\mathbf{u}_{\boldsymbol{\nu}} \geq g_0$), la composante normale du champ de déplacement électrique dépend de la différence de potentiel entre la fondation et la surface du corps

$$\mathbf{u}_{\boldsymbol{\nu}} \geq g_0 \Rightarrow \mathbf{D}.\boldsymbol{\nu} = k_e p_e\left(\varphi - \varphi_0\right) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T), \tag{\textbf{1}.2.12}$$

où p_e est une fonction prescrite à valeur réelle et k_e est le coefficient de conductivité électrique. Un choix possible de la fonction p_e est $p_e(r) = r$. Nous combinons ces conditions pour obtenir :

$$\mathbf{u}_{\boldsymbol{\nu}} \geq g_0 \Rightarrow \mathbf{D}.\boldsymbol{\nu} = k_e I_{[0,+\infty)} p_e\left(\varphi - \varphi_0\right) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T) \tag{\textbf{1}.2.13}$$

où $I_{[0,+\infty)}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,+\infty)$, définie par :

Cette condition (**1**.2.13) décrit un contact électrique parfait, similaire à la condition de contact Signorini bien connue, voir [24, 47] pour plus de détails.

Enfin, nous notons que dans l'étude des problèmes de contact dynamique avec des matériaux électro-viscoélastiques, nous supposons que les charges électriques ne dépendent pas de pénétration. Par conséquent, au lieu de la condition (**1**.2.10) nous utiliserons la condition limite

$$\mathbf{D}.\boldsymbol{\nu} \in \partial j_e\left(\varphi - \varphi_0\right) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0,T). \tag{\textbf{1}.3.14}$$

1.3 Formulation mathématique des problèmes de contact

Notre objectif, dans le troisième chapitre, est l'étude du problème quasistatique avec compliance normale et endommagement, le problème de contact avec usure feront l'objet du quatrième chapitre, le problème dynamique avec compliance normale avec mémoire longue, Enfin, le problème de contact bilatéral avec la loi de frottement sous-différentielle. L'étude variationnelle de ces problèmes se fera dans le cadre physique des problèmes mécaniques. Sous ces hypothèses, en notant par $\mathbf{u}_0$, β_0 le déplacement initial et l'endommagement initial respectivement, nous arrivons à formuler les différents problèmes de la manière suivante.

Problème P_1: (Matériau élasto-viscoplastique, compliance normale avec endommagement)

Trouver $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$, et β tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t), \beta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)))\, \mathrm{d}s \quad \text{dans } \Omega \times (0,T),$$

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_Y(\beta) \ni S(\varepsilon(\mathbf{u}), \beta) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T),$$

$$\operatorname{Div}\sigma + \mathbf{f}_0 = 0 \ \text{ dans } \Omega \times (0,T),$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,T),$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T),$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu), \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times (0,T),$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \ \beta(0) = \beta_0, \quad \text{dans } \Omega.$$

Problème P_2: (Matériau élasto-viscoplastique, frottement avec usure et endommagemen)

Trouver $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$ et β tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma\,(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \beta\,(s))\,\mathrm{d}s \quad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,,$$

$$\dot{\beta} - k \bigtriangleup \beta + \partial\varphi_Y(\beta) \ni S(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}),\beta) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,,$$

$$\operatorname{Div} \sigma + \mathbf{f}_0 = \rho\ddot{\mathbf{u}} \;\text{ dans } \Omega \times (0,T)\,,$$

$$\mathbf{u} \;= \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,T)\,,$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} \;= \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T)\,,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\nu = -\alpha\,|\dot{\mathbf{u}}_\nu|\,,\;\; |\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\nu \\ \sigma_\tau = -\lambda\,(\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*)\;\;,\quad \lambda \geq 0 \end{array} \right. \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times (0,T)\,,$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \beta(0) = \beta_0, \quad \text{dans } \Omega.$$

Problème P_3: (Matériau thermo-viscoélastique, compliance normale avec mémoire longue)

Trouver $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$, β et θ tels que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \;= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t M(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \beta(s), \theta(s))\; ds \quad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,,$$

$$\dot{\beta} - k \bigtriangleup \beta + \partial\varphi_Y(\beta) \ni S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),\beta, \theta) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,,$$

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho\ddot{\mathbf{u}} \;\text{ dans } \Omega \times (0,T)\,,$$

$$\mathbf{u} \ = \mathbf{0} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,T)\,,$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} \ = \mathbf{f}_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T)\,,$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(\mathbf{u}_\nu), & |\ \boldsymbol{\sigma}_\tau \ |\leq \mu p_\nu(\mathbf{u}_\nu), \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\mu p_\nu(\mathbf{u}_\nu)\frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{|\dot{\mathbf{u}}_\tau|} & \text{if} \ \ \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0} \end{cases} \ \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),$$

$$\dot{\theta} - div(K_c \nabla\theta) = r(\dot{\mathbf{u}}) + q \ \ \text{dans } \Omega \times (0,T)\,,$$

$$k_{ij}\theta_{,i}\eta_j = \ \ h_\tau(|\ \dot{\mathbf{u}}_\tau \ |) - k_e(\theta - \theta_R) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T),$$

$$\theta = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0,T),$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma \times (0,T)\,,$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \ \ \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \ \ \beta(0) = \beta_0, \ \ \theta(0) = \theta_0 \text{ dans } \Omega.$$

Problème P_4: (Matériau élasto-viscoplastique, contact bilatéral avec la loi de frottement sous-différentielle)

Trouver $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$, φ et $\mathbf{D}$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \ = \mathcal{A}\,(t, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) - \mathcal{E}^* E\varphi\,(t) \qquad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T)\,,$$

$$\mathbf{D}\,(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{B}E\varphi\,(t) \ \ \text{dans } \Omega \times (0,T)\,,$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}\,(t) + \mathbf{f}_0\,(t) = \ddot{\mathbf{u}}\,(t) \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,,$$

$$\text{div}\,\mathbf{D}\,(t) = q_0\,(t) \ \ \text{dans } \Omega \times (0,T)\,,$$

$$\mathbf{u} \ = \mathbf{0} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,T)\,,$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} \ = \mathbf{f}_2 \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T)\,,$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\nu(t) = 0, \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \in \partial j_\tau(t, \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)) \end{cases} \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T),$$

$$\mathbf{D}(t) .\boldsymbol{\nu} \in \partial j_e(\varphi(t) - \varphi_0) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T),$$

$$\varphi(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times (0,T),$$

$$\mathbf{D}(t) .\boldsymbol{\nu} = q_b(t) \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0,T),$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \ \dot{\mathbf{u}}(0) = w_0 \text{ dans } \Omega.$$

1.4 Préliminaires mathématiques

Dans cette section, nous présentons les résultats fondamentaux qui seront nécessaires pour les parties ultérieures de la monographie. Nous commençons par un aperçu des espaces fonctionnels de type Sobolev et Bochner ainsi que de leurs propriétés, particulièrement pertinents dans le contexte de la mécanique du contact. Nous avons également consulté les références [41] et [51] lors de la rédaction de cette section. Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev et les espaces de distributions, nous renvoyons par exemple à [1], [7], [12], [26] et [40].

1.4.1 Espaces fonctionnels et leurs propriétés

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Considérons $x = (x_1, x_2........, x_d)$ un élément de $\mathbb{R}^d$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2........, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice tel que $|\alpha| = \sum_{i=i}^d \alpha_i$. Nous posons

$$D^\alpha \mathbf{u}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{u}}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_d} x_d}(x),$$

où $\mathbf{u}$ est une fonction suffisamment régulière définie sur Ω.

Espaces de Sobolev

Avant d'introduire ces espaces, nous restreignons la classe des domaines en imposant des hypothèses supplémentaires concernant leurs frontières.

On dit que le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a une frontière continue Lipschitzienne $\partial\Omega$ s'il existe des nombres réels $\alpha, \beta > 0$ telles que la frontière puisse être décrite localement comme étant le graphe d'une fonction Lipschitzienne $a : K_{n-1}(a) \longrightarrow \mathbb{R}$,où $K_{n-1}(a)$ est un cube de dimension $(n-1)$.

Remarque 1.4.1 Parfois, une plus grande régularité de la limite sera nécessaire. On dit que Ω est d'une classe C^m si les fonctions a décrivant $\partial\Omega$ appartiennent à $C^m\left(\overline{K}_{n-1}(a)\right)$.

Le fait que Ω ait la frontière Lipschitzienne permet de définir le vecteur normal unitaire extérieur ν en presque tous les points de la frontière. Tout au long de cette thèse, nous traiterons uniquement de domaines ayant au moins des frontière lipschitziennes.

Soit $f \in L^p(\Omega), p \in [1, +\infty]$. Une fonction intégrable $g_\alpha \in L^1(\Omega)$ satisfaisant l'identité intégrale :

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{\textbf{1}.4.1}$$

sera appelée la α-ème dérivée généralisée de f. Si une telle g. existe, alors il est unique et on utilise la notation $D^\alpha f$ au lieu de g_α.

L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega), k \in \mathbb{N}^*, p \in [1, +\infty]$ est défini comme un sous-espace de $L^p(\Omega)$ de fonctions dont toutes les dérivées généralisées jusqu'à l'ordre k appartiennent à $L^p(\Omega)$:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in L^p(\Omega) \setminus D^\alpha \mathbf{v} \in L^p(\Omega \quad \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ sont munis les normes suivantes :

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha \mathbf{u}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p \in [1, +\infty[. \tag{\textbf{1}.4.2}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_{L^{+\infty}(\Omega)} \;\; sip = +\infty. \tag{\textbf{1}.4.3}$$

L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega), k \in \mathbb{N}^*, p \in [1, +\infty]$ est complet par rapport à (**1**.4.2) lorsque $p \in [1, +\infty[$ et (**1**.4.3) si $p = +\infty$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*, p \in [1, +\infty[$. Alors

$$W^{k,p}(\Omega) = \overline{C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)},$$

Théorème 1.4.1. (*théorème de trace*) Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors il existe une application linéaire unique, $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ telle que

a) $\gamma\mathbf{u} = \mathbf{u}$ sur $\partial\Omega$ pour tout $\mathbf{u} \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$;

b) $\exists c > 0$ tel que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\,\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall \mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega).$$

L'application linéaire continue, introduite dans le théorème précédent, est appelée application de trace.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty]$. Nous définissons l'espace de Sobolev

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}.$$

On constate aisément que $W_0^{k,p}(\Omega)$ est fermé dans $W_0^{k,p}(\Omega)$ et donc complet. Lorsque $k = 1$, la caractérisation simple suivante de $W_0^{k,p}(\Omega)$ s'applique

Théorème 1.4.2. [40] Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega) \mid \gamma\mathbf{u} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

Une attention particulière sera accordée au cas où $p = 2$. Dans ce cas, les espaces de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$ et $W_0^{k,2}(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert avec le produit scalaire.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha \mathbf{u} D^\alpha \mathbf{v} dx$$

Pour simplifier les notations, nous utiliserons les symboles $H^k(\Omega)$ et $H_0^k(\Omega)$ au lieu de $W^{k,2}(\Omega)$ et $W_0^{k,2}(\Omega)$, respectivement. La norme dans $H^k(\Omega)$ sera notée $\|.\|_{H^k(\Omega)}$ au lieu de $\|\mathbf{u}\|_{W^{k,2}(\Omega)}$. Cette notation sera également étendue au cas $k = 0$, c'est-à-dire que $\|.\|_{H^0(\Omega)}$et $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^0(\Omega)}$désignent respectivement la norme et le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Théorèmes d'injection et injections compactes

Definition 1.4.1 (*Injection continue, Injection compact*)

Soit $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. On dit que X est continûment injecté dans Y, et l'on écrira $X \hookrightarrow Y$ si X est un sous-espace vectoriel de Y et l'injection canonique $j : X \longrightarrow Y$ est continue de X à Y, c'est-à-dire

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \|\mathbf{u}\|_Y \leq c\,\|\mathbf{u}\|_X \quad \forall \mathbf{u} \in X.$$

On dit que X est injecté dans Y avec injection compacte, et l'on écrira $X \hookrightarrow_{compacte} Y$, si X est un sous-espace vectoriel de Y et si l'injection canonique j est compact, (C'est à dire : de toute suite bornée $(\mathbf{u}_n)_n$ de X on peut extraire une sous-suite convergente dans dans Y) .

Théorème 1.4.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*, p \in [1, +\infty[$. Alors:

- $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega)$, où $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ si $k < \frac{n}{p}$;
- $W^{k,p}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, q^*[$ si $k < \frac{n}{p}$;
- $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, +\infty[$ si $k = \frac{n}{p}$;
- $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$, si $k > \frac{n}{p}$;

Un théorème similaire peut être formulé pour l'application trace $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ introduite dans le Théorème ***1.4.1***. De ce théorème, il s'ensuit que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega)$. Cependant, ce résultat peut être précisé comme suit

Théorème 1.4.4. Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors la propriété suivante est vérifiée:

- $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\partial\Omega)$, où $q^* = \frac{np-p}{n-p}$ si $1 \leq p < n$;
- $W^{1,p}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} L^q(\partial\Omega)$, pour tout $q \in [1, q^*[$ si $1 \leq p < n$;
- $W^{1,p}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{\hookrightarrow} L^q(\partial\Omega)$, pour tout $q \in [1, +\infty[$ si $p \geq n$.

L'injection compacte de l'espace $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est connue sous le nom de *théorème de Rellich.*

1.4.2 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Tous les résultats ci-dessus peuvent être étendus aux fonctions à valeurs vectorielles. Si $X(\Omega)$ est un espace de fonctions réelles $\mathbf{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, alors l'espace des fonctions à valeurs vectorielles $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_m)$ dont toutes les composantes appartiennent à $X(\Omega)$ sera noté $X(\Omega; \mathbb{R}^m)$dans la suite. Si $\boldsymbol{\tau}$ est une fonction matricielle de taille $(n \times m)$, dont les éléments appartiennent à $X(\Omega)$, alors nous utilisons la notation $\boldsymbol{\tau} \in X(\Omega; \mathbb{R}^{n \times m})$. La norme de

$\mathbf{v} \in X(\Omega;\mathbb{R}^m)$ et $\boldsymbol{\tau} \in X(\Omega;\mathbb{R}^{n\times m})$, respectivement, est définie de manière usuelle

$$\begin{cases} \|\mathbf{v}\|_{X(\Omega;\mathbb{R}^m)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \|v_i\|_{X(\Omega)} \ , \quad \mathbf{v} = (v_i)_{i=1}^m \\ \|\boldsymbol{\tau}\|_{X(\Omega;\mathbb{R}^{n\times m})} = \displaystyle\sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots\ldots,m}}^{m} \|\tau_{ij}\|_{X(\Omega)} \ , \quad \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots\ldots,m}} . \end{cases} \tag{1.4.4}$$

Nous introduisons ensuite quelques espaces de fonctions définis dans un intervalle de temps $(0,T), T > 0$, prenant des valeurs dans un espace de Banach réel X. Ces espaces sont appelés espaces de Bochner. Des détails peuvent être trouvés dans [33]. On note la norme dans X par $\|.\|_X$, l'espace dual de X par X' et l'appariement de dualité entre X et X' par $\langle .,. \rangle_X$.

Normes équivalentes dans les espaces de Sobolev

Soit X un espace vectoriel normé, et soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes dans X. Ces normes sont dites équivalentes s'il existe des nombres positifs C_1 et C_2 tels que

$$C_1 \|\mathbf{u}\|_1 \leq \|\mathbf{u}\|_2 \leq C_2 \|\mathbf{u}\|_1 \quad \text{pour tout } \mathbf{u} \in X \ ,$$

Dans ce qui suit, nous nous limitons aux normes équivalentes dans $H^1(\Omega)$ uniquement. En plus de la norme donnée par (**1**.4.2) avec $k = 1$, $p = 2$, nous pouvons introduire d'autres normes équivalentes. Nous commençons par

Théorème 1.4.5 (Inégalité généralisée de Poincaré-Friedrichs) Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ tel que sa mesure de Lebesgue de dimension $d-1$ (abrégée en $mes_{d-1}\Gamma$) soit positive. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité suivante :

$$\|\mathbf{u}\|_1 \leq c \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|<1} |D^\alpha \mathbf{u}| \, dx + \int_\Gamma \mathbf{u}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4.5}$$

est vérifiée pour tout $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$.

Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$, avec $mes_{d-1}\Gamma > 0$ et

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \ \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

Alors, de (**1**.4.5), il s'ensuit que

$$\|\mathbf{u}\|_1 \leq c \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha \mathbf{u}| \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\mathbf{1}.4.6)$$

est valable pour tout $\mathbf{u} \in V$, c'est-à-dire que le membre de droite de (**1**.4.6) est la norme équivalente à $\|\mathbf{u}\|_1$ dans V.

Si $\Gamma = \partial\Omega$, alors (**1**.4.6) est connue sous le nom de l'inégalité de *Poincaré-Friedrichs.*

Passons maintenant aux espaces de Sobolev à valeurs vectorielles $H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right)$, avec $n = 2, 3$. Par le symbole $\varepsilon(\mathbf{u}) \in L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d}\right)$, nous désignons le tenseur de déformation linéarisé, correspondant au champ de déplacement $\mathbf{u} \in H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right)$. Les composantes de la matrice $\varepsilon(\mathbf{u})$ sont données par

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right), \quad i, j = 1, ..., d.$$

Il est facile de voir que l'application

$$\mathbf{u} \longrightarrow \left(\int_\Omega \left(\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \mathbf{u}^2\right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\mathbf{1}.4.7)$$

définit la norme dans $H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right)$. Un résultat non trivial indique que (**1**.4.7) est une norme équivalente à la norme classique de $H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right)$. Cela découle de

Théorème 1.4.6 (la deuxième inégalité de Korn) : Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_\Omega \left(\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \mathbf{u}^2\right) dx \geq c \|\mathbf{u}\|_1 \quad \forall \mathbf{u} \in H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right).$$

Notons

$$|||\mathbf{u}|||_1 = \left(\int_\Omega \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \mathbf{u} \in H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right). \qquad (\mathbf{1}.4.8)$$

alors que$|||\mathbf{u}|||_1$ définit une semi-norme dans $H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right)$ seulement, car $|||\mathbf{u}|||_1 = 0$ si et seulement si $\mathbf{u}$ est de la forme $\mathbf{u}(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}^d$.

De manière analogue à l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, (**1**.4.8) définit la norme sur un sous-espace correctement défini de $H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right)$ qui est équivalente à $\|.\|_1$. En effet, c'est une conséquence directe de

Théorème 1.4.7. (la première inégalité de Korn) Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ tel que $mes_{d-1}\Gamma > 0$ et

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right) \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

Alors il existe une constante positive $c > 0$ telle que

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\, \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\, dx \geq c \|\mathbf{u}\|_1 . \forall \mathbf{u} \in V. \qquad (\mathbf{1}.4.9)$$

L'espace $C^k([0,T]\,;X)$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par $C^k([0,T]\,;X)$ on note l'ensemble de toutes les fonctions continues $\mathbf{u} : [0,T] \longrightarrow X$ dont les dérivées (fortes) jusqu'à l'ordre k sont continues dans $[0,T]$ et appartiennent à X. L'espace $C^k([0,T]\,;X)$ est complet par rapport à la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{C^k([0,T];X)} = \sum_{i=1}^{k} \max_{t\in[0,T]} \left\|\mathbf{u}^{(i)}(t)\right\|_X , \qquad (\mathbf{1}.4.10)$$

où $\mathbf{u}^{(i)}$ est la i-ième dérivée de $\mathbf{u}$. Si $k = 0$ on utilise la convention suivante $C^0([0,T]\,;X) \equiv C([0,T]\,;X)$.

L'espace $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq +\infty$

Soit $p \in [1,+\infty[$. L'ensemble de toutes les fonctions mesurables $\mathbf{u} : [0,T] \longrightarrow X$ pour lesquelles

$$\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X^p \, dt < +\infty \quad \text{(au sens de Lebesgue)}$$

est noté $L^p(0,T;X)$. Cet espace est équipé aux normes

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} . \qquad (\mathbf{1}.4.11)$$

L'espace $L^\infty(0,T;X)$ est constitué de toutes les fonctions mesurables $\mathbf{u} : [0,T] \longrightarrow X$, qui sont essentiellement bornées, c'est-à-dire le nombre

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf_{\substack{\text{mes}\, M=0 \\ M\subset(0,T)}} \sup_{t\in(0,T)\setminus M} \|\mathbf{u}(t)\|_X , \qquad (\mathbf{1}.4.12)$$

est fini (cf. la définition de l'espace $L^\infty(\Omega)$. Nous dotons l'espace $L^\infty(0,T;X)$ avec la norme $\|.\|_{L^\infty(0,T;X)}$.

Nous introduisons quelques propriétés fondamentales des espaces $L^p(0,T;X)$

Théorème 1.4.8. Il vérifie :

(i) L'espace $L^p(0,T;X)$ est complet par rapport à la norme ($\mathbf{1}$.4.11) si $p \in [1,+\infty[$ et ($\mathbf{1}$.4.12) lorsque $p = \infty$.

(ii) Soit X un espace de Hilbert avec un produit scalaire $(.,.)_X$. Alors $L^2(0,T;X)$

est aussi un espace de Hilbert équipé du produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))_X dt.$$

Théorème 1.4.9. Soit X un espace de Banach réflexif et séparable. Alors il vérifie :

(i) Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors l'espace $L^p(0,T;X)$ est réflexif et séparable.

De plus, son espace dual est

$$(L^p(0,T;X))' = L^q(0,T;X'),$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(ii) Soit $p = 1$. Alors l'espace $L^1(0,T;X)$ est séparable et son espace dual est

$$\left(L^1(0,T;X)\right)' = L^\infty(0,T;X').$$

Le *théorème* **1.4.9** a la conséquence importante suivante :

Théorème 1.4.10. Soit X un espace de Banach réflexif et séparable. Alors les expressions suivantes sont satisfait

(i) Soient $p \in [1, +\infty[$ et $(\mathbf{u}_n)$ une suite bornée dans $L^p(0,T;X)$. Alors

il existe une sous-suite $(\mathbf{u}_{n_k}) \subset (\mathbf{u}_n)$ faiblement convergente dans $L^p(0,T;X)$, c'est-à-dire qu'il existe $\mathbf{u} \in L^p(0,T;X)$ et

$$\int_0^T (\mathbf{u}_{n_k}(t), \mathbf{v}(t))_X dt \longrightarrow \int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))_X dt. \quad \forall \mathbf{v} \in L^q(0,T;X)$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(ii) Soit $p = \infty$ et $(\mathbf{u}_n)$ une suite bornée dans $L^\infty(0,T;X)$. Alors il existe une sous-séquence $(\mathbf{u}_{n_k}) \subset (\mathbf{u}_n)$ convergente faiblement étoile dans $L^\infty(0,T;X)$, c'est-à-dire qu'il existe $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;X)$ et

$$\int_0^T (\mathbf{u}_{n_k}(t), \mathbf{w}(t))_X dt \longrightarrow \int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t))_X dt. \quad \forall \mathbf{w} \in L^1(0,T;X')$$

Dans la suite nous dévorerons la convergence faible dans $L^p(0,T;X), p \in [1, +\infty[$, par le symbole $\rightharpoonup$. et la convergence faiblement étoile dans $L^\infty(0,T;X)$ par $\overset{*}{\rightharpoonup}$.

Les espaces $W^{1,P}(0,T;X)$ et $W^{1,P}(0,T;V,H)$

De la même manière qu'en (**1**.4.1), nous pouvons définir la dérivée généralisée dans les espaces de Bochner. Soit Y un autre espace de Banach. Soit $\mathbf{u} \in L^p(0,T;X)$, avec

$p \in [1, +\infty]$. Une fonction intégrable $\mathbf{v} \in L^1(0, T; Y)$ est appelée la i-ème dérivée généralisée de u si elle vérifie

$$\int_0^T \mathbf{u}(t)\,\varphi^{(i)}(t)\,dt = (-1)^i \int_0^T \mathbf{v}(t)\,\varphi(t)\,dt. \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T) \qquad (\mathbf{1}.4.13)$$

où $\varphi^{(i)}$ est la i-ème dérivée de φ. La i-ème dérivée généralisée de $\mathbf{u}$ sera à nouveau notée $\mathbf{u}^{(i)}$.

Soit $p \in [1, +\infty]$. Par $W^{1,P}(0, T; X)$ on note le sous-espace de $L^P(0, T; X)$ contenant des fonctions dont les dérivées premières généralisées appartiennent aussi à $L^P(0, T; X)$,

c'est à dire.,

$$W^{1,P}(0, T; X) = \left\{\mathbf{u} \in L^P(0, T; X) \mid \dot{\mathbf{u}} \in L^P(0, T; X)\right\}.$$

Si $p = 2$ on utilise la notation $H^1(0, T; X)$ au lieu de $W^{1,2}(0, T; X)$. L'espace $W^{1,P}(0, T; X)$ est doté de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,P}(0,T;X)} = \|\mathbf{u}\|_{L^P(0,T;X)} + \|\dot{\mathbf{u}}\|_{L^P(0,T;X)}.$$

Alors $W^{1,P}(0, T; X)$ est l'espace de Banach.

Afin de définir $W^{1,P}(0, T; V, H)$, nous avons d'abord introduit ce que l'on appelle les triplets d'évolution

$$"V \subseteq H \subseteq V'",$$

dans lequel V est un espace de Banach réel séparable et réflexif, H un espace de Hilbert réel séparable et V' l'espace dual de V. Par $\|.\|_V$ et $|.|_H$ nous désignons les normes dans V et H, respectivement. L'appariement de dualité entre V et V' est noté $\langle ., . \rangle_V$ et le produit scalaire dans H par $(., .)_H$. Nous supposons que l'espace V est continûment et densément injecté dans H. Par conséquent, en identifiant H et H', l'injection $H \subseteq V'$ a également un sens et elle est continue et dense.

La caractérisation suivante des dérivées généralisées est valable dans le cas des triplets d'évolution.

Proposition 1.4.1. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ et $\mathbf{u} \in L^P(0, T; V)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(**i**) il existe la dérivée généralisée $\mathbf{u}^{(i)} \in L^q(0, T; V')$;

(**ii**) il existe une fonction $\mathbf{w} \in L^q(0,T;V')$ telle que

$$\int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v})_H \varphi^{(i)}(t)\,dt = (-1)^i \int_0^T \langle \mathbf{w}(t), \mathbf{v}\rangle_{V'\times V} \varphi(t)\,dt. \quad \forall \mathbf{v} \in V, \varphi \in C_0^\infty(0,T) \text{ et } \mathbf{w} = \mathbf{u}^{(i)}.$$

Soit $p \in (1, +\infty)$. L'espace $W^{1,P}(0,T;V,H)$ est défini comme un sous-espace de $L^P(0,T;V)$ comme suit :

$$W^{1,P}(0,T;V,H) = \left\{\mathbf{u} \in L^P(0,T;V) \mid \dot{\mathbf{u}} \in L^q(0,T;V')\right\};$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On équipe $W^{1,P}(0,T;V,H)$ de la norme suivante

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,P}(0,T;V,H)} = \|\mathbf{u}\|_{L^P(0,T;V)} + \|\dot{\mathbf{u}}\|_{L^q(0,T;V')}. \tag{1.4.14}$$

Rappelons quelques résultats importants de l'espace $W^{1,P}(0,T;V,H)$.

L'espace $W^{1,P}(0,T;V,H)$ est complet avec la norme (**1**.4.12).

Remarque 1.4.2. Supposons de plus que V est un espace de Hilbert et $p = 2$. Alors $W^{1,2}(0,T;V,H)$ équipé de la norme (**1**.4.12) (et du produit scalaire correspondant) est un espace de Hilbert. Dans ce cas, nous utiliserons la notation plus simple suivante : $W^{1,2}(0,T;V,H) = W(V)$ dans ce qui suit.

$$W^{1,P}(0,T;V,H) \hookrightarrow C([0,T];H).$$

Injections compactes

Nous énonçons ensuite un résultat important d'injection compacte dans les espaces de Bochner voir [33] :

Proposition 1.4.2. Soit $p, q \in (1, +\infty)$. Soient X, Z des espaces de Banach réflexifs et séparables réels et Y un espace de Banach réel. Supposer que

$$X \hookrightarrow_c Y \hookrightarrow Z.$$

Alors

$$\left\{\mathbf{u} \in L^P(0,T;X) \mid \dot{\mathbf{u}} \in L^q(0,T;Z)\right\} \hookrightarrow_c L^P(0,T;Y).$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné avec une frontière Lipschitzienne $\partial\Omega$. Soit V un espace de Hilbert réel tel que $V \hookrightarrow H^1(\Omega)$. Alors, la variante suivante du résultat de compacité est vérifiée :

Proposition 1.4.6. [35]

Soit $\{\mathbf{u}_n\}$ une suite bornée dans $L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$. Si $\mathbf{u}_n(t) \rightharpoonup \mathbf{u}(t)$ dans $L^1(\Omega)$ p.p. dans $(0,T)$, alors il existe une sous-suite $\{\mathbf{u}_{n_k}\}$ de $\{\mathbf{u}_n\}$ telle que $\mathbf{u}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{u}$ fortement dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

1.4.3 Espaces Sobolev en mécanique de contact.

Dans l'étude des problèmes de contact, nous utilisons fréquemment des espaces fonctionnels de type Sobolev associés aux opérateurs de déformation et de divergence. Pour les présenter, nous commençons par la notation suivante. Tout d'abord, nous désignons par $\mathbb{R}^d$ $(d = 2,3)$ l'espace linéaire réel de dimension d. Le symbole S_d représente l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$ ou, de manière équivalente, l'espace des matrices symétriques d'ordre d. Les produits scalaires canoniques et les normes correspondantes sur $\mathbb{R}^d$ et S_d sont

$$\begin{aligned} \mathbf{u}.\mathbf{v} &= u_i v_i \ , \qquad \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{R}^d} = (\mathbf{v}.\mathbf{v})^{\frac{1}{2}} \quad \forall\ \mathbf{u} = (u_i)\,, \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^d \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij}\tau_{ij} \ , \quad \|\sigma\|_{S_d} = (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}} \ \forall\ \sigma = (\sigma_{ij})\,, \tau = (\tau_{ij}) \in S_d \end{aligned}$$

Ensuite, soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. De manière générale, les déplacements seront recherchés dans l'espace $H^1\left(\Omega; IR^d\right)$ ou ses sous-espaces. Nous introduisons les espaces

$$H = L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right) = \left\{\mathbf{v} = (v_i) \ \mid v_i \in L^2(\Omega)\,, 1 \le i \le d\right\}, \tag{1.4.15}$$

$$\mathcal{H} = \left\{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \ \ / \ \tau_{ij} = \ \tau_{ji} \in L^2(\Omega) \,/\, i,j = \overline{1,d} \ \ \right\} = L^2(\Omega; S_d) \tag{1.4.16}$$

qui sont des espaces de Hilbert avec les produits scalaires canoniques

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_H = \int_\Omega \mathbf{u}.\mathbf{v}\ dx = \int_\Omega u_i v_i\ dx \quad , \quad \langle \boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}\rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}\ dx = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}\ dx.$$

Les normes associées seront notées respectivement $\|.\|_H$ et $\|.\|_{\mathcal{H}}$. Soit

$$H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right) = \left\{\mathbf{v} = (v_i) \ \mid v_i \in H^1(\Omega)\,, 1 \le i \le d\right\},$$

Pour une fonction $\mathbf{v} \in H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$ on écrit toujours $\mathbf{v}$ pour la trace de $\mathbf{v}$ vers Γ. Pour le déplacement on utilise l'espace V défini par

$$V = \left\{\mathbf{v} \in H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right) \ \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ p.p. sur } \Gamma_1 \ \ \right\}, \tag{1.4.17}$$

C'est un véritable espace Hilbert avec le produit scalaire canonique donné par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) . \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \;\; dx \qquad (\mathbf{1}.4.18)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon} : H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right) \to \mathcal{H}$ est l'opérateur de déformation défini par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

La quantité $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ est le tenseur de déformation linéarisé (ou petit) associé au déplacement $\mathbf{u}$. Notez que la complétude de l'espace V découle de l'hypothèse $mes(\Gamma_1) > 0$ qui permet l'utilisation de l'inégalité de Korn, pour plus de détails. La norme associée sur V est notée $\|.\|_V$. Ainsi, l'égalité ($\mathbf{1}$.4.18) implique que

$$\|\mathbf{u}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, \mathbf{u} \in V, \qquad (\mathbf{1}.4.19)$$

ce qui montre en particulier que l'opérateur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon} : V \to \mathcal{H}$ est un opérateur continu. De plus, rappelons que l'opérateur trace est un opérateur linéaire continu de V de valeurs dans $L^2\left(\Gamma; \mathbb{R}^d\right)$.

En outre, d'après le théorème des traces de Sobolev, il existe une constante $C_0 > 0$ qui dépend uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que

$$|\mathbf{v}|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 |\mathbf{v}|_V \qquad \forall \mathbf{v} \in V \qquad (\mathbf{1}.4.20)$$

Pour le champ de contraintes, outre l'espace $\mathcal{H}$ défini par ($\mathbf{1}$.4.16), nous utiliserons l'espace

$$\mathcal{H}_1 = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H} \;\; / \;\; \mathrm{Div}\, \boldsymbol{\tau} \in H, \;\; \}$$

où $\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\tau} = (\sigma_{i\,j,\,j}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial\, \sigma_{i\,j}}{\partial\, x_j}$ représente l'opérateur de divergence. L'espace $\mathcal{H}_1$ est un espace de Hilbert doté du produit scalaire

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}, \mathrm{Div}\, \boldsymbol{\tau} \rangle_H,$$

et la norme associée $\|.\|_{\mathcal{H}_1}$. Notons enfin que l'opérateur de divergence $\mathrm{Div} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire continu.

Si $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction régulière, par exemple $\boldsymbol{\sigma} \in C^1\left(\overline{\Omega}; S_d\right)$, alors la formule de Green suivante s'applique :

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} . \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\, dx + \int_\Omega \mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma} . \mathbf{v} dx = \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma\nu} . \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right). \qquad (\mathbf{1}.4.21)$$

Une preuve de cette formule est basée sur un argument de densité standard. Premièrement, il résulte de la formule classique de Green-Gauss que (**1**.4.21) est valable pour tout $\mathbf{v} \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^{d}\right)$, alors la densité de l'espace $C^{\infty}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^{d}\right)$ dans $H^{1}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right)$ garantit que l'égalité dans (**1**.4.21) est valable pour tout $\mathbf{v} \in H^{1}\left(\Omega;\mathbb{R}^{d}\right)$.

L'effet piézoélectrique introduit des considérations supplémentaires concernant le champ de déplacement électrique $\mathbf{D}$ et le champ potentiel électrique φ, définis dans les espaces suivants :

Définition des Espaces :

1.

$$W=\left\{\varphi \in H^{1}(\Omega)\ /\varphi=0 \quad \text{sur}\ \ \Gamma_{a}\right\} \tag{1.4.22}$$

2.

$$\mathcal{W}=\left\{\mathbf{D}=(\mathbf{D}_{i})\ \ /\ \ \mathbf{D}_{i}\in L^{2}(\ \Omega)\ ,\ \text{div}\ \mathbf{D}\in L^{2}(\ \Omega)\right\} \tag{1.4.23}$$

où div $\mathbf{D}=\left(\frac{\partial \mathbf{D}_{i}}{\partial x_{i}}\right)$. W et $\mathcal{W}$ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned}
(\varphi\ ,\ \phi)_{W} &= \int_{\Omega}\nabla\varphi.\nabla\phi dx, && (1.4.24)\\
(\mathbf{D}\ ,\ \mathbf{E})_{\mathcal{W}} &= \int_{\Omega}\mathbf{D}.\mathbf{E}dx+\int_{\Omega}\operatorname{div}\mathbf{D}.\operatorname{div}\mathbf{E}dx && (1.4.25)
\end{aligned}$$

On note par $|.|_{W}$ et $|.|_{\mathcal{W}}$ les normes associées aux espaces W et $\mathcal{W}$ respectivement. En outre, si $\mathbf{D} \in\mathcal{W}$ est une fonction régulière, la formule suivante de Green est vérifiée :

$$(\mathbf{D},\nabla\phi)_{H}+(\text{div}\ \ \mathbf{D},\phi)_{L^{2}(\Omega)}=\int_{\Gamma}\mathbf{D}.\nu\phi da \qquad \forall\phi\in H^{1}(\Omega)\,. \tag{1.4.26}$$

Étant donné que la partie Γ_{a} a été supposée de mesure non nulle, l'inégalité de *Friedrichs-Poincaré* est vérifiée comme suit :

$$|\nabla\phi|_{H}\geq C_{\ F}\,|\phi|_{H^{1}(\Omega)} \qquad \forall\phi\in W, \tag{1.5.27}$$

où $C_{\ F}$ est une constante dépendant uniquement de Ω et Γ_{a}. Il en résulte que les normes $|.|_{H^{1}(\Omega)}$ et $|.|_{W}$ sont équivalentes sur W, et donc $(W,|.|_{W})$ est un espace de Hilbert réel. De plus, d'après le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $a_0 > 0$, dépendant uniquement de Ω, Γ_a et Γ_3 telle que

$$|\phi|_{L^2(\Gamma_3)} \leq a_0 \, |\phi|_W \quad \forall \phi \in W. \tag{1.4.28}$$

Pour plus de détails sur les résultats de ce paragraphe, nous renvoyons par exemple aux références [5].

