N° d'ordre : ....

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIORAT

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère
Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse Fonctionnelle et Numérique

Par
Mehdi Taher BRAHIMI
SUJET

Etude des Opérateurs de Composition dans Certains Espaces Fonctionnels

Soutenu publiquement le ....**devant le jury composé de** :

Mr. L. Mezrag	M.C.	**Université de M'sila**	**Président**
Mr.M.Moussai	Prof.	**Université de M'sila**	**Promoteur**
Mr. M. Nadir	Prof.	**Université de M'sila**	**Examinateur**
Mr. M.Z.Aissaoui	Prof.	**Université de Guelma**	**Examinateur**

Promotion : 2007 / 2008

Table des matières

Notations

- Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,\ x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} .....\partial x_n^{\alpha_n}} \text{ , tel que } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n ,$$

- $C = C(\mathbb{R}^n)$: Dénote l'espace des fonctions continues.

$$C(\mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} ; \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(x_0)| < \varepsilon\}$$

$* \ C^r(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) \quad ; \quad D^\alpha f \in C(\mathbb{R}^n), \quad \text{pour tout} \quad |\alpha| \le r\}$

$* \ \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) \quad ; \quad D^\alpha f \in C(\mathbb{R}^n) , \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \mathbb{N}^n\}$,

$* \ supp\ (f) = \text{Adhérence } (\{x \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad f(x) \neq 0\}) :$ Support de la fonction f

$* \ \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad ; \quad supp\ (f) \text{ est un support compact}\}$,

$* \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: est l' espace de Schwartz et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ ; \quad \|\varphi\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \sim p_{k,m}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \le m} \left(\sup_{\beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \le k} \left| x^\beta \partial^\alpha \varphi(x) \right| \right) \right) < \infty \right\}$$

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \{T : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R} , \exists k \in \mathbb{N} , \exists m \in \mathbb{N} , \exists C_{k,m} > 0, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad ; \quad |\langle T , \varphi \rangle| < C_{k,m} p_{k,m}(\varphi)\}$$

- On définit la norme de l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ par

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si} \quad p \ge 1$$

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \inf\{c > 0 \quad ; \quad |f(x)| \le c,\ (p.p)\} = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \ ,$$

- Pour tout $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la convolution $f * g$ vérifie $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n ;\ f*g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_t f(\xi) .g(t) \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) .\tau_u g\ (\xi) \,\mathrm{d}u \text{ , où } \qquad \tau_u g\ (\xi) = g(\xi - u)$$

- Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit la transformée de Fourier et son inverse par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) \backsim \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi \rangle} f(x) \,\mathrm{d}x \ , \ pour \ tout \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \check{f}(\xi) \backsim (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi \rangle} f(x) \,\mathrm{d}x \ , \ pour \ tout \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$(\mathcal{F}T)(f) = \hat{T}(f) = T\left(\hat{f}\right), \ \left(\mathcal{F}^{-1}T\right)(f) = \check{T}(f) = T\left(\check{f}\right), \quad pour \ tout \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

- $[s]$: Dénote la partie entière de $s \in \mathbb{R}$

- p' : Dénote l'exposant conjugué de $p \geq 1$, défini par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$

- $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$: est l'ensemble des polynômes de degré au plus m , $m \in \mathbb{N}$, telle que

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n) = \left\{ P \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad ; \qquad P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha,\ x \in \mathbb{R}^n \right\},\ \mathcal{P}_{-1}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$$

$*$ $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$: Le sous espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des polynômes ou multinômes.

$*$ $[f]$: La classe d'équivalence d'une distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ modulo $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$

$*$ On convient de prendre $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}...\ x_n^{\alpha_n},\ \alpha! = \alpha_1!.\alpha_2!...\alpha_n!$

$t^\alpha x = (t^{\alpha_1}x_1, t^{\alpha_2}x_2....t^{\alpha_n}x_n), (t \geq 0)$, et $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ...x_ny_n,$

$*$ On introduit l'espace $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ défini par les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à moment nul

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) &= \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad ; \qquad \partial^\alpha \mathcal{F}\, f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)\, \mathrm{d}x = 0,\ pour\ \ tout \quad \alpha \in \mathbb{N}^n \right\} \\
\widehat{\mathcal{S}}_0(\mathbb{R}^n) &= \left\{ \hat{f} \quad ; \qquad f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \right\} = \{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad ; \qquad \partial^\alpha f(0) = 0,\ pour\ \ tout \quad \alpha \in \mathbb{N}^n \}. \\
\mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^n) &= \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) / \mathcal{S}_0^\perp(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) / \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

- Pour chaque $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, on définit l'espace de Hölder par

$$\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^\infty \quad ; \qquad \|f\|_{\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_\infty + \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n,\ x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^s} < \infty \right\},\ \text{si } 0 < s < 1$$

$$\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{C}^{[s]}(\mathbb{R}^n)\ ; \qquad \|f\|_{\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\beta| \leq [s]} \left\| D^\beta f \right\|_{\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},\ \text{si } s = [s] + \alpha,\ 0 < \alpha < 1$$

$*$ Pour chaque $s \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Zygmund par

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}^n) \quad ; \qquad \|f\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)} = \sup_{h \neq 0,\ x\ \in\ \mathbb{R}^n} \frac{|u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)|}{|h|} < \infty \right\},$$

$$\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n) \quad ; \qquad D^\alpha f \in \mathcal{C}^1,\ pour\ \ tout \quad |\alpha| \leq s - 1 \right\},\ \text{si } s \neq 1$$

- $A \lesssim B$: Signifie que pour deux expressions paramétriques A et B ,

il existe une constante indépendante $c > 0$, tel que $A \leq cB$

$*$ $A \backsim B$: Si $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$, alors ils existent $c_1, c_2 > 0$, tels que $c_1 B \leq A \leq c_2 B$

Introduction

Les principaux résultats de cette thèse sont liés à trois problèmes

1. Le premier problème a été étudié par plusieurs auteurs, G.Bourdaud, [1], [2], [3], W.Sickel [16], D.Kateb [11] , S.Igari [10], et qui consiste à résoudre le problème de superposition des opérateurs en trouvant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur de composition , $T_G : E \longrightarrow E$, telle que $T_G(f) = G \circ f$, où G est une fonction réelle à valeurs réelles, réalise la condition $T_G(E) \subset E$. Plusieurs chercheurs ont essayé de trouver des opérateurs non triviaux (Associés à des fonctions non affines) vérifiant la condition $T_G(E) \subset E$, pour un espace fonctionnel donné E.

2. Le deuxième problème consiste à donner une formule générale de la dérivée de la composition de plusieurs fonctions, d'utiliser une inégalité de base introduite dans [2] pour généraliser certains résultats , d'étudier les propriétés des opérateurs de composition (bornés en particulier), telles que la différentiabilité et de vérifier les inégalités des normes pour la composition de plus de deux fonctions .

3. Le troisième problème consiste à donner une extension au célèbre théorème de Peetre, en se basant sur les travaux introduits dans [2], et [14].

Notre travail est organisé en quatre chapitres :

- Dans le premier chapitre on présente les espaces fonctionnels connus , tels que les espaces de Besov ainsi que leurs propriétés . On définit les espaces $BV_p(\mathbb{R})$, $BV_p^1(\mathbb{R})$ à partir des espaces des fonctions à p- variation bornées pour $p \geq 1$ et leurs normes.

- Dans le deuxième chapitre on étudie le problème de composition des opérateurs dans les espaces $BV_p^1(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, en se basant sur les travaux introduits dans [2], [3], ainsi que certaines propriétés de multiplication, de continuité, et on va étendre certains résultats concernant une inégalité de base pour la composition de plusieurs fonctions. Ainsi on obtient un algorithme de base donnant la dérivée de la composition de plusieurs fonctions.

- Dans le troisième chapitre on étudie le calcul fonctionnel dans les espaces de Besov homogènes $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, en présentant les conditions nécessaires et suffisantes pour la composition des opérateurs.

- Dans le quatrième chapitre on présente un nouveau espace fonctionnel $BV_p^\alpha(\mathbb{R})$ défini grâce à l'espace $\mathcal{V}_p^\alpha(\mathbb{R})$, introduit dans [14] et on généralise le Théorème (3.17) de Peetre aux espaces $BV_p^\alpha(\mathbb{R})$, $p \in]1,+\infty[$, $0 \leq \alpha < 1$, ainsi que des exemples d'application pour affirmer les résultas énoncés.

Chapitre 1

Quelques résultats préliminaires

Dans ce chapitre on va rappeler les notions essentielles à savoir les séries de Littelwood-Paley ainsi que les différences finies qui vont nous permettre de construire des normes équivalentes pour les espaces de Besov , enfin on donnera un aperçu sur les fonctions à p-variations bornées , ainsi que leurs propriétés qui nous seront très utiles par la suite .

1.1 Séries de Littlewood-Paley

Dans ce paragraphe on donne une définition de la partition de l'unité dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, suivi d'un exemple , et pour plus de détails voir [18] .

1.1.1 Partition de l'unité

Soit la suite des réels $A = \{A_j\}_{j\,\in\,\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$, tels qu'ils existent $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1$ avec

$$\lambda_0 A_j \leq A_{j+1} \leq \lambda_1 A_j\,,\ \ j \in\ \mathbb{N}\,.$$

Il existe alors $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$2A_j \leq A_k\,,\ \ \text{pour tout}\ \ j\,,\,k\ \ \text{et}\ \ j+\ell_0 \leq k\,.$$

On définit $\Omega_A = \{\Omega_{j,A}\}_{j\in\mathbb{N}}$, un recouvrement de $\mathbb{R}^n$, associé à A , tel que

$$\Omega_{j,A} = \begin{cases} \{\xi \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad |\xi| \leq A_{j+\ell_0}\}\,, & \text{si} \quad j = 0, 1, ...\ell_0 - 1 \\ \\ \{\xi \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad A_{j-\ell_0} \leq |\xi| \leq A_{j+\ell_0}\}\,, & \text{si} \quad j \geq \ell_0 \end{cases}$$

Définition 1.1

On dit que la suite des fonctions $\varphi_A = \left\{\varphi_{j,A}\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *est une partition de l'unité par rapport à* Ω_A *, si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $\varphi_{j,A}(\xi) \geq 0\,,\ \xi \in \mathbb{R}^n\,,\ j \in \mathbb{N}$

(ii) $supp\,(\varphi_{j,A}) \subset \Omega_{j,A}\,,\ j \in \mathbb{N}$

(iii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *, il existe une constante* $c_\alpha > 0$ *, telle que*

$$\left|D^\alpha \varphi_{j,A}(\xi)\right| \leq c_\alpha \left(1 + |\xi|^2\right)^{-|\alpha|/2},\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \ j \in \mathbb{N}$$

(iv) Il existe une constante $c_\varphi > 0$ *, telle que*

$$0 < \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{j,A}(\xi) = c_\varphi < \infty\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Pour $A_j = 2^j\,,\ \ell_0 = 1\,,\ c_\varphi = 1\,,$ on a une partition dyadique de l'unité .

La partition $\varphi_A = \left\{\varphi_{j,A}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$, est dite inhomogène qui peut être remplacée par la partition $\left\{\varphi_{j,A}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$, dite homogène .

Exemple 1.2

Soit $K > 1$ *, considérons le recouvrement* $\{C_p\}_{-1}^{+\infty}$ *, défini par*

$$\begin{cases} C_p &= \{\xi \in \mathbb{R}^n \quad ; \qquad K^{-1}2^p \leq |\xi| \leq K2^{p+1}\} \\ C_{-1} &= \bar{B}(0, K) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \quad ; \qquad |\xi| \leq K\} \end{cases}$$

$\{C_p\}_{-1}^{+\infty}$ *, est un recouvrement uniformément fini pour* $\mathbb{R}^n$*, c à d*

$$\{q \in \mathbb{N} \quad ; \qquad C_q \cap C_p \neq \varnothing\} \qquad \textit{est un ensemble fini}\ .$$

On peut construire $\{\phi_0, \psi_\nu\}$ *,* $\nu \in \mathbb{N}$*, une décomposition de Littlewood-Paley inhomogène de l'unité telles que*

$$\psi_\nu(\xi) = \phi_\nu(\xi) - \phi_{\nu-1}(\xi)\,, et \quad \phi_\nu(\xi) = \phi_0\left(2^{-\nu}\xi\right)\,,$$

où $\phi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *est réelle, et* $\phi_0 \equiv 1$ *sur la boule fermée* $\bar{B}(0,1)$ *,* $supp\,(\phi_0) \subset \bar{B}(0,K)$ *,*

$$\textit{tel que} \qquad \left(\phi_0 + \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \psi_\nu\right) u = u,\ \ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,.$$

En effet une telle décomposition existe car on a le lemme suivant .

Lemme 1.3

Ils existent $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, *avec* $supp\ (\psi) \subset C_{-1}$, $supp\ (\varphi) \subset C_0$, *tel que*

$$\psi(\xi) + \sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(2^{-p}\xi\right) = 1,$$

et

$$\psi(\xi) + \sum_{p=0}^{N} \varphi\left(2^{-p}\xi\right) = \psi\left(2^{-(N+1)}\xi\right).$$

Preuve

Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, avec, $0 \le \theta \le 1$, $supp\ (\theta) \subset C_0$, $\theta(\xi) = 1$, pour $1 \le |\xi| \le 2$.