Chapitre 2

Inéquations variationnelles, équations d'évolution et Inéquations hémivariationnelles

2.1 Éléments d'analyse non linéaire

Dans cette section, nous allons introduire quelques concepts clés de l'analyse non linéaire qui seront essentiels pour le développement de ce travail. Plus précisément, nous discuterons des résultats concernant. Les opérateurs bornés, les opérateurs monotones et pseudomonotones, les fonctions convexes et inférieurement semi-continues, la différentiabilité et la sous-différentiabilité, et le sous-gradient au sens de Clarke.

Définition 2.1.1. Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)_X$ et de la norme $|.|_X$ et soit $A : X \to X$ un opérateur.

a) L'opérateur A est dit monotone si

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_X \geq 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$$

b) L'opérateur A est strictement monotone si

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_X > 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$$

c) L' opérateur A est dit fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_X > m\,|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$$

d) L'opérateur A est de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}|_X \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$$

Dans l'étude des équations d'évolution non linéaires, nous considérons les opérateurs définis sur un espace normé avec des valeurs dans son dual. En notant par $< .,. >_{X' \times X}$ pour le produit de dualité entre X' et X, une extension de la *Définition* **2.1.1** pour ce cas est la suivante.

Définition 2.1.2. Soit X un espace normé et soit X' son dual. Un opérateur $A : X \to X'$ est appelé borné si A prend des ensembles bornés de X dans des ensembles bornés de X'.

a) L'opérateur $A : X \to X'$ est dit monotone si

$$< Au - Av, u - v >_{X' \times X} \geq 0 \qquad \forall u, v \in X$$

b) L'opérateur $A : X \to X'$ est dit hémicontinu si l'application $t \to < A(u + tv), w >_{X' \times X}$ est continu sur $[0, 1]$ pour tout $u, v, w \in X$.

c) L'opérateur $A : X \to X'$ est appelé pseudomonotone, s'il est borné et si $u_n \to u$ faiblement dans X et $\limsup < Au_n, u_n - u >_{X' \times X} \leq 0$ implique $< Au, u - v >_{X' \times X} \leq \liminf < Au_n, u_n - v >_{X' \times X}$ pour tout $v \in X$.

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant :

Proposition 2.1.1 . Tout opérateur de Lipschitz est hemcontinu.

Théorème 2.1.1 [25] Soit X un espace de Banach et $A : X \to X'$.

(i) Si l'opérateur A est un opérateur borné, hémicontinu et monotone, alors A est pseudomonotone.

(ii) Si A est pseudomonotone, alors A est semi-continu.

2.2 Éléments d'analyse non régulière

Soit X un espace de Banach et X' son dual. De plus, soit Y un autre espace de Banach.

Nous commençons par rappeler quelques définitions classiques du calcul différentiel. Soit F une application de X dans Y. La dérivée directionnelle unilatérale de F en un point $\mathbf{u}$ et une direction v est définie par

$$F^{'}(\mathbf{u};\mathbf{v}) = \lim_{t\to 0^{+}} \frac{F(\mathbf{u}+t\mathbf{v}) - F(\mathbf{u})}{t}$$

en supposant que la limite ci-dessus (en Y) existe. La fonction F est dite Gateaux différentiable en un point $\mathbf{u}$ s'il existe $DF(u) \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $DF(\mathbf{u})\mathbf{v}$ est égal à $F^{'}(\mathbf{u};\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{v} \in X$. Si en plus

$$\lim_{\tilde{\mathbf{u}}\to\mathbf{u}} \frac{\|F(\tilde{\mathbf{u}}) - F(\mathbf{u}) - DF(\mathbf{u})(\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\|_{Y}}{\|\tilde{\mathbf{u}}-\mathbf{u}\|_{X}} = 0,$$

alors F est dite *Fréchet différentiable* en $\mathbf{u}$. Si l'application $\mathbf{u} \longrightarrow DF(\mathbf{u})$ est continue en $\mathbf{u}$, on dit que F est continûment différentiable en $\mathbf{u}$.

Enfin, nous introduisons le concept de différentiabilité stricte : F est dite strictement différentiable en u s'il existe un élément de $\mathcal{L}(X,Y)$, noté $D_sF(\mathbf{u})$, tel que pour chaque $\mathbf{v} \in X$, on a

$$\lim_{\substack{\tilde{\mathbf{u}}\to\mathbf{u}\\ t\to 0^{+}}} \frac{F(\tilde{\mathbf{u}}+t\mathbf{v}) - F(\tilde{\mathbf{u}})}{t} = D_sF(\mathbf{u})(\mathbf{v}).$$

2.2.1 Éléments d'analyse convexes

Le but de cette partie est d'introduire quelques résultats fondamentaux de l'analyse convexe. Un sous-ensemble K de X est dit convexe si

$$\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\,\mathbf{v} \in K \quad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in K \;\text{ et } \lambda \in\,]0,1[$$

Soit $\overline{\mathbb{R}}$ la droite réelle étendue, c'est-à-dire $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle propre dans X, c'est-à-dire $\varphi \neq +\infty$ dans X. Une fonctionnelle $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite convexe dans K ssi :

$$\varphi(\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}) \leq \lambda\varphi(\mathbf{u}) + (1-\lambda)\varphi(\mathbf{v}) \qquad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in K,\ \lambda \in\,]0,1[\,,$$

Si l'inégalité stricte est vraie pour tout $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ alors φ est dit strictement convexe dans K. L'ensemble

$$D_{eff}(\varphi) = \{\mathbf{u} \in X \;/\; \varphi(\mathbf{u}) < +\infty\}$$

est appelé le domaine effectif de φ.

La fonction $\varphi : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie sur un espace métrique X est dite semi-continu inférieur (s.c.i.) en $\mathbf{u}_0 \in X$, si $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}_0$ dans X implique

$$\varphi(\mathbf{u}_0) \leq \liminf \varphi(\mathbf{u}_n)).$$

C'est (s.c.i.) sur X si c'est (s.c.i.) à chaque $\mathbf{u}_0 \in X$.

Définition 2.2.1. [4], [45]. Un élément $w \in X'$ est dit être un sous-gradient d'une fonctionnelle convexe φ en un point $\mathbf{u}$ dans lequel $\varphi(\mathbf{u})$ est fini ssi

$$\varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u}) \geq (w, \mathbf{v} - \mathbf{u})_X \quad \forall\, \mathbf{v} \in X. \tag{\textbf{2}.2.1}$$

L'ensemble de tous les sous-gradients de φ en $\mathbf{u}$ est appelé le sous-différentiel de φ en $\mathbf{u}$ et sera noté $\partial\varphi\,(\mathbf{u})$, dans ce qui suit. Si $\varphi\,(\mathbf{u}) = +\infty$ nous définissons $\partial\varphi\,(\mathbf{u}) = \emptyset$.

Définition 2.2.2.[4] Le cône normal $N_K(\mathbf{u})$ d'un sous-ensemble convexe non vide K au point $\mathbf{u} \in K$ est défini par

$$N_K(\mathbf{u}) = \{\mathbf{w} \in X' \;/\; (w, \mathbf{v} - \mathbf{u})_X \leq 0 \qquad \forall\, \mathbf{v} \in K\}\,. \tag{\textbf{2}.2.2}$$

Un exemple important de fonctionnelle convexe est la fonction dite indicatrice I_K du sous-ensemble convexe K défini par :

$$I_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ +\infty & \text{autre part.} \end{cases} \tag{\textbf{2}.2.3}$$

Il est facile de voir que si $\mathbf{u} \in K$ alors le sous-différentiel de la fonction indicatrice I_K et le cône normal de l'ensemble K en u coïncident, c'est-à-dire

$$\partial I_K(\mathbf{u}) = N_K(\mathbf{u}).$$

Enfin on rappelle le résultat concernant l'additivité des sous-différentielles :

Proposition 2.2.1. Supposons que $\varphi_1 : H \to \,]-\infty, +\infty]$ et $\varphi_2 : H \to \,]-\infty, +\infty]$ sont convexes et semi-continues inférieures dans X, et qu'il existe un point $\mathbf{u}_0 \in D_{eff}(\varphi_1) \cap D_{eff}(\varphi_2)$ où φ_1 est continu. Alors

$$\partial\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)(\mathbf{u}) = \partial\varphi_1\left(\mathbf{u}\right) + \partial\varphi_2\left(\mathbf{u}\right) \qquad \forall \mathbf{u} \in X\ .$$

2.2.2 Éléments d'analyse non convexes

Dans cette sous-section, nous rappelons les définitions et propriétés de base du sous-différentiel généralisé au sens de Clarke, voir [9, 10, 11, 36], par exemple.Nous discutons également de certaines classes de fonctions qui sont importantes dans l'étude des inégalités variationnelles-hémivariationnelles.

Définition 2.2.3.[10, 38] et [42] . Soit X un espace de Banach. Une fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est dite localement Lipschitz, si pour tout $x \in X$, il existe U_x un voisinage de x et une constante $L_x > 0$ tels que

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| \leq L_x ||y - z||_X \qquad \forall\, y, z \in U_x. \tag{\textbf{2}.2.4}$$

La constante L_x dans l'inégalité précédente est appelée constante de Lipschitz de φ près de x.

Proposition 2.2.2.[54]**:** Soit X un espace de Banach et $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un propre, convexe et $s.c.i.$ fonction. Alors φ est localement Lipschitz à l'intérieur de $D_{ef}(\varphi)$.

Définition 2.2.4. [39] (**Dérivé directionnel généralisé**) Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitz. La dérivée directionnelle généralisée (Clarke) de φ en $x \in X$ dans la direction $\mathbf{v} \in X$, notée par $\varphi^0(x, \mathbf{v})$, est défini par

$$\varphi^0(x, \mathbf{v}) = \lim_{y \longrightarrow x} \sup_{\lambda \downarrow 0} \frac{\varphi(y + \lambda \mathbf{v}) - \varphi(y)}{\lambda}. \tag{\textbf{2}.2.5}$$

Le sous-différentiel au sens de Clarke (ou, de manière équivalente, le gradient généralisé) de φ en x, noté $\overline{\partial} h(x)$, est un sous-ensemble de l'espace dual X' donné par

$$\overline{\partial}\varphi(x) = \left\{ \zeta \in X' \ / \ \varphi^0(x, \mathbf{v}) \geq (\zeta, \mathbf{v})_{X' \times X} \ \ \forall\, \mathbf{v} \in X \right\} \tag{\textbf{2}.2.6}$$

Une fonction localement de Lipschitz φ est dite régulière (au sens de Clarke) en $x \in X$ si pour tout $\mathbf{v} \in X$ la dérivée directionnelle unilatérale

$$\varphi^{'}(x; \mathbf{v}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi(x + \lambda \mathbf{v}) - \varphi(x)}{\lambda}. \tag{\textbf{2}.2.7}$$

existe et $\varphi^0(x; \mathbf{v}) = \varphi^{'}(x; \mathbf{v})$.

Proposition 2.2.3 [39]**.** Soient X et Y des espaces de Banach, $\psi : Y \to \mathbb{R}$ localement Lipschitz et $T : X \to Y$ donné par $Tx = Ax + y$ pour $x \in X$, où $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $y \in Y$ sont fixés. Alors la fonction φ définie par $\varphi(x) = \psi(Tx)$ est localement Lipschitz et

(a) $\varphi^0(x; \mathbf{v}) \leq \psi^0(Tx, A\mathbf{v}) \ \forall \ x, \mathbf{v} \in X.$

(b) $\partial\varphi(x) \subset A^*\partial\psi^0(Tx) \quad \forall \ x, \mathbf{v} \in X.$

où $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ désigne l'opérateur adjoint à A. De plus, si ψ (ou $-\psi$) est régulier, alors φ (ou $-\varphi$) est régulier et dans (a) et (b) on a des égalités. Ces égalités sont également vraies si au lieu de la condition de régularité, nous supposons que A est surjective.

2.3 Inéquations variationnelles et équations d'évolution

Dans cette section , nous passons en revue quelques résultats standards d'existence et d'unicité pour des inéquations variationnelles paraboliques. Ces résultats seront néces saires dans ce qui suit et pour plus de détail [14], et Un résultat récent d'existence pour les inéquations hémivariationnelles voir [37] et [39].

2.3.1 Inéquations variationnelles paraboliques d'évolution

Dans la suite, V et H désignent les espaces de Hilbert réels, tel que

$$V \subset H \subset V',$$

un triplet de Gelfand, algébriquement et topologiquement.

Nous rappelons maintenant un résultat qui concerne l'existence et l'unicité des inéquations variationnelles paraboliques de second ordre, De nombreuses déclarations abstraites ont pu être trouvées dans la littérature, en fonction des difiérentes hypothèses sur les opérateurs et les données (voir par exempl[14]). On considère alors les hypothèses suivantes : l'opérateur $A: \ V \to V'$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(a) L'accroissement linéaire} \\ \exists C_1 \geq 0, C_2 \geq 0,\ \forall \mathbf{v} \in V,\ |A\mathbf{v}|_{V'} \leq C_1|\mathbf{v}|_V + C_2; \\ \text{(b) L'hemicontinuité} \\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V :\ (A(\mathbf{u} + t\mathbf{v}), \mathbf{w})_{V'\times V} \to (A\mathbf{u}, \mathbf{w})_{V'\times V} \ \text{ quand } t \to 0; \\ \text{(c) La forte monotonie} \\ \exists m_{\mathcal{A}} > 0 :\ (A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V'\times V} \geq m_{\mathcal{A}}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V^2; \\ \text{(d) si } \mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ faiblement dans } L^2(0,T;V), \\ \text{alors } A\mathbf{u}_n \rightharpoonup A\mathbf{u} \text{ faiblement étoile dans } L^2(0,T;V') \text{ et} \\ \liminf\limits_{n\to+\infty} \int_0^T (A\mathbf{u}_n(t), \mathbf{u}_n(t))_{V'\times V} \mathrm{d}t \geq \int_0^T (A\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t))_{V'\times V} \mathrm{d}t. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

$$j :\ V \to \mathbb{R} \text{ est convexe semi-continue inférieurement.} \tag{2.3.2}$$

Il existe une suite de fonction convexe de classe C^1, $(j_n) :\ V \to \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} \text{(a) } \exists d_1 \geq 0,\ d_2 \geq 0 :\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \mathbf{v} \in V :\ |j_n'(\mathbf{v})|_{V'} \leq d_1 \mid \mathbf{v} \mid_V + d_2 \\ \text{(b) } \forall \mathbf{v} \in L^2(0,T;V) :\ \int_0^T j_n(\mathbf{v}(t))\mathrm{d}t \to \int_0^T j(\mathbf{v}(t))\mathrm{d}t \text{ quand } n \to +\infty; \\ \text{(c) pour toute suite } (\mathbf{v}_n) \text{ et } \mathbf{v} \text{ dans } L^2(0,T;V) \text{ telle que } \mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v} \\ \text{faiblement dans } L^2(0,T;V),\ \text{alors: } \liminf\limits_{n\to+\infty} \int_0^T j_n(\mathbf{v}_n(t))\mathrm{d}t \geq \int_0^T j(\mathbf{v}(t))\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Où $j_n'(\mathbf{v})$dénote la dérivée au sens de Fréchet de j_n en $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{v}_0 \in V \tag{2.3.4}$$

Théorème 2.3.1. On suppose que les hypothèses (**2**.3.1)-(**2**.3.4) ont lieu et $h \in L^2(0,T;V')$. Alors il existe un unique $\mathbf{v} \in C(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \cap W^{1,2}(0,T;V')$ tel que

$$\begin{gathered} (\dot{\mathbf{v}}(t), \mathbf{w} - \mathbf{v}(t))_{V'\times V} + (A\mathbf{v}(t), \mathbf{w} - \mathbf{v}(t))_{V'\times V} + j(\mathbf{w}) - j(\mathbf{v}) \\ \geq (h(t), \mathbf{w} - \mathbf{v}(t))_{V'\times V} \quad \forall \mathbf{w} \in V \text{ et } \ \text{p.p } t \in (0,T) \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \end{gathered}$$

On applique ce théorème pour la résolution du problèmes P^2 et P^3 dans les chapitres 4 et 5 respectivement.

2.4 Inéquations hémivariationnelles

Dans cette section, nous allons fournir des résultats d'existence et d'unicité de solutions aux inégalités hémivariationnelles. A cette fin, nous introduisons la notation suivante.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ avec une frontière de Lipschitz $\partial\Omega = \Gamma$ et soit Γ_3 une partie mesurable de $\partial\Omega$ De plus, soit V un sous-espace fermé de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^s)$, $s \in \mathbb{N}, H = L^2(\Omega, \mathbb{R}^s)$ et $Z = H^{\delta}(\Omega, \mathbb{R}^s)$ avec $\delta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ fixe . En notant par i : $V \longrightarrow Z$ l'inclusion de V dans Z et par $\gamma : Z \longrightarrow L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^s)$ et $\overline{\gamma} : H^1(\Omega, \mathbb{R}^s) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_3, \mathbb{R}^s) \subset L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^s)$ les opérateurs de trace, nous obtenons $\overline{\gamma}\mathbf{v} = \gamma(i\mathbf{v})$ Pour tout $\mathbf{v} \in V$. Pour simplifier, dans ce qui suit nous omettons l'inclusion i et nous écrivons $\overline{\gamma}\mathbf{v} = \gamma\mathbf{v}$. De la théorie des espaces de Sobolev nous savons que $V \subseteq Z \subseteq H \subseteq Z' \subseteq V'$ avec tous les injections compacts. On note c_{VZ} la constante de l'inclusion de V dans Z. Il résulte du théorème **2.22**, dans [38]. que l'opérateur trace $\gamma : Z \longrightarrow L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^s)$ est linéaire et continue. On note par $||\gamma||$ la norme de la trace dans $\mathcal{L}(Z, (\Gamma_3, \mathbb{R}^s))$ et par $\gamma^* : L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^s) \longrightarrow Z'$ l'opérateur adjoint à γ.

De plus, étant donné un intervalle de temps $(0, T)$, on note $\Sigma_3 = \Gamma_3 \times (0, T)$.

2.4.1 Inéquations hémivariationnelles elliptiques

Soit $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur, $j : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle prescrite et $f \in V'$. Nous considérons le problème de trouver un élément $\mathbf{u}$ tel que.

$$\mathbf{u} \in V,\ (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} + \int_{\Gamma_3} j^0(\gamma\mathbf{u}; \gamma\mathbf{v}) \mathrm{d}a \geq (f, \mathbf{v})_{V' \times V}\ \ \forall \mathbf{v} \in V. \qquad (\mathbf{2}.4.1)$$

Dans l'étude de (**2**.4.1) nous supposons les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \text{a) } A \text{ est pseudomonotone et Il existe une constante } \alpha_A > 0 \text{ tell eque} \\ \quad (A\mathbf{v}, \mathbf{v})_{V' \times V} \geq \alpha_A |\mathbf{v}|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \\ \text{b) } A \text{ est fortement monotone, c'est-à-dire} \\ \text{Il existe une constante } m_A > 0 \text{ tell eque } (A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V' \times V} \geq m_A |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{cases} \qquad (\mathbf{2}.4.2)$$

$j : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases}
\text{(a) } j(.,\boldsymbol{\xi}) \text{ est mesurable sur } \Sigma_C \text{ pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^s \text{ et} \\
\text{il existe } e \in L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^s) \ / \text{ tel que } j(., e(.)) \in L^1(\Gamma_3). \\
\text{(b) } j(x,.) \text{ est localement Lipschitz sur } \mathbb{R}^s \text{ pour p.p.} x \in \Gamma_3. \\
\text{(c) Il existe } \overline{c}_0, \overline{c}_1 > 0 \text{ tel que} \\
\ ||\partial j(x,\boldsymbol{\xi})||_{\mathbb{R}^s} \leq \overline{c}_0 + \overline{c}_1 ||\boldsymbol{\xi}||_{\mathbb{R}^s} \text{ Pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^s \text{ p.p.} x \in \Gamma_3. \\
\text{(d) au moins une des fonctions } j(x,.) \text{ ou } -j(x,.) \text{ est régulière sur } \mathbb{R}^s \text{ pour p.p.} x \in \Gamma_3. \\
\text{(e) Il existe } \overline{c}_2 \geq 0 \text{ tel que} \\
\ (\zeta_1 - \zeta_2).(\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq -\overline{c}_2 ||\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2||^2_{\mathbb{R}^s} \text{ Pour tout } \zeta_i \in \partial j(x,\boldsymbol{\xi}_i), \zeta_i, \boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}^s, i = 1,2 \text{ p.p. } (x,t) \in \Sigma_3. \\
\text{(f) Il existe } \overline{c}_3 \geq 0 \text{ tel que} \\
\quad j^0(x,\boldsymbol{\xi}; -\boldsymbol{\xi}) \leq \overline{c}_3 (1 + ||\boldsymbol{\xi}||_{\mathbb{R}^s}) \text{ Pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^s \text{ p.p.} x \in \Gamma_3.
\end{cases} \tag{\textbf{2}.4.3}$$

Nous donnons par la suite un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (**2**.4.1).

Théorème 2.4.1 [37] . Nous supposons que les hypothèses (**2**.4.2)-(**2**.4.3) sont satisfaites, si l'hypothèse de petitesse $m_A > \overline{c}_2 c_{VZ}^2 ||\gamma||^2$

est vérifiée, alors le problème (**2**.4.1) a une unique solution $\mathbf{u} \in V$ satisfait

$$||\mathbf{u}|| \leq C(1 + |f|_{V'}). \tag{\textbf{2}.4.4}$$

De plus, si $\mathbf{u}_i$ ui l'unique solution correspondant à $f = f_i, i = 1, 2$, il existe c > 0 tel que

$$|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V \leq c(|f_1 - f_2|_{V'}). \tag{\textbf{2}.4.5}$$

2.4.2 Inéquations hémivariationnelles dépendantes du temps.

dans cette section, nous étudions les inéquations hémivariationnelles dépendantes du temps, c'est-à-dire les versions du problème (**2**.4.1) dans lesquelles A, j et f dépendent du temps. Cependant, dans ce qui suit, nous sautons cette étude et passons directement à inéquations hémivariationnelles paraboliques. Pour présenter un résultat d' existence et d' unicité de solutions pour de telles inégalités. Nous considérons le problème de trouver un élément

$\mathbf{z} \in L^2(0,T;V)$ avec $\dot{\mathbf{z}} \in W(V)$ tel que

$$\begin{aligned} &(\ddot{\mathbf{z}}(t), \mathbf{v})_{V'\times V} + (A(t, \dot{\mathbf{z}}(t)), \mathbf{v})_{V'\times V} + \int_{\Gamma_3} j^0(t, \gamma\dot{\mathbf{z}}(t); \gamma\mathbf{v}) \mathrm{d}a \\ &\qquad \geq (f, \mathbf{v})_{V'\times V} \quad \forall \mathbf{v} \in V \text{ et } \text{ p.p } t \in (0,T) \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \dot{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{h}_0 \tag{2.4.7}$$

Les hypothèses sur les données du problème (**2**.4.6)-(**2**.4.7) sont les suivantes

L'opérateur $A : (0,T) \times V \to V'$ satisfait les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \text{(a) } A(., \mathbf{v}) \text{ est mesurable sur } (0,T) \text{ Pour tout } \mathbf{v} \in V; \\ \text{(b) } A(t, .) \text{ est pseudomonotone Pour p.p } t \in (0,T); \\ \text{(c) Il existes } \overline{a}_0 \in L^2(0,T), \overline{a}_0 \geq 0 \text{ et } \overline{a}_1 \geq 0 \text{ tel que} \\ \qquad ||A(t, .\mathbf{v})||_{V'} \leq \overline{a}_0(t) + \overline{a}_1 \, ||\mathbf{v}||_V \quad \text{Pour tout } \mathbf{v} \in V, \text{ p.p } t \in (0,T). \\ \text{(d) Il existe } \alpha_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \qquad (A(t, .\mathbf{v}), \mathbf{v})_{V'\times V} \geq \alpha_{\mathcal{A}} ||\mathbf{v}||_V^2 \text{ Pour tout } \mathbf{v} \in V, \text{ p.p } t \in (0,T). \\ \text{(e) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (A(t, .\mathbf{v}_1) - A(t, .\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V'\times V} \geq m_{\mathcal{A}} ||\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2||_V^2 \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \quad \text{p.p } t \in (0,T). \end{cases} \tag{2.4.8}$$

$j : \Sigma_C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ est une fonction tel que

$$\begin{cases} \text{(a) } j(.,.,\boldsymbol{\xi}) \text{ est mesurable sur } \Sigma_C \text{ pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^s \text{ et } j(.,.,0) \in L^1(\Sigma_C) \\ \text{(b) } j(x,t,.) \text{ est localement Lipschitz sur } \mathbb{R}^s \text{ pour p.p.} (x,t) \in \Sigma_C. \\ \text{(c) Il existe } \overline{c}_0, \overline{c}_1 > 0 \text{ tel que} \\ ||\partial j(x,t,\boldsymbol{\xi})||_{\mathbb{R}^s} \leq \overline{c}_0 + \overline{c}_1 ||\boldsymbol{\xi}||_{\mathbb{R}^s} \text{ Pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^s \text{ p.p.} (x,t) \in \Sigma_C. \\ \text{(d) au moins une des fonctions } j(x,t,.) \text{ ou } -j(x,t,.) \text{ est régulière sur } \mathbb{R}^s \text{ pour p.p.} (x,t) \in \Sigma_C. \\ \text{(e) Il existe } \overline{c}_2 \geq 0 \text{ tel que} \\ (\zeta_1 - \zeta_2).(\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq -\overline{c}_2 ||\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2||_{\mathbb{R}^s}^2 \text{ Pour tout } \zeta_i \in \partial j_\tau(x,t,\boldsymbol{\xi}_i), \zeta_i, \boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}^s, i = 1,2 \text{ p.p.} (x,t) \in \Sigma \\ \text{(f) Il existe } \overline{c}_3 \geq 0 \text{ tel que} \\ \qquad j^0(x,t,\boldsymbol{\xi}; -\boldsymbol{\xi}) \leq \overline{c}_3 (1 + ||\boldsymbol{\xi}||_{\mathbb{R}^s}) \text{ Pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^s \text{ p.p.} (x,t) \in \Sigma_C. \end{cases} \tag{2.4.9}$$

$$\begin{cases} \text{(a) } f \in \mathcal{V}', \mathbf{z}_0 \in V, \ \dot{\mathbf{z}}_0 \in H. \\ \text{(b) } m_A > \overline{c}_2 c_{VZ}^2 \left\|\gamma\right\|^2, \text{ où } c_{VZ}^2 \text{ désigne la constante du injection } i : V \longrightarrow Z. \end{cases} \qquad (\mathbf{2}.4.10)$$

Rappelons d'abord quelques propriétés de la fonctionnelle $J : (0,T) \times L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s) \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$J(t,\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} j(x,t;\mathbf{v}(x))\mathrm{d}a \quad \text{pour tout } t \in (0,T) \text{ et pour } \mathbf{v} \in L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s) \qquad (\mathbf{2}.4.11)$$

Lemme 2.4.1 Si $j : \Sigma_C \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ satisfait l'hypothèse (**2**.4.9) et que la fonctionnelle J est donnée par (**2**.4.11), alors

$$\begin{cases} \text{(a) } J(t,.) \text{ est bien défini et localement Lipschitz pour tout } t \in (0,T)\,; \\ \text{(b) } j \text{ Il existe } \widetilde{c}_1 > 0 \text{ tel que} \\ |\mathbf{v}^*|_{L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s)} \leq \widetilde{c}_1 \left(1 + |\mathbf{v}|_{L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s)}\right) \text{ pour tout } \mathbf{v} \in L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s), \mathbf{v}^* \in \partial J(t,\mathbf{v}) \text{ et p.p.} t \in (0,T)\,; \\ \text{(c) au moins une des fonctions } J(t,.) \text{ ou } -J(t,.) \text{ est régulière sur } L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s) \text{ pour p.p.} t \in (0,T)\,. \\ \text{(d) nous avons } (\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s)} \geq -\,\overline{c}_2 \left|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\right|^2_{L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s)} \\ \text{pour tout } \mathbf{v}_i^* \in \partial J(t,\mathbf{v}_i), \mathbf{v}_i \in L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s), i = 1,2 \text{ et p.p.} t \in (0,T)\,; \\ \text{(e) Il existe } \widetilde{c}_3 \geq 0 \text{ tel que} \\ J^0(t,\mathbf{v};-\mathbf{v}) \leq \widetilde{c}_3 \left(1 + |\mathbf{v}|_{L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s)}\right) \text{ pour tout } \mathbf{v} \in L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s), \text{et p.p.} t \in (0,T)\,; \\ \text{(f) } J^0(t,\mathbf{v};\mathbf{w}) = \int_{\Gamma_3} j^0(x,t,\mathbf{v}(x);\mathbf{w}(x))\mathrm{d}a \text{ pour tout } t \in (0,T), \text{et pour.} \mathbf{v},\mathbf{w} \in L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s)\,; \\ \text{(g) } \partial(J \circ \gamma)(t,\mathbf{v}) = \gamma^* \circ \partial J(t,\gamma\mathbf{v}) \text{ pour tout } t \in (0,T) \text{ et pour.} \mathbf{v} \in L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s), \\ \text{où par } \gamma^* : (\Gamma_3;\mathbb{R}^s) \longrightarrow V' \text{ nous désignons l'opérateur adjoint de } \gamma\text{,donné par} \\ \qquad \gamma^*\mathbf{z}(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mathbf{z}(x)\,\gamma\mathbf{v}(x)\,\mathrm{d}a \text{ pour tout } \mathbf{v} \in V, \text{ pour.} \mathbf{z} \in L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^s)\,. \end{cases}$$

Du théorème **5.23** de [39], des propositions **9** et **15** de [54] on déduit le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème.2.4.2 . Si les hypothèses (**2**.4.8),(**2**.4.9) et (**2**.4.10) sont vérifiées, alors le problème (**2**.4.6)-(**2**.4.7) a une solution unique .

2.5 Compléments divers

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Par ailleurs, nous citons certains théorèmes utilisés dans cette thèse tels qu'une version du théorème de représentation de Riesz-Frèchet et le théorème de point fixe de Banach. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, nous proposons au lecteur de consulter par exemple les ouvrages suivants [27] et [39].

**Lemmes de Gronwall

Lemme 2.5.1.[45],[53] Soient m, $n \in C(0,T;IR)$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0,T;IR)$ est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds)\exp(\int_0^t n(s)ds) \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

Pour le cas particulier $m = 0$, ce lemme devient:

Corollaire 2.5.1. Soit $n \in C(0,T;IR)$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0,T;IR)$ est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall\, t \in [0,T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq a\exp(\int_0^t n(s)ds) \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

Lemme 2.5.2. Soient m, $n \in C(0,T;IR)$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\varphi \in C(0,T;IR)$ est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\varphi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\varphi(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi^2(s)ds \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

alors

$$\mid \varphi(t) \mid \leq (a + \int_0^t m(s)ds)\exp(\int_0^t n(s)ds) \qquad \forall\, t \in [0,T]$$

2.5.1 Enoncés de certains théorèmes

Nous considérons maintenant quelques théorèmes importants qui seront utilisés le long de cette thèse.

Soit X un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire $(.,.)_X$ et de la norme associée

$\|.\|_X$. On note aussi par X' l'espace dual X et par $\langle .,. \rangle_{X' \times X}$ la dualité entre X et X'.

Théorème 2.5.1.(de représentation de Riesz-Frèchet). Etant donné $\eta \in X'$, il existe $f \in X$ unique tel que

$$\langle \eta, \mathbf{v} \rangle_{X' \times X} = (f, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X \qquad (\mathbf{2}.5.1)$$

on a de plus

$$\|\eta\|_{X'} = \|f\|_X :$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur X peut représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'aplication $\eta \longrightarrow f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier X et son dual X'.

Théorème 2.5.2 (**Schauder**). Soit X un espace de Banach, K étant un sous ensemble non vide, convexe et compact de X et soit $F : K \longrightarrow K$ une application continue. Alors F admet un point fixe.

Dans le théorème de Schauder on ne sait pas que la fonction F est Lipschitzienne, nous donnera alors l'existence d'une solution mais pas nécessairement l'unicité qu'on va voir dans les théorèmes suivants.

Théorème de point fixe de Banach

Théorème 2.5.3 [54](Théorème du point fixe de Banach) Soit K un sous-ensemble fermé non vide d'un espace de Banach $(X, \|.\|_X)$. Supposons que $\Lambda \ : K \rightarrow K$ soit une contraction, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha \in [0, 1)$ telle que

$$\|\Lambda \mathbf{u} - \Lambda \mathbf{v}\|_X \leq \alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_X \,, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in K.$$

Alors il existe un unique $\mathbf{u} \in K$ tel que $\Lambda \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Nous avons également besoin d'une version du théorème du point fixe de Banach que nous rappelons dans ce qui suit. Pour cela, pour un opérateur Λ, on définit ses puissances de manière inductive par la formule

$$\Lambda^m = \Lambda \left(\Lambda^{m-1} \right) \quad \text{pour } m \geq 2.$$

Théorème 2.5.4 [54]. Supposons que K est un sous-ensemble fermé non vide d'un espace de Banach X et $\Lambda\ : K \to K$. Supposons également que $\Lambda^m\ : K \to K$ est une contraction pour un entier positif m. Alors Λ a un unique point fixe.

Démonstration. D'après le *théorème* **2.5.3**, l'application Λ^m a un unique point fixe $\mathbf{u} \in K$. De

$$\Lambda^m(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$$

on obtient

$$\Lambda^m(\Lambda\mathbf{u}) = \Lambda(\Lambda^m\mathbf{u}) = \Lambda\mathbf{u}$$

Ainsi $\Lambda\mathbf{u} \in K$ est aussi un point fixe de Λ^m. Puisque Λ^m a un point fixe unique, on doit avoir

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$$

c'est-à-dire que $\mathbf{u}$ est un point fixe de Λ. L'unicité d'un point fixe de Λ s'ensuit facilement de celui de Λ^m.

Lemme 2.5.3. [24]. Soit X un espace de Banach et $1 < p < \infty$. Soit $\Lambda : L^2(0,T;X) \longrightarrow L^2(0,T;X)$ un opérateur tel que

$$\|(\Lambda\eta_1)(t) - (\Lambda\eta_2)(t)\|_X^2 \leq C\int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X^2 \ \mathrm{d}s$$

pour tout $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0,T;X)$, p.p. $t \in (0,T)$, avec une constante C. Alors Λ a un point fixe unique dans $L^2(0,T;X)$, 'est-à-dire, il existe un unique $\eta^* \in L^2(0,T;X)$ tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$.

Théorème 2.5.5 [45] **(** Cauchy-Lipschitz). Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t,.) : X \to X$ un opérateur défini sur $(0,T)$ qui satisfait :

(a) Il existe $L_F > 0$ tel que

$$\|F(t,x) - F(t,y)\|_X \leq L_F\|x-y\|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in (0,T);$$

(b) Il existe $1 \leq p \leq \infty$ tel que

$$t \to F(t,x) \in L^p(0,T;X) \qquad \forall x \in X.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0,T;X)$ telle que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t,x(t)) \quad \text{p.p.} t \in (0,T), \\ \qquad\qquad x(0) = x_0. \end{cases}$$

Bien qu'une suite de Cauchy ne soit pas nécessairement convergente, elle converge si elle a une sous-suite convergente, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.5.1.[39] Si une suite de Cauchy $\{x_n\}$ dans un espace normé contient une sous-suite $\{x_{nk}\}$ telle que $x_{nk} \longrightarrow x$ quand $k \longrightarrow +\infty$, alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x.$$

De plus, nous rappelons le critère de convergence suivant dans les espaces normés.

Proposition 2.5.2.[39] Si chaque sous-suite d'une suite $\{x_n\}$ dans un espace normé contient une sous-suite convergente vers x, alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x.$$

Partie II

Analyse des problèmes de contact

Chapitre 3

Problème élasto-viscoplastique avec compliance normale et endommagement

On étudie un problème de contact sans friction impliquant des matériaux élasto-viscoplastiques et une base déformable dans un cadre quasi-statique. Le contact est représenté par une compliance normale, et le comportement du matériau est décrit par une loi élasto-viscoplastique avec une variable d'état interne qui caractérise les dommages causés par les déformations élastiques. Pour ce problème, le candidat démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible. La preuve repose sur des arguments tirés des équations non linéaires avec des opérateurs monotones, des inéquations paraboliques et des principes de point fixe..

3.1 Formulation mécanique du problème et hypothèses

Problème P^1 Trouver $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$ et β tel que

$$\begin{aligned}
&\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t), \beta(t)) \\
&\quad + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)))\, \mathrm{d}s \ \text{ dans } \ \Omega \times (0, T)\,; \qquad (\mathbf{3}.1.1)
\end{aligned}$$

$$\dot{\beta} - k \bigtriangleup \beta + \partial\varphi_Y(\beta) \ni S(\varepsilon(\mathbf{u}), \beta) \ \text{ dans } \ \Omega \times (0, T)\,; \qquad (\mathbf{3}.1.2)$$

$$\mathrm{Div}\, \sigma + \mathbf{f}_0 = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \times (0, T)\,; \qquad (\mathbf{3}.1.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \times (0, T)\,; \qquad (\mathbf{3}.1.4)$$

$$\sigma\nu = \mathbf{f}_2 \ \text{ sur } \ \Gamma_2 \times (0, T)\,; \qquad (\mathbf{3}.1.5)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\mathbf{u}_\nu), \quad \sigma_\tau = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_3 \times (0, T); \qquad (\mathbf{3}.1.6)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma \times (0, T)\,; \qquad (\mathbf{3}.1.7)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \beta(0) = \beta_0, \ \text{ dans } \ \Omega. \qquad (\mathbf{3}.1.8)$$

Ici, (3.1.1) représente la loi de comportement élasto-viscoplastique avec endommagement. L'équation (3.1.2) correspond à l'inclusion utilisée pour décrire l'évolution du champ d'endommagement. L'équation (3.1.3) est l'équation du mouvement. Les équations (3.1.4) et (3.1.5) expriment les conditions de déplacement et de traction. La première égalité dans (3.1.6) représente la condition de compliance normale (voir [52]), tandis que la deuxième relation dans (3.1.6) indique l'absence de friction, c'est-à-dire que la contrainte tangentielle est nulle sur la surface de contact pendant le processus. L'équation (3.1.7) définit une condition aux limites de Neumann homogène, où $\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ est le dérivé normal de β. Dans (3.1.8), $\mathbf{u}_0$ et β_0 représentent respectivement le déplacement initial et l'endommagement initial du matériau. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des diverses fonctions par rapport aux variables $x \in \Omega \cup \Gamma$ et $t \in [0, T]$.

Dans l'étude du problème P^1, les hypothèses suivantes sont considérées.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \ \Omega \times S^d \longrightarrow \quad S^d$ satisfait

(a) Il existe une constante $L_{\mathcal{A}} > 0$ tel que
$\mid \mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2) \mid \leq \ L_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \quad$ p.p $x \in \Omega$.
(b) Il existe $m_{\mathcal{A}} > 0$ telque
$(\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2), (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \quad$ p.p $x \in \Omega$.
(c) $x \longrightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon)$ est Lebesgue mesurable sur Ω
(d) L'application $x \longrightarrow \mathcal{A}(x, 0)$ appartient à $\mathcal{H}$.

(**3**.1.9)

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F} : \ \Omega \times S^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \quad S^d$ satisfait

(a) Il existe une constante $L_{\mathcal{F}} \succ 0$ tel que
$\mid \mathcal{F}(x, \varepsilon_1, \beta_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2, \beta_2) \mid \leq \ L_{\mathcal{F}} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + \ |\beta_1 - \beta_2|)$
$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d$, $\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \quad$ p.p $x \in \Omega$.
(b) $x \longrightarrow \mathcal{F}(x, \varepsilon, \beta)$ est Lebesgue mesurable sur Ω. $\forall \varepsilon \in S^d$ et $\forall \beta \in \mathbb{R}$.
(c) L'application $x \longrightarrow \mathcal{F}(x, 0, 0)$ appartient à $\mathcal{H}$.

(**3**.1.10)

L'opérateur plasticité $\mathcal{G} : \ \Omega \times S^d \times S^d \longrightarrow \quad S^d$ satisfait

(a) Il existe une constante $L_{\mathcal{G}} \succ 0$ tel que
$\mid \mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2) \mid \leq \ L_{\mathcal{G}} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|)$,
$\forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d$ p.p $x \in \Omega$. (**3**.1.11)
(b) L'application $x \longrightarrow \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon)$ est mesurable sur Ω.
Pour tout $\sigma, \varepsilon \in S^d$.
(c) L'application $x \longrightarrow \mathcal{G}(x, 0, 0)$ appartientà $\mathcal{H}$.

La fonction source d'endommagement $S : \ \Omega \times S^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \quad \mathbb{R}$ satisfait

(a) Il existe une constante $L_{\mathcal{S}} \succ 0$ tel que
$\mid \mathcal{S}(x, \varepsilon_1, \beta_1) - \mathcal{S}(x, \varepsilon_2, \beta_2) \mid \leq \ L_{\mathcal{S}} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\beta_1 - \beta_2|)$
$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d$ et $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ *p.p* $x \in \Omega$. (**3**.1.12)
(b) Pour tout $\varepsilon \in S^d$ et $\beta \in \mathbb{R}$,
$x \longrightarrow \mathcal{S}(x, \varepsilon, \beta)$ est Lebesgue mesurable sur Ω.
(c) L'application $x \longrightarrow S(x, 0, 0)$ appartient à $L^2(\Omega)$.

La fonction de contact normale $p_\nu : \ \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \ \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\begin{aligned}
&(a)\,\text{Il existe une constante } L_\nu \succ 0 \text{ tel que}\\
&\mid p_\nu\left(x,r_1\right)-p_\nu\left(x,r_2\right)\ \mid\leq\ L_\nu\left|r_1-r_2\right|\quad\forall r_1,r_2\in S^d \text{ p.p.}x\in\Omega.\\
&(b)\quad\text{Pour tout } \varepsilon\in S^d \text{ et } \beta\in\mathbb{R},\\
&\ \ x\longrightarrow p_\nu\left(x,r\right)\ \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r\in\mathbb{R}.\\
&(c)\ \ p_\nu\left(x,r\right)=0 \text{ pour tout } r\leq 0 \text{ p.p.}x\in\Gamma_3.
\end{aligned} \tag{\textbf{3}.1.13}$$

nous supposons que les forces volumiques $\mathbf{f}_0$ et les tractions surfaciques $\mathbf{f}_2$ ont la régularité

$$\mathbf{f}_0 \in C\left(0,T;H\right) \quad , \quad \mathbf{f}_2 \in C\left(0,T;L^2\left(\Gamma_2\right)^d\right) \tag{\textbf{3}.1.14}$$

Le champ de déplacement initial satisfat

$$\mathbf{u}_0 \in V \tag{\textbf{3}.1.15}$$

Le champ d'endommagement initial satisfait

$$\beta_0 \in Y \tag{\textbf{3}.1.16}$$

On définit la forme bilinéaire $a : \ H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$a(\xi,\varphi) = k\int_\Omega \nabla\xi \ \cdot \ \nabla\varphi \mathrm{d}x. \tag{\textbf{3}.1.17}$$

On considère la fonction $\mathbf{f} : \ [0,T] \to V$ définie par

$$(\mathbf{f}(t),\mathbf{v})_V = \int_\Omega \mathbf{f}_0(t).\mathbf{v}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t).\mathbf{v}\mathrm{d}a, \tag{\textbf{3}.1.18}$$

Notons que l'hypothèse (**3**.1.14) implique que l'intégral (**3**.1.18) est bien défini,ainsi que

$$\mathbf{f} \in C(0,T;V). \tag{\textbf{3}.1.19}$$

Ensuite, nous définissons la fonction $j : \ V \times V \to \mathbb{R}$ par

$$j(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(\mathbf{u}_\nu)\mathbf{v}_\nu \mathrm{d}a, \tag{\textbf{3}.1.20}$$

3.2 Formulation variationnelle

En utilisant des arguments standards basés sur la formule de Green, on obtient

$$(\operatorname{Div}\sigma, \mathbf{v})_H + (\,\sigma\,(t)\,, \varepsilon\,(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = \int_{\Gamma_3} \sigma\nu.\mathbf{v}\mathrm{d}a,$$

Ensuite, nous décomposons l'intégrale de bord sur Γ_1,Γ_2 et $\sigma_\nu \mathbf{v}_\nu$ et, puisque $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ a.e. sur Γ_1, $\sigma\nu = f_2$ sur Γ_2, et

$$\sigma\nu.\mathbf{v} = \sigma_\nu \mathbf{v}_\nu + \sigma_\tau.\mathbf{v}_\tau \quad \text{on } \Gamma_3$$

on en déduit que

$$\int_\Omega \sigma.\varepsilon(\mathbf{v})\mathrm{d}x = \int_\Omega f_0.\mathbf{v}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} f_2.\mathbf{v}\mathrm{d}a + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu \mathbf{v}_\nu \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau.\mathbf{v}_\tau, \tag{\textbf{3}.2.1}$$

Nous utilisons maintenant (**3**.2.1), (**3**.1.6) et (**3**.1.18) obtenir

$$(\,\sigma\,(t)\,, \varepsilon\,(\mathbf{v})) = (f, \mathbf{v})_V - \int_{\Gamma_3} p_\nu(\mathbf{u}_\nu)\mathbf{v}_\nu \mathrm{d}a, \tag{\textbf{3}.2.2}$$

On compensation (**3**.1.20) dans (**3**.2.2), on obtient

$$(\,\sigma\,(t)\,, \varepsilon\,(\mathbf{v})) + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (f, \mathbf{v})_V\,, \tag{\textbf{3}.2.3}$$

D'autre part

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\varphi_Y(\beta) \ni S(\varepsilon(\mathbf{u}),\beta) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T)\,;$$

il existe donc $h \in \partial\varphi_Y(\beta)$ tel que

$$\dot{\beta} - k \bigtriangleup \beta + h = S(\varepsilon(\mathbf{u}),\beta),$$

sachant que l'élément h satisfait

$$(h, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \leq \partial\varphi_Y(\xi) - \partial\varphi_Y(\beta) \text{ pour tout } \xi \in Y$$

donc

$$(h, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \leq 0 \text{ pour tout } \xi \in Y$$

Alors pour tout $\xi \in Y$ on a

$$\begin{aligned}
&(\dot{\beta} - k\Delta\beta + h, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} = (S(\varepsilon(\mathbf{u}),\beta), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)},\\
\Leftrightarrow\; &(\dot{\beta} - k\Delta\beta, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + (h, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} = (S(\varepsilon(\mathbf{u}),\beta), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

il vient que

$$(\dot{\beta} - k\Delta\beta, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \geq (S(\varepsilon(\mathbf{u}),\beta), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)}, \text{ pour tout } \xi \in Y$$

Mais

$$(\dot{\beta} - k\Delta\beta, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} = (\dot{\beta}, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} - k(\Delta\beta, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)}, \text{ pour tout } \xi \in Y$$

où

$$(\Delta\beta\,(t)\,, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \Delta\beta\,(t)\,(\xi - \beta(t))dx,$$

On intègre par partie $\int_\Omega \Delta\beta\,(t)\,(\xi - \beta(t))dx$ on obtient

$$(\Delta\beta\,(t)\,, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} = \int_\Gamma \frac{\partial\beta}{\partial x}(\xi - \beta(t))dx - \int_\Omega \nabla\beta\,(t)\,\nabla(\xi - \beta(t))dx,$$

mais d'après la condition de Neumann (**3**.1.7) $\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{\partial\beta}{\partial\nu}\frac{\partial\nu}{\partial x} = 0$ et la notation (**3**.1.17), implique que

$$(\dot{\beta}\,(t) - k\Delta\beta, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} = (\dot{\beta}\,(t)\,, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} - a(\beta\,(t)\,, \xi - \beta(t)),$$

Finalement

$$\begin{aligned}(\dot{\beta}\,(t)\,, \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} - a(\beta\,(t)\,, \xi - \beta(t)) \;&\geq\; (S(\varepsilon(\mathbf{u}),\beta), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)}, \\ \text{pour tout } \;\xi \;&\in\; Y, \text{ for all } \xi \in Y \end{aligned} \qquad (\mathbf{3}.2.4)$$

A partir de (**3**.2.1), (**3**.2.8), (**3**.2.3) et (**3**.2.4), on obtient la formulation variationnelle du problème mécanique P^1.

Problème PV^1 Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}: [0,T] \to V$, le champ du tenseur des contraintes $\sigma: [0,T] \to \mathcal{H}$, et lechamp d'endommagement $\beta: [0,T] \to H^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned}
&\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t), \beta(t)) \\
&\qquad + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)))\mathrm{d}s \\
&\qquad \text{dans } \ \Omega \times (0,T) \\
&(\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V \\
&\qquad \text{pour tout } \mathbf{v} \in V, \text{p.p.} t \in (0,T) && (\mathbf{3}.2.5) \\
&\beta(t) \in Y, \quad (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\
&\quad \geq \quad (S(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \\
&\text{pour tout } \xi \in Y, \ \text{p.p. } t \in (0,T) && (\mathbf{3}.2.6) \\
&\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \beta(0) = \beta_0. && (\mathbf{3}.2.7)
\end{aligned}$$

3.3 Existence et unicité de la solution

Dans l'étude du problème PV^1 nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.3.1 On suppose que les hypothèse (**3**.1.9)-(**3**.1.16) sont satisfaites. Alors il existe une solution uniquef $\{\mathbf{u}, \sigma, \beta\}$ du problème PV^1, ayant la régularité suivante:

$$\mathbf{u} \in C^1(0,T;V), \tag{3.3.1}$$

$$\beta \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{3.3.2}$$

Le triplet (u, σ, β) vérifiant (**3**.1.1) et (**3**.2.5)–(**3**.2.7) est appelé solution faible du problème de compliance normale P^1 Où vérifie

$$\sigma \in C([0,T]; \mathcal{H}_1), \tag{3.3.3}$$

En effet, il résulte de (**3**.2.5) que $\operatorname{Div} \sigma + \mathbf{f}_0 = 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et, par conséquent, le régularité (**3**.3.1) de $\mathbf{u}$, combinée avec (**3**.1.9)-(**3**.1.15), et la régularité de $\mathbf{f}_2$ dans (**3**.1.14), implique (**3**.3.3).

La démonstration du théorème **3.3.1** s'effectue en plusieurs phases. Elle repose sur les résultats des équations non linéaires dépendant du temps, le théorème du point fixe et les résultats d'existence et d'unicité des équations paraboliques (voir [52]). Nous supposons par la suite que (**3**.1.9) sont satisfaits.

Soit $\eta \in C(0,T;V)$ donnée. Dans premiére étape on construit le problème suivant

Problème PV_η^1.Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta : [0,T] \longrightarrow V$ tel que

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\eta(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p.} t \in (0,T), \tag{3.3.4}$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0, \tag{3.3.5}$$

Nous avons le résultat suivant pour le problème.

Lemme 3.3.1 Il existe une unique solution du probléme PV_η^1, et qui satisfait la régularité (**3**.3.1).

Démonstration. On définit l'opérateur $A:\ V \to V'$ par

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \text{ pout tout } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \tag{3.3.6}$$

il résulte de (**3**.3.6) et (**3**.1.9)(a) que

$$|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}|_V \leq L_A |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V, \quad \text{pout tout } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \tag{3.3.7}$$

ce qui montre que $A : V \to V$ est Lipschitz continu,et ainsi de semicontinuous. Maintenant, par (**3**.3.6) et (**3**.1.9) (b), nous trouvons

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_A |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_V^2, \quad \text{pout tout } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{3.3.8}$$

Alors $A : V \to V$ est un opérateur fortement monotone sur V. Par conséquent, A est inversible et son inverse A^{-1} est également fortement monotone et Lipschitz sur V. De plus, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, on peut définir un élément $f_\eta \in C(0,T;V)$ par

$$(f_\eta(t), \mathbf{v}) = (f(t), \mathbf{v})_V - (\eta(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}.$$

Il en résulte maintenant de résultat classique (voir [7]), qu'il existe une fonction unique $\mathbf{v}_\eta \in C(0,T;V)$ qui satisfait :

$$A\mathbf{v}_\eta(t) = f_\eta(t) \quad \text{p.p. } t \in (0,T). \tag{3.3.9}$$

Soit $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \to V$ défini par

$$\mathbf{u}_\eta(t) = \int_0^t \mathbf{v}_\eta(s)ds + \mathbf{u}_0 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.3.10}$$

Il résulte de (**3**.3.6) et (**3**.3.9)-(**3**.3.10) que $\mathbf{u}_\eta$ est une solution de le problème variationnelle PV_η^1 et il a la régularité exprimé dans (**3**.3.1). Ceci conclut la preuve de la partie de l'existence du lemme **3.3.1** L'unicité de la solution découle de l'unicité de la solution du problème (**3**.3.9).

À la deuxième étape, soit $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. On considère alors pour le champ d'endommagement le problème variationnel suivant :

Problème PV_θ^1 Trouver $\beta_\theta(t) \in Y$ tel que

$$\begin{aligned}&(\dot{\beta}_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))\\ &\quad \geq \ (\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

pour tout $\xi \in K$ p.p. $t \in (0, T)$, et

$$\beta_\theta(0) = \beta_0. \tag{3.3.12}$$

Lemme 3.3.2. Il existe une solution unique β_θ du problème PV_θ^1 qui satisfait (**3**.3.2). De plus, si β_i est la solution du problème PV_θ^1 correspondant à $\theta = \theta_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ pour $i = 1, 2$ alors

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}s. \tag{3.3.13}$$

Démonstration. L'application d'inclusion de $(H^1(\Omega), |\ .|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), |\ .|_{L^2(\Omega)})$ est continue et son image est dense. En notant $(H^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H^1(\Omega)$ et en identifiant le dual de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons exprimer le triplet de Gelfand suivant :

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \left(H^1(\Omega)\right)'.$$

Nous employons la notation $(.,.)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour indiquer le produit de dualité entre $H^1(\Omega)$ et $(H^1(\Omega))'$. Ainsi, nous avons :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in L^2(\Omega), \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega).$$

Il est connu que l'ensemble des endommagements admissibles Y est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans $H^1(\Omega)$. Par conséquent, le champ d'endommagement initial $\beta_0 \in Y$, comme mentionné dans (**3**.3.12). En utilisant maintenant la définition (**3**.1.17) de la forme bilinéaire $a(.,.)$, pour tout $\xi, \varphi \in H^1(\Omega)$, on a :

$$a(\xi, \varphi) = a(\varphi, \xi),$$

et

$$a(\xi, \varphi) \leq k|\nabla\xi|_H|\nabla\varphi|_H \leq c|\xi|_{H^1(\Omega)}|\varphi|_{H^1(\Omega)},$$

donc, a est continue et symétrique. Ainsi, pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, nous avons

$$a(\varphi, \varphi) = k|\nabla\varphi|_H^2, \text{ alors } a(\varphi, \varphi) + (k+1)|\varphi|_{L^2(\Omega)}^2 \geq k\left(|\nabla\varphi|_H^2 + |\varphi|_{L^2(\Omega)}^2\right),$$

et d'où

$$a(\varphi, \varphi) + c_0|\varphi|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_1|\varphi|_{H^1(\Omega)}^2 \text{ avec } c_0 = k+1 \text{ et } c_1 = k$$

Nous constatons que toutes les conditions du *théorème* **2.28** dans la référence [52] sont satisfaites. Alors

$$\beta_\theta \in W^{1,2}\left(0, T; L^2(\Gamma_2)\right) \cap L^2(0, T; Y).$$

D'autre part, il résulte maintenant de (**3**.3.11) que

$$\begin{aligned}
&(\dot{\beta}_1(t) - \dot{\beta}_2(t), \beta_1(t) - \beta_2(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta_1(t) - \beta_2(t), \beta_1(t) - \beta_2(t)) \\
&\leq \ (\theta_1(t) - \theta_2(t), \beta_1(t) - \beta_2(t))_{L^2(\Omega)}, \qquad \text{p.p } s \in (0, T).
\end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité sur $[0, t]$ avec les conditions initiales $\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta_0$, en utilisant l'inégalité $a(\beta_1(s) - \beta_2(s), \beta_1(s) - \beta_2(s)) \geq 0$, on obtient

$$\frac{1}{2}\ |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)} |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Omega)}\, ds,$$

Utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, nous obtenons

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2,$$

En appliquant maintenant le lemme de Gronwall à l'inégalité précédente, nous déduisons (**3**.3.13), ce qui achève la démonstration du *lemme* **3.3.2**.

Dans la troisième étape on utilise le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta$ trouvé dans le lemme **3.3.1** et ainsi l'endommagement β_θ obtenu dans le lemme **3.3.2** et avant d'établir le problème de Cauchy pour le champ des contraintes.

Problème $PV^1_{\eta\theta}$: Trouver le champ de contrainte $\sigma_{\eta\theta} : [0,T] \to \mathcal{H}$ tel que

$$\sigma_{\eta\theta}(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t), \beta_\theta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta\theta}(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)))\mathrm{d}s \qquad (\mathbf{3}.3.14)$$

On a le réultat suivant..

Lemme 3.3.3 Il existe une solution unique du problème $PV^1_{\eta\theta}$ qui satisfait $\sigma_{\eta\theta} \in C(0,T;\mathcal{H})$. En outre, σ_i,$\mathbf{u}_i$ et β_i représentent les solutions de problèmes $PV_{\eta_i\theta_i}$, PV_{η_i} et PV_{θ_i}, respectivement, pour tout $(\eta_i, \theta_i) \in C(0,T;V \times L^2(\Omega))$, $i = 1, 2$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|^2_{\mathcal{H}} \leq C \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|^2_V + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|^2_V ds \right) \quad (\mathbf{3}.3.15)$$

Démonstration. Ici et par tout dans la suite C désigne une constante positive qui change d'une place à l'autre. Nous considérons l'opérateur $\Psi_{\eta\theta} : C(0,T;\mathcal{H}) \to C(0,T;\mathcal{H})$ défini par

$$\Psi_{\eta\theta}\sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t), \beta_\theta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)))\mathrm{d}s \qquad (\mathbf{3}.3.16)$$

pour tout $\sigma \in C(0,T;\mathcal{H})$ et $t \in [0,T]$. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in C(0,T;\mathcal{H})$ on a

$$\Psi_{\eta\theta}\sigma_1(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t), \beta_\theta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_1(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)))\mathrm{d}s$$

$$\Psi_{\eta\theta}\sigma_2(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t), \beta_\theta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_2(s), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)))\mathrm{d}s$$

En utilisant l'hypothèse ($\mathbf{3}$.1.11) sur l'opérateur $\mathcal{G}$ on obtient pour tout $t \in [0,T]$

$$|\Psi_{\eta\theta}\sigma_1(t) - \Psi_{\eta\theta}\sigma_2(t)|^2_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|^2_{\mathcal{H}}\mathrm{d}s$$

De cette inégalité, il découle que, pour m suffisamment grand, $\Psi^m_{\eta\theta}$ est un opérateur contractant dans l'espace de Banach $C(0,T;\mathcal{H})$. Donc, il existe un unique $\sigma_{\eta\theta} \in C(0,T;\mathcal{H})$ tel que $\Psi_{\eta\theta}\sigma_{\eta\theta} = \sigma_{\eta\theta}$. De plus, $\sigma_{\eta\theta}$ est l'unique solution du problème $PV^1_{\eta\theta}$.

En utilisant ($\mathbf{3}$.3.14), la régularité de $\mathbf{u}_\eta$, la régularité de β_θ et les propriétés des opérateurs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, nous pouvons voir que $\sigma_{\eta\theta} \in C(0,T;\mathcal{H})$. Considérons maintenant $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in$

$C(0,T;V\times L^2(\Omega))$. Pour $i=1,2$, on note $u_{\eta_i}=u_i, \sigma_{\eta_i\theta_i}=\sigma_i$ et $\beta_{\theta_i}=\beta_i$. Nous avons

$$\sigma_i(t)=\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_i(t),\beta_i(t))+\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_i(s),\varepsilon(\mathbf{u}_i(s)))\mathrm{d}s$$

et en utilisant les propriétés (**3**.1.10) et (**3**.1.11) de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, nous trouvons

$$\begin{aligned}|\sigma_1(t)-\sigma_2(t)|^2_{\mathcal{H}} \leq\ & C\Big(|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)|^2_V+|\beta_1(t)-\beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+\int_0^t|\sigma_1(s)-\sigma_2(s)|^2_{\mathcal{H}}ds+\int_0^t|\mathbf{u}_1(s)-\mathbf{u}_2(s)|^2_V ds\Big).\end{aligned}\qquad(\mathbf{3}.3.17)$$

À partir de cette inégalité et de l'inégalité de Gronwall, nous en déduisons l'estimation (**3**.3.15), ce qui achève la démonstration du *lemme* **3.3.3**.

En conclusion, en raison des résultats précédents et de l'utilisation des propriétés des opérateurs

$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, S et j pour $t\in[0,T]$, nous examinons l'opérateur

$$\Lambda(\eta,\theta)(t)=\left(\Lambda^1(\eta,\theta)(t),\Lambda^2(\eta,\theta)(t)\right)\in V\times L^2(\Omega)\qquad(\mathbf{3}.3.18)$$

défini par

$$\Lambda^1(\eta,\theta)(t)=\left(\mathcal{F}(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)),\beta_\theta(t))+\int_0^t\mathcal{G}(\sigma_{\eta,\theta}(s),\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)))\mathrm{d}s,(\varepsilon(\mathbf{v})\right)+j(\mathbf{u}_\eta,\mathbf{v})\quad\forall\mathbf{v}\in V\qquad(\mathbf{3}.3.19)$$

$$\Lambda^2(\eta,\theta)(t)=S(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)),\beta_\theta(t))\qquad(\mathbf{3}.3.20)$$

Ici, pour chaque $(\eta,\theta)\in C(0,T;V\times L^2(\Omega))$, u_η,β_θ et $\sigma_{\eta\theta}$ désignent respectivement le champ des déplacements, le champ d'endommagement et le champ des contraintes obtenus dans les *lemmes* **3.3.1**, **3.3.2** et **3.3.3.** Voici le résultat obtenu :

Lemme 3.3.4 L'opérateur Λ admet un point fixe unique $(\eta^*,\theta^*)\in C(0,T;V\times L^2(\Omega))$.

Démonstration. Soient $(\eta_1,\theta_1),(\eta_2,\theta_2)\in C(0,T;V\times L^2(\Omega))$. Nous écrivons pour $i=1,2$. $\mathbf{u}_{\eta_i}=\mathbf{u}_i,\sigma_{\eta_i\theta_i}=\sigma_i,\beta_{\theta_i}=\beta_i$ .En utilisant (**3**.1.10) et (**3**.1.11), on obtient

$$\begin{aligned}|\Lambda^1(\eta_1,\theta_1)-\Lambda^1(\eta_2,\theta_2)|^2_V \leq\ & C\Big(|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)|^2_V+|\beta_1(t)-\beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+\int_0^t|\sigma_1(s)-\sigma_2(s)|^2_{\mathcal{H}}ds+\int_0^t|\mathbf{u}_1(s)-\mathbf{u}_2(s)|^2_V ds\Big)\end{aligned}$$

De (**3**.3.15) on trouve

$$\begin{aligned} |\Lambda^1(\eta_1,\theta_1)-\Lambda^1(\eta_2,\theta_2)|_V^2 &\leq C\Big(|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)|_V^2+|\beta_1(t)-\beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad +\int_0^t|u_1(s)-u_2(s)|_V^2ds\Big) \end{aligned}$$

Par des arguments similaires et de (**3**.3.20) et (**3**.1.12) on déduit que

$$|\Lambda^2(\eta_1,\theta_1)-\Lambda^2(\eta_2,\theta_2)|_{L^2(\Omega)}^2\leq C\Big(|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)|_V^2+|\beta_1(t)-\beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2\Big)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |\Lambda(\eta_1,\theta_1)-\Lambda(\eta_2,\theta_2)|_{V\times L^2(\Omega)}^2 &\leq C\Big(|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)|_V^2+|\beta_1(t)-\beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad +\int_0^t|u_1(s)-u_2(s)|_V^2ds\Big) \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

De plus, de (**3**.3.4) on obtient

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}_1)-\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{v}_2),\varepsilon(\mathbf{v}_1)-\varepsilon(\mathbf{v}_2))_{\mathcal{H}}+(\eta_1-\eta_2,\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)_V=0$$

Nous utilisons l'hypothèse (**3**.1.9) et la condition (**1**.4.19)-(**1**.4.20) pour trouver

$$|\mathbf{v}_1(t)-\mathbf{v}_2(t)|_V^2\leq C|\eta_1(t)-\eta_2(t)|_V^2. \tag{3.3.22}$$

De l'inégalité et estimations précédente (**3**.3.21), (**3**.3.22)et (**3**.3.13) il s'ensuit que maintenant

$$|\Lambda(\eta_1,\theta_1)-\Lambda(\eta_2,\theta_2)|_{V\times L^2(\Omega)}^2\leq Ct\int_0^t|(\eta_1,\theta_1)(s)-(\eta_2,\theta_2)(s)|_{V\times L^2(\Omega)}^2ds \tag{3.3.23}$$

Ainsi

$$|\Lambda(\eta_1,\theta_1)-\Lambda(\eta_2,\theta_2)|_{V\times L^2(\Omega)}^2\leq C|(\eta_1,\theta_1)(s)-(\eta_2,\theta_2)(s)|_{C(0,T;V\times L^2(\Omega))}^2$$

En utilisant l'inégalité (**3**.3.23) avec (η_1,θ_1) et (η_2,θ_2) remplacés par $\Lambda(\eta_1,\theta_1)$ et $\Lambda(\eta_2,\theta_2)$, respectivement, on obtient

$$\begin{aligned} |\Lambda(\eta_1,\theta_1)-\Lambda(\eta_2,\theta_2)|_{V\times L^2(\Omega)}^2 &\leq C^2\int_0^t|\Lambda(\eta_1,\theta_1)(s)-\Lambda(\eta_2,\theta_2)(s)|_{V\times L^2(\Omega)}^2ds \\ &\quad \leq C^2\int_0^t|(\eta_1,\theta_1)(s)-(\eta_2,\theta_2)(s)|_{C(0,T;V\times L^2(\Omega))}^2ds\Big) \\ &= \frac{C^2}{2!}t^2|(\eta_1,\theta_1)-(\eta_2,\theta_2)|_{C(0,T;V\times L^2(\Omega))}^2 \end{aligned}$$

En réitérant m fois linégalité précédente, on obtien

$$|\Lambda^n(\eta_1,\theta_1)(t) - \Lambda^n(\eta_2,\theta_2)(t)|^2_{V\times L^2(\Omega)} \leq \frac{C^nT^n}{n!}|(\eta_1,\theta_1) - (\eta_2,\theta_2)|^2_{C(0,T;V\times L^2(\Omega))}$$

On voit que pour n assez grand Λ^n est une contraction sur l'espace de Banach $C(0,T;V\times L^2(\Omega))$, alors admet un point fixe.

Maintenant nous avons tous les moyens pour démontrer le théorème **3.3.1**.

Démonstration du théorème 3.3.1.

Existence. Considérons $(\eta^*,\theta^*) \in C(0,T;V\times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ, défini par (**3**.3.18)-(**3**.3.20). Nous utilisons les notations suivantes

$$(a) \quad \mathbf{u}_* = \mathbf{u}_{\eta^*} \quad (b) \quad \beta_* = \beta_{\theta^*} \tag{3.3.24}$$

$$\sigma_* = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*(t)) + \sigma_{\eta^*\theta^*} \tag{3.3.25}$$

Nous montrons que $(\mathbf{u}_*,\beta_*)$ est une solution unique duroblème variationnelle PV et satisfait la régularité (**3**.3.1)-(**3**.3.2). En effet, nous écrivons (**3**.3.14) pour $\eta=\eta^*, \theta=\theta^*$ en utilisant (**3**.3.24)-(**3**.3.25) on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_*(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_*(t),\beta_*(t)) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_*(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*(s)), \varepsilon(\mathbf{u}_*(s)))\,\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

et nous considérons (**3**.3.4) avec $\eta=\eta^*$ et en utilisont (**3**.3.24)(a) pour trouver

que

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*(t)),\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\eta^*(t),\mathbf{v})_V = (f(t),,\mathbf{v})_V \forall t \in [0,T] \tag{3.3.27}$$

et nous écrivons (**3**.3.11) avec $\theta=\theta^*$ et en utilisant (**3**.3.24)(b) pour obtenir

$$\begin{aligned}\beta_* &\in Y \quad \left(\dot{\beta}_*(t),\zeta-\beta_*\right)_{L^2(\Omega)} - a(\beta_*(t),\zeta-\beta_*) \\ &\geq (\theta^*(t),\zeta-\beta_*)_{L^2(\Omega)} \quad \forall\zeta\in Y \text{ p.p. } t\in[0,T]\end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Les égalités $\Lambda^1(\eta^*,\theta^*) = \eta^*$ et $\Lambda^2(\eta^*,\theta^*) = \theta^*$ combinés avec (**3**.3.19)-(**3**.3.20),(**3**.3.24) et (**3**.3.25) montrent que

$$\begin{aligned}(\eta^*(t),\mathbf{v})_V &= (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_*(t)),\beta_*(t)),\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_*(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*(s)),\varepsilon(\mathbf{u}_*(s)))\,\mathrm{d}s + j(\mathbf{u}_*,\mathbf{v})\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

$$\theta^*(t) = S\left(\varepsilon(\mathbf{u}_*(t)), \beta_*(t)\right)\right) \tag{\textbf{3}.3.30}$$

Nous substituons maintenant (**3**.3.29) en (**3**.3.27) et utilisant (**3**.3.26) pour obtenir

$$\left(\sigma_*\left(t\right), \varepsilon(\mathbf{v})\right)_{\mathcal{H}} + j\left(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}\right) \ = \left(f\left(t\right), \mathbf{v}\right)_V \ \ \forall \mathbf{v} \in V \ \ \forall t \in [0, T] \tag{\textbf{3}.3.31}$$

Et nous en substituons (**3**.3.30) à (**3**.3.28)

$$\begin{aligned} \beta_*\left(t\right) \ &\in \ Y \ \text{ pur tout } t \in [0, T] \ \ \left(\dot{\beta}_*\left(t\right), \zeta - \beta_*\right)_{L^2(\Omega)} - a\left(\beta_*\left(t\right), \zeta - \beta_*\right) \\ &\geq \ \left(S\left(\varepsilon(\mathbf{u}_*(t)), \beta_*(t)\right)\right), \zeta - \beta_*\right)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \zeta \in Y \end{aligned} \tag{\textbf{3}.3.32}$$

Les relations (**3**.3.31) et (**3**.3.32) permettent de conclure que $(\mathbf{u}_*, \beta_*)$ satisfait (**3**.2.5)-(**3**.2.6). Ensuite, (**3**.2.7) et la régularité (**3**.3.1)-(**3**.3.2) suivent des lemmes **3.3.1** et **3.3.2** puisque $\mathbf{u}_*$ satisfait (**3**.3.1) et de (**3**.3.26) trouvons que

$$\sigma_* \in C\left(0, T; \mathcal{H}\right) \tag{\textbf{3}.3.33}$$

Nous choisissos $\mathbf{v} \in \mathcal{D}\left(\Omega\right)^d$ dans (**3**.3.31), en utilisant (**3**.1.18) pour obtenir que

$$\operatorname{Div} \sigma_*\left(t\right) = -f_0\left(t\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Où $\mathcal{D}\left(\Omega\right)^d = \{u = (u_i) \ / \ u_i \in \mathcal{D}\left(\Omega\right)\}$ et $\mathcal{D}\left(\Omega\right)$ est l'espace de fonctions réelles infiniment différentiables avec un support compact en Ω , on utilise (**3**.1.14) et (**3**.3.33) pour trouver

$$\sigma_* \in C\left(0, T; \mathcal{H}_1\right)$$

Enfin, nous déduisons que la solution faible $\{\mathbf{u}_*, \sigma_*, \beta_*\}$ du problème de contact élasto-viscoplastique (**3**.1.1)-(**3**.1.8) ayant la régularité ((**3**.3.1))-((**3**.3.2)), en ce qui termine la preuve de partie d'existence du Théorème **3.1.1**. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité de point fixe de l'opérateure Λ qui est défini par (**3**.3.18)-(**3**.1.20).