On pose $s(\xi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \theta(2^{-p}\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Puisque $\{C_p\}_{-1}^{+\infty}$, est un recouvrement uniformément fini pour $\mathbb{R}^n$ alors, $s \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

On définit donc $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ par $\varphi(\xi) = \dfrac{\theta(\xi)}{s(\xi)}$, tel que

$$s\left(2^{-p}\xi\right) = \sum\nolimits_{q=-\infty}^{\infty} \theta\left(2^{-(q+p)}\xi\right) = \sum\nolimits_{p_1=-\infty}^{\infty} \theta\left(2^{-p_1}\xi\right) = s(\xi).$$

Soient $|\xi| \ge K$, $p \le -1$, alors nous avons

$$2^{-p}|\xi| = 2^{|p|}|\xi| \ge 2^{|p|}K \ge 2K, \text{ et } 2^{-p}\xi \notin C_0,$$

d'où $\theta(2^{-p}\xi) = 0$, et donc si $|\xi| \ge K$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus C_{-1}$, alors

$$\sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(2^{-p}\xi\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \varphi\left(2^{-p}\xi\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\theta(2^{-p}\xi)}{s(2^{-p}\xi)} = \frac{\sum_{p=-\infty}^{\infty} \theta(2^{-p}\xi)}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} \theta(2^{-p}\xi)} = 1.$$

Si on prend $\psi(\xi) = 1 - \sum\nolimits_{p=0}^{\infty} \varphi\left(2^{-p}\xi\right)$, alors $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tel que $supp\ (\psi) \subset C_{-1}$.

En prenant pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\psi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}|\xi|)$ et $\psi_0(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\xi)$ alors on a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \psi_j \text{ est paire telle que } supp\ (\psi_j) &\subset \bar{C}_j \text{, pour tout } j \in \mathbb{N} \\ \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(\xi) &= 1, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n \\ C_m \cap supp\ (\psi_j) &= \varnothing, \text{ si } |m-j| > 1 \\ \psi_{j-1}(\xi) + \psi_j(\xi) + \psi_{j+1}(\xi) &= 1, \text{ pour tout } \xi \in supp\ (\psi_j),\ j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Et pour construire une partition homogène sur $\mathbb{Z}$, on introduit la suite $\Phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, telles que

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_j(\xi) &= \frac{\psi_j(\xi)}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k(\xi)} \\
\Phi_j(\xi) &= 2^{jn}\Phi_0\left(2^j\xi\right) \ , \text{ pour tout } \ \xi \in \mathbb{R}^n \ , \\
\int_{\mathbb{R}^n} x^k \Phi_j(x)\,\mathrm{d}x &= \hat{\Phi}_j^{(k)}(0) = 0\,, \ \ (k \in \mathbb{N}^n) \ .
\end{aligned}$$

On a donc $$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\Phi}_j(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\psi_j(\xi)}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k(\xi)} \right) = \frac{\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j(\xi)}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k(\xi)} = 1\,, \ \ (\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \ .$$

Puisque $1 - \sum\limits_{j=1}^{\infty} \hat{\Phi}_j$ est indéfiniment différentiable et à support compact, alors on peut choisir comme fonction $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, telle que

$\hat{\Psi} = 1 - \sum\limits_{j=1}^{\infty} \hat{\Phi}_j$, où $\hat{\Psi} \neq 0$ sur $|\xi| \leq 1$ et donc $\hat{\Psi} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \hat{\Phi}_j = 1.$

Posons $\psi(\xi) = \hat{\Psi}(\xi)$ et $\varphi(2^{-j}\xi) = \hat{\Phi}_j(\xi)$, alors on a

$$\psi(\xi) + \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \varphi\left(2^{-j}\xi\right) = 1, \quad (\xi \in \mathbb{R}^n) \ . \tag{1.1}$$

On a $$\psi\left(2^{-N}\xi\right) + \sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(2^{-p-N}\xi\right) = \psi(\xi) + \sum_{p=0}^{N-1} \varphi\left(2^{-p}\xi\right) + \sum_{p=N}^{\infty} \varphi\left(2^{-p}\xi\right) = 1,$$

d'où $$\sum_{p=0}^{\infty} \varphi\left(2^{-p-N}\xi\right) = \sum_{p=N}^{\infty} \varphi\left(2^{-p}\xi\right),$$

et donc $$\psi\left(2^{-N}\xi\right) = \psi(\xi) + \sum_{p=0}^{N-1} \varphi\left(2^{-p}\xi\right) .$$

On prouve par récurrence si $$\varphi\left(2^{-N}\xi\right) = \psi\left(2^{-(N+1)}\xi\right) - \psi\left(2^{-N}\xi\right),$$

et puisque $$\psi\left(2^{-(N+1)}\xi\right) = \psi(\xi) + \sum_{p=0}^{N} \varphi\left(2^{-p}\xi\right),$$

alors on a $$\begin{aligned}
\psi\left(2^{-(N+2)}\xi\right) &= \psi(\xi) + \sum_{p=0}^{N+1} \varphi\left(2^{-p}\xi\right) \\
&= \psi\left(2^{-(N+1)}\xi\right) + \varphi\left(2^{-(N+1)}\xi\right) ,
\end{aligned}$$

d'où $$\varphi\left(2^{-(N+1)}\xi\right) = \psi\left(2^{-(N+2)}\xi\right) - \psi\left(2^{-(N+1)}\xi\right)$$

1.1.2 Décomposition d'une fonction $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Puisque Φ_j est réelle, paire alors $\hat{\Phi}_j$ est réelle, paire et son support est C_j,

d'où $\Phi_j \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ et donc $\Phi_j * f$ est défini pour tout $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n)$.

Si on multiplie les deux côtés de l'égalité (1.1) par $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on obtient avec la transformée inverse de Fourier

$$u = \Psi * u + \sum_{j\in\mathbb{N}}^{\infty} \Phi_j * u, \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

et l'on déduit sa relation duale

$$f = \Psi * f + \sum_{j\in\mathbb{N}} \Phi_j * f, \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

d'où

$$u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Phi_j * u, \text{ pour tout } u \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n),$$

et donc

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Phi_j * f, \text{ pour tout } f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n).$$

Pour tout $j, k \in \mathbb{Z}$, on définit les opérateurs continus Δ_k, Q_j, par

$$\Delta_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \text{telles que}$$

$$Q_j f = \left(\psi\left(2^{-j}\cdot\right)\right)^{\vee} * f = 2^{jn}\overset{\vee}{\psi}\left(2^{j}\cdot\right) * f \quad \text{pour} \quad (j = 0, 1, 2, ...),$$

et

$$\Delta_k f = \left(\varphi\left(2^{-k}\cdot\right)\right)^{\vee} * f = 2^{kn}\overset{\vee}{\varphi}\left(2^{k}\cdot\right) * f \quad \text{pour} \quad (k = 1, 2, ...).$$

On a donc $\widehat{\Delta_k f}(\xi) = \hat{\Phi}_k(\xi).\hat{f}(\xi)$, d'où $\Delta_k f(\xi) = \Phi_k(\xi) * f(\xi)$,

et on pose $Q_0 f(\xi) = F(\xi)$.

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \mathbb{N}$, (Convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$), on a

$$Q_k f = \sum_{j\in\mathbb{Z},\ j\leq k} \Delta_j f,$$

et

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f = F + \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j f, \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n),$$

telle que $\widehat{\Delta_j f} \neq 0$, sur A_j et $\hat{F}(\xi) \neq 0$, pour $|\xi| \leq 1$.

Si $\xi = 0$, alors l'expression $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\Phi}_j(0) = 0$, implique (1.1), car si

$$\phi^{(k)} = 0 \,,\ \text{pour} \quad \text{tout} \quad k \in \mathbb{N}^n \,,$$

alors (1.1) est vérifiée pour tout $\phi \in \widehat{\mathcal{S}}_0(\mathbb{R}^n)$.

1.1.3 Décomposition de $\Delta_k(f\,.\,g)$

Calculons

$$\begin{aligned}
\Delta_k(f\,.\,g) &= \Delta_k\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{\ell\in\mathbb{N}} \Delta_j f\,.\,\Delta_\ell g\right) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{\ell\in\mathbb{N}} \Delta_k\,(\Delta_j f\,.\,\Delta_\ell g) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N},\ \ell\in\mathbb{N}} \Delta_k\,(\,\Delta_j f\,.\,\Delta_\ell g) \\
&= \left(\prod\nolimits_{k,1} + \prod\nolimits_{k,2} + \prod\nolimits_{k,3}\right)(f,g)\ ,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\prod\nolimits_{k,1}(f,g) &= \Delta_{k(1)}(f\,.\,g) = \Delta_k\left(\widetilde{\Delta}_k f.Q_{k+1}g\right) \\
\prod\nolimits_{k,2}(f,g) &= \Delta_{k(2)}(f\,.\,g) = \left(Q_{k+1}f.\widetilde{\Delta}_k g\right) = \prod\nolimits_{k,2}(g,f) \\
\prod\nolimits_{k,3}(f,g) &= \Delta_{k(3)}(f\,.\,g) = \sum\nolimits_{j=k}^{\infty} \Delta_k\left(\Delta_j f.\overline{\Delta}_j g\right)\ ,
\end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{\Delta}_k = \sum\nolimits_{j=k-2}^{k+4} \Delta_j\,, \qquad \text{et}$$

$$\overline{\Delta}_k = \sum\nolimits_{j=k-1}^{k+1} \Delta_j\,,\ \text{(Calcul des supports)}$$

1.2 Les opérateurs des différences finies $\boldsymbol{\Delta_h^m}$

Définition 1.4

Soient $x, h \in \mathbb{R}^n,\ m \in \mathbb{N}$ *et* f *une fonction quelconque, introduisons l'opérateur de différence finie* Δ_h *telle que*

$$\Delta_h f \;=\; \tau_{-h} f - f \ ,\ o\grave{u}\ \ \tau_h f\left(x\right) = f\left(x-h\right)\ ,$$

et on pose $$\Delta_h^1 f\left(x\right) \;=\; \Delta_h f\left(x\right)\ = f\left(x+h\right) - f\left(x\right)\ .$$

Les opérateurs $\Delta_h^m f$ *sont définis par la relation de récurrence*

$$\Delta_h^m f\left(x\right) = \Delta_h\left(\Delta_h^{m-1} f\left(x\right)\right),\ m \geq 2, \tag{1.2}$$

On déduit donc que

$$\Delta_h^2 f\left(x\right) = \Delta_h\left(\Delta_h^1 f\left(x\right)\right) = f\left(x+2h\right) - 2f\left(x+h\right) + f\left(x\right)$$

Lemme 1.5

Soient $x, h \in \mathbb{R}^n,\ m \in \mathbb{N}$ *et* f *une fonction quelconque définie dans une partie de* $\mathbb{R}^n$, *alors le terme général de* $\Delta_h^m f\left(x\right)$ *peut s'écrire sous la forme*

$$\Delta_h^m f\left(x\right) = \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}\left(-1\right)^{\ell\pm m}\tau_{-\ell h} f\left(x\right) = \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}\left(-1\right)^{\ell}\tau_{(\ell-m)h} f\left(x\right)$$

Preuve

(i) Puisqu'on a

$$\binom{m}{\ell-1} + \binom{m}{\ell} \;=\; \binom{m+1}{\ell},$$

$$et$$

$$\left(-1\right)^{m-\ell} = \left(-1\right)^{m+\ell} \;=\; -\left(-1\right)^{m+\ell-1} = -\left(-1\right)^{m+\ell+1},$$

on déduit donc par récurrence que si $\Delta_h^m f(x) = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} (-1)^{m+\ell} \tau_{-\ell h} f(x)$, alors selon (1.2)

$$\begin{aligned}
\Delta_h^{m+1} f(x) &= \Delta_h \left(\Delta_h^m f(x)\right) = \Delta_h^m f(x+h) - \Delta_h^m f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m+k} f(x+(k+1)h) - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m+k} f(x+kh) \\
&= \sum_{\ell=1}^{m+1} \binom{m}{\ell-1} (-1)^{m+\ell-1} f(x+\ell h) - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m+k} f(x+kh)
\end{aligned}$$

$$= f(x+(m+1)h) - (-1)^m f(x) + \sum_{\ell=1}^{m} \left(\binom{m}{\ell-1} (-1)^{m+\ell-1} - \binom{m}{\ell} (-1)^{m+\ell} \right) f(x+\ell h)$$

$$= f(x+(m+1)h) - (-1)^m f(x) + \sum_{\ell=1}^{m} \left(\binom{m+1}{\ell} (-1)^{m+\ell+1} \right) f(x+\ell h)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{m+1} \left(\binom{m+1}{\ell} (-1)^{m+1+\ell} \right) f(x+\ell h)$$

(ii)

De (i) et puisque $\binom{m}{\ell} = \binom{m}{m-\ell}$, alors on a

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{m-\ell} (-1)^{m+\ell} f(x+\ell h) \ .$$

Puisque $(-1)^{m-\ell} = (-1)^{m+\ell}$, et pour $0 \leq \ell \leq m$, on a $0 \leq m-\ell \leq m$, donc pour $m-\ell = k$ on a

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{m-\ell} (-1)^{m-\ell} f(x+\ell h) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{k} f(x+(m-k)h) \ ,$$

on convient donc de poser

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{k} f(x+(m-k)h) = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} (-1)^{m\mp\ell} \tau_{-\ell h} f(x)$$

Définition 1.6

Soient $h \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $t > 0$, *et* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *on définit*

$$\omega_p^m(t,f) = \sup_{|h|\leq t\,,\, h\in\mathbb{R}^n} \|\Delta_h^m f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad , \tag{1.3}$$

comme le $m^{éme}$ *ordre du module de continuité de* f *dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Ce module de continuité est utilisé pour trouver des normes équivalentes

Remarque 1.7

a) *La continuité d'une fonction* f *en* x *est définie par*

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \left|\Delta_h^1 f(x)\right| = \lim_{h\longrightarrow 0} |f(x+h) - f(x)| \longrightarrow 0$$

b) *La différentiabilité d'une fonction* f *en* x *est décrite par*

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{|\Delta_h^1 f(x)|}{|h|} \leq c < \infty \ , \ (c > 0)$$

c) *Les modules de continuité définis en (1.3) convergent pour la norme* L^p , *et sont monotones pour l'opérateur* $\sup$, *et* $m-$*différentiables (Régularité d'ordre* m*)*.

d) $\omega_p^r(t,f) = 0$ *si et seulement si* f *est un polynôme de degré* $\leq r-1$.

e) *Pour tout* $s > 0$, *on a une norme équivalente pour l'espace* $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ *de Hölder-Zygmund*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)} \sim \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n\,,\ 0<|h|\leq 1} |h|^{-s} \left|\Delta_h^k f(x)\right| \ , \ \textit{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}\,,\ k > s$$

1.3 Les normes dans les espaces de Besov

On donne dans ce paragraphe les définitions des normes des espaces de Besov, en utilisant la théorie de **Littlewood-Paley** et les **différences finies**

1.3.1 Par la théorie de Littlewood-Paley

Définition 1.8

Soient $s \in \mathbb{R},\ p,q \in [1,+\infty]$, alors on dit que la fonction , f appartient à $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, l'espace de Besov homogène si et seulement si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ et $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f$ telles que

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{sj}\|\Phi_j * f\|_p\right)^q\right)^{1/q} < \infty\,, & \textit{pour } 1 \leq q < \infty \\ \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{sj}\|\Phi_j * f\|_p\right) < \infty\,, & \textit{pour } \ q = \infty \end{cases}$$

Proposition 1.9 *[18]*

Pour tout $f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ et tout $\lambda > 0$, ils existent deux constantes $0 < c_1 \leq c_2$, telles que

$$c_1 \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{n/p-s} \|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.4}$$

Preuve

- Soient $g(x) = f(\lambda x)$, $\gamma = s - n/p$, $\lambda = 2^N$, $u = 2^N x$, d'où $\mathrm{d}u = 2^{nN}\,\mathrm{d}x$, alors on a

$$\begin{aligned} \Phi_j * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_j(t)\, g(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} 2^j \Phi_0\left(2^j t\right) f\left(2^N(x-t)\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 2^{j-N}\Phi_0\left(2^{j-N}u\right) f\left(2^N x - u\right)\ \mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{j-N}(u)\, f\left(2^N x - u\right)\ \mathrm{d}u \\ &= \Phi_{j-N} * f\left(2^N x\right),\ \text{d'où} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{js}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\Phi_{j-N} * f\left(2^N x\right)\right|^p\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\Big)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{js-nN/p} 2^{sN-sN}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_{j-N} * f(u)|^p\ \mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \text{, car } \mathrm{d}x = 2^{-nN}\,\mathrm{d}u \\ &= \left(2^N\right)^{s-n/p}\left(\sum_{k=j-N\in\mathbb{Z}} \left(2^{ks}\|\Phi_k * f(\cdot)\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \lambda^\gamma \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

- Considérons, $\lambda > 0$, tel que $2^{N-1} < \lambda \leq 2^{N}$, $(N \in \mathbb{Z})$, pour prouver (1.4) on prouve l'une de ses inégalités car si $\|f(\lambda\cdot)\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$, alors

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \left\|f\left(\lambda^{-1}\left(\lambda\left(\cdot\right)\right)\right)\right\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c'\left\|f\left(\lambda\left(\cdot\right)\right)\right\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

On a $\quad f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f ,\quad$ donc $\quad \Delta_k f = \Phi_k * f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Phi_k * \Delta_j f ,$

or $\quad supp\ (\Delta_k f\,) \subset \left[2^{k-1}, 2^{k+1}\right],$

d'où $\quad \Delta_k f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Phi_k * \Delta_j f = \Phi_k * \Delta_{k-1} f + \Phi_k * \Delta_{k+1} f + \Phi_k * \Delta_k f .$

Par récurrence si $\Delta_k f$, $\Delta_{k-1} f$, Φ_0 sont décroissantes alors Φ_k, $\Phi_k * \Delta_{k-1} f$, $\Phi_k * \Delta_k f$ sont décroissantes et donc $\Phi_k * \Delta_{k+1} f$, est décroissante ainsi que $\Delta_{k+1} f$, d' où

$$\begin{aligned}
\Delta_k f\ \left(\lambda\left(x-t\right)\right) &= \Phi_k * \Delta_{k-1} f + \Phi_k * \Delta_{k+1} f + \Phi_k * \Delta_k f\ \left(\lambda\left(x-t\right)\right) \\
&\leq \Phi_k * \Delta_{k-1} f + \Phi_k * \Delta_{k+1} f + \Phi_k * \Delta_k f\left(\ 2^{N-1}\left(x-t\right)\right) \\
&= \Delta_k f\ \left(2^{N-1}\left(x-t\right)\right),
\end{aligned}$$

et $\quad f\left(\lambda\left(x-t\right)\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f\ \left(\lambda\left(x-t\right)\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f\ (2^{N-1}\left(x-t\right)) = f(2^{N-1}\left(x-t\right)) .$

$$\begin{aligned}
&\text{on déduit donc que} & f\left(2^{N}\left(x-t\right)\right) &\leq f\left(\lambda\left(x-t\right)\right) \leq f\left(2^{N-1}\left(x-t\right)\right), \\
&\text{et} & \Phi_j * f\left(2^{N-1}\left(\cdot\right)\right) &\leq \Phi_j * f\left(\lambda\left(\cdot\right)\right) \leq \Phi_j * f\left(2^{N}\left(\cdot\right)\right), \\
&\text{alors on a} & \left|\Phi_j * f\left(\lambda\left(\cdot\right)\right)\right| &\leq \max\left(\left|\Phi_j * f\left(2^{N}\left(\cdot\right)\right)\right|, \left|\Phi_j * f\left(2^{N-1}\left(\cdot\right)\right)\right|\right), \\
&\text{et donc} & \left\|\Phi_j * f\left(\lambda\left(\cdot\right)\right)\right\|_p &\leq \max(\left\|\Phi_j * f\left(2^{N}\left(\cdot\right)\right)\right\|_p, \left\|\Phi_j * f\left(2^{N-1}\left(\cdot\right)\right)\right\|_p), \\
&\text{d'où} & \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} &\leq \max(\left\|f\left(2^{N}\left(\cdot\right)\right)\right\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}, \left\|f\left(2^{N-1}\left(\cdot\right)\right)\right\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}) \\
& & &\leq 2^{\gamma}\left(2^{N-1}\right)^{\gamma}\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{\gamma}\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}, \text{ et } C = 2^{\gamma}, \\
&\text{on peut donc écrire} & \|\cdot\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} &\sim \lambda^{n/p-s}\left\|(\lambda\cdot)\right\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} . \\
&\text{Si } \lambda = 2^{m} \text{ alors} & \left\|f\left(2^{m}\cdot\right)\right\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} &= \left(2^{m}\right)^{s-n/p}\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} . \\
&\text{Si } q = 2 \text{ alors} & \left\|f\left(\lambda\cdot\right)\right\|_{\dot{B}_p^{s,2}(\mathbb{R}^n)} &= \left\|f\left(\lambda\cdot\right)\right\|_{\dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{s-n/p}\|f\|_{\dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{s-n/p}\|f\|_{\dot{B}_p^{s,2}(\mathbb{R}^n)} . \\
&\text{On a aussi} & \left\|f\left(\lambda\cdot\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \lambda^{-n/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

Définition 1.10

Soient $s \in \mathbb{R}$, p , $q \in [1, +\infty]$, *alors on dit que la fonction* f *appartient à* $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, *l'espace de Besov non homogène , si et seulement si*

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad et \qquad f = Q_0 f + \sum_{j \geq 1} \Delta_j f \ , \ telles\ que$$

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \|\Psi * f\|_p + \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \left(2^{sj} \|\Phi_j * f\|_p \right)^q \right)^{1/q} < \infty \, , & pour \quad 1 \leq q < \infty \\ \\ \|\Psi * f\|_p + \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(2^{sj} \|\Phi_j * f\|_p \right) < \infty \, , & pour \quad q = \infty \end{cases}$$

1.3.2 Par les différences finies

Lemme 1.11 *[18]*

Pour tout $0 < s < 1$, *on a*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} |\Phi_j(x)| \leq c x^{-(1+s)} \quad , \quad pour \ \ tout \quad x > 0 \, , \ (c \ > \ 0)$$

Preuve

- Si $x = 2^{-N}$, alors $\Phi_0 \in \mathcal{S}$, implique $|\Phi_0(x)| \leq cx^{-2}$, d'où

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} 2^{js} |\Phi_j(x)| = \sum_{j=N+1}^{\infty} 2^{j(s+1)} \left| \Phi_0\left(2^j x\right) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{n(\alpha-1)} x^{-2} = \underbrace{\frac{1}{1-2^{(1-\alpha)}}}_{c>0} \cdot \underbrace{2^{N(\alpha-1)} x^{-2}}_{x^{-(1+s)}} = c.x^{-(1+s)} \, .$$

Puisque Φ_0 , est bornée alors

$$\sum_{j=-\infty}^{N} 2^{js} |\Phi_j(x)| \leq c \, . \sum_{j=-\infty}^{N} 2^{j(1+s)} = c.2^{N(1+s)} = c \, . \, x^{-(1+s)}$$

- Si $2^{-N} < x \leq 2^{-N+1}$, $N \in \mathbb{Z}$, et de la décroissance de Φ_j , on a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} |\Phi_j(x)| &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \left| \Phi_j\left(2^{-N}\right) \right| \\ &\leq c \, . \, 2^{N(1+s)} = \left(2^{1+s} c\right) 2^{(N-1)(1+s)} \leq c' \, . \, x^{-(1+s)} \end{aligned}$$

Lemme 1.12 *[18]*

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *alors*

(i) $\|\tau_{-h} f - f\|_p \leq |h| \, \|f'\|_p$

(ii) $\left\|\Delta_h^k f\right\|_p \leq |h|^k \left\|f^{(k)}\right\|_p$, $(k \geq 2)$

Preuve

(i) En utilisant l'inégalité suivante

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{1-1/p} \|f'\|_p \,,$$

et puisque $p \geq 1$, donne $0 \leq 1 - 1/p \leq 1$, et en prenant , $h = x - y$, on obtient

$$\|\tau_{-h} f - f\|_p \leq |h|^{1-1/p} \|f'\|_p \leq |h| \, \|f'\|_p \,,$$

(ii) On obtient par récurrence

$$\begin{aligned} \left\|\Delta_h^{k+1} f\right\|_p &= \left\|\Delta_h \left(\Delta_h^k f\right)\right\|_p \leq |h| \left\|\left(\Delta_h^k f\right)'\right\|_p = |h| \left\|\Delta_h^k f'\right\|_p \\ &\leq |h| \, |h|^k \left\|(f')^{(k)}\right\|_p \leq |h|^{k+1} \left\|f^{(k+1)}\right\|_p \end{aligned}$$

Proposition 1.13 *[18]*

Soient $h \in \mathbb{R}^n$, $0 < s < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, $alors$ $f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|h|^{-s} \|\tau_{-h} f - f\|_p)^q \frac{\mathrm{d}h}{|h|^n} < \infty \,, \tag{1.5}$$

et $f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, *si et seulement si* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) / \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *telle que (1.5) soit vérifiée*

Preuve

D'abord prenons le cas le plus simple $q = n = 1$, car le cas $q = \infty$, ainsi que le cas général de $\mathbb{R}^n$, peuvent facilement en être déduits en utilisant le théorème de l'interpolation de deux espaces de Besov qui donne un autre espace de Besov ainsi que le théorème de Marcinkiewicz .

(1) Soit $f = F + \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \Delta_j f \in B_p^{s,1}(\mathbb{R})$, alors $f \in L^p$, tel que $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \|\Delta_j f\|_p < \infty$,
et donc par le Lemme 1.12 on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{2^{-j}} |h|^{-s} \left\|\Delta_h^1(\Delta_j f)\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} &\leq \int_0^{2^{-j}} |h|^{1-s} \left\|(\Delta_j f)'\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} \\
&\leq c.2^j \left\|(\Delta_j f)'\right\|_p \int_0^{2^{-j}} |h|^{-s}\, \mathrm{d}h = c.2^{js} \left\|(\Delta_j f)'\right\|_p ,
\end{aligned}$$

$$\text{et } \int_{2^{-j}}^{\infty} |h|^{-s} \left\|\Delta_h^1(\Delta_j f)\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} \leq 2\left\|(\Delta_j f)'\right\|_p \int_{2^{-j}}^{\infty} |h|^{-s} \frac{\mathrm{d}h}{|h|} \leq c2^{js} \left\|(\Delta_j f)'\right\|_p ,$$

$$\text{d'où } \int_0^{\infty} |h|^{-s} \left\|\Delta_h^1(f)\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} = \int_0^{\infty} |h|^{-s} \left\|\Delta_h^1\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \Delta_j f\right)\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} \leq c\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{js} \left\|(\Delta_j f)'\right\|_p < \infty$$

(2) Soit $f \in L^p$, et $\int_0^{\infty} |h|^{-s} \left\|\Delta_h^1(f)\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} < \infty$, alors $f * \Psi \in L^p$.