Chapitre 4

Problème dynamique d'un matériau élasto-viscoplastique avec frottement et usure

Le deuxième chapitre de la thèse se concentre sur l'étude mathématique d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux élasto-viscoplastiques soumis à des processus dynamiques incluant l'endommagement. Le contact bilatéral avec frottement implique une base rigide et mobile avec une usure des surfaces de contact. Le problème est formulé comme un système d'inégalités variationnelles paraboliques pour les déplacements et l'endommagement. Nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible en utilisant des inégalités variationnelles paraboliques de premier et deuxième types ainsi que des arguments basés sur les points fixes.

4.1 Problème mécanique et hypothèses

Nous nous situons dans le cadre physique tel qu'introduit dans le premier chapitre de cette thèse. Considérons un corps élasto-viscoplastique en contact avec une base rigide. Par conséquent, la formulation mécanique du problème de contact avec frottement et usure en élasto-viscoplasticité avec une variable interne est la suivante :

Problème P^2. Trouver $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$ et β tels que

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) \\
&\quad + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \beta(s))\, \mathrm{d}s \ \text{ dans } \ \Omega \times (0,T)\,; && (\mathbf{4}.1.1) \\
&\dot{\beta} - k \triangle \beta + \partial\varphi_Y(\beta) \ni S(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}), \beta) \ \text{ dans } \ \Omega \times (0,T)\,; && (\mathbf{4}.1.2) \\
&\mathrm{Div}\,\sigma + \mathbf{f}_0 = \rho\ddot{\mathbf{u}} \ \text{ dans } \ \Omega \times (0,T)\,; && (\mathbf{4}.1.3) \\
&\mathbf{u} = \mathbf{0} \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \times (0,T)\,; && (\mathbf{4}.1.4) \\
&\sigma\nu = \mathbf{f}_2 \ \text{ sur } \ \Gamma_2 \times (0,T)\,; && (\mathbf{4}.1.5) \\
&\begin{cases} \sigma_\nu = -\alpha\,|\dot{\mathbf{u}}_\nu|\,, \ |\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\nu \\ \sigma_\tau = -\lambda\,(\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*)\ , \quad \lambda \geq 0 \end{cases} \quad \text{sur } \ \Gamma_3 \times (0,T); && (\mathbf{4}.1.6) \\
&\frac{\partial\beta}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma \times (0,T)\,; && (\mathbf{4}.1.7) \\
&\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \beta(0) = \beta_0, \ \text{dans } \ \Omega. && (\mathbf{4}.1.8)
\end{aligned}$$

Ici, les équations (**4**.1.1) représentent la loi de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique avec endommagement, tandis que (**4**.1.2) décrit l'évolution du champ d'endommagement, régulée par la fonction source d'endommagement S, $\partial\varphi_Y$ correspond au sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles Y. L'équation (**4**.1.3) modélise le mouvement physique. Les relations (**4**.1.4)-(**4**.1.5) énoncent les conditions de déplacement-traction, tandis que (**4**.1.6) introduit les conditions de contact avec frottement et usure, comme décrites dans [42]. La condition (**4**.1.7) exprime les conditions aux limites de Neumann, où $\frac{\partial\beta}{\partial\nu}$ représente la dérivée normale de β. Enfin, (**4**.1.8) précise les conditions initiales : u_0 pour le déplacement initial, $\mathbf{v}_0$ pour la vitesse initiale et β_0 pour l'endommagement initial.

Dans l'étude du problème (**4**.1.1)-(**4**.1.8), il est également requis d'introduire certaines hypothèses supplémentaires sur les données. L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}: \ \Omega \times S^d \longrightarrow \ S^d$ est en accord avec (**3**.1.9).

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F}: \ \Omega \times S^d \longrightarrow \ \ S^d$ satisfait aux conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}(a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{F}} \succ 0 \text{ telle que pour tout } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \text{ et} \\ \text{presque partout } x \in \Omega : \mid \mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2) \mid \leq \ L_{\mathcal{F}} \ |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \, . \\ (b) \text{ La fonction } x \longrightarrow \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable selon Lebesgue sur } \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{F}(x, 0) \text{ est dans l'espace } \mathcal{H}. \end{array}\right. \tag{4.1.10}$$

L'opérateur plasticité $\mathcal{G}: \ \Omega \times S^d \times S^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \ \ S^d$ satisfait aux conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}(a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{G}} \succ 0 \text{ telle que} \\ \mid \mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \beta_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \beta_2) \mid \leq \ L_{\mathcal{G}} \left(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\beta_1 - \beta_2|\right), \\ \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \text{ et } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \ p.p \ x \in \Omega. \\ (b) \text{ La fonction } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, \alpha) \text{ est mesurable selon Lebesgue sur } \Omega. \\ \text{Pour tout } \sigma, \varepsilon \in S^d \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \ , \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \text{ appartientà } \mathcal{H}. \end{array}\right. \tag{4.1.11}$$

La fonction source d'endommagement $\mathcal{S}: \ \Omega \times S^d \times S^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \ \ \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l}(a) \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{S}} \succ 0 \text{ tel que} \\ \mid \mathcal{S}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \beta_1) - \mathcal{S}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \beta_2) \mid \leq \ L_{\phi} \left(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\beta_1 - \beta_2|\right) \\ (x) \, \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \text{ et } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \ p.p \ x \in \Omega. \\ (b) \quad \text{Pour tout } \sigma, \varepsilon \in S^d \text{ et } \beta \in \mathbb{R}, \\ \quad x \longrightarrow \mathcal{S}(x, \sigma, \varepsilon, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow S(x, 0, 0, 0) \text{ est dans l'espace } L^2(\Omega) \, . \end{array}\right. \tag{4.1.12}$$

La densité volumique satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Gamma_3) \, , \text{ il existe } \rho^* \text{telle que } \rho(x) \geq \rho^* \text{ p.p.} x \in \Omega. \tag{4.1.13}$$

Nous supposons également que les forces volumiques et surfaciques satisfont les conditions de régularité suivantes :

$$f_0 \in L^2(0, T \ ; H) \, , \ f_2 \in L^2\left(0, T \ ; L^2(\Gamma_2)^d\right). \tag{4.1.14}$$

Les fonctions α et μ vérifient les propriétés suivantes :

$$\alpha \ \in \ L^\infty(\Gamma_3) \, , \alpha(x) \geq \alpha^* > 0 \text{ p.p.sur } \Gamma_3. \tag{4.1.15}$$

$$\mu \ \in \ L^\infty(\Gamma_3) \, , \mu > 0 \quad \text{p.p.sur } \Gamma_3. \tag{4.1.16}$$

Les champs initiaux des déplacements, des vitesses et de l'endommagement satisfont :

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \mathbf{v}_0 \in V, \quad \beta_0 \in Y. \tag{4.1.17}$$

Nous définissons la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$a(\zeta, \varphi) = k \int_\Omega \nabla\zeta . \nabla\varphi dx. \tag{4.1.18}$$

Nous allons utiliser un produit scalaire modifié sur l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)^d$, défini par :

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H = (\rho\mathbf{u}, \mathbf{v})_H \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, \tag{4.1.19}$$

et soit $\|\cdot\|_H$ la norme associée, c'est-à-dire :

$$||\mathbf{v}||_H = (\rho\mathbf{u}, \mathbf{v})_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{v} \in H. \tag{4.1.20}$$

En utilisant l'hypothèse (**4**.1.13) il vient que $\|\cdot\|_H$ et $|\cdot|_H$ sont des normes équivalentes sur H. De plus l'inclusion de $(V, |\cdot|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. Nous notons par V' l'espace dual de$V$. En identifiant H avec son propre dual nous obtenonsle triplet de Gelfand $V \subset H \subset V'$. Nous utilisons la notation $(.,.)_{V' \times V}$ pour la dualité entre V' et V et rappelons que

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} = ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_H \quad \forall \mathbf{u} \in H, \ \forall \mathbf{v} \in V. \tag{4.1.21}$$

Ensuite, on note par $f : [0, T] \to V'$ la fonction définie par

$$(f(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = \int_\Omega f_0(t) . \mathbf{v} \ dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) . \mathbf{v} \ da \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \tag{4.1.22}$$

Puis, la fonction de frottement $j : V \times V \to \mathbb{R}$ est définie par

$$j \ (\mathbf{u} \ , \ \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \alpha |\mathbf{u}_\nu| (\mu |\mathbf{v}_\tau - \mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_\nu) \, da \quad , \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \ . \tag{4.1.23}$$

De (**4**.1.14), on remarque que l'intégration (**4**.1.22) est bien définie et inpliquent

$$f \in L^2(0, T; V'). \tag{4.1.24}$$

4.2 Formulation variationnelle

En suite, nous allons dériver la formulation variationnelle pour le problème P^2. De la troisième égalité dans le problème (**4**.1.1)-(**4**.1.8), on a

$$(\rho\ddot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{v})_H + (\mathrm{Div}\,\sigma(t),\mathbf{v})_H = (f_0\,(t)\,,\mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{v}\in V \tag{4.2.1}$$

L'application de la formule de Green (**1**.4.21) nous permet de réécrire (**4**.2.1) comme suit

$$(\rho\ddot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{v})_H + (\sigma(t),\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = (f_0\,(t)\,,\mathbf{v})_H + \int_\Gamma \sigma\nu.\mathbf{v}\ \mathrm{d}a\ , \tag{4.2.2}$$

où

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \sigma\nu\mathbf{v}\ \mathrm{d}a &= \int_{\Gamma_1}\sigma\nu\mathbf{v}\ \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_2}\sigma\nu\mathbf{v}\ \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_3}\sigma\nu\mathbf{v}\ \mathrm{d}a\ ,\\ &= \int_{\Gamma_2} f_2\mathbf{v}\ \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_3}(\sigma_\nu\mathbf{v}_\nu + \sigma_\tau.\mathbf{v}_\tau)\ \mathrm{d}a\end{aligned}$$

en raison de $\mathbf{v}=0$ sur Γ_1 et $\sigma\nu = f_2$ sur Γ_2. En prenant $\mathbf{v}$ comme $\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}}$ dans (**4**.2.1), à partir de la condition aux limites de Γ_3, on a

$$\begin{aligned}&-\int_{\Gamma_3}(\sigma_\nu\,(t)\,\nu+\sigma_\tau\,(t))\,(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})\ \mathrm{d}a\\ =\ &-\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu\,(t)\,(\mathbf{v}_\nu-\dot{\mathbf{u}}_\nu\,(t))\ \mathrm{d}a - \int_{\Gamma_3}\sigma_\tau\,(t)\,.\,(\mathbf{v}_\tau-\dot{\mathbf{u}}_\tau\,(t))\ \mathrm{d}a\\ =\ &\int_{\Gamma_3}\alpha\,|\dot{\mathbf{u}}_\nu|\,(\mathbf{v}_\nu-\dot{\mathbf{u}}_\nu\,(t))\ \mathrm{d}a - \int_{\Gamma_3}\sigma_\tau\,(t)\,.\,(\mathbf{v}_\tau-\mathbf{v}^*)\ \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_3}\sigma_\tau\,(t)\,.\,(\dot{\mathbf{u}}_\tau\,(t)-\mathbf{v}^*)\ \mathrm{d}a\\ \leq\ &\int_{\Gamma_3}\alpha\,|\dot{\mathbf{u}}_\nu|\,(\mathbf{v}_\nu-\dot{\mathbf{u}}_\nu\,(t))\ \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_3}|\sigma_\tau\,(t)|\,(|\mathbf{v}_\tau-\mathbf{v}^*|)\ \mathrm{d}a - \int_{\Gamma_3}|\sigma_\tau\,(t)|\,(|\dot{\mathbf{u}}_\tau\,(t)-\mathbf{v}^*|)\ \mathrm{d}a\\ =\ &\int_{\Gamma_3}\alpha\,|\dot{\mathbf{u}}_\nu|\,(\mathbf{v}_\nu-\dot{\mathbf{u}}_\nu\,(t))\ \mathrm{d}a + \int_{\Gamma_3}\alpha\mu\,|\dot{\mathbf{u}}_\nu|\,(|\mathbf{v}_\tau-\mathbf{v}^*| - |\dot{\mathbf{u}}_\tau\,(t)-\mathbf{v}^*|)\ \mathrm{d}a\\ =\ &\int_{\Gamma_3}\alpha\,|\dot{\mathbf{u}}_\nu|\,(\mu\,|\mathbf{v}_\tau-\mathbf{v}^*| + \mathbf{v}_\nu)\ \mathrm{d}a - \int_{\Gamma_3}\alpha\,|\dot{\mathbf{u}}_\nu|\,(\mu\,|\dot{\mathbf{u}}_\tau\,(t)-\mathbf{v}^*| + \dot{\mathbf{u}}_\nu\,(t))\ \mathrm{d}a\end{aligned}$$

D'après (**4**.1.21), (**4**.1.22) et (**4**.1.23) nous obtenons

$$\begin{aligned}&(\ddot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}}(t))_{V'\times V} + (\sigma(t),\varepsilon((\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}}(t))))_{\mathcal{H}}\\ &\qquad + j(\dot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t),\dot{\mathbf{u}}(t))\\ \geq\ &(\mathbf{f}(t),\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}}(t))_{V'\times V}\ \text{ pour tout } \mathbf{v}\in V,\ \text{p.p. } t\in(0,T)\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

De (**4**.1.1),(**4**.1.7),(**4**.1.8),(**4**.2.3), et (**3**.2.4), on obtient la formulation variationnelle du problème mécanique P^2.

Problème PV^2 Trouvrer le champ de déplacement $u : [\,0, T\,] \longrightarrow V$, le champ de contrainte $\sigma : [\,0, T\,] \longrightarrow \mathcal{H}_1$,et le champ d'endommagement $\beta : [\,0, T\,] \longrightarrow H^1(\Omega)$ tels que:

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \beta(s))\, \mathrm{d}s \ \text{ in } \Omega \times (0, T), \quad (\mathbf{4}.2.4)$$

$$\begin{aligned} &(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V} + (\sigma(t), \varepsilon((\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))))_{\mathcal{H}} + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ &\geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in V, \ \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (\mathbf{4}.2.5)$$

$$\begin{aligned} &\beta(t) \in Y, \quad (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ &\geq (S(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \text{pour tout } \xi \in Y, \ \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (\mathbf{4}.2.6)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \ \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \ \beta(0) = \beta_0. \quad (\mathbf{4}.2.7)$$

4.3 Existence et l'unicité de la solution

Notre résultat principal est le théorème **4.3.1**

Théorème 4.3.1. Nous supposons que les hypothèses (**3**.1.9) et (**4**.1.9)-(**4**.1.16) sont satisfaites, si l'hypothèse de petitesse il existe une constante α_0 qui est dépend uniquement sur $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2$ et $\mathcal{A}$ tels que

$$|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) < \alpha_0, \quad (\mathbf{4}.3.1)$$

Alors, il existe une solution unique $\{u, \sigma, \beta\}$ du problème PV_2. De plus, la solution satisfait

$$u \in W^{1,2}(0, T\,; V) \cap C^1(0, T\,; H) \cap W^{2,2}(0, T\,; V'). \quad (\mathbf{4}.3.2)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad Div\sigma \in L^2(0, T; V') \quad (\mathbf{4}.3.3)$$

$$\beta \in W^{1,2}\left(0, T\,; L^2(\Omega)\right) \cap L^2(0, T\,; Y). \quad (\mathbf{4}.3.4)$$

Sous les hypothèses (**3**.1.9) et (**4**.1.9)-(**4**.1.16), nous concluons que le problème (**4**.1.1)-(**4**.1.8) possède une solution faible unique avec la régularité spécifiée dans (**4**.3.2)-(**4**.3.4). La démonstration de ce théorème sera menée en plusieurs étapes, en s'appuyant sur des arguments d'inégalités paraboliques de premier et de second types, ainsi que sur le théorème du point fixe.

Dans un premier temps, nous considérons le problème auxiliaire suivant pour le champ de déplacement.

Problème $PV^2_{\mathbf{u}_{\eta g}}$. Étant donné $(\eta, g) \in L^2(0,T;V' \times V)$, Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}_{\eta g} : [0,T] \longrightarrow V$ tels que

$$\begin{aligned}&(\ddot{\mathbf{u}}_{\eta g}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\eta g}(t))_{V'\times V} + (\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\eta g}(t))), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\eta g}(t)))_{\mathcal{H}} + j(g(t), \mathbf{v}) \\ &-j(g(t), \dot{\mathbf{u}}_{\eta g}) \geq (f(t) - \eta(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_{\eta g}(t))_{V'\times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{p.p}, t \in [0,T] \text{ .et}\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

$$\mathbf{u}_{\eta g}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_{\eta g}(0) = \mathbf{v}_0. \tag{4.3.6}$$

Nous définissons $f_\eta(t) \in V'$ p.p. $t \in (0,T)$ par

$$(f_\eta(t), \mathbf{w})_{V'\times V} = (f(t) - \eta(t), \mathbf{w})_{V'\times V}, \quad \forall \mathbf{w} \in V. \tag{4.3.7}$$

De (**4**.1.24) on déduit que

$$f_\eta \in L^2(0,T;V'). \tag{4.3.8}$$

En utilisant le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, nous définissons l'opérateur $A : V \to V'$ par

$$(A\mathbf{v}, \mathbf{w})_{V'\times V} = (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{v})), \varepsilon(\mathbf{w}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V. \tag{4.3.9}$$

Nous prenons $\dot{\mathbf{u}}_{\eta g} = \mathbf{v}_{\eta g}$ et considérons l'inégalité variationnelle suivante

Problème $PV^2_{\mathbf{v}_{\eta g}}$. Étant donné $(\eta, g) \in L^2(0,T;V' \times V)$, Trouver le champ de vitesse $\mathbf{v}_{\eta g} : [0,T] \longrightarrow V$ tels que

$$\begin{aligned}&(\dot{\mathbf{v}}_{\eta g}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\eta g}(t))_{V'\times V} + (A\mathbf{v}_{\eta g}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\eta g}(t))_{V'\times V} + j(g(t), \mathbf{v}) - j(g(t), \mathbf{v}_{\eta g}) \\ &\geq (f(t) - \eta(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\eta g}(t))_{V'\times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{p.p}, t \in [0,T] \text{ .et}\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

$$\mathbf{v}_{\eta g}(0) = \mathbf{v}_0. \tag{4.3.11}$$

Dans l'étude du problème $PV^2_{\mathbf{v}_{\eta g}}$ nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.3.1. Il existe une solution unique du problème $PV^2_{\mathbf{v}_{\eta g}}$ satisfaisant

$$\mathbf{v}_{\eta g} \in C(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \text{ et } \dot{\mathbf{v}}_{\eta g} \in L^2(0,T;V'). \tag{4.3.12}$$

Démonstration. D'après la définition (**4**.3.9) de l'opérateur A, les hypothèses (**3**.1.9) et (**1**.4.19) nous pouvons vérier que A est fortement monotone et Lipschitz continu sur V avec $m_A = m_{\mathcal{A}}$ et $L_A = L_{\mathcal{A}}$. On note la fonction de frottement

$$j_g(\mathbf{v}) = j\ (g, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \alpha\,|g_\nu|\,(\mu\,|\mathbf{v}_\tau - \upsilon^*| + \mathbf{v}_\nu)\,da, \quad \forall \mathbf{v} \in V\ . \tag{4.3.13}$$

En utilisant les définitions (**4**.3.9) et (**4**.3.13) et l'inégalité (**4**.3.10) nous voyons que $\mathbf{v}_{\eta g}$ satisfait l'inégalité

$$\begin{aligned}&(\dot{\mathbf{v}}_{\eta g}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\eta g}(t))_{V'\times V} + (A\mathbf{v}_{\eta g}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\eta g}(t))_{V'\times V} + j_g(\mathbf{v}) - j_g(\mathbf{v}_{\eta g}(t))\\ &\geq (f(t) - \eta(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\eta g}(t))_{V'\times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \text{ et}\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

$$\mathbf{v}_{\eta g}(0) = \mathbf{v}_0. \tag{4.3.15}$$

En utilisant le *théorème* **2.3.1**, nous avons L'opérateur $A : V \longrightarrow V'$ est fortement monotone et de Lipschitz, alors nous pouvons vérifier que A satisfait les conditions (**2**.3.1)(a)-(c), et en appliquant le *théorème* de Lebesgue on déduit la condition (**2**.3.1)(d).

La fonctionnelle j_g est continue et convexe, en utilisant l'injection continue de V dans $L^2(\Gamma_3)^d$, et

$$\forall \lambda \in [0,1] : |\lambda \mathbf{v}_1 + (1-\lambda)\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}^*| \leq \lambda |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}^*| + (1-\lambda)|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}^*|.$$

Pour approximer la fonctionnelle j_g, nous utilisons la suite des fonctonnelles $j_{gn} : V \to \mathbb{R}$ définie par

$$j_{gn}(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \alpha\,|g_\nu| \left(\mu \sqrt{|\mathbf{v}_\tau - \upsilon^*|^2 + e^{-n}} + \mathbf{v}_\nu\right) da \quad , \quad \forall \mathbf{v} \in V,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ .$$

Nous vérifions que la dérivée au sens de Fréchet de j_{gn} est donnée par

$$.\left(j'_{gn}(\mathbf{v}), h\right) = \int_{\Gamma_3} \alpha\,|g_\nu| \left(\mu \frac{(\mathbf{v}_\tau - \upsilon^*, h_\tau)}{\sqrt{|\mathbf{v}_\tau - \upsilon^*|^2 + e^{-n}}} + h_\nu\right) da \quad , \quad \forall h \in V. \tag{4.3.16}$$

Nous constatons que j_{gn} est continûment différentiable (de classe C^1). Des calculs algébriques directs montrent que pour tout $a \geq 0, b \geq 0$ tel que $a + b = 1$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$.\sqrt{(ax + by)^2 + e^{-n}} \leq a\sqrt{x^2 + e^{-n}} + b\sqrt{y^2 + e^{-n}}. \tag{4.3.17}$$

Alors j_{gn} est convexe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant (**4**.3.16) il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
\left|\left(j'_{gn}\left(\mathbf{v}\right),h\right)_{V'\times V}\right| &= \left|\int_{\Gamma_3}\alpha\left|g_\nu\right|\left(\mu\frac{\left(\mathbf{v}_\tau-\upsilon^*,h_\tau\right)}{\sqrt{\left|\mathbf{v}_\tau-\upsilon^*\right|^2+e^{-n}}}+h_\nu\right)\right|da \quad , \quad \forall h\in V.\\
&\leq \int_{\Gamma_3}\alpha\left|g_\nu\right|\left(\mu\frac{\left|\left(\mathbf{v}_\tau-\upsilon^*,h_\tau\right)\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{v}_\tau-\upsilon^*\right|^2+e^{-n}}}+\left|h_\nu\right|\right)da\\
&\leq \left|\alpha\right|_{L^\infty(\Gamma_3)}\left|\mu\right|_{L^\infty(\Gamma_3)}\int_{\Gamma_3}\left|g_\nu\right|\frac{\left|\mathbf{v}_\tau-\upsilon^*\right|\left|h_\tau\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{v}_\tau-\upsilon^*\right|^2+e^{-n}}}da+\left|\alpha\right|_{L^\infty(\Gamma_3)}\int_{\Gamma_3}\left|g_\nu\right|\left|h_\nu\right|da
\end{aligned}
$$

En utilisant maintenant l'inégalité

$$\frac{\left|\mathbf{v}_\tau-\upsilon^*\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{v}_\tau-\upsilon^*\right|^2+e^{-n}}}\leq 1\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Conduit à

$$
\begin{aligned}
\left|\left(j'_{gn}\left(\mathbf{v}\right),h\right)_{V'\times V}\right| &\leq \left|\alpha\right|_{L^\infty(\Gamma_3)}\left|\mu\right|_{L^\infty(\Gamma_3)}\int_{\Gamma_3}\left|g_\nu\right|\left|h_\tau\right|da+\left|\alpha\right|_{L^\infty(\Gamma_3)}\int_{\Gamma_3}\left|g_\nu\right|\left|h_\nu\right|da\\
&\leq \left|\alpha\right|_{L^\infty(\Gamma_3)}\left(\left|\mu\right|_{L^\infty(\Gamma_3)}+1\right)\left|g\right|_{L^2(\Gamma_3)^d}\left|h\right|_{L^2(\Gamma_3)}\\
&\leq C_0\alpha_0\left|g\right|_{L^2(\Gamma_3)^d}\left|h\right|_V
\end{aligned}
$$

Alors

$$\exists C>0,\ \forall\mathbf{v}\in V,\ |j'_{gn}(\mathbf{v})|_{V'}\leq C|g|_{L^2(\Gamma_3)^d},$$

alors (**2**.3.3)(a) est satisfait. D'après la définition de j_n on a

$$\lim_{n\to+\infty} j_{gn}(\mathbf{v})=j_g(\mathbf{v})$$

et comme j_{gn} est continue sur V, en appliquant le théorème de Lebesgue, on déduit la propriété (**2**.3.3)(b). Finalement (**2**.3.3)(c) est une conséquence du fait que

$$j_{gn}(\mathbf{v})\geq j_g(\mathbf{v})$$

Nous concluons que j_g et (j_{gn}) satisfont les hypothèses (**2**.3.2) et (**2**.3.3). Rappelons enfin que $f_\eta \in L^2(0,T;V')$ et $\mathbf{v}_0\in V$ (voir (**4**.1.17) et (**4**.1.24). Du *théorème* **2.3.1**, nous concluons que le problème $PV_{\mathbf{v}_{\eta g}}$ admet une solution unique $\mathbf{v}_{\eta g}\in C(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)\cap W^{1,2}(0,T;V')$.

Soit $(\eta, g) \in L^2(0,T;V' \times V)$ donné. On considère l'opérateur $\Psi_\eta : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V)$ défini par

$$\Psi_\eta g(t) = \mathbf{v}_{\eta g}(t) \qquad \text{pour tout } g \in L^2(0,T;V). \tag{4.3.18}$$

Lemme 4.3.2. L'opérateur Ψ_η a un point fixe unique $g_\eta \in L^2(0,T;V)$.

Démonstration. Soient $g_1, g_2 \in L^2(0,T;V)$, on dénote $\mathbf{v}_{\eta g_i} = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2$. De (**4**.3.18) nous avons

$$|\Psi_\eta \mathbf{g}_1(t) - \Psi_\eta \mathbf{g}_2(t)|_V^2 \le |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2. \tag{4.3.19}$$

De plus, de (**4**.3.13)-(**4**.3.14), on obtient que

$$\begin{aligned}(\dot{\mathbf{v}}_1 - \dot{\mathbf{v}}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V'\times V} + (A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V'\times V}\\ \le \; j(g_1, \mathbf{v}_2) - j(g_1, \mathbf{v}_1) + j(g_2, \mathbf{v}_1) - j(g_2, \mathbf{v}_2),\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

D'autre part pour tout $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$,

$$\begin{aligned} j(g, \mathbf{v}_1) - j(g, \mathbf{v}_2) &= \int_{\Gamma_3} \alpha\,|g_\nu|\,(\mu\,|\mathbf{v}_{1,\tau} - \upsilon^*| + \mathbf{v}_{1,\nu})\,da - \int_{\Gamma_3} \alpha\,|g_\nu|\,(\mu\,|\mathbf{v}_{2,\tau} - \upsilon^*| + \mathbf{v}_{2,\nu})\,da \\ &= \int_{\Gamma_3} \alpha\,|g_\nu|\,(\mu\,|\mathbf{v}_{1,\tau} - \upsilon^*| - \mu\,|\mathbf{v}_{2,\tau} - \upsilon^*| + \mathbf{v}_{1,\nu} - \mathbf{v}_{2,\nu})\,da \\ &\le \int_{\Gamma_3} \alpha\,|g_\nu|\,(\mu\,|\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}_{2,\tau}| + |\mathbf{v}_{1,\nu} - \mathbf{v}_{2,\nu}|)\,da \\ &\le |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)}\,|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)}\,|g_\nu|_{L^2(\Gamma_3)}\,|\mathbf{v}_{1,\tau} - \mathbf{v}_{2,\tau}|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\quad + |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)}\,|g_\nu|_{L^2(\Gamma_3)}\,|\mathbf{v}_{1,\nu} - \mathbf{v}_{2,\nu}|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\le |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)}\,|g_\nu|_{L^2(\Gamma_3)}\left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1\right)|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_{L^2(\Gamma_3)} \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

En utilisant (**1**.4.20) l'inégalité (**4**.3.21) peut être transformée comme suit

$$j(g, \mathbf{v}_1) - j(g, \mathbf{v}_2) \le C_0^2\,|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)}\left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1\right)|g|_V\,|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V$$

De même, nous avons

$$j(g_1, \mathbf{v}_2) - j(g_1, \mathbf{v}_1) + j(g_2, \mathbf{v}_1) - j(g_2, \mathbf{v}_2) \le C_0^2\,|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)}\left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1\right)|g_1 - g_2|_V\,|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V \tag{4.3.22}$$

En branchant (**4**.3.22) dans (**4**.3.20), on obtient

$$\begin{aligned}(\dot{\mathbf{v}}_1 - \dot{\mathbf{v}}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V'\times V} + (A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V'\times V}\\ \le C_0^2\,|\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)}\left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1\right)|g_1 - g_2|_V\,|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V\,, \text{ p.p. } t \in (0,T)\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

En intégrant (**4**.3.23) sur $(0,t)$, compte tenu que $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_0$ et utilisant (**3**.1.9) nous déduisons que

$$\begin{aligned} & m_{\mathcal{A}} \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 \, ds \\ & \leq C_0^2 \, |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V \, |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V \, ds \quad p.p.t \in (0,T) \end{aligned}$$

En utilisant Inégalité de Hölder, on obtient que

$$\begin{aligned} & \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 \, ds \\ & \leq \frac{C_0^2 |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right)}{m_{\mathcal{A}}} \left(\int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{p.p. } t \in (0,T) \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} & \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 \, ds \\ & \leq \left(\frac{C_0^2 |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right)}{m_{\mathcal{A}}} \right)^2 \int_0^t |g_1(s) - g_2(s)|_V^2 \, ds \quad \text{p.p. } t \in (0,T) \end{aligned}$$

Alors

$$|\Psi_\eta g_1(t) - \Psi_\eta g_2(t)|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq \left(\frac{C_0^2 \, |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right)}{m_{\mathcal{A}}} \right)^2 |g_1(s) - g_2(s)|_{L^2(0,T;V)}^2 \, .\text{p.p.}t \in (0,T)$$

nous choisissons $\alpha_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{C_0^2}$ dans (**4**.3.1), l'opérateur Ψ_η est une contraction dans l'espace de Banach $L^2(0,T;V)$, et il résulte du théorème du point fixe de Banach que l'opérateur Ψ_η a un point fixe unique $g_\eta \in L^2(0,T;V)$.

Dans la suite soit g_η le point fixe obtenu dans le *lemme* **4.3.2**. Soit $\mathbf{v}_\eta \in L^2(0,T;V')$ une fonction définie par

$$\mathbf{v}_\eta = \mathbf{v}_{\eta g_\eta}. \tag{4.3.24}$$

Nous avons $\Psi_\eta g_\eta = \mathbf{v}_{\eta g_\eta}$ et

$$\mathbf{v}_\eta = g_\eta. \tag{4.3.25}$$

Nous prenons $g = g_\eta$ dans (**4**.3.14) et nous utilisons (**4**.3.15) et (**4**.3.25), pour voir que $\mathbf{v}_\eta$ satisfait

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{v}}_\eta(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_\eta(t))_{V' \times V} + (A\mathbf{v}_\eta(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_\eta(t))_{V' \times V} + j(\mathbf{v}_\eta(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{v}_\eta(t), \mathbf{v}_\eta(t)) \\ & \geq (f(t) - \eta(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_\eta(t))_{V' \times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{p.p}, t \in [0,T] \, .\text{et} \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_\eta(0) = \mathbf{v}_0.$$

Soit $\mathbf{u}_\eta : [0,T] \to V$ une fonction définie par

$$\mathbf{u}_\eta = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_\eta(s)\, ds. \;\text{ p.p. } t \in (0,T) \tag{4.3.26}$$

On voit que $\mathbf{u}_\eta$ vérifie le problème variationnel suivant

Problème $PV_{\mathbf{u}_\eta}$.Trouver $\mathbf{u}_\eta \in V$ tels que

$$\begin{aligned}&(\ddot{\mathbf{u}}_\eta(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_{V'\times V} + (\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t))), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t), \mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t), \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))\\ &+ (\eta(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_{V'\times V} \geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_{V'\times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V \;\text{ p.p}, t \in [0,T]\,\text{.et}\end{aligned} \tag{4.3.27}$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_\eta(0) = \mathbf{v}_0.$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.3.3 : Le problème $PV^2_{\mathbf{u}_\eta}$ admet une solution unique satisfaisant (**4**.3.2).

Démonstration : La démonstration découle directement du *lemme* **4.3.1**, du *lemme* **4.3.2**, et de la relation (**4**.3.26).

À la troisième étape, nous fixons $\theta \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ et considérons le problème variationnel suivant pour le champ d'endommagement.

Problème PV^2_θ :Trouver le champ d'endommagement β_θ : $[0,T] \to H^1(\Omega)$ tel que $\beta_\theta(t) \in Y$ and

$$\begin{aligned}&(\dot{\beta}_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))\\ &\qquad \geq (\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))_{L^2(\Omega)}, \text{pour tout} \xi \in K \text{p.p.} t \in (0,T), et\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

$$\beta_\theta(0) = \beta_0. \tag{4.3.29}$$

Dans l'étude du problème de PV^2_θ , nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.3.4. Il existe une solution unique du problème PV_θ , ayant la régularité

$$\beta_\theta \in W^{1,2}\left(0,T\,; L^2(\Gamma_2)\right) \cap L^2(0,T\,; Y). \tag{4.3.30}$$

De plus, si β_i est la solution du probléme PV_θ correspond $\theta = \theta_i \in L^2(0,T\,; L^2(\Omega))$ pour $i = 1,2$ alors

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds. \tag{4.3.31}$$

Démonstration

Démonstration du lemme **4.3.4**, en utilisant les mêmes argument du lemme **3.3.2**. du troisième chapitre.

Dans la prochaine étape, nous utilisons $\mathbf{u}_\eta$ et β_θ obtenus respectivement dans les *lemmes* **4.3.3** et **4.3.4** pour construire le problème de Cauchy suivant pour le champ de contrainte.