On a $\Phi_j * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_j(y)\left(f(x-y) - f(x)\right) \mathrm{d}y$, d'où par l'inégalité de Minkowski

$$\begin{aligned}
\|\Phi_j * f\|_p &= \left\|\int_{-\infty}^{0} \Phi_j(y)\left(f(x-y)-f(x)\right)\mathrm{d}y + \int_0^{\infty} \Phi_j(y)\left(f(x-y)-f(x)\right)\mathrm{d}y\right\|_p \\
&\leq 2\int_0^{\infty} |\Phi_j(y)|\, \|\Delta_{-y} f\|_p\, \mathrm{d}y .
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1.11, on obtient $f \in B_p^{s,1}(\mathbb{R})$, car

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{js} \|\Phi_j * f\|_p &\leq 2\int_0^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{js} |\Phi_j(y)|\, \|\tau_{-y} f - f\|_p\, \mathrm{d}y \\
&\leq c\int_0^{\infty} |y|^{-(1+s)} \|\tau_{-y} f - f\|_p\, \mathrm{d}y = c\int_0^{\infty} |h|^{-s} \left\|\Delta_h^1(f)\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} < \infty ,
\end{aligned}$$

on note que (1.5) est équivalente à $\int_{|h|\leq 1} \left(|h|^{-s} \|\tau_{-h} f - f\|_p\right)^q \frac{\mathrm{d}h}{|h|^n}$, car

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|h|^{-s} \|\tau_{-h} f - f\|_p\right)^q \frac{\mathrm{d}h}{|h|^n} = \int_{|h|<1} (\ldots)\, \mathrm{d}h + \int_{|h|\geq 1} (\ldots)\, \mathrm{d}h ,$$

et l'intégrale $\int_{|h|\geq 1} \left(|h|^{-s} \|\tau_{-h} f - f\|_p\right)^q \frac{\mathrm{d}h}{|h|^n}$, se transforme par un changement de variable

convenant en, $\int_{|h|\leq 1} \left(|h|^{-s} \|\tau_{-h} f - f\|_p\right)^q \frac{\mathrm{d}h}{|h|^n}$

Théorème 1.14 *[16]*

Soient $h \in \mathbb{R}^n$, $s > 0$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$, $M \in \mathbb{N}$, $M \leq s < M+1$ *, alors* $f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si ,* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *, et telle que*

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \sim \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \left\|\Delta_h^{M+1} f\right\|_p^q \frac{\mathrm{d}h}{|h|^n}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty .$$

Le terme $(\int_{\mathbb{R}^n} ... \,\mathrm{d}h)$, peut être remplacé par $(\int_{|h|<\varepsilon} ... \,\mathrm{d}h)$, pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, et en général on prend pour $\varepsilon = 1$, le terme $(\int_{|h|<1} ... \,\mathrm{d}h)$ dans le sens des semi-normes équivalentes .

Preuve

– Comme dans la preuve de la Proposition , 1.13 supposons $f \in B_p^{s,1}(\mathbb{R})$, $0 < s < 1$

$$\text{donc} \qquad f \in L^p \quad \text{et} \quad \int_0^\infty |h|^{-s} \left\|\Delta_h^1 f\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} < \infty.$$

Puisque $\Psi * f \in L^p$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\|\Phi_j * f\|_p \leq c \left\|\Delta_h^1 f\right\|_p .$$

Par le Lemme 1.12 , et pour $2^{-(j+1)} \leq h \leq 2^{-j}$, on obtient

$$\int_{2^{-(j+1)}}^{2^{-j}} |h|^{-s} \left\|\Delta_h^1 f\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} \geq c \|\Phi_j * f\|_p \int_{2^{-(j+1)}}^{2^{-j}} |h|^{-s} \frac{\mathrm{d}h}{|h|} = c 2^{js} \|\Phi_j * f\|_p ,$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \sum_{j=0}^{\infty} 2^{js} \|\Phi_j * f\|_p &\leq c \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-(j+1)}}^{2^{-j}} |h|^{-s} \left\|\Delta_h^1 f\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} \\ &\leq c \int_0^1 |h|^{-s} \left\|\Delta_h^1 f\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} < \infty \end{aligned}$$

– Si $s \geq 1$, alors $M \leq s < M+1$, d'où $0 \leq s - M < 1$, et donc

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} &\sim \int_0^\infty |h|^{-(s-M)} \left\|\Delta_h^1 f\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} \\ &\sim \int_0^\infty |h|^{-s} \left\|\Delta_h^{M+1} f\right\|_p \frac{\mathrm{d}h}{|h|} \end{aligned}$$

Théorème 1.15 *[16]*

Soient $h \in \mathbb{R}^n$, $0 < q \leq \infty$, $0 < p < \infty$, $M \in \mathbb{N}$ *, et notons* σ_p *, par*

$$\sigma_p = \max\left(0\,,\ \frac{n}{p} - n\right)$$

(i) Supposons que $\sigma_p < s < M$, *alors*

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)} \sim \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \left\|\Delta_h^M f\right\|_p^q \frac{\mathrm{d}h}{|h|^n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

(ii) Si $0 < q \leq \infty$, $0 < p < \infty$, $s > \sigma_p$, $M \leq s < M+1$, *alors*

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)} \sim \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \left\|\Delta_h^{M+1} f\right\|_p^q \frac{\mathrm{d}h}{|h|^n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Preuve

Pour la preuve , voir par exemple [17] , paragraphe.3.5.3

1.4 Les fonctions à p-variations bornées

Dans tout ce paragraphe I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.4.1 Notions générales

Dans ce sous paragraphe on donne les définitions des fonctions à p-variations bornées $\mathcal{V}_p\,(I)$ et les espaces $\mathcal{BV}_p\,(I)$, $BV_p\,(I)$, de leurs classes d'équivalence avec la relation d 'équivalence l'égalité presque partout ainsi que l'espace de leurs primitives $BV_p^1\,(I)$, et leurs propriétés qu'on utilisera par la suite

Définition 1.16

Soit $p \in [\,1,\,+\infty\,[$, *alors la fonction* $f\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$, *est dite à p-variations bornées ou brièvement à p-v b, si pour toutes les suites réelles, finies et strictes* $t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_N$, *de* I, *il existe* $c > 0$, *telle que*

$$\sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p \leq c^p \text{ , ou bien si}$$

$$\sup_{\{t_k\} \subset I} \left[\sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p \right] < \infty$$

– On dénote l'ensemble de ces fonctions par $\mathcal{V}_p(I)$, $(\mathcal{V}_p$ *si* $I = \mathbb{R})$, *et le minimum de telles constantes* c *par rapport à* f *par* $\nu_p(f,\ I)$, $(\ \nu_p(f)$ *si* $I = \mathbb{R})$

$$\nu_p(f,\ I) = \inf_c \left\{ c\ >\ 0 : \sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p \leq c^p,\ \{t_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset I \right\}.$$

La Définition 1.16 est équivalente au fait que pour toute famille d'intervalles disjoints $I_k = [a_k, b_k] \subset I$, on a

$$\Big(\sum_{I_k} |f(a_k) - f(b_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq c < \infty, \ \ (c\ >\ 0)\,.$$

L'espace $\mathcal{V}_1(I)$ ou simplement $\mathcal{V}(I)$ est appelé l'espace des fonctions à variation born ées sur I et $\mathcal{V}_\infty(I)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{\mathcal{V}_\infty(I)} = \nu_\infty(f,\ I) = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

Définition 1.17

Une fonction $f\ :\ A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$, *est dite* γ*-Lipchitzienne,* $\gamma \geq 0$ *, d'ordre* α, $0 < \alpha \leq 1$, *si et seulement si*

$$|f(x) - f(y)| \leqq \gamma\, |x - y|^\alpha\,, \quad \text{pour tout} \quad x, y \in A.$$

L'ensemble de ces fonctions est noté $Lip_{\alpha}(A)$, $(Lip_{\alpha}\ si\ A=\mathbb{R}^n)$, on dit aussi qu'une fonction est Lipchitzienne si elle est γ -Lipchitzienne, pour un certain $\gamma \geq 0$, et on munit $Lip_{\alpha}(A)$ de la norme suivante

$$\|f\|_{Lip_{\alpha}(A)} = \sup_{x,y\in A,\ x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} .$$

Une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite localement $\gamma-$Lipchitzienne si à tout point en A il existe un voisinage où f est γ-Lipchitzienne. Il faut remarquer que

$$B_{\infty}^{s,\infty}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^s(\mathbb{R}) = Lip_s(\mathbb{R}) \ , \ \ si\ 0<s<1$$

Proposition 1.18 *[2]*

Pour tout $x,\ y\in I$ et $p\in [\ 1,\ +\infty[$, chaque élément de $\mathcal{V}_p(I)$ est une fonction bornée, de plus $\mathcal{V}_p(I)$ devient un espace de Banach s'il est doté de la norme suivante

$$\|f\|_{\mathcal{V}_p(I)} = \sup_{x\in I}|f(x)| + \nu_p(f,\ I) \tag{1.6}$$

Preuve

Par une suite avec seulement deux termes, nous obtenons

$$|f(t_k)-f(t_{k-1})|^p \leq (\nu_p(f,\ I))^p \ \ ,pour\ \ tout \quad t_k, t_{k-1}\in I\ .$$

Si on prend $t_{k-1}=0$, et $t_k=x$, alors $|f(t_k)-f(0)| \leq \nu_p(f,\ I)$,

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad |f(x)| &= |f(t_k)-f(0)+f(0)| \\ &\leq |f(t_k)-f(0)| + |f(0)| \\ &\leq \nu_p(f,\ I)\ + |f(0)| = C < \infty, \end{aligned}$$

et donc chaque fonction de $\mathcal{V}_p(I)$ est bornée, et la norme (1.6) vérifie toutes les conditions rendant $\mathcal{V}_p(I)$ un espace de Banach.

1.4.2 Les fonctions à p-v.b comme distributions

Définition 1.19 *[2]*

Soit $p \in [1, +\infty]$, *nous dénotons par* $\mathcal{BV}_p(I)$, *l'ensemble des fonctions* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle qu'il existe une fonction* $g \in \mathcal{V}_p(I)$ *qui coïncide avec* f *presque partout,*

$$\mathcal{BV}_p(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ \exists g \in \mathcal{V}_p(I), \ \textit{tel que } f = g \ (p.p)\},$$

et on pose $\varepsilon_p(f, I) = \inf\{\nu_p(g, I) \ ; \ g \in \mathcal{V}_p(I), \ \textit{tel que } g = f \ (p.p)\},$

– Nous dénotons par $BV_p(I)$, l'ensemble quotient par rapport à la relation d'équivalence " égalité dans $\mathcal{BV}_p(I)$ presque partout ", telles que

$$\dot{f} = \{g \in \mathcal{BV}_p(I), \ \textit{tel que } g = f \ (p.p)\},$$

$$\textit{et} \quad BV_p(I) = \left\{\dot{f} \ \textit{ tel que } f \in \mathcal{BV}_p(I)\right\} = \mathcal{BV}_p(I)/e.p.p$$

– Si $h \in BV_p(I)$, nous dénotons par $\varepsilon_p(h, I)$, le nombre $\varepsilon_p(f, I)$, pour n'importe quels des représentants f de h.

Définition 1.20

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, *une fonction ayant des discontinuités seulement du premier type, alors on dit que* f *est normalisée si*

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right), \ \textit{pour tout} \ x \in \overset{\circ}{I},$$

$$\textit{et} \qquad f(x) = \lim_{y \to x, \ y \in \overset{\circ}{I}} f(y), \ \textit{pour tout} \ y \in I \cap \partial I,$$

où $\partial I = \bar{I} \backslash \mathring{I}$ *est la frontiere de* I, $\bar{I}$ *est l'Adhérence, et* $\mathring{I}$ *est l'Intérieur, tel que*

$$f(x^+) = \lim_{h>0, \ h \to 0} f(x+h), \qquad \textit{et} \qquad f(x^-) = \lim_{h>0, \ h \to 0} f(x-h)$$

Proposition 1.21 *[2]*

Si f est une fonction dans $\mathcal{V}_p\,(I)$, alors la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(x) \;=\; \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)) \qquad pour\ \ tout \quad x\in \overset{\circ}{I}\,,\ et$$

$$\tilde{f}(x) \;=\; \lim_{y\longrightarrow x,\ y\in \overset{\circ}{I}} f(y) \qquad pour\ \ tout \quad x\in I\cap\partial I,$$

est normalisée, et appartient à $\mathcal{V}_p\,(I)$, et satisfait les inégalités suivantes

$$\nu_p(\tilde{f},I)\le \nu_p(f,I), \quad et \quad \sup_I|\tilde{f}|\ \le \sup_I|f|.$$

Preuve

Pour la preuve voir [2], [3]

Proposition 1.22 *[2]*

Soient $p\in[1,+\infty]$, et $f\in BV_p(\mathbb{R})$, alors f a un représentatif normal unique $\tilde{f}\in\mathcal{V}_p$,

$$tel\ que \qquad \varepsilon_p\,(f)=\nu_p(\tilde{f}).$$

On considère donc l'espace $BV_p(\mathbb{R})$ comme un espace de Banach des distributions,

doté de la norme suivante $\|f\|_{BV_p(\mathbb{R})} \;=\; \varepsilon_p\,(f)+\|f\|_\infty=\nu_p(\tilde{f})+\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\tilde{f}\,(x)\right|$, si $p<\infty$,

et $$\|f\|_{BV_\infty(\mathbb{R})} \;=\; \|f\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\tilde{f}\,(x)\right|$$

Définition 1.23

Soit $p\in[\,1,\,+\infty\,]$, alors toute fonction $f\ :\ I\ \longrightarrow\mathbb{R}$, appartient à $BV_p^1\,(I)$, s'ils existent $\alpha,x_0\in\mathbb{R}$ et $g\in BV_p\,(I)$, tel que pour tout $x\in I$, on ait

$$f(x)=\alpha+\int_{x_0}^{x} g\,(t)\ \mathrm{d}t \tag{1.7}$$

Si (1.7) est vérifiée, alors f est une fonction de Lipchitz continue et nous dotons $BV_p^1\,(I)$ avec la norme $\|f\|_{BV_p^1(I)}=|f(x_0)|+\|f'\|_{BV_p(I)}$, pour laquelle $BV_p^1\,(I)$ devient un espace de Banach, et à chaque point $x_0\in I$, nous lui obtenons une norme équivalente.

Proposition 1.24 *[3]*

Pour tout intervalle I *de* $\mathbb{R}$ *l'espace* $\mathcal{V}_p(I)$, $p \geq 1$ *est un espace d'algèbre de Banach pour la multiplication ponctuelle des fonctions, tel que*

$$\|f.g\|_{\mathcal{V}_p(I)} \leq \|f\|_{\mathcal{V}_p(I)} \cdot \|g\|_{\mathcal{V}_p(I)}, \quad \textit{pour tout} \quad f, g \in \mathcal{V}_p(I).$$

Preuve

Soit $x_0 < x_1 < ... < x_n$, une suite finie dans I et $f, g \in \mathcal{V}_p(I)$.

Puisque $p \geq 1$, et en utilisant l'inégalité de Minkowski on obtient

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |f.g(x_j) - f.g(x_{j-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{N} |f(x_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}))|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{N} |g(x_{j-1})(f(x_j) - f(x_{j-1}))|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_I |f| \,.\, (\sum_{j=1}^{N} |(g(x_j) - g(x_{j-1}))|^p)^{\frac{1}{p}} + \sup_I |g| \,.\, (\sum_{j=1}^{N} |(f(x_j) - f(x_{j-1}))|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_I |f| \,.\, \nu_p(g, I) + \sup_I |g| \,.\, \nu_p(f, I), \quad \text{d'où}$$

$$\nu_p(f.\,g, I) = \sup_I \left(\sum_{j=1}^{N} |f.\,g(x_j) - f.g(x_{j-1})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_I |f| \,.\, \nu_p(g, I) + \sup_I |g| \,.\, \nu_p(f, I), \quad \text{et donc}$$

$$\|f.\,g\|_{\mathcal{V}_p(I)} = \nu_p(f.\,g, I) + \sup_I |f| \,.\, \sup_I |g| \leq \sup_I |f| \,.\, \nu_p(g, I) + \sup_I |g| \,.\, \nu_p(f, I) + \sup_I |f| \,.\, \sup_I |g|$$

$$\leq \sup_I |f| \,.\, \nu_p(g, I) + \sup_I |g| \,.\, \nu_p(f, I) + \sup_I |f| + \sup_I |g| + \underbrace{[\nu_p(g, I).\, \nu_p(f, I)]}_{\geq 0}$$

$$= \left(\sup_I |f| + \nu_p(f, I)\right) . \left(\sup_I |g| + \nu_p(g, I)\right) = \|f\|_{\mathcal{V}_p(I)} \cdot \|g\|_{\mathcal{V}_p(I)},$$

et on déduit donc que

$$\|f.g\|_{\mathcal{V}_p(I)} \leq \|f\|_{\mathcal{V}_p(I)} \cdot \|g\|_{\mathcal{V}_p(I)}, \quad \text{pour tout} \quad f, g \in \mathcal{V}_p(I).$$

Chapitre 2

Composition des opérateurs dans les espaces $BV_p^1(I)$

Dans ce chapitre on donne un rappel de quelques notions de base concernant les opérateurs de composition, ensuite on présente les propriétés des espaces $BV_p^1(I)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, puis on présente quelques résultats fondamentaux du calcul fonctionnel sur ces espaces, ensuite on présente deux Théorèmes fondamentaux 2.9 et 2.13, dûs aux travaux de **[2]** .
Enfin on donne notre contribution à savoir, le Théorème 2.15 qui est une généralisation d'une inégalité fondamentale, (Théorème 2.9), en se basant sur le Lemme 2.14 qui est un algorithme donnant la dérivée de la composition de n fonctions.

2.1 Rappel

Définition 2.1

Soit E un espace fonctionnel et soit ϕ une fonction réelle à valeurs réelles, on définit l'opérateur de composition T_ϕ, associé à ϕ par

$$T_\phi(f) = \phi \circ f\,, \qquad pour\ \ tout\ \ f \in E\,.$$

En général, T_ϕ est non-linéaire, et le **P**roblème de composition (**S**uperposition) des **O**pérateurs **(P.S.O)** pour E consiste en trouvant l'ensemble $S(E)$ des fonctions ϕ réelles à valeurs réelles telle que $T_\phi(E) \subseteq E$

$$S(E) = \{\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ; \qquad T_\phi(E) \subseteq E\}\,.$$

Si $T_\phi(E) \subseteq E$, alors on dit que l'opérateur de composition $T_\phi : E \longrightarrow E$ opère sur l'espace fonctionnel E.

Remarque 2.2 *[2]*

On convient de dire qu' un opérateur de superposition, $T_f \; : \; E \longrightarrow E$ *satisfait la propriété d'inégalité des normes de composition pour un espace normé* E *s'il vérifie*

$$\|T_f(g)\|_E \leq c_f \; (1 + \|g\|_E), \qquad , (c_f > 0) \quad pour \;\; tout \;\; g \in E \; .$$

Il faut remarquer que si un opérateur de composition satisfait la propriété d'inégalité des normes dans l'espace normé E, *ceci implique qu'il opère sur* E.

2.2 Propriétés des espaces $BV_p^1(I)$

Dans tout ce qui suit I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Tous les résultats de ce paragraphe sont dûs à [2] et [3]

Proposition 2.3 *[3]*

Si $f \in BV_p^1(I)$ *, alors* f *peut être prolongé d'une manière unique à une fonction dans* $BV_p^1\left(\bar{I}\right)$ *avec la même norme de* f *dans* $BV_p^1(I)$.

Preuve

Pour la preuve voir [3].

Par la Proposition ci-dessus, et l'exploitation des transformations affines, l'étude des espaces $BV_p^1(I)$ peut être réduite aux trois cas suivants :

$$I = \mathbb{R}, \; I = [0, \; +\infty[, \; I = [0,1].$$

Proposition 2.4

La propriété d'homogénéité

$$\left\| f(\lambda(.))' \right\|_{BV_p} = \lambda \|f'\|_{BV_p}, \qquad pour \;\; tout \;\; \lambda > 0$$

est vérifiée pour chaque fonction f *dans* $BV_p^1(\mathbb{R})$ *ou* $BV_p^1([0, +\infty[)$.

Ainsi les espaces $BV_p^1(\mathbb{R})$ et $BV_p^1([0,+\infty[)$ peuvent être vus comme analogues à l'espace homogène de Sobolev

$$\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}) = \{f \ : \quad f' \in L^p(\mathbb{R}\} \ ,$$

doté de la semi-norme $\|f'\|_p$, et quant à l'espace habituel de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R})$ qui est non homogène $W^{1,p}(\mathbb{R}) = \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$,

Proposition 2.5 *[3]*

(i) $BV_p^1(I) \cap L^p(I) = BV_p^1(I)$ *si et seulement si* I *est borné*

(ii) $BV_p^1(I) \cap L^p(I)$ *s'injecte continûment dans* $BV_p(I)$.

Preuve

Pour la preuve voir [3]

Théorème 2.6 *[3]*

$BV_p^1(I) \cap L^p(I)$ *est un espace d'algèbre de Banach.*

Preuve

Pour la preuve voir [2] et [3]

Proposition 2.7 *[3]*

Soit I *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$, *alors on a les suivantes propriétés de multiplication*

$$Si\ f,g \in BV_p^1(\mathbb{R}),\ et\ supp\,(g) \subseteq I,\ alors\ f.g \in BV_p^1(\mathbb{R}),$$

en outre il existe $c > 0$, *tel que pour tout* $f,g \in BV_p^1(\mathbb{R})$, $supp\,(g) \subseteq I$, *on ait*

$$\|f.g\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} \leq c\,\|f\|_{BV_p^1(\mathbb{R})}\,\|g\|_{BV_p^1(\mathbb{R})}$$

Preuve

Pour la preuve voir [2] et [3]

2.3 Solution du S.O.P dans les espaces $BV_p^1(I)$

Les Théorèmes 2.9 et 2.13 sont dûs à [2] .

Lemme 2.8 [8]

Soient $a\,,\ b\,,\ c\in\mathbb{R}\,,\ a<b<c$, *et soit* h *une fonction mesurable définie dans* $[a\,,\ c]$ *à valeurs réelles telles que*

$$\int_a^b h\,(x)\ \mathrm{d}x \ \geq\ 0\,,\quad et$$

$$\int_b^c h\,(x)\ \mathrm{d}x \ <\ 0\,,$$

alors ils existent $u\,,\ v\in\,]a\,,\ c[\,,$ *tel que*

$$h\,(u)\,.h\,(v)\leq 0$$

Preuve

En appliquant le théorème de Bonnet (second théorème de la moyenne pour les intégrales) à la fonction h sur l'intervalle $[a,b]$ alors il existe une valeur moyenne $\langle h\rangle_{[a,b]}=u\in\,]a,b[$, tel que

$$\int_a^b h\,(x)\ \mathrm{d}x \ =\ h\,(u)\int_a^b 1\,\mathrm{d}x$$

$$=\ h\,(u)\,(b-a)\,,$$

et puisque $\displaystyle\int_a^b h\,(x)\ \mathrm{d}x\geq 0$, et $b-a\geq 0$, alors $h\,(u)\geq 0$, de même pour l'intervalle $[b,c]$, il existe une valeur moyenne $\langle h\rangle_{[b,c]}=v\in\,]b,c[\,,$

tel que $$\int_b^c h\,(x)\ \mathrm{d}x=h\,(v)\,(c-b)\,,$$

et puisque $\displaystyle\int_b^c h\,(x)\ \mathrm{d}x\leq 0$, et $c-b\geq 0$, alors $h\,(v)\leq 0$, d'où l'existence de u,v dans $]a,c[$,

tel que $$h\,(u)\,h\,(v)\leq 0$$

Théorème 2.9 *[2] (Inégalité de Base)*

Si $p \in [1, +\infty[$, $t_0 \in I$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $h \in \mathcal{V}_p(I)$, *tel que*

$$g(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} h(x)\, \mathrm{d}x, \; f \in \mathcal{V}_p(g(I)) \;, alors$$

$$\nu_p((f \circ g) . h, I) \leq \nu_p(f, g(I)) . (\sup_I |h| + 2^{1/p} . \nu_p(h, I)) + \nu_p(h, I) . \sup_{g(I)} |f| , \tag{2.1}$$

$$\|(f \circ g) . h\|_{\mathcal{V}_p(I)} \leq 2^{1/p} \|f\|_{\mathcal{V}_p(g(I))} . \|h\|_{\mathcal{V}_p(I)} . \tag{2.2}$$

Preuve

1) On a $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} |(f \circ g) . h(t_j) - (f \circ g) . h(t_{j-1})| = \sum_{k=0}^{k=N-1} |(f \circ g) . h(t_{k+1}) - (f \circ g) . h(t_k)|$

$$= \sum_{k=0}^{k=N-1} |[f \circ g(t_{k+1}) - (f \circ g)(t_k)] . h(t_k) + f \circ g(t_{k+1}) . (h(t_{k+1}) - h(t_k))| ,$$

d'où par l'Inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |(f \circ g) . h(t_j) - (f \circ g) . h(t_{j-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A_1^{\frac{1}{p}} + B_1^{\frac{1}{p}} ,$$

telles que $\displaystyle A_1 = \sum_{k=0}^{k=N-1} |[f \circ g(t_{k+1}) - (f \circ g)(t_k)] . h(t_k)|^p$,

et $\displaystyle B_1 = \sum_{k=0}^{k=N-1} |f \circ g(t_{k+1}) . [h(t_{k+1}) - h(t_k)]|^p$.

Puisque $|f \circ g(t_{k+1})| \leq \sup_{g(I)} |f|$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors

$$B_1^{\frac{1}{p}} \leq (\sup_{g(I)} |f|) . (\sum_{k=0}^{k=N-1} |h(t_{k+1}) - h(t_k)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sup_{g(I)} |f|) . \nu_p(h, I) .$$

Il existe une suite $0 = n_0 < n_1 < ... < n_J = N$, telle que pour tous les indices $j = 1, ..., J$ on a

(i) La restriction s_j de $(g(t_k))_{0\leq k\leq N}$ à $\{k\}_{n_{j-1}\leq k\leq n_j, k\in\mathbb{N}}$, est monotone.