Problème $PV^2_{\eta,\theta}$: Trouver $\sigma_{\eta,\theta} \in \mathcal{H}$ tel que

$$\sigma_{\eta,\theta}(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta,\theta}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \beta_\theta(s))\, \mathrm{d}s \quad \text{p.p } t \in (0,T) \qquad (\mathbf{4}.3.32)$$

Dans l'étude du problème $PV^2_{\eta,\theta}$ nous avons le résultat suivant

Lemme 4.3.5. Le problème $PV^2_{\eta,\theta}$ a une solution unique qui satisfait $\sigma_{\eta,\theta} \in L^2(0,T\ ;\mathcal{H})$. En outre, $\sigma_i, \mathbf{u}_i$, et β_i représentent les solutions des problèmes $PV^2_{\eta,\theta}, PV^2_\eta$ et PV^2_θ respectivement, pour $(\eta_i,\theta_i) \in L^2(0,T\ ;V' \times L^2(\Omega))$, $i = 1;2$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|^2_{\mathcal{H}} \leq (|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|^2_V + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|^2_V\, ds + \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds,) \qquad (\mathbf{4}.3.33)$$

Démonstration du lemme 4.3.5.

Soit $\Pi_{\eta,\theta} : L^2(0,T\ ;\mathcal{H}) \to L^2(0,T\ ;\mathcal{H})$ l'opérateur proposée par

$$\Pi_{\eta,\theta}\sigma_{\eta,\theta}(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta,\theta}(s)), \varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)), \beta_\theta(s))\, \mathrm{d}s, \qquad (\mathbf{4}.3.34)$$

Soit $\sigma_i \in L^2(0,T\ ;\mathcal{H})\,, i = 1,2$ et $t \in (0;T)$.nous utilisons ($\mathbf{4}.1.11$) et ($\mathbf{4}.3.34$) et l'inégalité de Hölder, on trouve

$$|\Pi_{\eta,\theta}\sigma_1(t) - \Pi_{\eta,\theta}\sigma_2(t)|^2_{\mathcal{H}} \leq L^2_{\mathcal{G}} \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|^2_{\mathcal{H}}\, ds$$

En utilisant l'opérateur $\Pi_{\eta,\theta}$ une autre fois, on obtien

$$\left|\Pi^2_{\eta,\theta}\sigma_1(t) - \Pi^2_{\eta,\theta}\sigma_2(t)\right|^2_{\mathcal{H}} \leq L^4_{\mathcal{G}} T^2 \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|^2_{\mathcal{H}}\, ds$$

On fait une itération sur cette dernière inégalité m fois pour trouver

$$\left|\Pi^m_{\eta,\theta}\sigma_1(t) - \Pi^m_{\eta,\theta}\sigma_2(t)\right|^2_{\mathcal{H}} \leq L^{2m}_{\mathcal{G}} T^m \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \ldots \int_0^{t_m} |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|^2_{\mathcal{H}}\, ds$$

L'intégration sur l'intervalle de temps $(0,T)$, il s'ensuit que

$$\left|\Pi^m_{\eta,\theta} - \Pi^m_{\eta,\theta}\sigma_2\right|^2_{L^2(0,T\ ;\mathcal{H})} \leq \frac{L^{2m}_{\mathcal{G}} T^m}{m!} |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|^2_{L^2(0,T\ ;\mathcal{H})}\,.$$

Comme

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{L_{\mathcal{G}}^{2m}T^m}{m!}=0$$

L'opérateur $\Pi_{\eta,\theta}^m$ est une contraction dans l'espace de Banach $L^2\,(0,T\,;\mathcal{H})$, et selon le théorème du point fixe de Banach, l'opérateur $\Pi_{\eta,\theta}$ possède un unique point fixe $\sigma_{\eta,\theta}\in L^2\,(0,T\,;\mathcal{H})$. De plus, cette solution est unique pour le problème $PV_{\eta,\theta}^2$. En utilisant (**4**.3.32), la régularité de $\mathbf{u}_\eta$, celle deβ_θ, et les propriétés des opérateurs$\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, on obtient que $\sigma_{\eta,\theta}\in L^2\,(0,T\,;\mathcal{H})$. Considérons maintenant $(\eta_1,\theta_1),(\eta_2,\theta_2)\in L^2\,(0,T\,;V'\times L^2\,(\Omega))$, et notons pour $i=1;2$,: $\mathbf{u}_{\eta_i}=\mathbf{u}_i$, $\sigma_{\eta_i,\theta_i}=\sigma_i$, $\beta_{\theta_i}=\beta_i$. Nous avons alors

$$\sigma_i(t)=\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_i(t))+\int_0^t\mathcal{G}(\sigma_i\,(s)),\varepsilon(\mathbf{u}_i(s)),\beta_i\,(s))\;\mathrm{d}s\quad \text{p.p } t\in(0,T)$$

et en utilisant les propriétés (**4**.1.10) et (**4**.1.11) de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, nous trouver

$$\begin{aligned}&|\sigma_1\,(t)-\sigma_2\,(t)|_{\mathcal{H}}^2\leq C(|\mathbf{u}_1\,(t)-\mathbf{u}_2\,(t)|_V^2+\int_0^t|\sigma_1\,(s)-\sigma_2\,(s)|_{\mathcal{H}}^2\,ds\\&+\int_0^t|\mathbf{u}_1\,(s)-\mathbf{u}_2\,(s)|_V^2\,ds+\int_0^t|\beta_1\,(s)-\beta_2\,(s)|_{L^2(\Omega)}^2\,ds\end{aligned}\tag{4.3.35}$$

En utilisant l'argement de Gronwall dans l'inégalité précédente nous déduisons (**4.3.33**), ce qui complète la démonstration.

Finalement, comme une conséquence de ces résultats établis précedemment et en utilisant les propriétés des opérateurs $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et la fonction S, pour $t\in[0,T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda:L^2\left(0,T\,;V'\times L^2\,(\Omega)\right)\to L^2\left(0,T\,;V'\times L^2\,(\Omega)\right)$$

donné par

$$\Lambda\,(\eta,\theta)\,(t)=\left(\Lambda^1\,(\eta,\theta)\,(t),\Lambda^2\,(\eta,\theta)\,(t)\right)\;\in V'\times L^2\,(\Omega)\tag{4.3.36}$$

où

$$\begin{aligned}(\Lambda^1(\eta,\theta)(t),\mathbf{v})_{V'\times V}&=(\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)),\;\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}\\&+\;\Big(\int_0^t\mathcal{G}(\sigma_{\eta,\theta}\,(s)\,,\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(s)),\beta_\theta(s))\mathrm{d}s,\;\;\varepsilon(\mathbf{v})\Big)_{\mathcal{H}}\end{aligned}\tag{4.3.37}$$

et

$$\Lambda^2\,(\eta,\theta)\,(t)=S\,(\sigma_{\eta,\theta}\,(t)),\varepsilon\,(\mathbf{u}_\eta\,(t))\,,\beta_\theta\,(t))\,.\tag{4.3.38}$$

Ici, pour tout $(\eta, \theta) \in L^2(0, T\ ; V' \times L^2(\Omega))$, $\mathbf{u}_\eta, \beta_\theta$ et $\sigma_{\eta,\theta}$ représentent le champ de déplacement, le champ d'endommagement et le champ de contrainte qui sont obtenues dans les *lemmes* **4.3.3**, **4.3.4** et **4.3.5** respectivement, on a le résultat suivant

Lemme 4.3.6. L'opérateur Λ admet un point fixe unique $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T\ ; V' \times L^2(\Omega))$ tel que $\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*)$.

Démonstration. Soient $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in L^2(0, T\ ; V' \times L^2(\Omega))$. Pour simplicité, nous utilisons les notation $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i, \dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \dot{\mathbf{u}}_i, \ddot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \ddot{\mathbf{u}}_i, \sigma_{\eta_i,\theta_i} = \sigma_i$ et $\beta_{\theta_i} = \beta_i$,pour $i = 1, 2$.Application (**4**.3.36)-(**4**.3.38), (**4**.1.9) et hypothèses (**4**.1.10)-(**4**.1.12), on obtient que

$$\begin{aligned}&|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)|^2_{V' \times L^2(\Omega)} \\ &\leq C(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|^2_V + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|^2_V\, ds + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds\end{aligned} \tag{4.3.39}$$

En outre, en prenant la substitution $\eta = \eta_1, \eta = \eta_2$ dans (**4**.3.25), on obtient

$$\begin{aligned}&(\dot{\mathbf{v}}_1 - \dot{\mathbf{v}}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V' \times V} + (A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V' \times V} \\ &\leq j(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) + (\eta_1 - \eta_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V' \times V}\end{aligned}$$

On intègre cette inégalité par rapport au temps, en utilisant la condition initiale $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_0$, les conditions (**4**.1.9), (**3**.1.9) et (**4**.3.22) et on choisit $\alpha_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{C_0^2}$ on trouve

$$\begin{aligned}&m_{\mathcal{A}} \int_0^t |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2_V\, ds \\ &\leq C_0^2 |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1\right) \int_0^t |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2_V\, ds + \int_0^t (\eta_1 - \eta_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V' \times V}\, ds\end{aligned}$$

Et donc

$$\left(m_{\mathcal{A}} - C_0^2 |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1\right)\right) \int_0^t |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2_V\, ds \leq \int_0^t |\eta_1 - \eta_2|_{V'} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V\, ds$$

en utilisant l'inégalité $2ab \leq (a^2 + b^2)$ on obtient

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2_V\, ds \leq C \int_0^t |\eta_1 - \eta_2|^2_{V'}\, ds \tag{4.3.40}$$

D'autre part, étant donné que $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_i(s)\, ds$ et $\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0$, On a

$$|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2_V \leq \int_0^t |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2_V\, ds \tag{4.3.41}$$

Et

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V^2 \geq 0, \\
&\int_0^t \int_0^s |\mathbf{u}_1(r) - \mathbf{u}_2(r)|_V^2 \, drds \geq 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V^2 \, ds \leq \\
&C\int_0^t \left(|\mathbf{v}(s)_1 - \mathbf{v}(s)_2|_V^2 + |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2\right) ds + \int_0^t \int_0^s |\mathbf{u}_1(r) - \mathbf{u}_2(r)|_V^2 \, drds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_V^2 \, ds \leq \\
&C\left(\int_0^t |\mathbf{v}(s)_1 - \mathbf{v}(s)_2|_V^2 \, ds + \int_0^t \left(|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 + \int_0^s |\mathbf{u}_1(r) - \mathbf{u}_2(r)|_V^2 \, dr\right) ds\right),
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Gronwall, et en utilisant (**4**.3.40) nous avons

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 \, ds \leq C\int_0^t |\eta_1 - \eta_2|_{V'}^2 \, ds. \tag{4.3.42}$$

De (**4**.3.31), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds \\
\leq \; & C\int_0^t |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds.
\end{aligned} \tag{4.3.43}$$

Les estimations (**4**.3.39),(**4**.3.42)-(**4**.3.43) nous donnent

$$\begin{aligned}
&|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \\
\leq \; & C\int_0^t |(\eta_1, \theta_1)(t) - (\eta_2, \theta_2)(t)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \, ds.
\end{aligned}$$

En réitérant cette inégalité n fois on arrive à

$$\begin{aligned}
&|\Lambda^n(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^n(\eta_2, \theta_2)(t)|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \\
\leq \; & \frac{(CT)^n}{n!} |(\eta_1, \theta_1)(t) - (\eta_2, \theta_2)(t)|_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))}^2 .
\end{aligned}$$

ce qui implique que pour n su samment grand une puissance Λ^n de Λ est une contraction dans l'espace de Banach $L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$, ce qui conclut la preuve.

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour prouver le *Théorème* **4.3.1**.

Preuve de l'existence pour le Théorème 4.3.1. Supposons que $(\eta^*, \theta^*) \in L^2(0, T\ ; V' \times L^2(\Omega))$ soit un point fixe de Λ, tel que défini par (**4**.3.36)-(**4**.3.38), et notons

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{\eta^*}, \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \sigma_{\eta^*\theta^*}, && (\mathbf{4}.3.44) \\ \beta &= \beta_{\theta^*}. && (\mathbf{4}.3.45) \end{aligned}$$

Nous prouvons que le triple $(\mathbf{u}, \sigma, \beta)$ satisfait (**4**.2.4)-(**4**.2.7) et (**4**.3.2)-(**4**.3.4). En effet, nous écrivons (**4**.3.32) pour $\eta = \eta^*$, $\theta = \theta^*$ et utilisant (**4**.3.44) et (**4**.3.45) pour obtenir que (**4**.2.4) est satisfait. Maintenant nous considérons (**4**.3.27) pour $\eta = \eta^*$ et en utilisant la première égalité dans (**4**.3.44) pour trouver

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))), \varepsilon(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) + (\eta^*(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\eta(t))_{V' \times V} \\ \geq\ & (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{p.p}, t \in [0, T]. && (\mathbf{4}.3.46) \end{aligned}$$

Les égalités $\Lambda^1(\eta^*, \theta^*) = \eta^*$ et $\Lambda^2(\eta^*, \theta^*) = \theta^*$ combinées avec (**4**.3.37)-(**4**.3.38), (**4**.3.44) et (**4**.3.45) montrent que

$$(\eta^*, \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(s))), \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \beta(s))\, \mathrm{d}s, \varepsilon(\mathbf{v})\right)_{\mathcal{H}} \quad (\mathbf{4}.3.47)$$

et

$$\theta^*(t) = S(\sigma(t) - \mathcal{A}\varepsilon\dot{\mathbf{u}}(t), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \beta(t)). \quad (\mathbf{4}.3.48)$$

Nous substituons maintenant (**4**.3.47) dans (**4**.3.46) et l'utilisation (**4**.2.4) pour voir que (**4**.2.5) est satisfait. Nous écrivons (**4**.3.28) pour $\theta = \theta^*$ et utilisons (**4**.3.45) et (**4**.3.48) pour trouver que (**4**.2.6) est satisfait. Ensuite, (**4**.2.7) et les régularités (**4**.3.2) et (**4**.3.4) suivre *Lemmes* **4.3.3** et **4.3.4**.

La régularité $\sigma \in L^2(0, T\ ; \mathcal{H})$ résulte des lemmes **4.3.3**, **4.3.5**, l'hypothèse (**3**.1.9) et (**4**.3.44), en effet $\sigma_{\eta,\theta} \in L^2(0, T\ ; \mathcal{H})$ d'après (**4**.3.44)

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \sigma_{\eta^*\theta^*} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \sigma_{\eta\theta}$$

En outre,

$$\dot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T\ ; V) \cap C(0, T\ ; H),$$

de ce qui précède et $\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}})$ un élément de $\mathcal{H}$, d'après l'hypothèse (**3**.1.9) résultats

$$\mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) \in L^2(0,T\ ;\mathcal{H})$$

Alors

$$\sigma \in L^2(0,T\ ;\mathcal{H}).$$

Nous prenons $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t) \pm z$ où $z \in C_0^\infty(\Omega)^d$ dans (**4**.2.5), on trouve

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathrm{Div}\,\sigma(t) + f_0(t) \quad \text{dans } V',\ \text{p.p. } t \in (0,T)\ ,$$

Ainsi, en utilisant (**4**.1.13) et (**4**.1.14), nous obtenons que $\mathrm{Div}\,\sigma \in L^2(0,T\ ;V')$. Par conséquent, la régularité (4.3.3) est vérifiée, ce qui prouve la partie existence du *théorème* **4.3.1.** Quant à la partie unicité du *théorème* **4.3.1**, elle découle de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (**4**.3.36)-(**4**.3.38), ainsi que de l'unicité des solutions des problèmes PV_η^2, PV_β^2, et $PV_{\eta,\theta}^2$.

Chapitre 5

Problème dynamique d'un matériau thermoviscoélastique avec Compliance normale et endommagement

Nous étudions un problème dynamique qui décrit un contact frottement entre un corps thermo-viscoélastique et une fondation. La loi de comportement thermoviscoélastique inclut un effet d'endommagement, décrit par une inclusion parabolique avec condition aux limites de Neumann homogène, ainsi qu'un effet thermique, décrit par une équation d'évolution du premier ordre. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale avec frottement. Nous présentons une formulation variationnelle du problème et établissons l'existence et l'unicité de la solution faible. La démonstration s'appuie sur des inéquations variationnelles paraboliques de premier et second type, des équations variationnelles d'évolution du premier ordre et des arguments de point fixe.

5.1 Problème mécanique et hypothèses

Ce problème mécanique, noté P^3, représente un système d'équations décrivant le comportement d'un corps thermo-viscoélastique en contact avec une fondation, en prenant en compte les effets de l'endommagement, de la température et du frottement. Voici une analyse des différentes composantes de ce problème :

problème P^3 . cherche $\mathbf{u}$,σ, β et θ tels que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))$$

$$+ \int_0^t M(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \beta(s), \theta(s))\, ds \quad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{5.1.1}$$

$$\dot{\beta} - k \bigtriangleup \beta + \partial\varphi_Y(\beta) \ni S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),\beta,\theta) \quad dans\ \Omega \times (0,T)\,, \tag{5.1.2}$$

$$Div\ \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho\ddot{\mathbf{u}} \text{ dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{5.1.3}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,T)\,, \tag{5.1.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T)\,, \tag{5.1.5}$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu), & |\,\boldsymbol{\sigma}_\tau\,| \leq \mu p_\nu(u_\nu), \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\mu p_\nu(u_\nu)\frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{|\dot{\mathbf{u}}_\tau|} & \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0} \end{cases} \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{5.1.6}$$

$$\dot{\theta} - div(K_c\nabla\theta) = r(\dot{\mathbf{u}}) + q \text{ dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{5.1.7}$$

$$k_{ij}\theta_{,i}\nu_j = h_\tau(|\,\dot{\mathbf{u}}_\tau\,|) - k_e(\theta - \theta_R) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{5.1.8}$$

$$\theta = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times (0,T), \tag{5.1.9}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times (0,T)\,, \tag{5.1.10}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,\ \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0,\ \beta(0) = \beta_0,\ \theta(0) = \theta_0 \text{ dans } \Omega. \tag{5.1.11}$$

Ici, (**5**.1.1) représente la loi de comportement thermoviscoélastique, où $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes, $\mathbf{u}$ représente le champ de déplacement, $\dot{\mathbf{u}}$ le champ de vitesse, θ le champ de température et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ est le petit tenseur de déformation. Ici $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ sont des opérateurs non linéaires décrivant respectivement les propriétés purement visqueuses et élastiques du matériau. M est un opérateur non linéaire qui dépend de la fonction d'endommagement et de la fonction température. (**5**.1.2) représente l'inclusion utilisée pour décrire l'évolution de l'endommagement dans le matériau et (**5**.3.10) est une condition aux limites de Neumann. (**5**.3.3) représente l'équation du mouvement, puisque le processus est supposé être dynamique. (**5**.3.4)-(**5**.1.5) sont les conditions de déplacement-traction. L'évolution du champ de température θ est régie (voir [14]) par l'équation de la chaleur, obtenue à partir de la conservation de l'énergie, et définie par l'équation différentielle pour la température donnée en (**5**.3.7), où $K = (k_{ij})$ représente le tenseur de conductivité thermique, $\mathrm{Div}\,(K_c \nabla\theta) = (k_{ij}\theta_{,i})_{,i}$ et $q(t)$ la densité des sources de chaleur volumiques. La condition aux limites de température associée sur est décrite par (**5**.3.8), où le premier terme du membre de droite décrit la chaleur généré par frottement, et le deuxième terme représente l'échange thermique entre le corps et la fondation, θ_R est la température de la fondation, et k_e est le coefficient d'échange thermique entre le corps et l'obstacle. En (**5**.3.9) la température s'annule sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. (**5**.3.6) représente une compliance normale générale et la loi de frottement sec associée où μ est le coefficient de frottement. Dans (**5**.3.11) $\mathbf{u}_0$ est le déplacement initial donné, $\mathbf{v}_0$ est la vitesse initiale donnée, β_0 est l'endommagement initial et θ_0 est la température initiale. Pour simplifier la notation, nous n'indiquons pas explicitement le dépendance de diverses fonctions sur les variables $x \in \Omega \cup \Gamma$ et $t \in [0, T]$. Afin d'obtenir une formulation variationnelle du problème P^1, nous avons besoin de notation. Soit E le sous-espace fermé de $H_1(\Omega)$ défini par

$$E = \{y \in H_1(\Omega) \quad / \quad y = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_1 \cup \Gamma_2\},$$

Puisque Γ est de Lipschitz et $mes\ (\Gamma_1) > 0$, les inégalités de Korn (**1**.4.9) et de Poincaré (**1**.4.6) sont satisfaites sur les espaces V et E, respectivement. Nous définissons le produit scalaire de E par

$$(y\ , z)_E = (\nabla y\ ,\ \nabla z)_H\ . \tag{\textbf{5}.1.12}$$

Il découle des relations (**1**.5.11) et (**5**.1.12) que les normes $|.|_{H^1(\Omega)}$et $|.|_E$ sont équivalentes. Le dual de E est noté E'. En identifiant $L^2(\Omega)$ avec son propre dual, nous pouvons écrire $E' \subset L^2(\Omega) \subset E$. Ci-après, $(.\ ,.)$ indique le crochet de dualité entre E' et E, tandis que

$|\theta|_{E'}$ représente la norme sur E'. De même,

$$(\theta\ ,\eta)_{E'\times E} = (\theta\ ,\eta)_{L^2(\Omega)} \quad \text{pour} \quad (\theta\ ,\eta) \in L^2(\Omega)\times E \tag{5.1.13}$$

Dans l'étude du problème mécanique P^3, nous faisons les hypothèses suivantes. Nous rappelons que les opérateurs nonlinéaires de viscosité $\mathcal{A}$ et d'élasticité $\mathcal{F}$ sont définis par (**3**.1.9) et (**4**.1.10), respectivement.

L'opérateur $M:\ \Omega\times[0,T]\times S^d\times\mathbb{R} \longrightarrow \ S^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a)\ \text{Il existe une constante } L_M>0 \text{ tel que} \\ |\ M\left(x,t,\varepsilon_1,\beta_1,\theta_1\right)-M\left(x,\varepsilon_2,\beta_2,\theta_2\right)\ | \leq\ L_{\mathcal{G}}\left(|\varepsilon_1-\varepsilon_2|+|\beta_1-\beta_2|+|\theta_1-\theta_2|\right), \\ \text{pour tous } \forall t\in[0,T]\,,\varepsilon_1,\varepsilon_2\in S^d\ ,\ \beta_1,\beta_2,\in\mathbb{R}\ ,\theta_1,\theta_2,\in\mathbb{R}_+ \text{ p.p } x\in\Omega. \\ (b)\ \text{ L'application } x\longrightarrow M\left(x,\sigma,\varepsilon,\alpha\right) \text{ est mesurable sur } \Omega. \\ \text{Pour tout } \sigma,\varepsilon\in S^d \text{ et } \beta\in\mathbb{R}\ , \\ \text{l'application } t\to M(x,t,\varepsilon,\beta,\theta) \text{ est continue dans}[0,T], \\ \text{pour tout } \varepsilon\in S^d,\beta\in\mathbb{R}, \text{ et } \theta\in\mathbb{R}_+ \text{ p.p } x\in\Omega. \\ (c)\ \text{ L'application } x\longrightarrow M\left(x,0,0,0\right) \text{ appartientà } \mathcal{H}, \text{ pour tout } t\in\ [0,T]. \end{cases} \tag{5.1.14}$$

La fonction source d'endommagement $\mathcal{S}:\ \Omega\times S^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} (a)\ \text{ Il existe une constante } L_{\mathcal{S}}>0 \text{ tel que} \\ |\ \mathcal{S}\left(x,\varepsilon_1,\beta_1,\theta_1\right)-\mathcal{S}\left(x,\varepsilon_2,\beta_2,\theta_2\right)\ | \leq\ L_{\mathcal{S}}\left(|\varepsilon_1-\varepsilon_2|+|\beta_1-\beta_2|+|\theta_1-\theta_2|\right) \\ \ \text{pour tout } \varepsilon_1,\varepsilon_2\in S^d\ ,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R} \text{ et } \theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}_+ \text{ p.p. } x\in\Omega. \\ (b)\ \text{ Pour tout } \varepsilon\in S^d,\beta\in\mathbb{R} \text{ et } \theta\in\mathbb{R}_+, \\ \quad x\longrightarrow\mathcal{S}\left(x,\varepsilon,\beta,\theta\right) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (c)\ \text{ L'application } x\longrightarrow S\left(x,0,0,0\right) \text{ appartient à } L^2\left(\Omega\right). \end{cases} \tag{5.1.15}$$

La fonction tangentielle $h_\tau:\Gamma_3\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ satisfait

$$\begin{cases} (a)\,\text{Il existe une constante } L_\tau > 0 \text{ tel que} \\ \mid h\,(x,u_1) - h\,(x,u_2)\;\mid \leq\; L_\tau\,(|u_1 - u_2|) \\ \text{ pour tout } u_1, u_2 \in \mathbb{R}_+ \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b)\quad \text{L'application } x \to h_\tau\,(x,u) \in L^2\,(\Gamma_3)\,, \text{est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\ \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \qquad (\mathbf{5}.1.16)$$

Considérons quelques exemples concrets. . Il s'agit de la simple fonction tangentielle h_τ suivante

$$h_\tau\,(x,r) = \lambda\,(x)\,r, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}_+, \text{p.p. } x \in \Gamma_3 \qquad (\mathbf{5}.1.17)$$

où $\lambda \in L^\infty(\Gamma_3, \mathbb{R}_+)$ représente un coefficient de vitesse pour le gradient de la température.

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma \times \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\begin{cases} (a)\,\text{Il existe une constante } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \mid p_\nu\,(x,u_1) - p_\nu\,(x,u_2)\;\mid \leq\; L_\nu\,(|u_1 - u_2|)\,, \\ \text{ pour tout } u_1, u_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ (b)\ \text{ L'application } x \longrightarrow p_\nu\,(x,u) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ p.p. } u \in \mathbb{R}. \\ (c)\ \ p_\nu\,(x,u) = 0 \text{ Pour tout } u \leq 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (d)\ \text{ L'application } x \longrightarrow p_\nu\,(x,0) \in L^2\,(\Gamma_3)\,. \end{cases} \qquad (\mathbf{5}.1.18)$$

La fonction $r : V \to L^2\,(\Omega)$ a la propriété qu'il existe ici une constante

$L_\nu > 0$ tel que

$$\mid r\,(v_1) - r\,(v_2)\;\mid_{L^2(\Omega)} \leq\; L_r\,(|v_1 - v_2|_V)\,, \text{ pour tout } v_1, v_2 \in V. \qquad (\mathbf{5}.1.19)$$

La masse volumique $\rho \in L^\infty\,(\Gamma_3)\,,$ il existe $\rho^* > 0$ tel que $\rho\,(x) \geq \rho^*$ p.p.$x \in \Omega$. $\quad (\mathbf{5}.1.20)$

Le coefficient de frottement μ satisfait

$$\mu \in L^\infty\,(\Gamma_3)\,, \mu > 0 \quad \text{p.p.sur } \Gamma_3. \qquad (\mathbf{5}.1.21)$$

Les forces du corps et la traction de surface ont la régularité

$$f_0 \in L^2\,(0,T\ \ ;H)\,,\ f_2 \in L^2\left(0,T\ ;L^2\,(\Gamma_2)^d\right). \qquad (\mathbf{5}.1.22)$$

La densité de la source de chaleur satisfait

$$q \in L^2\left(0,T\ ;L^2(\Omega)\right), \tag{5.1.23}$$

et pour un certain $c_k > 0$, pour tout $(\zeta_i) \in \mathbb{R}^d$:

$$K = (k_{ij}),\ k_{ij} = k_{ji} \in L^\infty(\Omega),\ k_{ji}\zeta_j\zeta_i \geq c_k\zeta_i\zeta_i \tag{5.1.24}$$

Les conditions aux limites et initiales satisfont

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \mathbf{v}_0 \in V, \quad \beta_0 \in Y, \theta_0 \in L^2(\Omega) \tag{5.1.25}$$

$$\theta_R \in L^2\left(0,T\ ;L^2(\Gamma_3)\right), k_e \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}_+) \tag{5.1.26}$$

Nous définissons la fonction à valeur vectorielle $\mathbf{f} : [0,T] \to V'$ par

$$(\mathbf{f}(t),\mathbf{v})_{V'\times V} = \int_\Omega \mathbf{f}_0(t).\mathbf{v}\ dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t).\mathbf{v}\ da \quad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{5.1.27}$$

et on note que

$$f \in L^2(0,T\ ;V') \tag{5.1.28}$$

On définit la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$a(\zeta,\varphi) = k\int_\Omega \nabla\zeta.\nabla\varphi dx. \tag{5.1.29}$$

Ensuite, nous définissons la fonction de frottement $j : V \times V \to \mathbb{R}$ par

$$j\ (\mathbf{u}\ ,\ \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(\mathbf{u})\,|\mathbf{v}_\tau|\,da \quad , \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V\ . \tag{5.1.30}$$

On définit la fonctionnelle $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ par

$$\phi\ (\mathbf{u}\ ,\ \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(\mathbf{u})\,\mathbf{v}_\nu da \quad , \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V\ . \tag{5.1.31}$$

On note par $Q : [0,T] \to E'$, $K : E \to E'$ et $R : V \to E'$ les fonctionnelles données par

$$(Q(t)\ ,\ \eta)_{E'\times E} = \int_{\Gamma_3} k_e\theta_R(t)\,\eta da + \int_\Omega q(t)\,\eta dx \quad , \tag{5.1.32}$$

$$(K\tau\ ,\ \eta)_{E'\times E} = \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega k_{ij}\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}dx + \int_{\Gamma_3} k_e\tau.\eta da \quad , \tag{5.1.33}$$

$$(R(\mathbf{u})\ ,\ \eta)_{E'\times E} = \int_{\Gamma_3} h_\tau(|\mathbf{u}_\tau|)\,\eta da + \int_\Omega r(\mathbf{u})\,\eta dx \quad , \tag{5.1.34}$$

pour tout $\mathbf{u} \in V, \tau, \eta \in E$. On utilisera le produit scalaire pondéré suivant $((\cdot,\cdot))$ et sa norme associée $\|\cdot\|_H$ sur $H = L^2(\Omega)^d$.

$$((\mathbf{u},\mathbf{v}))_H = (\rho\mathbf{u},\mathbf{v})_H \ ; \quad ||\mathbf{v}||_H = \sqrt{(\rho\mathbf{u},\mathbf{v})_H}, \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in H. \tag{5.1.35}$$

Nous utilisons la notation $(.,.)_{V'\times V}$ pour présenter le crochet dual entre V' et V, i.e.,

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{V'\times V} = ((\mathbf{u},\mathbf{v}))_H \quad \forall \mathbf{u} \in H, \ \forall \mathbf{v} \in V. \tag{5.1.36}$$

En vertu de l'hypothèse (**5**.1.20), les normes $||.||_H$ et $|.|_H$ sont équivalentes sur H. Ainsi, l'injection de correspondance de $(V, |.|_H)$ dans $(H, ||.||_H)$ est à la fois continue et dense. En notant V' l'espace dual de V, et en identifiant H avec son dual propre, nous pouvons définir le triplet de Gelfand $V \subset H \subset V'$. En appliquant des raisonnements standards basés sur la formule de Green (**1**.5.2), nous abordons la formulation variationnelle du problème dynamique intégrant les phénomènes de frottement, d'endommagement et d'effet thermique (**5**.1.1)-(**5**.1.11).

5.2 Formulation variationnelle

Étant donné que $\mathbf{u}, \sigma, \beta$, et θ sont des fonctions régulières satisfaisant les conditions (**5**.1.1)-(**5**.1.11), considérons l'équation (**5**.1.3) et multiplions-la scalairement par $\mathbf{v} \in V$. Ensuite, intégrons le résultat sur Ω et appliquons la formule de Green (**1**.4.21). Ceci nous permet d'obtenir :

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{v})_{V'\times V} + (\sigma(t),\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = (f\,(t)\,,\mathbf{v})_{V'\times V} + \int_\Omega \sigma_\nu \mathbf{v}_\nu \ da + \int_\Omega \sigma_\tau.\mathbf{v}_\tau \ da \tag{5.2.1}$$

Puisque $\mathbf{v} = 0$ sur Γ_1 et $\sigma\nu = f_2$ surΓ_2, prenons $\mathbf{v}$ comme $\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}$ dans (**5**.2.1). Ensuite, nous utilisons la loi de frottement (**5**.1.6) pour constater que :

$$\sigma_\tau.\left(\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau\right) \geq \mu\left|\sigma_\nu\right|\left|\mathbf{u}_\tau\right| - \mu\left|\sigma_\nu\right|\left|\mathbf{v}_\tau\right|. \tag{5.2.2}$$

En effet, aux points de Γ_3 où $\dot{\mathbf{u}}_\tau \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} \sigma_\tau.\left(\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau\right) &= -\mu p\left(\mathbf{u}_\nu\right)\frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{|\dot{\mathbf{u}}_\tau|}.\left(\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau\right) \\ &\geq \mu p\left(\mathbf{u}_\nu\right)\left|\dot{\mathbf{u}}_\tau\right| - \mu p\left(\mathbf{u}_\nu\right)\left|\mathbf{v}_\tau\right| \end{aligned}$$

depuis $\dot{\mathbf{u}}_\tau.\dot{\mathbf{u}}_\tau = |\dot{\mathbf{u}}_\tau|$ et $\dot{\mathbf{u}}_\tau.\mathbf{v}_\tau \leq |\dot{\mathbf{u}}_\tau|\,|\mathbf{v}_\tau|$, aux points de Γ_3 où $\dot{\mathbf{u}}_\tau = 0$ nous avons

$$\begin{aligned}\sigma_\tau.\left(\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau\right) &= \sigma_\tau.\mathbf{v}_\tau \geq -\left|\sigma_\tau\right|\left|\mathbf{v}_\tau\right| \\ &\geq -\mu p\left(\mathbf{u}_\nu\right)\left|\mathbf{v}_\tau\right| = \mu p\left(\mathbf{u}_\nu\right)\left|\dot{\mathbf{u}}_\tau\right| - \mu p\left(\mathbf{u}_\nu\right)\left|\mathbf{v}_\tau\right|\end{aligned}$$

depuis $|\sigma_\tau| \leq \mu p(\mathbf{u}_\nu)$ et $|\dot{\mathbf{u}}_\tau| = 0$. Nous intégrons (**5**.2.2) sur Γ_3 pour obtenir

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau.\left(\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau\right)\,\mathrm{d}a \geq \int_{\Gamma_3} \mu p\left(\mathbf{u}_\nu\right)\left(\left|\dot{\mathbf{u}}_\tau\right| - \left|\mathbf{v}_\tau\right|\right)\,\mathrm{d}a$$

d'après (**5**.1.30) et (**5**.1.31) nous obtenons

$$\begin{aligned}&(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V'\times V} + (\sigma(t), \varepsilon((\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))))_{\mathcal{H}} \\ &\qquad \phi(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + j(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) - j(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ \geq\ & (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V'\times V} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in V,\ \text{p.p. } t \in (0, T)\end{aligned} \tag{\textbf{5}.2.3}$$

On multiplie scalairement l'équation (**5**.1.7) par $\eta \in E$ ($\eta = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$) en appliquant la formule de Green (**1**.4.26) on obtient

$$\left(K_c \nabla\theta\left(t\right), \nabla\eta\right)_{L^2(\Omega)} + \left(div(K_c \nabla\theta\left(t\right)), \eta\right)_{L^2(\Omega)} = \int_\Gamma K_c \nabla\theta\left(t\right).\nu\eta\,\mathrm{d}a$$

$\Rightarrow$

$$\left(K_c \nabla\theta\left(t\right), \nabla\eta\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\dot{\theta}\left(t\right) - r\left(\dot{\mathbf{u}}\left(t\right)\right) - q\left(t\right), \eta\right)_{L^2(\Omega)} = \int_\Gamma K_c \nabla\theta\left(t\right).\nu\eta\,\mathrm{d}a$$

$\Rightarrow$

$$\left(\dot{\theta}\left(t\right), \eta\right)_{L^2(\Omega)} + \left(K_c \nabla\theta\left(t\right), \nabla\eta\right)_{L^2(\Omega)} - \int_\Gamma K_c \nabla\theta.\nu\eta\,\mathrm{d}a = \int_\Omega \left(r\left(\dot{\mathbf{u}}\left(t\right)\right) + q\left(t\right)\right)\eta\,\mathrm{d}x$$

d'ou

$$\left(\dot{\theta}\left(t\right), \eta\right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_3} k_{ij}\theta_{,i}\nu_j\eta\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(r\left(\dot{\mathbf{u}}\left(t\right)\right) + q\left(t\right)\right)\eta\,\mathrm{d}x$$

On remplace par (**5**.1.8) on trouve

$$\begin{aligned}&\left(\dot{\theta}\left(t\right), \eta\right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_3} (h_\tau(|\ \dot{\mathbf{u}}_\tau\ |) - k_e(\theta - \theta_R))\,\eta\,\mathrm{d}x \\ =\ & \int_\Omega \left(r\left(\dot{\mathbf{u}}\left(t\right)\right) + q\left(t\right)\right)\eta\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Nous utilisons les définitions (**5**.1.32), (**5**.1.33) et (**5**.1.34) de $Q\,(t)$, K_τ et R respectivement, avec (**5**.1.13) on écrit

$$\dot{\theta}\,(t) + K\theta\,(t) = R\,(\dot{\mathbf{u}}\,(t)) + Q\,(t) \quad \text{dans } E \tag{5.2.4}$$

Enfin, soit $\beta(t) \in Y$ et p.p. $t \in (0, T)$. D'après l'équation (**5**.1.2) en utilisant des calcules similaires à ceux utilisés dans la preuve de (**3**.2.4), on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}&(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ \geq\ & (S(\varepsilon(\mathbf{u}\,(t)), ,\beta(t), \theta\,(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \text{pour tout } \xi \in Y,\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Finalement, en combinant (**5**.1.1), (**5**.2.3), (**5**.2.4), (**5**.2.5) et (**5**.1.11) nous trouvons PV^3 la formulation variationnelle du Problème P^3.