(ii) La restriction de $(g(t_k))_{0\leq k\leq N}$ à $\{k\}_{n_{j-1}\leq k\leq n_j+1}$, n'est pas monotone.

D'où $[0,N]=[n_0,n_1-1]\cup[n_1,n_2-1]\,..\,[n_{j-1},n_j-1]\,..\,[n_{J-2},n_{J-1}-1]\cup[n_{J-1},n_J-1]$.

Posons $A_1=A_2+B_2$, telles que

$$A_2 = \sum_{j=1}^{J-1}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1}|f(g(t_{k+1}))-f(g(t_k))|^p.|h(t_k)|^p,$$

et

$$B_2 = \sum_{k=n_{J-1}}^{n_J-1}|f(g(t_{k+1}))-f(g(t_k))|^p.|h(t_k)|^p$$

- Si $J\neq 1$, $\quad alors \quad B_2 \leq \nu_p^p(f,g(I)).\sup_I|h|^p$

et

$$A_2 \leq \nu_p^p(f,g(I)).\sum_{j=1}^{J-1}\left|h(t_{k_j})\right|^p.$$

Il existe toujours un certain $a_j\in\left]t_{k_j},t_{n_j+1}\right[$, tel que $h(a_j).h(t_{k_j})\leq 0$. Si $h(t_{k_j})=0$ ou si h change de signe à l'intervalle $\left]t_{k_j},t_{n_j+1}\right[$ le résultat est direct sinon on peut considérer une fonction $\hat{h}$ définie à partir des fonctions de la forme, $\pm h$ telles que

$$\int_{k_j}^{b}\hat{h}\ (x)\ \mathrm{d}x\geq 0 \text{ et } \int_{b}^{t_{n_j+1}}\hat{h}\ (x)\ \mathrm{d}x<0, \text{ où } b\in\left]t_{k_j},t_{n_j+1}\right[,$$

alors selon le Lemme 2.8, ils existent $a_j',a_j''\in\left]t_{k_j},t_{n_j+1}\right[$, tel que

$$\hat{h}(a_j').\hat{h}(a_j'')<0,$$

d'où $\forall\ j=1,...,J-1,\ \exists\, a_j\in\left]t_{k_j},t_{n_j+1}\right[\ :\ \hat{h}(a_j).\hat{h}(t_{k_j})\leq 0$,

telles que $$\sum_{j=1}^{J-1}\left|h(t_{k_j})\right|^p=\sum_{j=1}^{J-1}\left|\hat{h}(t_{k_j})\right|^p \quad et \quad \nu_p^p(h,I)=\nu_p^p(\hat{h},I).$$

Soit $\quad M=\max\{m\in\mathbb{N}\ :\ 2m+1\leq J\}$, alors

$$\sum_{j=1}^{J-1}\left|h(t_{k_j})\right|^p = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{2M}\left|h(t_{k_j})\right|^p , & \text{si} \quad J-1 \text{ est pair}, \\ \sum\limits_{j=1}^{2M}\left|h(t_{k_j})\right|^p + \left|h\left(t_{k_{J-1}}\right)\right|^p , & \text{si} \quad J-1 \text{ est impair}, \end{cases}$$

d'où $$\sum_{j=1}^{2M}\left|h(t_{k_j})\right|^p \leq \sum_{l=1}^{M}\left|h\left(t_{k_{2l}}\right)-h\left(a_{2l}\right)\right|^p + \sum_{l=1}^{M}\left|h\left(t_{k_{2l-1}}\right)-h\left(a_{2l-1}\right)\right|^p ,$$

et on a $$\left|h\left(t_{k_{J-1}}\right)\right|^p \leq \left|h\left(t_{k_{J-1}}\right)-h\left(a_{J-1}\right)\right|^p .$$

Par les inégalités $t_{n_{j-1}} \leq t_{k_j} < t_{n_j}$, et $t_{k_j} < a_j < t_{n_j+1}$, pour tout $j = 1, ..., J-1$, on déduit que $a_j < t_{n_j+1} \leq t_{n_{j+1}} \leq t_{k_{j+2}}$.

– Si $J \geq 4$ et $j = 1, ..., J-3$, alors les intervalles $[t_{k_{2l}}, a_{2l}]$ sont disjoints, deux à deux pour $l = 1, ..., M.$, et les intervalles $\left[t_{k_{2l-1}}, a_{2l-1}\right]$ sont disjoints deux à deux si J est impair, tel que $l = 1, ..., M+1$.

– Si J est pair, alors

$$\sum_{j=1}^{J-1}\left|\hat{h}(t_{k_j})\right|^p \leq \sum_{l=1}^{M}\left|\hat{h}\left(t_{k_{2l}}\right)-\hat{h}\left(t_{k_{2l+2}}\right)\right|^p + \sum_{l=1}^{M}\left|\hat{h}\left(t_{k_{2l-1}}\right)-\hat{h}\left(t_{k_{2l+1}}\right)\right|^p$$

$$\leq 2\nu_p^p(\hat{h}, I),$$

d'où $$\sum_{j=1}^{J-1}\left|h(t_{k_j})\right|^p \leq 2\nu_p^p(h, I) .$$

Puisque (s_J) est monotone et $p \geq 1$, et vu les inégalités ci-dessus on a

$$\nu_p\left(\left(f \circ g\right).h, I\right) \leq \nu_p\left(f, g\left(I\right)\right).\left(2\nu_p^p\left(h, I\right) + \sup_I |h|^p\right)^{1/p} + \nu_p\left(h, I\right).\sup_{g(I)}|f| ,$$

et $$\left(2\nu_p^p\left(h, I\right) + \sup_I |h|^p\right)^{1/p} \leq \left(2^{1/p}.\nu_p\left(h, I\right) + \sup_I |h|\right),$$

d'où $$\nu_p\left(\left(f \circ g\right).h, I\right) \leq \nu_p\left(f, g\left(I\right)\right).\left(2^{1/p}\nu_p\left(h, I\right) + \sup_I |h|\right) + \nu_p\left(h, I\right).\sup_{g(I)}|f| .$$

2) L'inégalité (2.2), découle directement de l'inégalité (2.1).

Théorème 2.10 *[13]*

Soient deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ définies, continues et dérivables sur un ensemble compact de $[a,b]$, telle que $f_1'(x) = f_2'(x)$, $(p.p)$ alors $f_1(x) - f_2(x)$ est une constante

Preuve

Ce théorème est dû à De la Vallée-Poussin, et pour la preuve voir [13]

Théorème 2.11 *[9]*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction Lipchitzienne, alors f est différentiable presque partout sur Ω, de plus les assertions suivantes sont vérifiées

(i) *f est différentiable presque partout sur l'ensemble $L(f)$ tel que*

$$L(f) = \{x \in \Omega : \quad Lip\, f(x) < \infty\},$$

où
$$Lip\, f(x) = \lim_{y \longrightarrow x} \sup_{y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}.$$

(ii) *Toute fonction $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$ est différentiable $(p.p)$*

Preuve

Ce théorème de Rademacher est une généralisation du théorème de Lebesgue au cas $n = m = 1$, $\Omega =]a,b[$, aux fonctions à variation bornée, et pour la preuve voir [9], l'assertion (i) est dûe à un théorème de $Stepanov$ et (ii) à un théorème de $Calderon$.

Proposition 2.12 *[9]*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction de Lipchitz, alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, \mathrm{d}t,$$

de plus $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue si et seulement s'il existe une fonction $g \in L^1[a,b]$ telle que, $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\, \mathrm{d}t,\ x \in [a,b]$, et dans ce cas la dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ existe pour presque partout $x \in [a,b]$ telle que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = g \in L^1[a,b]$

Théorème 2.13 *[2]*

Soit $1 \leq p < \infty$ *, alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

(i) Si $f, g \in BV_p^1(\mathbb{R})$ *, alors* $f \circ g \in BV_p^1(\mathbb{R})$ *, et*

$$\|f \circ g\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} \left(1 + 2^{1/p} \|g\|_{BV_p^1(\mathbb{R})}\right)$$

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *, une fonction mesurable de Borel, alors l'opérateur* T_f *opère sur* $BV_p^1(\mathbb{R})$ *si et seulement si* $f \in BV_p^1(\mathbb{R})$ *.*

Ce Théorème 2.13 est fondamental car il résout le problème de composition des opérateurs

tel que $\quad S(BV_p^1(\mathbb{R})) = BV_p^1(\mathbb{R}) = \left\{\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \qquad T_\phi\left(BV_p^1(\mathbb{R})\right) \subseteq BV_p^1(\mathbb{R})\right\}$

Preuve

(i) Puisque $f, g \in BV_p^1(\mathbb{R})$ alors f, g sont continues et Lipchitziennes et par le théorème de Rademacher elles sont différentiables presque partout et on a donc

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g).g'(x) .$$

Par le Théorème 2.10 de De La Vallee Poussin la quantité $\quad (f \circ g)(x) - \int_0^x f'(g(t))\, g'(t)\, \mathrm{d}t$ est une constante et en appliquant la Proposition 2.12 , on obtient

$$(f \circ g)(x) = (f \circ g)(0) + \int_0^x f'(g(t))\, g'(t)\, \mathrm{d}t .$$

Puisque $f', g' \in \mathcal{V}_p(\mathbb{R})$, alors nous pouvons appliquer le Théorème 2.9 , et nous concluons que $(f' \circ g)g' \in \mathcal{V}_p(\mathbb{R})$, tel que

$$\|(f' \circ g)g'\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})} \leq 2^{1/p} \|f'\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})} \|g'\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})} < \infty .$$

On a
$$\begin{aligned} \|f \circ g\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} &\approx |f \circ g(x_0)| + \left|\widetilde{(f \circ g)}'\right|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})} \\ &\lesssim |f \circ g(x_0)| + 2^{1/p} \left\|(\tilde{f})'\right\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})} \left\|(\tilde{g})'\right\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})} . \end{aligned}$$

Posons $g(x_0) = y_0$, on a alors

$$\|f \circ g\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} \lesssim \left|\tilde{f}(y_0)\right| + 2^{\frac{1}{p}} \left\|\tilde{f}'\right\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})} . \|\tilde{g}'\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})}$$

$$\lesssim \left|\tilde{f}(y_0)\right| + \left\|\tilde{f}'\right\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})} + 2^{\frac{1}{p}} . \left\|\tilde{f}'\right\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})} . \left(\|\tilde{g}'\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})} + |g(y_0)|\right) + 2^{\frac{1}{p}} . \left(|g(y_0)| + \|\tilde{g}'\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})}\right) . |f(y_0)|$$

$$\lesssim \left(|f(y_0)| + \left\|\tilde{f}'\right\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})}\right) . \left[1 + 2^{\frac{1}{p}} \left(|g(y_0)| + \|\tilde{g}'\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})}\right)\right] \approx \|f\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} . \left(1 + 2^{\frac{1}{p}} . \|g\|_{BV_p^1(\mathbb{R})}\right),$$

d'où

$$\|f \circ g\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} \left(1 + 2^{1/p} \|g\|_{BV_p^1(\mathbb{R})}\right)$$

(ii)

- Si $f \in BV_p^1(\mathbb{R})$, alors selon (i)

  $$\|f \circ g\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} \left(1 + 2^{1/p} \|g\|_{BV_p^1(\mathbb{R})}\right) < \infty, \quad \text{pour tout } g \in BV_p^1(\mathbb{R}),$$

  d'où $\quad f \circ g \in BV_p^1(\mathbb{R}), \qquad$ pour tout $g \in BV_p^1(\mathbb{R})$

  et donc f opère sur $BV_p^1(\mathbb{R})$

- Si f opère sur $BV_p^1(\mathbb{R})$ alors $T_f\left(BV_p^1(\mathbb{R})\right) \subseteq BV_p^1(\mathbb{R})$.