Problème PV^3 Trouvrer le champ de déplacement $u : [\ 0, T\ ] \longrightarrow V$, le champ de contrainte $\sigma : [\ 0, T\ ] \longrightarrow \mathcal{H}_1$, le champ d'endommagement $\beta : [\ 0, T\ ] \longrightarrow H^1\,(\Omega)$ et le champ de température $\theta : [\ 0, T\ ] \longrightarrow E$ tels que:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) \\ &+ \int_0^t M(t-s, \varepsilon(\mathbf{u})s)), \beta(s), \theta(s))\mathrm{d}s \quad \text{dans } \Omega \times (0,T)\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

$$\begin{aligned}&(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V'\times V} + (\sigma(t), \varepsilon((\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))))_{\mathcal{H}} \\ &+\ \phi(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ &\geq\ (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V'\times V} \ \text{ pour tout } \mathbf{v} \in V,\ \text{p.p. } t \in (0,T)\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

$$\begin{aligned}&\beta(t) \in Y,\quad (\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ &\geq\ (S(\varepsilon(\mathbf{u}(t)),\beta(t), \theta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad \text{pour tout } \xi \in Y,\ \text{p.p. } t \in (0,T)\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

$$\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = R(\dot{\mathbf{u}}(t)) + Q(t),\ \text{p.p. } t \in (0,T) \tag{5.2.9}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,\ \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0,\ \beta(0) = \beta_0,\ \theta(0) = \theta_0. \tag{5.2.10}$$

5.3 Existence et l'unicité de la solution

Notre résultat principal est le théorème **5.3.1.**

Théorème **5.3.1**. Nous supposons que les hypothèses (**3**.1.9), (**4**.1.10) et (**5**.1.14)-(**5**.1.26) sont satisfaites, si l'hypothèse de petitesse

$$|\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \frac{m_{\mathcal{A}}}{L_\nu C_0^2}$$

est vérifiée, alors le problème PV^3 a une unique solution $\{\mathbf{u}, \sigma, \beta, \theta\}$ satisfaisant

$$\mathbf{u} \in C^1(0,T\ ;H) \cap W^{1,2}(0,T\ ;V) \cap W^{2,2}(0,T\ ;V'). \tag{5.3.1}$$

$$\sigma \in L^2(0,T;\mathcal{H}), \quad Div\sigma \in L^2(0,T;V') \tag{5.3.2}$$

$$\beta \in W^{1,2}\left(0,T\ ;L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T\ ;H^1(\Omega)\right). \tag{5.3.3}$$

$$\theta \in C\left(0,T\ ;L^2(\Omega)\right) \cap L^2(0,T\ ;E) \cap W^{1,2}(0,T\ ;E'). \tag{5.3.4}$$

Les fonctions $\mathbf{u}, \sigma, \beta$ et θ qui satisfont les équations (**5**.2.6)-(**5**.2.10) sont désignées comme solution faible du Problème P^3. Nous concluons ainsi que, sous les hypothèses (**3**.1.9), (**4**.1.10) et (**5**.1.14)-(**5**.1.26), le problème mécanique décrit par les équations (**5**.1.1)-(**5**.1.11) possède une unique solution faible avec les régularités (**5**.3.1)-(**5**.3.4). La démonstration du théorème **5.3.1** comprend plusieurs étapes. Tout au long de cette section, nous supposerons que les conditions du *théorème* **5.3.1** sont satisfaites. sera une constante positive générique dépendant de Ω, Γ_1, Γ_3 et p_ν , basée sur des arguments de résultats d'inéquations paraboliques, une équation d'évolution du premier ordre et un théorème du point fixe. Soit $(\delta, \mathbf{z}) \in L^2(0,T;V' \times V)$, on considère le problème variationnel suivant

Problème $PV_{\mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}}$. étant donné $(\delta, \mathbf{z}) \in L^2(0,T;V' \times V)$, Trouver le champ de vitesse $\mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}} : [0,T] \longrightarrow V$ tels que

$$\begin{aligned} &(\dot{\mathbf{v}}_{\delta\mathbf{z}}(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}(t))_{V'\times V} + (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}(t))), \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}(t)))_{\mathcal{H}} \\ &+ j(\mathbf{z}(t), \mathbf{v}) - j(\mathbf{z}(t), \mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}(t)) \\ &\geq (f(t) - \delta(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}(t))_{V'\times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{p.p}, t \in [0,T] \text{ .et} \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

$$\mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}(0) = \mathbf{v}_0. \tag{5.3.6}$$

Lemme 5.3.1 Il existe une solution unique du probléme $PV_{\delta\mathbf{z}}$ satisfaisant

$$\mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}} \in C(0,T\ ;H) \cap L^2(0,T\ ;V) \cap W^{1,2}(0,T\ ;V'). \tag{5.3.7}$$

Démonstration. Soit $A : V \to V'$ l'opérateur défini par

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V'\times V} = (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u})), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V. \tag{5.3.8}$$

De (**5**.3.8) et (**3**.1.9)(a) et (**1**.4.19) nous avons

$$\begin{aligned}
(A\mathbf{u}{-}A\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v})_{V'\times V} &= (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}))-\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{v})),\varepsilon(\mathbf{u})-\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\
&= \int_0^t (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}))-\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{v})),\varepsilon(\mathbf{u})-\varepsilon(\mathbf{v}))_{S^d}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t |\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}))-\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{v}))|_{S^d}\,|\varepsilon(\mathbf{u})-\varepsilon(\mathbf{v})|_{S^d}\,\mathrm{d}s\ , \\
&\leq L_{\mathcal{A}}\int_0^t |(\varepsilon(\mathbf{u}))-(\varepsilon(\mathbf{v}))|_{S^d}^2\,\mathrm{d}s \\
&= L_{\mathcal{A}}\,|(\varepsilon(\mathbf{u}))-(\varepsilon(\mathbf{v}))|_{\mathcal{H}}^2 = L_{\mathcal{A}}\,|\mathbf{u}-\mathbf{v}|_V^2
\end{aligned}$$

Alors, Il existe $L_A = L_{\mathcal{A}} > 0$ tel que

$$|A\mathbf{u}{-}A\mathbf{v}|_{V'} \leq L_A\,|\mathbf{u}-\mathbf{v}|_V \quad \forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in V. \tag{5.3.9}$$

De (**5**.3.9) on voit que $A : V \to V'$ est de Lipschitz. En utilisant aussi (**5**.3.8) on obtient

$$(A\mathbf{u}{-}A\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v})_{V'\times V} = (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}))-\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{v})),\varepsilon(\mathbf{u})-\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}$$

De (**3**.1.9)(b), et (**1**.4.19) on trouve

$$(A\mathbf{u}{-}A\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v})_{V'\times V} \geq m_A\,|\mathbf{u}-\mathbf{v}|_V^2 \quad \forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in V \quad \text{avec } m_A = m_{\mathcal{A}} \tag{5.3.10}$$

Cette inégalité implique que $A : V \to V'$ est un opérateur fortement monotone. On dénote la fonctionnelle de frottement par

$$j_{\mathbf{z}}(\mathbf{v}) = j\ (\mathbf{z}\ ,\ \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(\mathbf{z}_\nu)\,|\mathbf{v}_\tau|\,da\ \ ,\quad \forall\mathbf{v}\in V\ . \tag{5.3.11}$$

En utilisant les définitions (**5**.3.8),(**5**.3.11) et l'inégalité (**5**.3.5) nous voyons que $\mathbf{v}_{\delta h}$ satisfait (**5**.3.6) et l'inégalité

$$\begin{aligned}
&(\dot{\mathbf{v}}_{\delta\mathbf{z}}(t),\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}(t))_{V'\times V} + (A\mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}(t),\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}(t))_{V'\times V} \\
&+j_{\mathbf{z}}(\mathbf{v}) - j_{\mathbf{z}}(\mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}(t)) \\
&\geq\ (f(t)-\delta(t),\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\eta\mathbf{z}}(t))_{V'\times V}\,,\quad \forall\mathbf{v}\in V\ \ \text{p.p}, t\in[0,T]\,.\text{et}
\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

Nous appliquons le *théorème* **2.3.1** aux problèmes (**5**.3.12) et (**5**.3.6). L'opérateur A est fortement monotone et Lipschitz continu sur V, donc A satisfait l'hypothèse (**2**.3.1). La fonctionnelle $j_{\mathbf{z}}$ est continue et convexe en utilisant l'inclusion continue de V dans $L^2(\Gamma_3)^d$. Pour approximer la fonction j_z, nous utilisons la suite

$$j_{\mathbf{z}n}(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(\mathbf{z}_\nu) \sqrt{|\mathbf{v}_\tau|^2 + \frac{1}{n}} da \quad , \quad \forall \mathbf{v} \in V, n \in \mathbb{N}^*.$$

On vérifie que la dérivée de Frechet de $j_{\mathbf{z}n}$ est donnée par

$$< j'_{\mathbf{z}n}(\mathbf{v}), \mathbf{h} >= \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(\mathbf{z}_\nu) \frac{(\mathbf{v}_\tau, \mathbf{h}_\tau)}{\sqrt{|\mathbf{v}_\tau|^2 + \frac{1}{n}}} da \quad , \quad \forall \mathbf{h} \in V. \tag{5.3.13}$$

Alors j'_{zn} est de classe C^1. Des calculs algébriques directs montrent que pour tout $a \geq 0, b \geq 0$ tel que $a + b = 1$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$.\sqrt{(ax+by)^2 + \frac{1}{n}} \leq a\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + b\sqrt{y^2 + \frac{1}{n}}.$$

Alors $j_{\mathbf{z}n}$ est convexe pour tout $n \geq 1$. En utilisant (**5**.3.13) il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
|< j'_{\mathbf{z}n}(\mathbf{v}), \mathbf{h} >_{V' \times V}| &= \left| \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu(\mathbf{z}_\nu) \frac{(\mathbf{v}_\tau, \mathbf{h}_\tau)}{\sqrt{|\mathbf{v}_\tau|^2 + \frac{1}{n}}} da \right| \\
&\leq \int_{\Gamma_3} \mu |p_\nu(\mathbf{z}_\nu)| \frac{|(\mathbf{v}_\tau, \mathbf{h}_\tau)|}{\sqrt{|\mathbf{v}_\tau|^2 + \frac{1}{n}}} da \\
&\leq |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} |p_\nu(\mathbf{z}_\nu)| \frac{|\mathbf{v}_\tau| |\mathbf{h}_\tau|}{\sqrt{|\mathbf{v}_\tau|^2 + \frac{1}{n}}} da \quad \forall \mathbf{z} \in V.
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'inégalité

$$\frac{|\mathbf{v}_\tau|}{\sqrt{|\mathbf{v}_\tau|^2 + \frac{1}{n}}} \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

En utilisant (**1**.5.21) et (**5**.1.18), on obtient ce qui suit

$$\begin{aligned}
|< j'_{\mathbf{z}n}(\mathbf{v}), \mathbf{h} >_{V' \times V}| &\leq L_\nu |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_{\Gamma_3} |\mathbf{z}_\nu| |\mathbf{h}_\tau| da \\
&\leq L_\nu |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} |\mathbf{z}|_{L^2(\Gamma_3)} |\mathbf{h}|_{L^2(\Gamma_3)} \\
&\leq C_0 L_\nu |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} |z|_{L^2(\Gamma_3)^d} |\mathbf{h}|_V, \ \forall \mathbf{h} \in V
\end{aligned}$$

C'est ce qui conduit à

$$\exists C > 0, \ \forall \mathbf{v} \in V, \ |j'_{\mathbf{z}n}(\mathbf{v})|_{V'} \leq C |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} |\mathbf{z}|_{L^2(\Gamma_3)^d},$$

Alors l'hypothèse (**2**.3.3)(a) est satisfaite. L'hypothèse (**2**.3.3)(b) peut être déduite du théorème de Lebesgue. Enfin l'hypothèse (**2**.3.3)(c) est une conséquence du fait que $j_{\mathbf{z}n}(\mathbf{v}) \geq j_{\mathbf{z}}(\mathbf{v})$, $\forall \mathbf{v} \in V$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Nous concluons que j_z et $(j_{\mathbf{z}n})$ satisfont les hypothèses (**2**.3.2) et (**2**.3.3). Rappelons enfin que $\mathbf{f} - \delta \in L^2(0,T;V')$ et $\mathbf{v}_0 \in V$ (voir Hypothèse (**5**.1.25) et (**5**.1.28)). Du *théorème* **2.3.1**, nous concluons que le problème $PV_{\mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}}$ a une solution unique $\mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}} \in C(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \cap W^{1,2}(0,T;V')$.

Nous définissons maintenant l'opérateur $\Phi_\delta : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V)$ par

$$\Phi_\delta \mathbf{z}(t) = u_0 + \int_{\Gamma_3} \mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}}(s)\, ds,\ \forall \mathbf{z} \in L^2(0,T;V). \qquad (\mathbf{5}.3.14)$$

Nous avons le résultat suivant

Lemme 5.3.2. L'opérateur Φ_δ a un point fixe unique $\mathbf{z}_\delta \in L^2(0,T;V)$.

Démonstration. Soient $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in L^2(0,T;V)$, on dénote $\mathbf{v}_{\delta\mathbf{z}_i} = \mathbf{v}_i$ pour $i = 1;2$. Nous avons

$$|\Phi_\delta \mathbf{z}_1(t) - \Phi_\delta \mathbf{z}_2(t)|_V^2 \leq \int_{\Gamma_3} |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2\, ds. \qquad (\mathbf{5}.3.15)$$

De plus, de (**5**.3.11) et (**5**.3.12), on obtient que

$$\begin{aligned} &(\dot{\mathbf{v}}_1 - \dot{\mathbf{v}}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V'\times V} + (A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V'\times V} \\ &\quad \leq\ j(\mathbf{z}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{z}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{z}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{z}_2, \mathbf{v}_2) \ \text{ p.p. } t \in (0,T). \end{aligned} \qquad (\mathbf{5}.3.16)$$

Utilisant (**5**.3.11),(**1**.4.20) et les hypothèses (**5**.1.14) et (**5**.1.21) nous trouvons

$$\begin{aligned} &j(\mathbf{z}_1, \mathbf{v}_2) - j(\mathbf{z}_1, \mathbf{v}_1) + j(\mathbf{z}_2, \mathbf{v}_1) - j(\mathbf{z}_2, \mathbf{v}_2) \\ &\quad \leq \int_{\Gamma_3} \mu\left(p_\nu(\mathbf{z}_{1\nu}) - p_\nu(\mathbf{z}_{2\nu})\right) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\, da \\ &\quad \leq L_\nu C_0^2 |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|_V |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V . \end{aligned} \qquad (\mathbf{5}.3.17)$$

Substituons (**5**.3.17) dans (**5**.3.16), on obtient

$$\begin{aligned} &(\dot{\mathbf{v}}_1 - \dot{\mathbf{v}}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V'\times V} + (A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{V'\times V} \\ &\quad \leq L_\nu C_0^2 |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|_V |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_V , \quad \text{p.p. } t \in (0,T). \end{aligned} \qquad (\mathbf{5}.3.18)$$

On intègre l'inégalité (**5**.3.18) par rapport à t, compte tenu que $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_0$ pour trouver que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)|_V^2 + \int_0^t (A\mathbf{v}_1(s) - A\mathbf{v}_2(s), \mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s))_{V'\times V} ds \\ &\quad = L_\nu C_0^2 |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_0^t |\mathbf{z}_1(s) - \mathbf{z}_2(s)|_V |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V\, ds, \end{aligned}$$

et utilisant (**1**.4.20), (**3**.1.9) et (**5**.1.21) nous déduisons que

$$\begin{aligned} & m_{\mathcal{A}} \int_0^t \left| \mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s) \right|_V^2 ds \\ \leq \;& L_\nu C_0^2 \left| \mu \right|_{L^\infty(\Gamma_3)} \int_0^t \left| \mathbf{z}_1(s) - \mathbf{z}_2(s) \right|_V \left| \mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s) \right|_V ds, \;\; \forall t \in (0,T). \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité $ab \leq a^2 + b^2$, nous obtenons

$$\int_0^t \left| \mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s) \right|_V^2 ds \leq C \int_0^t \left| \mathbf{z}_1(s) - \mathbf{z}_2(s) \right|_V^2 ds$$

ce qui implique que

$$\left| \Phi_\delta \mathbf{z}_1(t) - \Phi_\delta \mathbf{z}_2(t) \right|_V^2 \leq C \int_0^t \left| \mathbf{z}_1(s) - \mathbf{z}_2(s) \right|_V^2 ds \;\forall t \in (0,T).$$

Réitérons cette dernière inégalité n fois pour trouver

$$\left| \Phi_\delta^n \mathbf{z}_1(t) - \Phi_\delta^n \mathbf{z}_2(t) \right|_V^2 \leq \frac{C^n T^n}{n!} \left| \mathbf{z}_1(s) - \mathbf{z}_2(s) \right|_{L^2(0,T;V)}^2 \;.$$

Comme

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{C^n T^n}{n!} = 0 \;.$$

l'opérateur Φ_δ^n est une contraction dans l'espace de Banach $L^2(0,T;V)$, et il résulte du théorème du point fixe de Banach que l'opérateur Φ_δ a un unique point fixe $\mathbf{z}_\delta \in L^2(0,T;V)$.

Dans la suite, soit $\mathbf{z}_\delta$ le point fixe obtenu dans le *lemme* **5.3.2** Puisque $\mathbf{v}_{\delta \mathbf{z}_\delta} = \dot{\mathbf{u}}_{\delta \mathbf{z}_\delta}$, on a que

$$\mathbf{u}_{\delta \mathbf{z}_\delta} = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_{\delta \mathbf{z}_\delta}(s)\, ds \quad \forall t \in [0,T]\,. \tag{5.3.19}$$

Soit $\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}_\delta \in L^2(0,T;V')$ les fonctions définies par

$$\mathbf{u}_\delta = \mathbf{u}_{\delta \mathbf{z}_\delta}, \mathbf{v}_\delta = \mathbf{v}_{\delta \mathbf{z}_\delta}. \tag{5.3.20}$$

On a $\Phi_\delta \mathbf{z}_\delta = \mathbf{u}_{\delta \mathbf{z}_\delta}$ et

$$\mathbf{u}_\delta = \mathbf{z}_\delta. \tag{5.3.21}$$

Nous prenons $\mathbf{z} = \mathbf{z}_\delta$ dans (**5**.3.5) et en utilisant (**5**.3.21), on voit que $\mathbf{u}_\delta$ satisfait le problème variationnel suivant.

Problème $PV^3_{\mathbf{u}_\delta}$ Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}_{\delta\mathbf{z}} : [0,T] \longrightarrow V$ tels que

$$\begin{aligned} & \left(\ddot{\mathbf{u}}_\delta(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\delta(t)\right)_{V'\times V} + \left(\mathcal{A}\left(\varepsilon\left(\dot{\mathbf{u}}_\delta(t)\right)\right), \varepsilon\left(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\delta(t)\right)\right)_{\mathcal{H}} \\ & + j\left(\mathbf{u}_\delta(t), \mathbf{v}\right) - j\left(\mathbf{u}_\delta(t), \dot{\mathbf{u}}_\delta\right) + \left(\delta(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\delta(t)\right) \\ \geq \; & \left(f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\delta(t)\right)_{V'\times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{p.p}, t \in [0,T] \text{ .et} \end{aligned} \tag{5.3.22}$$

$$\mathbf{u}_\delta(0) = \mathbf{u}_0, \qquad \dot{\mathbf{u}}_\delta(0) = \mathbf{v}_0 \tag{5.3.23}$$

Lemme 5.3.3. Le problème $PV^3_{\mathbf{u}_\delta}$ a une solution unique satisfaisant (**5**.3.1).

Démonstration. La démonstration est une conséquence directe du lemme

5.3.1, le lemme **5.3.1** et les relations (**5**.3.19) et (**5**.3.20)**.**

Soit la fonction $\mu \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, et on considère le problème intermédiaire suivant pour le champ d'endommagement.

Problème PV^3_μ :Trouver le champ d'endommagement β_μ : $[0,T] \to H^1(\Omega)$ tel que $\beta_\mu(t) \in Y$ and

$$\begin{aligned} & (\dot{\beta}_\mu(t), \xi - \beta_\mu(t))_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\mu(t), \xi - \beta_\mu(t)) \\ \geq \; & (\mu(t), \xi - \beta_\mu(t))_{L^2(\Omega)}, \text{ pour tout } \xi \in K \text{ p.p.} t \in (0,T), \end{aligned} \tag{5.3.24}$$

et

$$\beta_\mu(0) = \beta_0. \tag{5.3.25}$$

Dans l'étude du problème de PV^3_μ , nous avons le résultat suivant.

Lemme 5.3.4. Le problème PV^3_μ admet une solution unique satisfaisant (**5**.3.3).

De plus, si β_i est la solution du probléme PV_μ correspond $\mu = \mu_i \in L^2(0,T\ ;L^2(\Omega))$ pour $i = 1,2$ alors

$$|\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^t |\mu_1(s) - \mu_2(s)|^2_{L^2(\Omega)}\, ds. \tag{5.3.26}$$

Démonstration. Nous utilisons la définition (**4**.1.29) et le fait que $\beta_0 \in K$ dans (**5**.1.25) et un résultat classique d'existence et d'unicité sur les inéquations paraboliques données dans le *théorème* **2.28** référence [53] .

Dans la quatrième étape, nous utilisons le champ de déplacement $\mathbf{u}_\delta$ obtenu dans le lemme **5**.3.3 et on considère le problème variationnel suivant

Problème PV_θ^3 Trouver le champ de température $\theta_\delta : [0,T] \longrightarrow E$ tel que

$$\dot{\theta}_\delta(t) + K\theta_\delta(t) = R\dot{\mathbf{u}}_\delta(t) + Q(t) \quad \text{dans } E', \text{ p.p. } t \in (0,T), \tag{5.3.27}$$

$$\theta_\delta(0) = \theta_0 \tag{5.3.28}$$

Dans l'étude du problème PV_θ^3 nous avons le résultat suivant

Lemme 5.3.5. Le problème PV_θ^3 a une solution unique satisfaisant

$$\theta_\delta \in C\left(0,T\ ;L^2(\Omega)\right) \cap L^2(0,T\ ;E) \cap W^{1,2}(0,T\ ;E'). \tag{5.3.29}$$

De plus, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\delta_1, \delta_2 \in L^2(0,T\ ;V')$:

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} \le C\int_0^t |\delta_1(s) - \delta_2(s)|^2_{V'}\, ds. \text{ pour tout } t \in [0,T]. \tag{5.3.30}$$

Ici, nous avons écrit $\theta_{\delta_i} = \theta_i$, pour $i = 1,2$.

Démonstration. Le résultat découle de l'évolution d'équation classique du premier ordre donné.

Nous allons appliquer le *théorème* **2.29** dans la référence [53]. Ici, le Triple de Gelfand est donnée par

$$E \subset L^2(\Omega) = \left(L^2(\Omega)\right)' \subset E'.$$

On a

$$(K\tau\ ,\ \tau)_{E'\times E} = \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega k_{ij}\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}dx + \int_{\Gamma_3} k_e\tau^2 da \quad ,$$

L'opérateur K est linéaire et coercitive. Par l'inégalité de Korn, nous avons

$$(K\tau,\tau)_{E'\times E} \ge C\,|\tau|^2_E\,. \tag{5.3.31}$$

Ici et dans ce qui suit, $C > 0$ dénote une constante générique qui change d'une place à une autre. Moyennant (**5**.1.33) et pour tout $\tau,\omega \in E$ on a

$$\begin{aligned}(K\tau\ ,\ \omega)_{E'\times E} &\le \sum_{i,j=1}^{3}|k_{ij}|_{L^\infty(\Omega)}|\tau_{,i}|_{L^2(\Omega)}|\omega_{,i}|_{L^2(\Omega)} + |k_e|_{L^\infty(\Gamma_3)}|\tau|_{L^2(\Gamma_3)}|\omega|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\le |k|_{L^\infty(\Omega)^{d\times d}}|\nabla\tau|_E|\nabla\omega|_E + |k_e|_{L^\infty(\Gamma_3)}|\tau|_{L^2(\Gamma_3)}|\omega|_{L^2(\Gamma_3)}\end{aligned}$$

En utilisant ($\mathbf{1}$.4.2) avec $p=2$ et $k=1$ on trouve

$$\left(K\tau\ ,\ \omega\right)_{E'\times E}\leq C\left|\tau\right|_{E}\left|\omega\right|_{E} \tag{5.3.32}$$

D'un autre coté, d'après les définitions de R,Q, on déduit que

$$R\dot{\mathbf{u}}_{\delta}+Q\in L^{2}\left(0,T;E'\right) \tag{5.3.33}$$

Les inégalités ($\mathbf{5}$.3.31) et ($\mathbf{5}$.3.32), ainsi que la condition de régularité ($\mathbf{5}$.3.33), avec $\theta_0\in L^2\left(\Omega\right)$, garantissent que toutes les conditions du (*théorème* **2.29** dans la référence [53]). Par conséquent, nous déduisons l'existence d'une fonction unique θ_δ qui satisfait à la fois ($\mathbf{5}$.3.27)-($\mathbf{5}$.3.28) et ($\mathbf{5}$.3.29). De ($\mathbf{5}$.3.27), on déduit que

$$\begin{aligned}&\left(\dot{\theta}_{1}\left(t\right)-\dot{\theta}_{2}\left(t\right),\theta_{1}\left(t\right)-\theta_{2}\left(t\right)\right)_{L^{2}(\Omega)}+\left(K\left(\theta_{1}\left(t\right)-\theta_{2}\left(t\right)\right),\theta_{1}\left(t\right)-\theta_{2}\left(t\right)\right)_{L^{2}(\Omega)}\\ =\ &\left(R\left(\dot{\mathbf{u}}_{1}\left(t\right)-\dot{\mathbf{u}}_{2}\left(t\right)\right),\theta_{1}\left(t\right)-\theta_{2}\left(t\right)\right)_{L^{2}(\Omega)},\ \text{p.p. } t\in\left(0,T\right).\end{aligned} \tag{5.3.34}$$

On intègre l'égalité ($\mathbf{5}$.3.34) par rapport au temps, on utilise les conditions initiales $\theta_1\left(0\right)=\theta_2\left(0\right)=\theta_0$, le fait que K est coercitif et la continuité de Lipschitz de l'opérateur R et on trouve que

$$\frac{1}{2}\ \left|\theta_{1}\left(t\right)-\theta_{2}\left(t\right)\right|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\leq L_{r}\int_{0}^{t}\left|\dot{\mathbf{u}}_{1}\left(s\right)-\dot{\mathbf{u}}_{2}\left(s\right)\right|_{V}\ \left|\theta_{1}\left(s\right)-\theta_{2}\left(s\right)\right|_{L^{2}(\Omega)}ds.$$

En utilisant l'inégalité $2ab\leq\left(a^2+b^2\right)$, on obtient que

$$\left|\theta_{1}\left(t\right)-\theta_{2}\left(t\right)\right|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\leq C\left(\int_{0}^{t}\left|\dot{\mathbf{u}}_{1}\left(s\right)-\dot{\mathbf{u}}_{2}\left(s\right)\right|_{V}^{2}ds+\int_{0}^{t}\left|\theta_{1}\left(s\right)-\theta_{2}\left(s\right)\right|_{L^{2}(\Omega)}^{2}ds\right).$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\left|\theta_{1}\left(t\right)-\theta_{2}\left(t\right)\right|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\leq C\int_{0}^{t}\left|\dot{\mathbf{u}}_{1}\left(s\right)-\dot{\mathbf{u}}_{2}\left(s\right)\right|_{V}^{2}ds,\quad \text{p.p. } t\in\left(0,T\right). \tag{5.3.35}$$

En utilisant ($\mathbf{5}$.3.21)-($\mathbf{5}$.3.22), nous obtenons pour p.p. $t\in\left(0,T\right)$ que

$$\begin{aligned}&(\ddot{\mathbf{u}}_1-\ddot{\mathbf{u}}_2,\dot{\mathbf{u}}_1-\dot{\mathbf{u}}_2)_{V'\times V}+(A\dot{\mathbf{u}}_1-A\dot{\mathbf{u}}_2,\dot{\mathbf{u}}_1-\dot{\mathbf{u}}_2)_{V'\times V}\\ \leq\ &j(\mathbf{u}_1,\dot{\mathbf{u}}_2)-j(\mathbf{u}_1,\dot{\mathbf{u}}_1)+j(\mathbf{u}_2,\dot{\mathbf{u}}_1)-j(\mathbf{u}_2,\dot{\mathbf{u}}_2)\\ &+(\delta_1-\delta_2,\dot{\mathbf{u}}_1-\dot{\mathbf{u}}_2)_{V'\times V}\end{aligned} \tag{5.3.36}$$

On note $C_\mu = L_\nu C_0^2 |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)}$ et $C_{\mathcal{A}\mu} = \frac{m_\mathcal{A} - C_\mu}{2}$. On intègre (**5**.3.36) par rapport au temps. En utilisant les conditions initiales .$\dot{\mathbf{u}}_1(0) = \dot{\mathbf{u}}_2(0) = \mathbf{v}_0$, Hypothèses (**3**.1.9), (**5**.1.18),(**5**.1.21) et (**1**.4.20),(**5**.1.30),(**5**.3.17) on obtient que

$$\begin{aligned} & m_\mathcal{A} \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_V^2 \, ds \\ \leq & \int_0^t |\delta_1(s) - \delta_2(s)|_{V'} |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_V \, ds \\ & + C_\mu \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_V \, ds. \end{aligned} \tag{5.3.37}$$

Utiliser l'inégalité

$$ab \leq \frac{m_\mathcal{A} a^2}{2C_\mu} + \frac{C_\mu b^2}{2m_\mathcal{A}}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} & C_\mu \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_V \, ds \\ \leq & \frac{m_\mathcal{A}}{2} \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_V^2 \, ds \\ & + \frac{C_\mu^2}{2m_\mathcal{A}} \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 \, ds. \end{aligned} \tag{5.3.38}$$

En utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{C_\mu a^2}{2} + \frac{b^2}{2C_\mu}$, on obtient que

$$\begin{aligned} & \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_V^2 \, ds \\ \leq & \frac{C_\mu^2}{2m_\mathcal{A} C_{\mathcal{A}\mu}} \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 \, ds \\ & + \frac{1}{2C_\mu C_{\mathcal{A}\mu}} \int_0^t |\delta_1(s) - \delta_2(s)|_{V'} \, ds. \end{aligned} \tag{5.3.39}$$

Depuis

$$\int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_V^2 \, ds \leq \int_0^t \int_0^s |\dot{\mathbf{u}}_1(r) - \dot{\mathbf{u}}_2(r)|_V^2 \, dr ds,$$

(**5**.3.39) prend la forme

$$\begin{aligned} & \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_V^2 \, ds \\ \leq & \frac{C_\mu^2}{2m_\mathcal{A} C_{\mathcal{A}\mu}} \int_0^t \int_0^s |\dot{\mathbf{u}}_1(r) - \dot{\mathbf{u}}_2(r)|_V^2 \, dr ds \\ & + \frac{1}{2C_\mu C_{\mathcal{A}\mu}} \int_0^t |\delta_1(s) - \delta_2(s)|_{V'} \, ds. \end{aligned} \tag{5.3.40}$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall à (**5**.3.40) on obtient que

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\right|_V^2 ds \\ \leq \; & C\int_0^t \left|\delta_1(s) - \delta_2(s)\right|_{V'} ds. \text{ pour tout } t \in [0,T]. \end{aligned} \quad (\mathbf{5}.3.41)$$

L'estimation (**5**.3.30) découle de (**5**.3.35) et (**5**.3.41).

Finalement, on considère l'opérateur

$$\Sigma : L^2\left(0,T\ ;V' \times L^2(\Omega)\right) \to L^2\left(0,T\ ;V' \times L^2(\Omega)\right)$$

donné par

$$\Sigma(\delta,\mu)(t) = \left(\Sigma^1(\delta,\mu)(t), \Sigma^2(\delta,\mu)(t)\right) \in V' \times L^2(\Omega) \quad (\mathbf{5}.3.42)$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma^1(\delta,\mu)(t) \;=\; & \left(\mathcal{F}\varepsilon\left(\mathbf{u}_\delta(t)\right), \varepsilon(\mathbf{v})\right)_{\mathcal{H}} \\ & + \left(\int_0^t M(t-s,\varepsilon(\mathbf{u}_\delta(s)), \beta_\mu(s), \theta_\delta(s))\, \mathrm{d}s, \varepsilon(\mathbf{v})\right)_{\mathcal{H}} \\ & + \phi\left(\mathbf{u}_\delta(t), \mathbf{v}\right) \end{aligned} \quad (\mathbf{5}.3.43)$$

et

$$\Sigma^2(\delta,\mu)(t)(t) = S\left(\varepsilon\left(\mathbf{u}_\eta(t)\right), \beta_\mu(t), \theta_\delta(s)\right). \quad (\mathbf{5}.3.44)$$

Pour tout couple $(\delta,\mu) \in L^2(0,T\ ;V' \times L^2(\Omega))$, où $\mathbf{u}_\delta, \beta_\mu$ et θ_δ désignent respectivement le champ de déplacement, le champ d'endommagement et le champ de température obtenus dans les *lemmes* **5.3.3**, **5.3.4** et **5.3.5**, le *lemme* **5.3.6** respectivement.

Lemme 5.3.6. L'opérateur Σ admet un point fixe unique $(\delta,\mu) \in L^2(0,T\ ;V' \times L^2(\Omega))$ tel que $\Sigma(\delta,\mu) = (\delta,\mu)$.

Démonstration. Soient $(\delta_1,\mu_1),(\delta_2,\mu_2) \in L^2(0,T\ ;V' \times L^2(\Omega))$.

Pour simplicité, nous utilisons les notation $\mathbf{u}_{\delta_i} = \mathbf{u}_i, \dot{\mathbf{u}}_{\delta_i} = \dot{\mathbf{u}}_i, \beta_{\mu_i} = \beta_i$ et $\theta_{\delta_i} = \theta_i$,pour $i = 1,2$.Application (**5**.3.42)-(**5**.3.44),(**1**.4.19), (**5**.1.31) et hypothèses (**4**.1.10),(**5**.1.14)-(**5**.1.15), on obtient que

$$\begin{aligned}
|\Sigma(\delta_1,\mu_1)(t)-\Sigma(\delta_2,\mu_2)(t)|^2_{V'\times L^2(\Omega)} &\leq C(|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)|^2_V+\int_0^t|\mathbf{u}_1(s)-\mathbf{u}_2(s)|^2_V\,ds \\
&\quad +|\beta_1(t)-\beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t|\beta_1(s)-\beta_2(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \\
&\quad +|\theta_1(t)-\theta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t|\theta_1(s)-\theta_2(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds) \qquad (\mathbf{5}.3.45)
\end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{u}_1(0)=\mathbf{u}_2(0)=\mathbf{u}_0$, on a

$$|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)|^2_V \leq \int_0^t|\dot{\mathbf{u}}_1(s)-\dot{\mathbf{u}}_2(s)|^2_V\,ds \qquad (\mathbf{5}.3.46)$$

($\mathbf{5}$.3.41) combiné avec ($\mathbf{5}$.3.46) conduit à

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{u}_1(t)-\mathbf{u}_2(t)|^2_V+\int_0^t|\dot{\mathbf{u}}_1(s)-\dot{\mathbf{u}}_2(s)|^2_V\,ds \\
\leq\ & C\int_0^t|\delta_1(s)-\delta_2(s)|^2_{V'}\,ds. \qquad (\mathbf{5}.3.47)
\end{aligned}$$

De ($\mathbf{5}$.3.26), il résulte que

$$\begin{aligned}
&|\beta_1(t)-\beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t|\beta_1(s)-\beta_2(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \\
\leq\ & C\int_0^t|\mu_1(s)-\mu_2(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds. \qquad (\mathbf{5}.3.48)
\end{aligned}$$

De ($\mathbf{5}$.3.30), il résulte que

$$\begin{aligned}
&|\theta_1(t)-\theta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t|\theta_1(s)-\theta_2(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \\
\leq\ & C\int_0^t|\delta_1(s)-\delta_2(s)|^2_{V'}\,ds. \qquad (\mathbf{5}.3.49)
\end{aligned}$$

Les estimations ($\mathbf{5}$.3.47)-($\mathbf{5}$.3.49) nous donnent

$$\begin{aligned}
&|\Sigma(\delta_1,\mu_1)(t)-\Sigma(\delta_2,\mu_2)(t)|^2_{V'\times L^2(\Omega)} \\
\leq\ & C\int_0^t|(\delta_1,\mu_1)(s)-(\delta_2,\mu_2)(s)|^2_{V'\times L^2(\Omega)}\,ds.
\end{aligned}$$

Réitérer cette inégalité n fois conduit à

$$\begin{aligned}
&|\Sigma^n(\delta_1,\mu_1)(t)-\Sigma^n(\delta_2,\mu_2)(t)|^2_{V'\times L^2(\Omega)} \\
\leq\ & \frac{(CT)^n}{n!}|(\delta_1,\mu_1)(s)-(\delta_2,\mu_2)(s)|^2_{L^2(0,T;)V'\times L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, Σ^n est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))$, alors admet un point fixe unique.

Passons maintenant à la démonstration du *théorème* **5.3.1**

Démonstration du théorème 5.3.1

Existence.

Soit $(\delta^*, \mu^*) \in L^2(0,T\ ;V' \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Σ défini par (**5**.3.42)-(**5**.3.44) et on note par

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\delta^*} \quad , \dot{\mathbf{u}} = &\ \dot{\mathbf{u}}_{\delta^*}, \beta = \beta_{\mu^*}, \theta = \theta_{\delta^*} &\quad (\mathbf{5}.3.50)\\ \sigma(t) \quad = &\ \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) \\ &+ \int_0^t M(t-s, \varepsilon(\mathbf{u}(s)), \beta(s), \theta(s))\, \mathrm{d}s. &\quad (\mathbf{5}.3.51) \end{aligned}$$

On montre que le quadruplet $(\mathbf{u}, \sigma, \beta, \theta)$ satisfait (**5**.2.6)-(**5**.2.10) et (**5**.3.1)-(**5**.3.4). Ensuite on applique (**5**.3.22) avec $\delta = \delta^*$, (**5**.3.50), les égalités $\Sigma^1(\delta^*, \mu^*) = \delta^*$ et $\Sigma^1(\delta^*, \mu^*) = \mu^*$ combiné avec (**5**.3.43)-(**5**.3.44) et conclure que (**5**.2.7) est satisfait. Ensuite, nous appliquons (**5**.3.24) avec $\mu = \mu^*$ et utilisons (**5**.3.44) et (**5**.3.50) pour conclure que (**5**.2.8) est satisfait. On écrit (**5**.3.27) avec $\delta = \delta^*$ puis on utilise (**5**.3.50) pour obtenir (**5**.2.9). Nous conclure que $(\mathbf{u}, \sigma, \beta, \theta)$ satisfait (**5**.2.6)-(**5**.2.9). Ensuite, (**5**.2.10) et les régularités (**5**.3.1),(**5**.3.3),(**5**.3.4) découlent des lemmes **5.3.3**, **5.3.4** et **5.3.5**. La régularité $\sigma \in L^2(0,T;\mathcal{H})$ est une conséquence des lemmes **5.3.3**, **5.3.4** et **5.3.5**, et de l'hypothèse (**3**.2.9), (**5**.3.51) et des hypothèses sur $\mathcal{F}$ et M. Enfin (**5**.2.7) implique que

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = Div\sigma + f_0 \ \text{ dans } V' \ \text{ p.p } t \in (0,T),$$

et il résulte donc des hypothèses (**5**.1.20) et (**5**.1.22) que $Div\sigma \in L^2(0,T;V)$. On en déduit que la régularité (**5**.3.2) est vraie, ce qui conclut la preuve de la partie existence du théorème **5.3.1.** La partie d'unicité est une conséquence du point fixe de l'opérateur Σ défini par (**5**.3.42)-(**5**.3.44) et de la résolvabilité unique des problèmes $PV^3_{\mathbf{u}_\delta}$, $PV^3_{\boldsymbol{\mu}}$ et $PV^3_{\boldsymbol{\theta}}$.

Chapitre 6

Analyse d'un problème dynamique de contact avec des conditions aux limites sous-différentielles

Dans ce chapitre, nous présentons l'étude mathématique d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux électro-viscoélastiques dans un processus dynamique. Le contact est modélisé avec une condition bilatérale et est associé à une loi de frottement sous-différentielle des surfaces de contact. Le problème est formulé comme un système comprenant une inéquation hémivariationnelle hyperbolique pour le champ de déplacement et une inéquation hémivariationnelle elliptique pour le champ potentiel électrique. Des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été établis en utilisant la théorie des inéquations hémivariationnelles ainsi que des arguments de point fixe.

6.1 Cadre physique et formulation classique

Nous reprenons le cadre physique des problèmes électriques décrit dans le premier chapitre. On considère que le contact sur Γ_3 est modélisé par les conditions de contact bilatéral avec frottement sous-différentielle (**1**.1.19), ainsi que la condition aux limites sous-différentielle électrique (**1**.2.10). Cependant, sur Γ_a et Γ_b, nous imposons les conditions électriques classiques (**1**.2.8) et (**1**.2.9). Ce problème mécanique

problème P^6. Trouver $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}$,$\varphi$et $\mathbf{D}$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\left(t, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))\right) + \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) - \mathcal{E}^* E\varphi\left(t\right) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{\textbf{6}.1.1}$$

$$\mathbf{D}\left(t\right) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \mathcal{B}E\varphi\left(t\right) \;\; \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{\textbf{6}.1.2}$$

$$Div\ \boldsymbol{\sigma}\left(t\right) + \mathbf{f}_0\left(t\right) = \ddot{\mathbf{u}}\left(t\right) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{\textbf{6}.1.3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}\left(t\right) = q_0\left(t\right) \;\; \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{\textbf{6}.1.4}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,T)\,, \tag{\textbf{6}.1.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T)\,, \tag{\textbf{6}.1.6}$$

$$\left\{\begin{array}{lr} \mathbf{u}_\nu\left(t\right) = 0, & \text{(a)} \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau\left(t\right) \in \partial j_\tau\left(t, \dot{\mathbf{u}}_\tau\left(t\right)\right) & \text{(b)} \end{array}\right. \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{\textbf{6}.1.7}$$

$$\mathbf{D}\left(t\right).\boldsymbol{\nu} \in \partial j_e\left(\varphi\left(t\right) - \varphi_0\right) \;\; \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{\textbf{6}.1.8}$$

$$\varphi\left(t\right) = 0 \text{ sur } \Gamma_a \times (0,T), \tag{\textbf{6}.1.9}$$

$$\mathbf{D}\left(t\right).\boldsymbol{\nu} = q_b\left(t\right) \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0,T)\,, \tag{\textbf{6}.1.10}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \;\; \dot{\mathbf{u}}(0) = w_0 \text{ dans } \Omega. \tag{\textbf{6}.1.11}$$

Les équations (**6**.1.1) et (**6**.1.2) décrivent les principes de comportement pour les matériaux électro-viscoélastiques. Dans ces équations, $\boldsymbol{\sigma}$ représente le tenseur des contraintes, $\mathbf{u}$ est le champ de déplacement, $\dot{\mathbf{u}}$ est le champ de vitesse, $\mathcal{F}$ est l'opérateur d'élasticité, $\mathcal{E}$ est le tenseur piézoélectrique du troisième ordre avec sa transposée $\mathcal{E}^*$, $\mathcal{B}$ est le tenseur de permittivité électrique, et $E\left(\varphi\right)$ est le champ électrique, c'est-à-dire $E\left(\varphi\right) = -\nabla\varphi$, si $\mathcal{E} = (e_{ijk})$, alors les composantes du tenseur $\mathcal{E}^*$ sont données $e^*_{ijk} = e_{kij}$. La relation (**6**.1.7)(a) désigne la condition de contact bilatéral et signifie que le corps est toujours en contact avec la fondation. L'inclusion (**6**.1.7)(b) est la condition de frottement sous-différentielle qui généralise la loi de Coulomb du frottement sec. En particulier, en prenant $j_\tau(\boldsymbol{\xi}) = F_b \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}$ (où F_b est la borne de friction), On obtient la loi de Coulomb classique (voir [39]).

Dans l'étude du problème mécanique P^6 , nous faisons les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}: \ Q \times S^d \longrightarrow \ S^d$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l} (a) \text{ Il existes } a_0 \in L^2(Q), a_0 \geq 0 \text{ et } a_1 \geq 0 \text{ tel que} \\ \qquad\qquad | \mathcal{A}(x,t,\varepsilon) |_{S^d} \leq a_0(x,t) + a_1 \ \|\varepsilon\|_{S^d} \quad \text{Pour tout } \varepsilon \in S^d, \text{ p.p } (x,t) \in Q. \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}(x,t,\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x,t,\varepsilon_2), (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2_{S^d} \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \quad \text{p.p } x \in Q. \\ (c) \ (x,t) \longrightarrow \mathcal{A}(x,t,\varepsilon) \text{ est mesurable sur } Q \text{ Pour tout } \varepsilon \in S^d. \\ (d) \ \varepsilon \longrightarrow \mathcal{A}(x,t,.\varepsilon) \text{ est continue sur } S^d \text{ Pour p.p } (x,t) \in Q. \\ \text{(e) } \mathcal{A}(x,t,0) = 0 \text{ Pour p.p } (x,t) \in Q. \end{array}\right. \tag{6.1.12}$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{F}: \ \Omega \times S^d \longrightarrow \ S^d$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \ | \mathcal{F}(x,t,\varepsilon_1) - \mathcal{F}(x,t,\varepsilon_2) |_{S^d} \leq L_{\mathcal{F}} \ |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_{S^d} \quad \text{Pour tout } \varepsilon \in S^d, \text{ p.p } x \in \Omega. \\ \text{(b) pour tout } \varepsilon \in S^d, \ x \to F(x,\varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \end{array}\right. \tag{6.1.13}$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}: \ \Omega \times S^d \longrightarrow \ \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E}(x,\varepsilon) = e(x) \text{ pour tout } \varepsilon \in S^d, \quad \text{p.p } x \in \Omega. \\ (b) \ e(x) = (e_{ijk}(x)) \text{ avec } e_{ijk} \in L^\infty(\Omega). \end{array}\right. \tag{6.1.14}$$

Le tenseur de permittivité électrique $\mathcal{B}: \ \Omega \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \ \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{B}(x,\zeta) = b(x)\zeta \text{ pour tout } \zeta \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.p } x \in \Omega. \\ \text{(b) } \mathcal{B}(x) = (b_{ij}(x)) \text{ avec } b_{ij} = b_{ji} \in L^\infty(\Omega). \\ \text{(c) Il existe une constante } m_b \succ 0 \text{ tel que} \\ \text{(b) } \ b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq m_b \|\boldsymbol{\xi}\|^2_{\mathbb{R}^d} \text{ Pour tout } \boldsymbol{\xi} = (\xi_i) \in \mathbb{R}^d. \end{array}\right. \tag{6.1.15}$$

En partant des hypothèses (**6**.1.14) et (**6**.1.15), nous concluons que l'opérateur piézoélectrique $\mathcal{E}$ (et de même, l'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{B}$) est linéaire, avec des composantes mesurables et bornées notées e_{ijk} (et respectivement b_{ij}). De plus, $\mathcal{B}$ est symétrique et défini positif. Il est également important de rappeler que l'opérateur transposé $\mathcal{E}^*$ est défini par $\mathcal{E}^* = \left(e^*_{ijk}\right)$ où $e^*_{ijk} = e_{kij}$, et l'égalité suivante est vérifiée :

$$\mathcal{E}\sigma.v = \sigma.\mathcal{E}^* v \quad \forall \sigma \in S_d \text{ , } v \in \mathbb{R}.$$

Le potentiel de frottement $j_\tau :\ \Sigma_3 \times (0,T) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \ \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) Il existe } c_{0\tau}, c_{1\tau} > 0 \text{ tel que} \\
\left\|\partial j_\tau(x,t,\boldsymbol{\xi})\right\|_{\mathbb{R}^d} \leq c_{0\tau} + c_{1\tau}\left\|\boldsymbol{\xi}\right\|_{\mathbb{R}^d} \text{ Pour tout } \ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \text{ p.p.} (x,t) \in \Sigma_3 \qquad . \\
\text{(b) Il existe } c_{2\tau} > 0 \text{ tel que} \\
(\zeta_1 - \zeta_2) . (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq -\ c_{2\tau}\left\|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\right\|^2_{\mathbb{R}^d} \text{ Pour tout } \zeta_i \in \partial j_\tau(x,t,r_i), \boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}^d, \\
i = 1,2 \text{ p.p.} (x,t) \in \Sigma_3. \\
\text{(c) Il existe } c_{2\tau} \geq 0 \text{ tel que} \\
\quad j^0_\tau(x,t,\boldsymbol{\xi};-\boldsymbol{\xi}) \ \leq c_{3\tau}\left(1 + \left\|\boldsymbol{\xi}\right\|_{\mathbb{R}^d}\right) \text{ Pour tout } \ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \text{ p.p.} (x,t) \in \Sigma_3 \\
\text{(d) } (x,t) \longrightarrow j_\tau(x,t,\boldsymbol{\xi}) \text{ est mesurable sur } \Sigma_3 \text{ pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \text{ et } j_\tau(x,t,0) \in L^1(\Sigma_3). \\
\text{(e) } j_\nu(x,t,.) \text{ est localement Lipschitz sur } \mathbb{R}^d \text{ pour p.p.} (x,t) \in \Sigma_3.
\end{array}\right.$$

(**6**.1.16)

La fonction de potentiel électrique $j_e :\ \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \ \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) } \left|\ \partial j_e(x,r)\right| \leq \ c_{0e} + c_{1e}\left|r\right| \quad \forall r \in \mathbb{R} \text{ p.p.} x \in \Gamma_3. \qquad . \\
\text{(b) Il existe une constante } m_e > 0 \text{ tel que} \\
\quad (\zeta_1 - \zeta_2)(r_1 - r_2) \geq -\ m_e\left|r_1 - r_2\right|^2 \text{ Pour tout } \zeta_i \in \partial j_e(x,t,r_i), \\
r_i \in \mathbb{R}, i = 1,2 \text{ p.p.} (x,t) \in \Sigma_3. \\
\text{(c) } x \longrightarrow j_e(x,r) \text{ est mesurable sur } \Sigma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R} \text{ et} \\
\text{il existe } e_3 \in L^2(\Gamma_3) \text{ tel que } j_e(x, e_3(.)) \in L^1(\Gamma_3). \\
\text{(d) } j_e(x,.) \text{ est localement Lipschitz sur } \mathbb{R} \text{ pour p.p.} x \in \Gamma_3.
\end{array}\right. \qquad (\mathbf{6}.1.17)$$

nous supposons que les forces volumiques $\mathbf{f}_0$ et les tractions surfaciques $\mathbf{f}_2$ ont la régularité

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(0,T;H) \quad , \quad \mathbf{f}_2 \in L^2\left(0,T;L^2\left(\Gamma_2;\mathbb{R}^d\right)\right) \qquad (\mathbf{6}.1.18)$$

Les densités d'électricité charge et charge électrique gratuite de surface ont la régularité

$$q_0 \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \quad , \quad q_b \in L^2\left(0,T;L^2(\Gamma_b)\right). \qquad (\mathbf{6}.1.19)$$

et, enfin, les données initiales ont la régularité

$$\mathbf{u}_0 \in V, \quad \mathbf{v}_0 \in V, \quad \varphi_0 \in L^{\infty}(\Gamma_3). \tag{6.1.20}$$

On définit les applications $\mathbf{f} : (0,T) \longrightarrow V'$ et $q : [0,T] \to W$, respectivement, pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \varphi \in W$ et $t \in [0,T]$, par

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = (f_0(t), \mathbf{v})_H + (f_2(t), \mathbf{v})_{L^2(\Gamma_2;\mathbb{R}^d)} \quad \text{pour } \mathbf{v} \in V \text{ et p.p.} t \in (0,T). \tag{6.1.21}$$

$$(q(t), \psi)_{W' \times W} = \int_\Omega q_0(t)\,\psi \mathrm{d}x - \int_{\Gamma_b} q_b(t)\,\psi \mathrm{d}a \quad \text{pour } \psi \in W \text{ et p.p.} t \in (0,T). \tag{6.1.22}$$

Ensuite, nous présentons la formulation variationnelle du problème P^6.

6.2 Formulation variationnelle

On Supposons que $\{u, \sigma, \varphi, \mathbf{D}\}$ soient des fonctions suffisamment lisses qui résolvent (**6**.1.1)-(**6**.1.11). Nous utilisons l'équation du mouvement (**6**.1.3) et la formule de Green (**1**.4.21) pour trouver que

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v})_{V^* \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = (f_0(t), \mathbf{v})_H + \int_\Gamma \sigma(t)\,\nu.\mathbf{v}\mathrm{d}a, \tag{6.2.1}$$

Ensuite, nous décomposons l'intégrale de bord sur Γ_1,Γ_2 et $\sigma_\nu \mathbf{v}_\nu$ et, puisque $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ p.p. sur Γ_1, $\sigma\nu = f_2$ sur Γ_2, et

$$\sigma\nu.\mathbf{v} = \sigma_\nu \mathbf{v}_\nu + \sigma_\tau.\mathbf{v}_\tau \quad \text{on } \Gamma_3$$

on en déduit que

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v})_{V^* \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = (f_0(t), \mathbf{v})_H + (f_2(t), \mathbf{v})_{L^2(\Gamma_2;\mathbb{R}^d)} + \int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu(t)\,\mathbf{v}_\nu + \sigma_\tau(t).\mathbf{v}_\tau)\,\mathrm{d}a \tag{6.2.2}$$

D'autre part, de la définition de la sous-différentielle de Clarke combinée avec (**6**.1.7)(a) , on a

$$-\sigma_\tau(t)\,\mathbf{v}_\tau \leq j_\tau^0(t, \dot{u}_\tau(t); \mathbf{v}_\tau), \quad \text{sur } \Sigma_3,$$

ce qui implique que

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu(t)\,\mathbf{v}_\nu + \sigma_\tau(t).\mathbf{v}_\tau)\,\mathrm{d}a \geq -\int_{\Gamma_3} j_\tau^0(t, \dot{u}_\tau(t); \mathbf{v}_\tau)\,\mathrm{d}a \tag{6.2.3}$$

Nous combinons maintenant (**6**.2.1)-(**6**.2.3) pour voir que

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v})_{V^* \times V} + (\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + \int_{\Gamma_3} j_\tau^0(t, \dot{u}_\tau(t); \mathbf{v}_\tau)\, \mathrm{d}a \\ \geq\ & (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V^* \times V}. \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \ \text{ p.p.} t \in (0,T). \end{aligned} \qquad (\mathbf{6}.2.4)$$

où la fonction $\mathbf{f} : (0,T) \to V^*$ est donné par(**6**.1.21).

De même, pour $\psi \in W$ et $t \in (0,T)$, d'après (**6**.1.4) et la formule de Green (**1**.4.26) on en déduit que

$$(\mathbf{D}(t), \nabla\psi)_H + \int_\Omega q_0(t)\psi \mathrm{d}x = \int_{\Gamma_3} \mathbf{D}(t).\nu\psi \mathrm{d}a$$

et ensuite, par (**6**.1.10) on obtient

$$-(\mathbf{D}(t), \nabla\psi)_H + \int_{\Gamma_3} \mathbf{D}(t).\nu\psi \mathrm{d}a = (q(t), \psi)_{W' \times W}, \qquad (\mathbf{6}.2.5)$$

où la fonction q: $(0,T) \to W'$ est donné par (**6**.1.22).

De la définition du sous-différentiel de Clarke et (**6**.1.8) on a

$$\mathbf{D}(t).\nu\psi \leq j_e^0(\varphi(t) - \varphi_0; \psi) \ \text{ sur } \Sigma_3,$$

ce qui implique que

$$\int_{\Gamma_3} \mathbf{D}(t).\nu\psi \mathrm{d}a \leq \int_{\Gamma_3} j_e^0(\varphi(t) - \varphi_0; \psi)\, \mathrm{d}a. \qquad (\mathbf{6}.2.6)$$

On combine maintenant (**6**.2.5) et (**6**.2.6) pour obtenir

$$-(\mathbf{D}(t), \nabla\psi)_H + \int_{\Gamma_3} j_e^0(\varphi(t) - \varphi_0; \psi)\, \mathrm{d}a \geq (q(t), \psi)_{W' \times W} \quad \forall\psi\in W \ \text{ p.p.} t \in (0,T). \qquad (\mathbf{6}.2.7)$$

pour tous $\psi \in W$, p.p.$t \in (0,T)$. Nous remplaçons maintenant (**6**.1.2) dans (**6**.1.7), utilisons l'égalité $E(\varphi) = -\nabla\varphi$ et les conditions initiales (**6**.1.11) pour dériver la formulation variationnelle suivante du problème P^6, en termes de champ de déplacement et potentiel électrique

problème PV^6 Trouvrer le champ de déplacement $\mathbf{u} : [\,0,T\,] \longrightarrow V$ et un potentiel électrique $\varphi : [\,0,T\,] \longrightarrow W$ tels que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}(t) \quad &= \quad \mathcal{A}\left(t,\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))\right)+\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t))-\mathcal{E}^{*}E\varphi\left(t\right)\\
&(\ddot{\mathbf{u}}(t),\mathbf{v})_{V'\times V}+(\boldsymbol{\sigma}(t),\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}+\int_{\Gamma_3} j_{\tau}^{0}\left(t,\dot{u}_{\tau}\left(t\right);\mathbf{v}_{\tau}\right)\mathrm{d}a\\
&\geq \quad (\mathbf{f}(t),\mathbf{v})_{V'\times V} \quad \text{pour tout } \mathbf{v}\in V,\ \text{p.p. } t\in(0,T)\,, \qquad (6.2.8)\\
&(\mathcal{B}\nabla\varphi(t),\nabla\psi)_{H}-(\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}(t)),\nabla\psi)_{H}+\int_{\Gamma_3}\left(j_{e}^{0}\left(\varphi\left(t\right)-\varphi_{0};\psi\right)\right)\mathrm{d}a\\
&\geq \quad \left(q\left(t\right),\psi\right)_{W'\times W} \quad \text{pour tout } \psi\in W,\ \text{p.p. } t\in(0,T)\,, \qquad (6.2.9)\\
&\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0,\ \ \dot{\mathbf{u}}(0)=w_0. \qquad (\mathbf{6}.2.10)
\end{aligned}$$

6.3 Existence et l'unicité de la solution

Notez que, contrairement aux formulations variationnelles des problèmes de contact frictionnel étudiés précédemment, le problème P^6 représente un système d'inégalités hémivariationnelles. Une des caractéristiques principales de ce système réside dans le couplage entre les inconnues $\mathbf{u}$ et φ, qui apparaît dans les termes contenant le tenseur de piézoélectricité $\mathcal{E}$.

Afin d'énoncer le résultat principal d'existence et d'unicité de cette section, nous avons besoin des espaces $Z = H^{\delta}\left(\Omega,\mathbb{R}^d\right)$ et $Z_1 = H^{\delta}\left(\Omega\right)$ avec un $\delta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ fixe. Alors les plongements V dans Z et W dans Z_1 sont compacts. Par c_{VZ} et c_{WZ_1} nous désignons les constantes des plongements $V \longrightarrow Z$ et $W \longrightarrow Z_1$ respectivement.

On note $\gamma : Z \longrightarrow L^2\left(\Gamma;\mathbb{R}^d\right)$ l'opérateur trace sur Z, par $||\gamma||$ sa norme dans $\mathcal{L}\left(Z;L^2\left(\Gamma;\mathbb{R}^d\right)\right)$ et par $\gamma^{*} : L^2\left(\Gamma;\mathbb{R}^d\right) \longrightarrow Z$ l'opérateur adjoint à γ. Par $\gamma_1 : Z \longrightarrow L^2\left(\Gamma\right)$ on note l'opérateur trace sur Z_1 et par $\gamma_1^{*} : L^2\left(\Gamma\right) \longrightarrow Z_1$ l'opérateur adjoint à γ_1.

Dans l'étude du problème PV^6 nous avons le résultat suivant.

Théorème 6.3.1 Nous supposons que les hypothèses (**6**.1.12)- (**6**.1.19) et (**6**.1.20) sont satisfaites, si l'hypothèse de petitesse

$$\begin{cases}
\text{soit } j_{\tau}\left(x,t,.\right) \text{ et } j_{e}\left(x,t,.\right) \text{ sont réguliers}\\
\text{ou} - j_{\tau}\left(x,t,.\right) \text{ et } - j_{e}\left(x,t,.\right) \text{ sont réguliers pour p.p. } (x,t)\in\Sigma_3,
\end{cases} \qquad (\mathbf{6}.3.1)$$

et, en plus,

$$m_{\mathcal{A}} > c_{2\tau} c_{VZ}^2 \|\gamma\|^2 \text{ et } m_b > m_e c_{WZ_1}^2 \|\gamma_1\|^2 . \tag{6.3.2}$$

est vérifiée, alors le problème PV^6 a une solution unique satisfaisant

$$\mathbf{u} \in W^{1,2}(0,T\ ;V) \cap C^1(0,T;H), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0,T\ ;V'). \tag{6.3.3}$$

$$\sigma \in L^2(0,T;\mathcal{H}), \quad Div\sigma \in L^2(0,T;V') \tag{6.3.4}$$

$$\varphi \in L^2(0,T\ ;W). \tag{6.3.5}$$

$$\mathbf{D} \in L^2(0,T\ ;H), \operatorname{div}\mathbf{D} \in L^2\left(0,T\ ;L^2(\Omega)\right). \tag{6.3.6}$$

La démonstration du *théorème* **6.3.1** se fait en plusieurs étapes. Elle est basée sur l'étude de deux problèmes intermédiaires combinés à argument du point fixe.

Étape 1. Soit $\eta \in L^2(0,T;V')$ fixés. Dans cette première étape, nous prouvons le bien-fondé du problème évolutif intermédiaire suivant.

problème. $PV^6_{\mathbf{u}_\eta}$: Trouvrer le champ de déplacement $\mathbf{u}_\eta : [\ 0,T\ ] \longrightarrow V$ tels que:

$$\begin{aligned}&(\ddot{\mathbf{u}}_\eta(t),\mathbf{v})_{V'\times V} + (\mathcal{A}(t,\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t))),\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + \int_{\Gamma_3} j^0_\tau(t,\dot{u}_{\eta\tau}(t);\mathbf{v}_\tau)\,da \\ &\quad \geq (\mathbf{f}(t),\mathbf{v})_{V'\times V} - (\eta(t),\mathbf{v}))_{V'\times V} \quad \text{pour tout } \mathbf{v}\in V, \text{ p.p. } t\in(0,T),\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0,\ \dot{\mathbf{u}}_\eta(0) = \mathbf{w}_0. \tag{6.3.8}$$

Lemme 6.3.1. Il existe une solution unique $\mathbf{u}_\eta$ du probléme $PV^6_{\mathbf{u}_\eta}$,et qui satisfait $\mathbf{u}_\eta \in L^2(0,T;V)$ avec $\dot{\mathbf{u}}_\eta \in W(V)$.

Démonstration. Nous définissons l'opérateu $A : (0,T)\times V \to V'$ par

$$(A(t,\mathbf{u}),\mathbf{v})_{V'\times V} = (\mathcal{A}(t,\varepsilon(\mathbf{u})),\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V,\ t\in(0,T), \tag{6.3.10}$$

La fonction $j : \Sigma_3 \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par

$$j(x,t,\boldsymbol{\xi}) = j_\tau(x,t,\boldsymbol{\xi}_\tau) \quad \forall (x,t)\in\Sigma_3,\ \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d \tag{6.3.11}$$

et le fonctionnel $\mathbf{f}_\eta \in L^2(0,T;V')$, par

$$(\mathbf{f}_\eta(t),\mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t),\mathbf{v})_{V'\times V} - (\eta(t),\varepsilon(\mathbf{v})))_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \mathbf{v}\in V, \text{ p.p. } t\in(0,T). \tag{6.3.12}$$

Premièrement, sous les hypothèses (**6**.1.12) de $\mathcal{A}$ et l'inégalité de Hölder , nous avons

$$\begin{aligned}\left|(A(t,\mathbf{u}),\mathbf{v})_{V'\times V}\right| &= |(\mathcal{A}(t,\varepsilon(\mathbf{u})),\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}| = \left|\int_\Omega (\mathcal{A}(t,\varepsilon(\mathbf{u})),\varepsilon(\mathbf{v}))_{S^d}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \int_0^t ||\mathcal{A}(t,\varepsilon(\mathbf{u}))||_{S^d}\,||\varepsilon(\mathbf{u})||_{S^d}\,\mathrm{d}x \\ &\le \int_0^t (a_0(x,t)+a_1\,||\varepsilon(\mathbf{u})||_{S^d})\,||\varepsilon(\mathbf{v})||_{S^d}\,\mathrm{d}x \\ &\le \sqrt{2}\left(||a_0(t)||_{L^2(\Omega)}+a_1\,||\mathbf{u}||_V\right)||\mathbf{v}||_V\end{aligned}$$

Cela donne

$$||A(t,\mathbf{u})||_{V'} \le \sqrt{2}\left(||a_0(t)||_{L^2(\Omega)}+a_1\,||\mathbf{u}||_V\right) \text{ pour tout } \mathbf{u}\in V \text{ et implique la borne de } A.$$

On montre que A est monotone et continu. À cette fin, nous utilisons (**6**.1.13)(a) pour voir que

$$\begin{aligned}(A\mathbf{u}_1-A\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)_{V'\times V} &= (\mathcal{A}(t,\varepsilon(\mathbf{u}_1))-\mathcal{A}(t,\varepsilon(\mathbf{u}_2)),\varepsilon(\mathbf{u}_1)-\varepsilon(\mathbf{u}_1))_{\mathcal{H}} \\ &= \int_\Omega (\mathcal{A}(t,\varepsilon(\mathbf{u}_1))-\mathcal{A}(t,\varepsilon(\mathbf{u}_2)),\varepsilon(\mathbf{u}_1)-\varepsilon(\mathbf{u}_1))_{S^d}\,\mathrm{d}x \\ &\ge m_{\mathcal{A}}\int_0^t ||\varepsilon(\mathbf{u}_1)-\varepsilon(\mathbf{u}_1)||_{S^d}^2\,\mathrm{d}x \\ &\ge m_{\mathcal{A}}\,||\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_1||_V^2 \quad \text{pour tout } \mathbf{v}\in V,\ \text{p.p. } t\in(0,T).\end{aligned}$$

ce qui montre que A est monotone. Ensuite, soit $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ dans V ce qui implique que $\varepsilon(\mathbf{u}_n) \to \varepsilon(\mathbf{u})$ dans $L^2(\Omega;S^d)$. D'après le théorème Convergence inversée dominée de Lebesgue(voir, [39]), il existe une sous-suite $(\mathbf{u}_{n_k})$ et une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telles que $\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})(x) \to \varepsilon(\mathbf{u})(x)$ in S^d pour p.p. $x\in\Omega$, as $n_k \to +\infty$, et $||\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})||_{S^d} \le g(x)$ pour p.p. $x\in\Omega$ et $k\in\mathbb{N}$. Puisque $\mathcal{A}(x,t,.)$ est continu sur S^d, on a

$$\mathcal{A}(x,t,\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})(x)) \to \mathcal{A}(x,t,\varepsilon(\mathbf{u})(x)) \quad \text{dans } S^d \text{ pour p.p. } x\in\Gamma_3,$$

et, par conséquent,

$$||\mathcal{A}(x,t,\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})(x))-\mathcal{A}(x,t,\varepsilon(\mathbf{u})(x))||_{S^d}^2 \to 0 \quad \text{pour p.p. } x\in\Gamma_3,\ \text{as } n_k\to+\infty.$$

Par hypothèse (**6**.1.12)(a), on obtient

$$\begin{aligned}&||\mathcal{A}(x,t,\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})(x))-\mathcal{A}(x,t,\varepsilon(\mathbf{u})(x))||_{S^d}^2 \\ &\le \left(||\mathcal{A}(x,t,\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})(x))||_{S^d}+||\mathcal{A}(x,t,\varepsilon(\mathbf{u})(x))||_{S^d}\right)^2 \\ &\le \left(a_0(x)+a_1\,||\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})(x)||_{S^d}+a_0(x)+a_1\,||\varepsilon(\mathbf{u})(x)||_{S^d}\right)^2\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{A}(x,t,\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})(x)) - \mathcal{A}(x,t,\varepsilon(\mathbf{u})(x))\|_{S^d}^2 \\
&\leq 2\left(\left(a_0(x) + a_1\|\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})(x)\|_{S^d}\right)^2 + \left(a_0(x) + a_1\|\varepsilon(\mathbf{u})(x)\|_{S^d}\right)\right)^2 \\
&\leq C\left(a_0^2(x) + a_1^2\left(g^2(x) + \|\varepsilon(\mathbf{u})(x)\|_{S^d}^2\right)\right) \text{ p.p. } t \in (0,T).
\end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème de convergence dominé de Lebesgue (voir, [12]) on obtient

$$\|\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})) - \mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}))\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_\Omega \|\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})) - \mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}))\|_{S^d}^2 \, dx \to 0, \text{ cand } n_k \to +\infty.$$

D'autre part, par l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned}
(A\mathbf{u}_{n_k} - A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V' \times V} &= \int_\Omega (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})) - \mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u})); \varepsilon(\mathbf{v})) \, dx \\
&\leq \|\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})) - \mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}))\|_{\mathcal{H}} \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in V. \\
&\Rightarrow \|A\mathbf{u}_{n_k} - A\mathbf{u}\|_{V'} \leq \|\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}_{n_k})) - \mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}))\|_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

On en déduit que $A\mathbf{u}_{n_k} \to A\mathbf{u}$ dans V'. Ensuite, la proposition **2.5.1** implique que $A\mathbf{u}_n \to A\mathbf{u}$ dans V' , ce qui montre que A est continu. Il s'ensuit que l'opérateur A est borné, monotone et hémicontinu. De théorème **2.1.1**(i), on déduit que A est pseudomonotone. La coercitivité de A découle immédiatement de (**6**.1.12)(b), c'est-à-dire

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V' \times V} = \int_\Omega (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u})); \varepsilon(\mathbf{v})) \, dx \geq m_{\mathcal{A}} \int_\Omega \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{S^d}^2 \, dx = m_{\mathcal{A}} \|\mathbf{u}\|_V^2.$$

Nous prenons $\overline{a}_0 = \sqrt{2}\|a_0(t)\|_{L^2(\Omega)}, \overline{a}_1 = \sqrt{2}a_1, m_A = m_{\mathcal{A}}, \alpha_A = m_{\mathcal{A}}$ et $A(t,.)$ est pseudomonotone pour p.p. $t \in (0,T)$. Et donc, l'opérateur A satisfait les hypothèses (**2**.4.8).