  On a
  $$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}}(x) &= x \\ &= x_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \\ &= x_0 + \int_{x_0}^{x} 1\,\mathrm{d}t \text{ , tel que } 1 \in BV_p(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{de plus}, \qquad \|id_{\mathbb{R}}\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} &\approx |f(x_0)| + \left\|(id_{\mathbb{R}})'\right\|_{BV_p(\mathbb{R})} \\
&\approx |x_0| + \|1\|_{BV_p(\mathbb{R})} \\
&\approx |x_0| + \nu_p(1) + \sup_{x\in\mathbb{R}} |1| \\
&= |x_0| + 0 + 1 < \infty,
\end{aligned}
$$

$$
\text{d'où} \qquad id_{\mathbb{R}} \in BV_p^1(\mathbb{R}),
$$

$$
\text{et donc} \qquad f = f \circ id_{\mathbb{R}} = T_f(id_{\mathbb{R}}) \in BV_p^1(\mathbb{R})
$$

2.4 Enoncé des résultats

Dans ce paragraphe, nous présentons le Théorème 2.15, qui représente notre contribution, à savoir une généralisation de l'inégalité de base introduite dans le Théorème 2.9 ([2]) par le Lemme 2.14, donnant la dérivée de n fonctions, suivi de l'exemple 2.16 pour affirmer les résultats obtenus et on convient de prendre

$$
\underset{i=n}{\overset{i=m}{\circ}} g_i = \begin{cases} g_n \circ g_{n+1} \circ \cdots \circ g_k \circ \cdots \circ g_m, & \text{si} \quad m \geq n \\ id, & \text{si} \quad m < n \end{cases}
$$

et

$$
\prod_{i=n}^{i=m} A_i = \begin{cases} A_n \times A_{n+1} \cdots \times A_m, & \text{si} \quad m \geq n \\ 1, & \text{si} \quad m < n \end{cases}
$$

Lemme 2.14 *(Algorithme de base)*

Soit $(I_k)_{2\leq k\leq n}$ *une suite d'intervalles de* $\mathbb{R}$ *et soit* $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ *, une suite de fonctions dérivables telles que* $g_k\ :\ \ I_k \longrightarrow I_{k-1}$ *, alors*

$$\forall\ \ n\geq 2\ : \qquad \left[\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i\right]' = g'_n \times \prod_{i=1}^{n-1}\left[g'_i \circ \left(\overset{j=n}{\underset{j=i+1}{\circ}} g_j\right)\right] = \prod_{i=1}^{n}\left[g'_i \circ \left(\overset{j=n}{\underset{j=i+1}{\circ}} g_j\right)\right]$$

Preuve

Pour $n=3$, on a

$$\begin{aligned}(g_1\circ g_2\circ g_3)' &= (g_1\circ(g_2\circ g_3))' = (g_2\circ g_3)'\times(g'_1\circ(g_2\circ g_3))\\ &= g'_3\times(g'_2\circ g_3)\times(g'_1\circ(g_2\circ g_3)) = g'_3\times(g'_1\circ g_2\circ g_3)\times(g'_2\circ g_3)\ .\end{aligned}$$

Par récurrence on a pour n termes

$$(g_1\circ g_2\circ ..\circ g_n)' = g'_n\times(g'_1\circ g_2\circ ..g_n)\times ..(g'_k\circ g_{k+1}..\circ g_n)\times ..\times g'_{n-1}\circ g_n\ .$$

On déduit que pour $n+1$ termes, en prenant comme $n^{\text{ème}}$ terme $(g_n\circ g_{n+1})$

$$(g_1\circ ..\circ(g_n\circ g_{n+1}))' = (g_n\circ g_{n+1})'\times(g'_1\circ ..\circ(g_n\circ g_{n+1}))\times ..g'_{n-1}\circ(g_n\circ g_{n+1})\ .$$

Puisque $(g_n\circ g_{n+1})' = g'_{n+1}\times(g'_n\circ g_{n+1})$, alors

$$(g_1\circ g_2\circ ..\circ(g_n\circ g_{n+1}))' = g'_{n+1}\times(g'_1\circ ..\circ g_n\circ g_{n+1})\times ..(g'_n\circ g_{n+1})\text{, d'où}$$

$$\begin{aligned}\left[\overset{i=n+1}{\underset{i=1}{\circ}} g_i\right]' = \left[\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i\circ g_{n+1}\right]' &= g'_{n+1}\times\left[\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i\right]'\circ g_{n+1}\\ &= g'_{n+1}\times\left[g'_n\times\prod_{i=1}^{n-1} g'_i\circ\left(\overset{j=n}{\underset{j=i+1}{\circ}} g_j\right)\right]\circ g_{n+1}\\ &= g'_{n+1}\times(g'_n\circ g_{n+1})\times\left[\prod_{i=1}^{n-1} g'_i\circ\left(\overset{j=n}{\underset{j=i+1}{\circ}} g_j\right)\circ g_{n+1}\right]\\ &= g'_{n+1}\times\left[g'_n\circ g_{n+1}\times\prod_{i=1}^{n-1} g'_i\circ\left(\overset{j=n+1}{\underset{j=i+1}{\circ}} g_j\right)\right]\\ &= g'_{n+1}\times\left[\prod_{i=1}^{n} g'_i\circ\left(\overset{j=n+1}{\underset{j=i+1}{\circ}} g_j\right)\right]\ .\end{aligned}$$

Théorème 2.15

Soient $p \in [1, +\infty[$, $n \geq 2$, $h \in \mathcal{V}_p(I)$, *telles que pour tout* $t \in I$, $t_0 \in I$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\underset{i=1}{\overset{i=n}{\circ}} g_i(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} h(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{et } f \in \mathcal{V}_p\left(\underset{i=1}{\overset{i=n}{\circ}} g_i(I)\right), \text{ alors}$$

(i) $$\left\| \left[\underset{i=1}{\overset{i=n}{\circ}} g_i\right]' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} = \left\| g_n' \times \prod_{i=1}^{n-1} \left[g_i' \circ \left(\underset{j=i+1}{\overset{j=n}{\circ}} g_j \right) \right] \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} \leq 2^{\frac{n-1}{p}} \|g_n'\|_{\mathcal{V}_p(I)} \times \prod_{k=1}^{n-1} \|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\underset{\ell=k+1}{\overset{n}{\circ}} g_\ell(I)\right)}$$

(ii) $$\left\| f \circ \left(\underset{i=1}{\overset{i=n}{\circ}} g_i \right) \times h \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} \leq 2^{\frac{n}{p}} \|f\|_{\mathcal{V}_p\left(\underset{i=1}{\overset{i=n}{\circ}} g_i(I)\right)} \times \|g_n'\|_{\mathcal{V}_p(I)} \times \prod_{k=1}^{n-1} \|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\underset{\ell=k+1}{\overset{n}{\circ}} g_\ell(I)\right)}$$

Preuve

(i) On a selon le Lemme 2.14, $$\left\| \left[\underset{i=1}{\overset{i=n}{\circ}} g_i\right]' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} = \left\| \left[\prod_{i=1}^{n-1} g_i' \circ \left(\underset{j=i+1}{\overset{j=n}{\circ}} g_j \right) \right] \times g_n' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)},$$

d'où $$\left\| \left[\underset{i=1}{\overset{i=n}{\circ}} g_i\right]' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} = \left\| \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} g_i' \circ \left(\underset{j=i+1}{\overset{j=n-1}{\circ}} g_j \right) \right) \circ g_n \right] \times g_n' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)}$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}} \left\| \prod_{i=1}^{n-1} g_i' \circ \left(\underset{j=i+1}{\overset{j=n-1}{\circ}} g_j \right) \right\|_{\mathcal{V}_p(g_n(I))} \times \|g_n'\|_{\mathcal{V}_p(I)}, \text{ voir } (2.2).$$

Et $$\left\| \prod_{i=1}^{n-1} g_i' \circ \left(\underset{j=i+1}{\overset{j=n-1}{\circ}} g_j \right) \right\|_{\mathcal{V}_p(g_n(I))} = \left\| \left[\prod_{i=1}^{n-2} g_i' \circ \left(\underset{j=i+1}{\overset{j=n-1}{\circ}} g_j \right) \right] \times g_{n-1}' \circ \left(\underset{j=n}{\overset{j=n-1}{\circ}} g_j \right) \right\|_{\mathcal{V}_p(g_n(I))}$$

$$= \left\| \left[\left(\prod_{i=1}^{n-2} g_i' \circ \left(\underset{j=i+1}{\overset{j=n-2}{\circ}} g_j \right) \right) \circ g_{n-1} \right] \times g_{n-1}' \right\|_{\mathcal{V}_p(g_n(I))}, \text{ car } \underset{j=n}{\overset{j=n-1}{\circ}} g_j = id, \ (m = n-1 < n)$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}} \left\| \prod_{i=1}^{n-2} g_i' \circ \left(\underset{j=i+1}{\overset{j=n-2}{\circ}} g_j \right) \right\|_{\mathcal{V}_p(g_{n-1}(g_n(I)))} \times \|g_{n-1}'\|_{\mathcal{V}_p(g_n(I))}, \text{ et}$$

$$\left\| \prod_{i=1}^{n-2} g_i' \circ \left(\underset{j=i+1}{\overset{j=n-2}{\circ}} g_j \right) \right\|_{\mathcal{V}_p(g_{n-1}(g_n(I)))} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left\| \prod_{i=1}^{n-3} g_i' \circ \left(\underset{j=i+1}{\overset{j=n-3}{\circ}} g_j \right) \right\|_{\mathcal{V}_p(g_{n-2}((g_{n-1}(g_n(I)))))} \times \|g_{n-2}'\|_{\mathcal{V}_p(g_{n-1}(g_n(I)))}$$

De proche en proche on obtient

$$\left\| \left[\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i \right]' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} = \left\| g_n' \times \prod_{i=1}^{n-1} \left[g_i' \circ \left(\overset{j=n}{\underset{j=i+1}{\circ}} g_j \right) \right] \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} \quad \text{, selon le Lemme 2.14}$$

$$\leq 2^{\frac{n-1}{p}} \|g_n'\|_{\mathcal{V}_p(I)} \times \prod_{k=1}^{n-1} \|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{n}{\underset{\ell=k+1}{\circ}} g_\ell(I)\right)}$$

D'autre part on a par récurrence

$$\left\| \left[\overset{i=n+1}{\underset{i=1}{\circ}} g_i \right]' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} = \left\| \left[\left(\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i \right) \circ g_{n+1} \right]' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} = \left\| \left[\left(\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i \right)' \circ g_{n+1} \right] \times g_{n+1}' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)}$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}} \left\| \left(\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i \right)' \right\|_{\mathcal{V}_p(g_{n+1}(I))} \times \left\| g_{n+1}' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} \text{ , selon (2.2) du Théorème 2.9}$$

$$\leq 2^{\frac{n-1}{p}} 2^{\frac{1}{p}} \|g_n'\|_{\mathcal{V}_p(g_{n+1}(I))} \times \prod_{k=1}^{n-1} \|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{n}{\underset{\ell=k+1}{\circ}} g_\ell(g_{n+1}(I))\right)} \times \left\| g_{n+1}' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)}$$

$$= 2^{\frac{n}{p}} \left\| g_{n+1}' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} \times \left[\prod_{k=1}^{n-1} \|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{n}{\underset{\ell=k+1}{\circ}} g_\ell(g_{n+1}(I))\right)} \times \|g_n'\|_{\mathcal{V}_p(g_{n+1}(I))} \right]$$

$$= 2^{\frac{n}{p}} \left\| g_{n+1}' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} \times \prod_{k=1}^{n} \|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{n+1}{\underset{\ell=k+1}{\circ}} g_\ell(I)\right)}$$

(ii) Puisque $h(t) = \left(\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i(t) \right)'$, et selon (2.2) on a

$$\left\| \left[f \circ \left(\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i \right) \right] \times h \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} \leq 2^{1/p} \|f\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i(I)\right)} \times \left\| \left(\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i \right)' \right\|_{\mathcal{V}_p(I)} ,$$

$$\leq \left[2^{1/p} \|f\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i(I)\right)} \right] \times \left[2^{\frac{n-1}{p}} \|g_n'\|_{\mathcal{V}_p(I)} \times \prod_{k=1}^{n-1} \|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{n}{\underset{\ell=k+1}{\circ}} g_\ell(I)\right)} \right]$$

$$= 2^{\frac{n}{p}} \|f\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{i=n}{\underset{i=1}{\circ}} g_i(I)\right)} \times \|g_n'\|_{\mathcal{V}_p(I)} \times \prod_{k=1}^{n-1} \|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{n}{\underset{\ell=k+1}{\circ}} g_\ell(I)\right)}$$

Exemple 2.16

- *Pour* $n=2\,,$ *soit* $g_1\circ g_2=h\,,$ *alors on a*

(i) $\left\|(g_1\circ g_2)'\right\|_{\mathcal{V}_p(I)}=\|g_2'\times(g_1'\circ\ g_2)\|_{\mathcal{V}_p(I)}=\|(g_1'\circ\ g_2)\times g_2'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\leq 2^{\frac{1}{p}}\,\|g_1'\|_{\mathcal{V}_p(g_2(I))}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p(I)}$

(ii) $\|f\circ(g_1\circ g_2)\times h\|_{\mathcal{V}_p(I)}\leq 2^{\frac{1}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p(g_1\circ g_2(I))}\,\|h\|_{\mathcal{V}_p(I)}=2^{\frac{1}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p(g_1\circ g_2(I))}\,\left\|(g_1\circ g_2)'\right\|_{\mathcal{V}_p(I)}$

$$\leq \left[2^{\frac{1}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p(g_1\circ g_2(I))}\right]\,.\,\left[2^{\frac{1}{p}}\,\|g_1'\|_{\mathcal{V}_p(g_2(I))}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\right]$$

$$\leq 2^{\frac{2}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p(g_1\circ g_2(I))}\,\|g_1'\|_{\mathcal{V}_p(g_2(I))}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\ ,$$

et on a $2^{\frac{2}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{i=2}{\underset{i=1}{\circ}}\,g_i(I)\right)}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\prod_{k=1}^{1}\|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{2}{\underset{\ell=k+1}{\circ}}g_\ell(I)\right)}=2^{\frac{2}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p(g_1\circ g_2(I))}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\,\|g_1'\|_{\mathcal{V}_p(g_2(I))}$