Considérons maintenant la fonction j identifiant en (**6**.3.11).Nous vérifions l'hypothèse (**2**.2.9) avec $s = d$. À cette fin, nous observons que

$$j(x,t,\boldsymbol{\xi}) = j_\tau(x,t,N_\tau\boldsymbol{\xi}) \quad \forall (x,t) \in \Sigma_3, \ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$$

où l'opérateur $N_\tau \in L^\infty\left(\Sigma; \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\right)\right)$ est donnée par

$$N_\tau\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_\tau \qquad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$$

On rappelle que l'opérateur adjoint $N_\tau^* \in L^\infty\left(\Sigma; \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\right)\right)$ est donné par

$$N_\tau^*\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_\tau \qquad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$$

Par l'hypothèse (**6**.1.16) sur j_τ, il est clair que $j(.,.,\boldsymbol{\xi})$ est mesurable sur Σ_3 pour tous $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ et $j(.,.,\boldsymbol{\xi})$ est localement Lipschitz sur $\mathbb{R}^d$ pour p.p. $(t,x) \in \Sigma_3$. De plus, on a $j(.,.,\mathbf{0}) \in L^1(\Sigma_C)$. ce qui implique (**2**.4.9)(a)-(b). De la proposition **2.2.3**, on obtient

$$\begin{aligned} j^0(x,t,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\varrho}) &\leq j^0_\tau(x,t,\boldsymbol{\xi}_\tau,\boldsymbol{\varrho}_\tau)\ ,\ \partial j(x,t,\boldsymbol{\xi}) \subseteq N^*_\tau \partial j_\tau(x,t,\boldsymbol{\xi}_\tau) = [\partial j_\tau(x,t,\boldsymbol{\xi}_\tau)]_\tau \\ \forall\, \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\varrho} &\in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } (t,x) \in \Sigma_3. \end{aligned}$$

En utilisant (**6**.1.16)(c), nous obtenons

$$\begin{aligned} j^0(x,t,\boldsymbol{\xi},-\boldsymbol{\xi}) &\leq j^0_\tau(x,t,\boldsymbol{\xi}_\tau,-\boldsymbol{\xi}_\tau) \leq c_{3\tau}(1+||\boldsymbol{\xi}_\tau||_{\mathbb{R}^d}) \leq c_{3\tau}(1+||\boldsymbol{\xi}||_{\mathbb{R}^d})\ , \\ \forall\, \boldsymbol{\xi} &\in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } (t,x) \in \Sigma_3. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant (**6**.1.16)(a) on trouve

$$\begin{aligned} ||\partial j(x,t,\boldsymbol{\xi})||_{\mathbb{R}^d} &\leq ||\partial j_\tau(x,t,\boldsymbol{\xi}_\tau)||_{\mathbb{R}} \leq c_{0\tau} + c_{1\tau}||\boldsymbol{\xi}||_{\mathbb{R}^d} \\ \forall\, \boldsymbol{\xi} &\in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } (x,t) \in \Sigma_3. \end{aligned}$$

Notez que de (**6**.3.1) nous déduisons que soit $j(x,t,.)$ ou $-j(x,t,)$ est régulier, pour p.p. $x \in \Sigma_C$. Nous prenons $\bar{c}_0 = c_{0\tau}, \bar{c}_1 = c_{1\tau}, \bar{c}_2 = c_{2\tau}, \bar{c}_3 = c_{3\tau}$. Et donc, la fonction j satisfait les hypothèses (**2**.4.9).

Nous concluons que A et j satisfont les conditions (**2**.4.8) et (**2**.4.9). Enfin nous rappelons que $f_\eta \in L^2(0,T;V')$ l'aide du théorème **2.4.2**, nous concluons que le problème $PV^6_{\mathbf{u}_\eta}$ a une solution unique

$$\mathbf{u}_\eta \in L^2(0,T\ ;V) \quad \text{avec } \dot{\mathbf{u}}_\eta \in W(V)$$

Comme $\mathbf{u}_\eta \in L^2(0,T\ ;V)$ et $\dot{\mathbf{u}}_\eta \in W(V)$, on obtient $\mathbf{u}_\eta \in W^{1,2}(0,T\ ;V) \subset C(0,T\ ;V)$. Comme $\dot{\mathbf{u}}_\eta \in L^2(0,T\ ;V)$, $\ddot{\mathbf{u}}_\eta \in L^2(0,T;V')$ et que le plongement $W(V) \subset C(0,T;H)$ est continu, on obtient que $\dot{\mathbf{u}}_\eta \in C(0,T;H)$. Donc $\mathbf{u}_\eta$ a la régularité exprimée en (**6**.3.3).

Étape2

Nous utilisons maintenant la solution $\mathbf{u}_\eta$ obtenue dans le Lemme **6.3.1** pour construire le problème auxiliaire suivant pour le champ de potentiel électrique.

Problème $P^6_{\varphi_\eta}$. Trouver un champ de potentiel électrique $\varphi_\eta : [0,T] \to W$ tel que

$$\begin{aligned} &\left(\mathcal{B}\nabla\varphi_\eta(t),\nabla\psi\right)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)),\nabla\psi)_H + \int_{\Gamma_3}\left(j^0_e\left(\varphi_\eta(t)-\varphi_0;\psi\right)\right)\mathrm{d}a \\ &\geq (q(t),\psi)_{W'\times W} \quad \text{pour tout } \psi \in W,\ \text{p.p. } t \in (0,T). \end{aligned} \qquad (\mathbf{6}.3.13)$$

Nous obtenons le résultat suivant concernant l'existence et l'unicité.

Lemme 6.3.2 Il existe une solution unique pour le problème $P^{6}_{\varphi_\eta}$ qui satisfait la régularité (**6**.3.5). De plus, si φ_{η_1} et φ_{η_2} sont deux solutions de (**6**.3.13) correspondant respectivement à $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0,T;V')$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left|\left|\varphi_{\eta_1} - \varphi_{\eta_2}\right|\right|_W \leq C \left|\left|\mathbf{u}_{\eta_1} - \mathbf{u}_{\eta_2}\right|\right|_V . \qquad (\mathbf{6}.3.14)$$

Démonstration.

Soit $\mathbf{z} \in V$ fixé et considérons les formes bilinéaires $B(.,.) : W \times W \to \mathbb{R}$ et $e(.,.) : W \times W \to \mathbb{R}$ Défini par

$$B(\varphi, \psi) = (\mathcal{B}\nabla\varphi, \nabla\psi)_H, \quad e(\mathbf{z}, \psi) = (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{z}), \nabla\psi)_H \text{ pour tout } \varphi, \psi \in W \text{ et } \mathbf{z} \in V.$$

Nous avons la situation d'inégalité hémivariationnelle suivante.

Problème $P_{\mathbf{z}}$. Trouver $\varphi_{\mathbf{z}} \in W$ tel que

$$b(\varphi_{\mathbf{z}}, \psi) + \int_{\Gamma_3} j_e^0(\varphi_{\mathbf{z}} - \varphi_0; \psi)\, da \geq e(\mathbf{z}, \psi) + (q, \psi)_{W' \times W} \text{ pour tout } \psi \in W$$

Pour résoudre le problème $P_{\mathbf{z}}$ nous définissons l'opérateur $\widetilde{B} : W \to W'$ et la fonctionnelle $\widetilde{q}_{\mathbf{z}} \in W'$ par égalités

$$\left(\widetilde{B}\varphi_{\mathbf{z}}, \psi\right)_{W' \times W} = B(\varphi, \psi), \quad (\widetilde{q}_{\mathbf{z}}, \psi)_{W' \times W} = e(z, \psi) + (q, \psi)_{W' \times W} \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in W.$$

Il résulte du *théorème* **2.4.1,** qu'il existe un élément unique $\varphi_{\mathbf{z}} \in W$ tel que

$$\left(\widetilde{B}\varphi_{\mathbf{z}}, \psi\right)_{W' \times W} + \int_{\Gamma_3} j_e^0(\varphi_{\mathbf{z}} - \varphi_0; \psi)\, da \geq (\widetilde{q}_z, \psi)_{W' \times W} \text{ pour tout } \psi \in W$$

et, clairement, $\varphi_{\mathbf{z}}$ est l'unique solution du problème $P_{\mathbf{z}}$. De plus, pour tout $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2 \in V$ et $\psi_1, \psi_2 \in W$, en utilisant l'inégalité

$$\begin{aligned} (\widetilde{q}_{z_1} - \widetilde{q}_{z_1}, \psi_1 - \psi_2)_{W' \times W} &\leq e(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2, \psi_1 - \psi_2) \\ &\leq c \left|\left|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\right|\right|_V \left|\left|\psi_1 - \psi_2\right|\right|_W , \end{aligned}$$

Nous avons

$$\left|\left|\widetilde{q}_{z_1} - \widetilde{q}_{z_1}\right|\right|_{W'} \leq c \left|\left|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\right|\right|_V ,$$

Par conséquent, à partir de (**2**.4.5), on obtient

$$||\varphi_1 - \varphi_2||_W \leq c\,||\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2||_V\,, \qquad (\mathbf{6}.3.15)$$

où $c > 0$ et φ_i est l'unique solution au problème $P_{\mathbf{z}}$ correspondant à $\mathbf{z}_i$ pour $i = 1, 2$.

Étape3

Pour $\eta \in L^2(0, T; V)$ on utilise la solution $\mathbf{u}_\eta$ du Problème PV_η^6. Premièrement, à partir de *l'étape* **2**, il s'ensuit que le problème $P_{\varphi_\eta}^6$ a une solution unique. De plus, si $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ représentent les solutions du problème PV_η^6 et φ_1, φ_2 représentent les solutions du problème $P_{\varphi_\eta}^6$, respectivement, correspondant à $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; V)$, alors (**6**.3.15) montre qu'il existe $c > 0$ tel que

$$||\varphi_1 - \varphi_2||_W \leq c\,||\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2||_V\,,$$

Étape 4.

Enfin en conséquence de ces résultats et en utilisant les propriétés de l'opérateur $\mathcal{F}$ et de l'opérateur $\mathcal{E}$, pour $t \in [0, T]$, on considère l'opérateur $\Lambda : L^2(0, T; V') \longrightarrow L^2(0, T; V')$ défini par l' égalité

$$(\Lambda\eta(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathcal{F}(\varepsilon(\mathbf{u}_\eta(t)), (\varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + \left(\mathcal{E}^* \nabla\varphi_\eta(t), (\varepsilon(\mathbf{v})\right)_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \text{ p.p } t \in (0, T)\,. \qquad (\mathbf{6}.3.16)$$

Ici, pour tout $\eta \in L^2(0, T; V')$, $\mathbf{u}_\eta$ et φ_η représentent le champ de déplacement et le champ électrique potentiel obtenus respectivement dans les lemmes **6.3.1** et **6.3.3**, Nous avons les résultats suivants.

Lemme 6.3.3 L'opérateur Λ admet un point fixe unique $\eta^* \in L^2(0, T; V')$ tel que $\Lambda(\eta^*) = \eta^*$.

Démonstration. Soient η_1, $\eta_2 \in L^2(0, T; V')$, nous utilisons les notations $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$ et $\varphi_{\eta_i} = \varphi_i$ pour $i = 1, 2$. En utilisant (**1**.4.19), (**6**.1.13) , (**6**.1.14) et (**6**.3.16) pour obtenir

$$\begin{aligned} |\Lambda(\eta_1)(t) - \Lambda(\eta_1)(t)|_{V'}^2 &\leq |\mathcal{F}(\varepsilon(\mathbf{u}_1(t)) - \mathcal{F}(\varepsilon(\mathbf{u}_2(t))|_{\mathcal{H}}^2 + |\mathcal{E}^* \nabla\varphi_1(t) - \mathcal{E}^* \nabla\varphi_2(t)|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq c\left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_V^2 + |\varphi_1 - \varphi_2|_W^2\right). \end{aligned} \qquad (\mathbf{6}.3.17)$$

Nous substituons (**6**.3.13)-(**6**.3.14) dans (**6**.2.17) nous obtenons

$$|(\Lambda\eta_1(t)) - (\Lambda\eta_2)(t)|_{V'}^2 \leq C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{V'}^2 \,\mathrm{d}s \quad \text{pour p.p } t \in (0, T)\,. \qquad (\mathbf{6}.3.18)$$

Par la suite, on en déduit que

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\Lambda^2\eta_1\right)(t)-\left(\Lambda^2\eta_2\right)(t)\right|_{V'}^2 &= \left|\Lambda\left(\Lambda\eta_1\right)(t)-\Lambda\left(\Lambda\eta_2\right)(t)\right|_{V'}^2 \\
&\leq C\int_0^t \left|\left(\Lambda\eta_1\right)(s)-\left(\Lambda\eta_2\right)(s)\right|_{V'}^2 \mathrm{d}s \\
&\leq C\int_0^t \left(C\int_0^t |\eta_1(r)-\eta_2(r)|_{V'}^2 \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s \\
&\leq C^2\left(\int_0^t |\eta_1(r)-\eta_2(r)|_{V'}^2 \mathrm{d}r\right)\left(\int_0^t \mathrm{d}s\right) \\
&= C^2 t\int_0^t |\eta_1(r)-\eta_2(r)|_{V'}^2 \mathrm{d}r \quad \text{pour p.p } t\in(0,T).
\end{aligned}
$$

En réitérant m fois l'inégalité (**6**.3.18) on obtient

$$
\left|\left(\Lambda^m\eta_1\right)(t)-\left(\Lambda^m\eta_2\right)(t)\right|_{V'}^2 \leq \frac{C^m t^{m-1}}{(m-1)!}\int_0^t |\eta_1(r)-\eta_2(r)|_{V'}^2 \mathrm{d}r \quad \text{pour p.p } t\in(0,T),
$$

qui conduit à

$$
\begin{aligned}
\left|\Lambda^m\eta_1-\Lambda^m\eta_2\right|_{L^2(0,T;V')}^2 &= \int_0^T \left|\left(\Lambda^m\eta_1\right)(t)-\left(\Lambda^m\eta_2\right)(t)\right|_{V'}^2 \\
&\leq \int_0^T \frac{C^m T^{m-1}}{(m-1)!}\left(\int_0^t |\eta_1(r)-\eta_2(r)|_{V'}^2 \mathrm{d}r\right) dt \\
&= \frac{C^m T^m}{(m-1)!}\,|\eta_1(r)-\eta_2(r)|_{L^2(0,T;V')}^2 .
\end{aligned}
$$

Puisque

$$
\lim_{m\to+\infty}\frac{a^m}{m!}=0 \text{ pour tout } a>0,
$$

L'opérateur Λ^m est une contraction dans l'espace de Banach $L^2(0,T;V')$. En appliquant le théorème du point fixe de Banach, nous concluons que l'opérateur Λ possède un unique point fixe $\eta^*\in L^2(0,T;V')$.

À présent, nous disposons de tous les éléments nécessaires pour démontrer le *Théorème* **6.3.1**, qui établit l'existence et l'unicité de la solution faible du problème mécanique P^6.

Démonstration.

L'existence. Soit $\eta^*\in L^2(0,T;V')$ le point fixe de l'opérateur Λ défini par (**6.3.**29) et nous notons

$$
\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_{\eta^*},\varphi_*=\varphi_{\eta^*}. \quad (\mathbf{6}.3.19)
$$

$$
\sigma_*(t) = \mathcal{A}\left(t,\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*(t))\right)+\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_*(t))-\mathcal{E}^*E\varphi_*(t) \quad (\mathbf{6}.3.20)
$$

$$
\mathbf{D}_*(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_*(t))+\mathcal{B}E\varphi_*(t). \quad (\mathbf{6}.3.21)
$$

Nous démontrons que $(\mathbf{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \varphi_*, \mathbf{D}_*)$ satisfait (**6**.2.8)-(**6**.2.10) et les régularités (**6**.3.3)-(**6**.3.6). En effet, nous écrivons (**6**.3.6) pour $\eta = \eta^*$ et nous utilisons (**6**.3.19) pour obtenir

$$\begin{gathered}(\ddot{\mathbf{u}}_*(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\mathcal{A}\,(t, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*(t))), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\eta^*\,(t)\,, \mathbf{v}))_{V' \times V} + \textstyle\int_{\Gamma_3}\, j_\tau^0\,(t, \dot{u}_{*\tau}\,(t)\,; \mathbf{v}_\tau)\,\mathrm{d}a \\ \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in V, \ \text{p.p. } t \in (0, T)\,,\end{gathered} \tag{6.3.22}$$

L'égalité $\Lambda\,(\eta^*) = \eta^*$ combineés avec (**6**.3.16), montrent que

$$(\eta^*(t), \mathbf{v})_{V' \times V} = (\mathcal{F}(\varepsilon\,(\mathbf{u}_*(t))\,, (\varepsilon\,(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_*(t), (\varepsilon\,(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \ \text{p.p } t \in (0, T)\,. \tag{6.3.23}$$

Maintenant en substituant (**6**.3.23) dans (**6**.3.22) pour obteenir

$$\begin{gathered}(\ddot{\mathbf{u}}_*(t), \mathbf{v})_{V' \times V} + (\mathcal{A}\,(t, \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_*(t))), \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{F}(\varepsilon\,(\mathbf{u}_*(t))\,, (\varepsilon\,(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_*(t), (\varepsilon\,(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \\ + \textstyle\int_{\Gamma_3}\, j_\tau^0\,(t, \dot{u}_{*\tau}\,(t)\,; \mathbf{v}_\tau)\,\mathrm{d}a \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{V' \times V} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in V, \ \text{p.p. } t \in (0, T)\,,\end{gathered} \tag{6.3.24}$$

En utilisant dans (**6.3.13**) , par (**6**.3.19) nous avons

$$\begin{aligned}&(\mathcal{B} \nabla \varphi_*(t), \nabla \psi)_H - (\mathcal{E} \varepsilon(\mathbf{u}_*(t)), \nabla \psi)_H + \int_{\Gamma_3} \left(j_e^0\,(\varphi_*\,(t) - \varphi_0; \psi)\right) \mathrm{d}a \\ \geq \ \ &(q\,(t)\,, \psi)_{W' \times W} \ \ \text{pour tout } \psi \in W, \ \text{p.p. } t \in (0, T)\,.\end{aligned} \tag{6.3.25}$$

Les relations (**6**.3.24) et (**6**.3.25) premettes-nous de conclure maintenant que $(\mathbf{u}_*, \varphi_*)$ satisfait (**6**.2.8)-(**6**.2.9). Ensuite, les conditions initiales dans (**6**.2.10) et la régularité (**6**.3.3)-(**6**.3.5) résultent des lemmes **6**.**3**.**1** et **6**.**3**.**2.** Depuis $\mathbf{u}_*$ et φ_* satisfont (**6**.3.3) et (**6**.3.5),il resulte de (**6**.3.20) que

$$\sigma_* \in L^2\,(0, T; \mathcal{H}) \tag{6.3.26}$$

On choisit $\mathbf{v} = \omega \in \mathcal{D}\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$ dans (**6**.2.8) où ω est un élément arbitraire de l'espace $\mathcal{D}\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$. puisque ω disparaît sur Γ il s'ensuit que

$$\int_{\Gamma_3} j_\tau^0\,(t, \dot{\mathbf{u}}_\tau\,(t)\,; \omega_\tau)\,\mathrm{d}a = 0$$

et, par conséquent, on obtient que

$$(\ddot{\mathbf{u}}_*(t), \omega)_{V' \times V} + (\sigma_*\,(t)\,, \varepsilon(\omega))_{\mathcal{H}} \geq (\mathbf{f}(t), \omega)_{V' \times V} \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{D}\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right).$$

On emplace maintenant ω par $-\omega$ dans l'négalité précédente pour voir que

$$(\ddot{\mathbf{u}}_*(t), \omega)_{V' \times V} + (\sigma_*\,(t)\,, \varepsilon(\omega))_{\mathcal{H}} = (\mathbf{f}(t), \omega)_{V' \times V} \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{D}\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right).$$

et, en utilisant la définition (**6.1.21**) de **f** on en déduit

$$(\ddot{\mathbf{u}}_*(t), \omega)_{V'\times V} + (\sigma_*(t), \varepsilon(\omega))_{\mathcal{H}} = (f_0, \omega)_H \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{D}\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right). \tag{\textbf{6}.3.27}$$

L'équation (**6.3.27**) combinée à la définition des opérateurs de divergence et de déformation avec (**1.4.21**)et (**5.1.36**) implique que

$$(\ddot{\mathbf{u}}_*(t), \omega)_H - (Div\sigma_*(t), \omega)_H = (f_0, \omega)_H \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{D}\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right). \tag{\textbf{6}.3.28}$$

Alors

$$Div\sigma_*(t) + \mathbf{f}_0(t) = \ddot{\mathbf{u}}_*(t)$$

Aossi, par (**6.1.18**) et $\ddot{\mathbf{u}}_* \in L^2(0, T\ ; V')$ nous avons

$$Div\sigma_*(t) \in L^2(0, T\ ; V')$$

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$. Par (**6.1.14**),(**6.1.15**),(**1.4.28**) et (**6.3.21**) on en déduit que

$$|\mathbf{D}_*(t_1) - \mathbf{D}_*(t_2)|_H \leq C\left(|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)|_W + |\mathbf{u}_*(t_1) - \mathbf{u}_*(t_2)|_V\right).$$

La régularité de $\mathbf{u}_*$ et φ_* donnée par (**6.3.3**) et (**6.3.5**) implique

$$\mathbf{D}_* \in L^2(0, T\ ; H) \tag{\textbf{6}.3.29}$$

On choisit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset W$ dans (**6.3.25**) et en utilisant (**6.1.22**) on trouve

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_*(t) = q_0(t)$$

Aossi, par (**6.1.18**) nous avons

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_* \in L^2\left(0, T\ ; L^2(\Omega)\right).$$

Enfin, nous déduisons que la solution faible $(\mathbf{u}_*, \sigma_*, \varphi_*, \mathbf{D}_*)$ du problème de contact piezoelectrique P^6, possédant la régularité (**6**.3.3)-(**6**.3.6), termine la démonstration de la partie d'existence du Théorème **6.3.1.**

L'unicité

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité de point fixe de l'opérateur Λ qui est défini par (**6**.3.16).

Conclusion

Les problèmes présentés dans ce manuscrit suivis par ses formulations variationnelles et complétés à la fin par les résultats d'existences et d'unicités, nous conduisent à quelques conclusions que nous pourrons structurer de la façon suivante :

Les phénomènes issus de la mécanique de contact sont nombreux et variés, surtout qu'on prend en considèration des diffèrents phénomènes sous-jacents qui rejoignent le contact avec frottement : l'endommagement, l'usure, les effets électriques et thermiques, parmi bien d'autre.

L'analyse mathématique des modèles élaborés dans ce travail, allant de la formulation mathématique à l'existence et l'unicité, passant par la formulation variationnelle, dont nous impliquons des compétences variées de l'analyse fonctionnelle.

Bien que des résultats mathématiques importants ont été obtenu, il reste d'achever ce travail par une étude numérique qui expérimente ces modèles mathématiques considérés.

Bibliographie

[1] R.S.Adams, *Sobolev espace*, **Academic Press, London** (1975).

[2] K. T. Andrews, K. L. Kuttler and M. Shillor Wright (1997), *A dynamic contact problem with friction and wear*, **Int. J. Egng. Sci**. 35(14), 1291-1309.

[3] K. T. Andrews, K. L. Kuttler, M. Rochdi, *et al. One-dimensional dynamic thermoviscoelastic contact with damage*, **J Math Anal Appl** 2002 ; 272 :249-275.

[4] M. Barboteu and M. Sofonea, *Solvability of a dynamic contact problem between a piezoelectric body and a conductive foundation.*, **Appl. Math** Comput. 215, 2978-2991 (2009).

[5] R. C. Batra and J. S. Yang, *Saint venant's principle in linear piesoelectricity*, **Journal of Elasticity** 38 (1995), 209-218.

[6] P. Bisenga, F. Lebon and F. Maceri, *The unilateral frictional contact of piezoelectric body with a rigid support, in Contact Mechanics*, **J.A.C. Martins and Manuel D. P. Monteiro Marques (Eds), Kluwer, Dordrecht**, (2002),347-354.

[7] H. Brézis, *Equations et Inequations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, **Ann. Inst. Fourier**, 18 (1968), 115-175.

[8] K. Chadi, M. Selmani , *"Dynamic frictional thermoviscoelastic contact problem with normal compliance and damage"*; **Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin**, Volume 28, No 2, pp. 195 - 215, (2021).

[9] J. Chazarain et A. Piriou, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, **Gauthier-Villars, Paris**, 1981.

[10] F. H. Clarke, *Generalized gradients and applications*, **Trans. Amer. Math.** Soc. 205 (1975), 247–262.

[11] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, **Wiley, Interscience, New York**, 1983

[12] Z. Denkowski, S. Mig´orski and N.S. Papageorgiou, *An Introduction to Nonlinear Analysis*: T**heory, Kluwer Academic/Plenum Publishers, Boston, Dordrecht, London, New York**, 2003.

[13] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, **Springer-Verlag, Berlin** (1976).

[14] G. Duvaut, j.l.lions , *"Inequalities in mechanics and physics"*; **Springer-Verlag, Berlin** (1988).

[15] J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, *Analysis and Numerical Simulations of A Dynamic Contact Problem with Adhesion*, **Math. Comput Modelling** 37 (2003), 1317-1333.

[16] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, **Springer, Berlin**, 2002.

[17] M. Frémond and B. Nedjar, *Damage, gradient of damage and principle of virtual work*, **KL. Solides Structures**, 33 (8), (1996), 1083-1103.

[18] M. Frémond and B. Nedjar, *Damage in concrete: The Unilateral Phenomenon*, **Nuclear Engng. Design**, 156, (1995), 323-335.

[19] M. Frémond, KL. Kuttler and M. Shillor, *One Dimensional Models of Damage*, **Adv. Math. Sci. Appl**.(1998).

[20] M. Frémond, KL. Kuttler and M. Shillor, *Existence And Uniqueness of Solutions For a One-Dimensional Damage model*, J. **Math. Anal. Appl.** 229, 271-294. (1999).

[21] I. Figueiredo and L. Trabucho (1995), *A class of contact and friction dynamic problems in thermoelasticity and thermoviscoelasticity*, **Int. J. Engng. Sci**. 33(1), 45-66.

[22] R. J. Gu and M. Shillor (2001), *Thermal and wear analysis of an elastic beam in sliding contact*, **Int. J. Solids Structures** 38(14), 2323-2333.

[23] R. Guettaf and A. Touzaline, *Analysis of a contact problem with adhesion for electro-viscoelastic materials with long memory*, **Rev. Roum.Math. Appl.** 58(1),67-84 (2013).

[24] W. Han, S. Migórski, and M. Sofonea , *"Analysis of a general dymamic history-dependent variational–hemivariational inequality"*; **Nonlinear Analysis: Real World Applications,** Volume 36, pp. 69-88 (August 2017).

[25] W. Han, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and Numerical Analysis of A Quasistic Viscoelastic Problem with Normal Compliance*, **Friction and Damage, J. Comput. Appl**. Math(2001).

[26] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity.* **Studies in Advanced Mathematics, vol. 30, American Mathematical Society, Providence, RIInternational Press, Somerville**, MA (2002)

[27] I. Hlavàček, J.Haslinger, J. Nečas and LovÍšek, *Solutions of Variational Inequalities in Mechanics*, **Springer-Verlag** (1988), New York.

[28] C. Jiang and B. Zeng, *Continuous dependence and optimal control for a class of variational- hemivariational inequalities*, **Applied Mathematics and Optimization**, 82 (2020), 637–656.

[29] N. Kikuchi, J. T. Oden, *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods.* **SIAM, Philadelphia** (1988).

[30] A. Kulig, *Variational-hemivariational approach to quasistatic viscoplastic contact problem with normal compliance, unilateral constraint, memory term, friction and damage,* **Nonlinear Analysis**: Real World Applications, 44 (2018), 401–416.

[31] G. Leszek, A. Ochala, M. Shillor, Q*uasistatic thermoviscoelastic problem with normal compliance, multivalued friction and wear diffusion.* **Nonlinear Analysis** : R. W. A (27), 183-202. (2016).

[32] Y. Li, Z. Lui , *"A quasistatic contact problem for viscoelastic materials with friction and damage"*; **Nonlinear Analysis**,Volume. 73, pp. 2221–2229,(2010).

[33] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de résolutions des Problemes aux Limites Non Linéaires*, Dunod et Gauthier-Villars (1969).

[34] A. Merouani and F. Messelmi, *Dynamic evolution of damage in elastic-thermo-viscoplastic materials*, **Electron J. Differential Equations**, 129 (2010), 1-15.

[35] M. Miettinen, *A parabolic hemivariational inequality*, **Nonlinear Analysis**, 26 (1996), 725-734.

[36] S. Migórski, *Dynamic hemivariational inequality modeling viscoelastic contact peoblem with normal damped response and friction*, **Applicable Analysis**, **84** (2005), 669-699.

[37] S. Migórski, A. Ochal, *"Boundary hemivariational inequality of pf parabolic type"*; **Nonlinear Analysis**: Theory, Methods & Applications Volume 57, Issue 4, Pages 579-596 (May 2004).

[38] S. Migórski, A. Ochal and M. Sofonea, *Integrodifferential hemivariational inequalities with applications to viscoelastic frictional contact*, **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, 18 (2008), 271–290.

[39] S. Migórski, A. Ochal, and M. Sofonea , *"Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems"*; **Advances in Mechanics and Mathematics**, Volume.26, Springer, NewYork,2013.

[40] J. Nečas, *Les méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, **Masson, Paris** (1967).

[41] P. D. PANAGIOTOPOULOS, *Inequality Problems in Meechanical and Applications*, **Birkhauser, Basel** (1985).

[42] P. D. PANAGIOTOPOULOS, "*Hemivariational inequalities, Applications in Mechanics and Engineering*" , **Springes-Verlag, Berlin**, 1993.

[43] E. RABINOWIZ (1995), *Friction and Wear of Materials*, (2nd ed.) Wiley, N.Y.

[44] M. RAOUS, GANGÉMI AND M. COCU, *A Consistent Model Coupling Adhesion, Friction and Unilateral Contact*, **Comput. Meth. Engn**. 177(1999), 83-399.

[45] M. SELMANI , *"Etude Mathématiques de Quelques Problèmes aux Limites en Mécanique du Contact"*; **Thèse de Doctorat d'état, Université Ferhat Abbas de Sétif**,(2006).

[46] M. SELMANI , *"Frictional Contact Problem with Wear for Electro-Viscoelastic Materials with Long Memory"*; **Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin**,Volume. 20, pp.461 –479,(2013).

[47] M. SELMANI , *"A Frictional Contact Problem Involving Piezoelectric Materials with Long Memory"*; **Mediterr. J. Math**,Volume. 12, pp.1177 –1197,(2015).

[48] M. SELMANI , *"Dynamic Problem with Friction, Damage and Thermal Effect, Mathematical Analysis with Applications in Mechanics"*; **International Conference**, September 6-8-2017, Perpignan, France.

[49] L.SELMANI, M. SELMANI , *"A Frictional Contact Problem with Wear and Damage For Electro-Viscoelastic Materials"*; **Applications of Mathematics**,Volume. 55, pp.89 – 109,(2010).

[50] M. SHILLOR, M. SOFONEA AND J.J. TELEGA, *Models and variational Analysis of quasistatic Contact*, **Lect. Notes Phys. 655, Springer, Berlin Heidelberg**, 2004.

[51] N.STRÖMBERG, *Continuum thermodynamics of contact, friiction and wear*, **Thesis No. 491, Department of Mechanical Engineering, Linkoping Institute of Technology, Linkoping, Sweden** (1995).

[52] N. Strömberg, L. Johansson and A. Klarbring, *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, **Int. J. Solids Structures**, 33 (1996), 1817-1836.

[53] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor. *" Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage"*; **Pure Appl. Math**. 276, Chapman-Hall / CRC Press, New York (2006).

[54] M. Sofonea and S. Migórski, *"Variational- Hemivariational Inequalities with Applications,* **Pure and Applied Mathematics**, *Chapman & Hall/CRC.* (2017)

[55] N. Strömberg, *" Continuum Thermodynamics of Contact, Friction and Wear"*; Thesis No, 491, **Departement of Mechanical Engineering, Linköping Insti-tute of Technology**, Linköping, Sweden, (1995).

ملخص: هدف هذا العمل هو المساهمة في دراسة بعض المسائل الحدية في ميدان الميكانيك التلامسي مع أو دون الإحتكاك ,خلال نظام ديناميكي أو شبه خطي .نأخذ بعين الإعتبار في آن واحد عدة ظواهر :ميكانيكية ,فيزيائية و كامنة مثل الإتلاف ,الإرتداء ,التأثير الكهربائي والحراري .نعتمد كذلك في هذه الدراسة على قوانين سلوك غير خطية من أجل مواد مرنة لزجة لدنة , ومرنة لزجة مع التأثير الحراري و كهرو لزجة مرنة. النتائج المحصل عليها تخص وجود وحدانية الحلول الضعيفة. هذا العمل يتكون من جزئين. الجزاء الاول مخصص للتذكير ببعض نتائج التحليل الدالي و دراسة مسائل التلامس والمعادلات التفاضلية الجزئية اللازمة لاستكمال هذه الأطروحة .الجزء الثاني مو ج لنمذجة المقترحة.

الكلمات المفتاحية: اللدائن المرنة اللزجة ، اللزوجة الكهربائية ، المطاطية الحرارية ، احتكاك كولوم ، التلف ، التآكل ، عدم المساواة المتغيرة ، عدم المساواة النصفية ، محلول ضعيف ، نقطة ثابتة.

Abstract: The purpose of this thesis is the mathematical study of some boundary value problems of a friction and frictionless contact in a dynamic or a quasistatic process. We combine at the same time various phenomena mechanical, physical and underlying such as: damage, wear and thermal effect. We consider laws of nonlinear behavior for different materials: elasto-viscoplastic, thermo- viscoelastic and electro-viscoelastic. The results we obtain concern the existence and uniqueness of weak solutions. The thesis is divided into two parts. The first part concerns some preliminary results on functional analysis and partial differential equations necessary to carry out the continuation of this thesis. The second part is devoted to the modeling and the mathematical study of the contact problems considered.

Keywords: elasto-viscoplastic, electro-viscoelastic, thermo- viscoelastic, Coulomb friction, damage, wear, variational inequality, Hemivariational inequality, weak solution, fixed point.

Résumé: L’objet de cette thèse est l’étude mathématique de quelques problèmes aux limites de contact avec et sans frottement dans un processus dynamique ou quasistatique. Nous couplons à la fois des phénomènes mécanique, physique et sous-jacent tels que : l’endommagement, l’usure et l’effet thermique. On considère des lois de comportement non linéaire pour des différents matériaux élastoviscoplastiques, thermo- viscoélastiques et électro-viscoélastiques. Les résultats obtenus concernent l’existence et l’unicité des solutions faibles. La thèse comporte deux parties. La première partie rappelle quelques résultats préliminaires d’analyse fonctionnelle et d’équations aux dérivées partielles nécessaires pour réaliser la suite de cette thèse. La deuxième partie est consacrée à la modélisation et à l’étude mathématique des problèmes de contact considérés.

Mots-clés: élasto-viscoplastique, électro-viscoélastique, thermo- viscoélastique, frottement de Coulomb, endommagement, usure, inéquation variationnelle, inéquation Hemivariationnelle, solution faible, point fixe.