- *Pour* $n=3,$ *soit* $g_1\circ g_2\circ g_3=h\,,$ *alors on a*

(i)

$$\left\|(g_1\circ g_2\circ g_3)'\right\|_{\mathcal{V}_p(I)}=\left\|((g_1\circ g_2)\circ g_3)'\right\|_{\mathcal{V}_p(I)}=\left\|g_3'\times(g_1\circ g_2)'\circ g_3\right\|_{\mathcal{V}_p(I)}=\left\|\left[(g_1\circ g_2)'\circ g_3\right]\times g_3'\right\|_{\mathcal{V}_p(I)}$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}}\,\left\|(g_1\circ g_2)'\right\|_{\mathcal{V}_p(g_3(I))}\,\|g_3'\|_{\mathcal{V}_p(I)}$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}}\left[2^{\frac{1}{p}}\,\|g_1'\|_{\mathcal{V}_p(g_2(g_3(I)))}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p(g_3(I))}\right]\|g_3'\|_{\mathcal{V}_p(I)}$$

$$= 2^{\frac{2}{p}}\,\|g_1'\|_{\mathcal{V}_p(g_2(g_3(I)))}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p(g_3(I))}\,\|g_3'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\ .$$

et on a $2^{\frac{3-1}{p}}\,\|g_3'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\prod_{k=1}^{3-1}\|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{3}{\underset{\ell=k+1}{\circ}}g_\ell(I)\right)}=2^{\frac{2}{p}}\,\|g_3'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\prod_{k=1}^{2}\|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{3}{\underset{\ell=k+1}{\circ}}g_\ell(I)\right)}$

$$=2^{\frac{2}{p}}\,\|g_3'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\,\|g_1'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{3}{\underset{\ell=2}{\circ}}g_\ell(I)\right)}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{3}{\underset{\ell=3}{\circ}}g_\ell(I)\right)}=2^{\frac{2}{p}}\,\|g_3'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\,\|g_1'\|_{\mathcal{V}_p(g_2\circ g_3(I))}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p(g_3(I))}$$

(ii) $\|f\circ(g_1\circ g_2\circ g_3)\times h\|_{\mathcal{V}_p(I)}\leq 2^{\frac{1}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p(g_1\circ g_2\circ g_3(I))}\,\|h\|_{\mathcal{V}_p(I)}$

$$= 2^{\frac{1}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p(g_1\circ g_2\circ g_3(I))}\,\left\|(g_1\circ g_2\circ g_3)'\right\|_{\mathcal{V}_p(I)}$$

$$\leq \left[2^{\frac{1}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p(g_1\circ g_2\circ g_3(I))}\right]\left[2^{\frac{2}{p}}\,\|g_3'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\,\|g_1'\|_{\mathcal{V}_p(g_2\circ g_3(I))}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p(g_3(I))}\right]$$

$$\leq 2^{\frac{3}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p(g_1\circ g_2\circ g_3(I))}\,\|g_3'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\,\|g_1'\|_{\mathcal{V}_p(g_2\circ g_3(I))}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p(g_3(I))}\ .$$

D'autre part puisque $\prod_{k=1}^{2}\|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{3}{\underset{\ell=k+1}{\circ}}g_\ell(I)\right)}=\|g_1'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{3}{\underset{\ell=1+1}{\circ}}g_\ell(I)\right)}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{3}{\underset{\ell=2+1}{\circ}}g_\ell(I)\right)},$

$alors\quad 2^{\frac{3}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{i=3}{\underset{i=1}{\circ}}\,g_i(I)\right)}\,\|g_3'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\prod_{k=1}^{2}\|g_k'\|_{\mathcal{V}_p\left(\overset{3}{\underset{\ell=k+1}{\circ}}g_\ell(I)\right)}=2^{\frac{3}{p}}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p(g_1\circ g_2\circ g_3(I))}\,\|g_3'\|_{\mathcal{V}_p(I)}\,\|g_1'\|_{\mathcal{V}_p(g_2\circ g_3(I))}\,\|g_2'\|_{\mathcal{V}_p(g_3(I))}$

Chapitre 3

Composition des opérateurs dans les espaces de Besov homogènes $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$

Dans ce chapitre on présente d'abord un rappel de quelques notions de base, puis on définit les normes des espaces de Besov homogènes, et leurs réalisations ainsi que le calcul fonctionnel en présentant deux Théorèmes fondamentaux (3.12) et (3.13) , enfin on donne une extension du Théorème de Peetre (3.17) , ainsi que sa démonstration en introduisant certains espaces fonctionnels en se basant sur les travaux de [2] , [3] .

Définition 3.1

Soient $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ *, deux espaces vectoriels normés, on dénote par* $X \hookrightarrow Y$ *l'injection de* X *dans* Y *qui est définie par les conditions suivantes*

(i) X *est un sous-espace vectoriel de* Y

(ii) L'identité $J : X \longrightarrow Y$, *telle que* $J(x) = x$, *pour tout* $x \in X$ *est continue*

En étant linéaire la continuité de l'opérateur identité est équivalente à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|f\|_Y \leq C \|f\|_X \ , \qquad pour \ \ tout \ \ f \in X, \tag{3.1}$$

- Si (3.1) est vérifiée alors on dit que X s'injecte dans Y, et on dit que l'espace X est plongé dans Y, s'il existe un opérateur continu , $U : X \longrightarrow Y$ tel que

$$\|U(f)\|_Y \leq C \|f\|_X \ , \qquad \text{pour tout } f \in X,$$

Définition 3.2 *[14]*

Soient A_0 et A_1 deux espaces quasi-Banach compatibles plongés dans un espace localement convexe de Haussdroff, on pose $A = (A_0, A_1)$, telles que

$$\sum(A) = A_0 + A_1 \,,\ \|a\|_{A_0+A_1} = \inf_{a=a_0+a_1} \left(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\right)$$

$$et$$

$$\Delta(A) = A_0 \cap A_1,\ \|a\|_{A_0 \cap A_1} = \max_{a \in A_0 \cap A_1} \left(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\right),$$

et on définit pour chaque $t > 0$, les fonctionnelles de Peetre

$$K(t,a) = \inf_{a=a_0+a_1} \left(\|a_0\|_{A_0} + t\,\|a_1\|_{A_1}\right),\ pour\ a \in \sum(A)$$

$$et$$

$$J(t,a) = \max\left(\|a\|_{A_0}\ ,\ t\,\|a\|_{A_1}\right),\ pour\ a \in \Delta(A).$$

La fonction $t \mapsto K(t,a)$ est positive, croissante et concave,

pour chaque $0 < \theta < 1,\ 0 < p \leq \infty$, on définit l'espace d'interpolation $(A)_{\theta,p}$, des espaces A_0 et A_1, par

$$(A)_{\theta,p} = (A_0\ ,\ A_1)_{\theta,p} = \left\{a \in \sum(A) : \quad \|a\|_{(A)_{\theta,p}} < \infty \quad \right\},$$

et on définit sa quasi-norme par

$$\|a\|_{(A)_{\theta,p}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}K(t,a)\right)^p \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\ ,\ \text{si } 1 \leq p < +\infty$$

$$et$$

$$\|a\|_{(A)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta}K(t,a).$$

La quasi-norme de $(A)_{\theta,p}$, peut être remplacée par la norme

$$\|a\|_{A_0+A_1} + \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}K(t,a)\right)^p \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Théorème 3.3 *[14]*

Soient (A_0, A_1) *et* (B_0, B_1) *deux couples compatibles d'espaces de Banach, où l'opérateur linéaire borné* T *plonge* A_i *dans* B_i $(i = 0, 1)$ *, telles que*

$$\|Tf\|_{B_0} \leq M_0 \|f\|_{A_0} \text{ , } et \ \|Tf\|_{B_1} \leq M_1 \|f\|_{A_1} \text{ ,}$$

alors pour tout $0 < \theta < 1,\ 0 < p \leq +\infty$ *, l'opérateur* T *plonge l'espace d'interpolation* $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ *dans l'espace d'interpolation* $(B_0, B_1)_{\theta,p}$ *, telles que*

$$\|Tf\|_{(B_0,B_1)_{\theta,p}} \leq M_\theta \|f\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}} \text{ , } et \ \ M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Preuve

De ce principal Théorème 3.3 dérive tous les classiques théorèmes tels que ceux des interpolations de Riesz-Thorin ou Marcinkiewicz, et les inégalités classiques telles que celles de Young et de Bernstein et pour la preuve voir [12] , ainsi que la monographiede Peetre [14] Chap 1

3.1 Problème de Composition dans des espaces de Besov homogènes $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$

Dans ce paragraphe on étudie le calcul fonctionnel dans les espaces de Besov homogènes et on introduit les espaces $\dot{\mathcal{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ définis grâce à l'ensemble des distributions tendant vers 0 à l'infini $\widetilde{C}_0(\mathbb{R}^n)$, ce qui facilite énormément le calcul fonctionnel en permettant la troncature des polynômes.

3.1.1 Propriétés des espaces de Besov homogènes

Soit ψ une fonction indéfiniment différentiable, paire et positive, dont le support soit un compact de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, et telle que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi\left(2^j \xi\right) = 1, \text{ pour tout } \quad \xi \neq 0\,. \tag{3.2}$$

L'opérateur $Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est défini par l'identité

$$\widehat{Q_j f}(\xi) = \psi\left(2^{-j}\xi\right) \hat{f}\ (\xi)\,,\ (j \in \mathbb{Z})$$

Définition 3.4

Soient $s \in \mathbb{R},\ p,q \in [1,+\infty]$, *alors l'espace de Besov homogène* $\dot{\tilde{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble des classes de distributions* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ *tel que*

$$\|f\|_{\dot{\tilde{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{js}\|Q_j f\|_p\right)^q\right)^{1/q} < +\infty\,. \tag{3.3}$$

La norme (3.3), rend $\dot{\tilde{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ un espace de Banach homogène, vérifiant les propriètès d'homogeniété, telles que pour tout $\lambda > 0$, et pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on ait

$$\|\tau_a f\|_{\dot{\tilde{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\dot{\tilde{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.4}$$

$$c_1\|f\|_{\dot{\tilde{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{(n/p)-s}\|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{\tilde{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2\|f\|_{\dot{\tilde{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.5}$$

On peut remplacer la norme $\|-\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$, par une norme équivalente $\|-\|'$, qui vérifie (3.4) et améliore (3.5), en remplaçant la partition discrète (3.2) par une partition continue telle que

$$\lambda^{(n/p)-s}\|f(\lambda(\cdot))\|' = \|f\|', \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Définition 3.5

Soient $p,q \in [1,+\infty]$, *si* $s \in\,]0,1]$ *alors on dénote par* $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *l'ensemble des distributions tempérées* f *de* $L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} < +\infty$, *avec*

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} &\sim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\omega^q(h)}{|h|^{sq}}\frac{\mathrm{d}h}{|h|^n}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad si \quad s \neq 1 \\
&\sim \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|h|^s}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\right)^q \frac{\mathrm{d}h}{|h|^n}\right)^{1/q}, \\
et\ \ \|f\|_{\dot{B}_p^{1,q}(\mathbb{R}^n)} &\sim \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|h|}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{\mathrm{d}h}{|h|^n}\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

avec des modifications éventuelles pour $p = +\infty$ *ou* $q = +\infty$ *,*

où $\omega(h) = \|f(x+h) - f(x)\|_p$ *dénote le module de continuité* .

Si $s \in]1,2]$ *, alors on dénote par* $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *l'ensemble des distributions tempérées* f *de* $L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\partial_j f \in \dot{B}_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $j = 1, ..., n$ *et on définit sa semi-norme par*

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \sim \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j f\|_{\dot{B}_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

On distingue entre l'espace de Besov homogène $\dot{\dot{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ inclus dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ de la Définition 3.4 et l'espace $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ de la Définition 3.5 inclus dans $L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 3.6 *[2]*

Soient $f \in L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$ *,* $a \in \mathbb{R}^n$*,* $\lambda > 0$*, alors l'espace* $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *vérifie les propriétés d'homogénéité suivantes*

$$\|f(\cdot - a)\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{(n/p)-s} \|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} ,$$

de plus $\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = 0$*, si et seulement si* $f \in \mathcal{P}_{[s]}(\mathbb{R}^n)$

Preuve

$-$ Pour $s \in]0,1]$ on prend $x - a = y$, donc on a $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$,

$$\text{d'oú} \qquad \|f(\cdot - a)\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$$

$-$ Pour $s \in]1,2]$ on a

$$\|f(\cdot - a)\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j f(\cdot - a)\|_{\dot{B}_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j f\|_{\dot{B}_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} ,$$

et ainsi par récurrence, pour tout $s > 0$

$-$ Posons $\lambda . x = y$ et $\lambda . h = t$, alors

$$\mathrm{d}y = \lambda^n . \mathrm{d}x , \ \mathrm{d}t = \lambda^n . \mathrm{d}h , \ |t| = |\lambda|^n . |h| ,$$

en appliquant la Définition 3.5 on obtient

$$\begin{aligned}\|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|\lambda|^{-s}|t|^s}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\lambda^{-n}|f(y+t)-f(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}\right)^q\frac{\lambda^{-n}\,\mathrm{d}t}{|\lambda|^{-n}|t|^n}\right)^{1/q}\\ &= \lambda^{-(n/p)+s}\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

- Si $\|f\|_{\dot{B}_p^{1,q}(\mathbb{R}^n)} = 0$, alors

  $$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)=0,$$

  d'où $\omega_p^2(h,f)=0$, et donc f est un polynôme du premier degré.

- Si $\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = 0$, alors

  $$\|\partial_j f\|_{\dot{B}_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad (j=1,..n),$$

  d'où par récurrence $\partial_j f$ est un polynôme de degré $[s-1] = [s]-1$, et donc f est un polynôme de degré $[s]$

Proposition 3.7 *[2]*

Soient $s\in\mathbb{R},\ p,q\in[1,+\infty]$ alors l'espace quotient $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)\big/\mathcal{P}_{[s]}(\mathbb{R}^n)$ peut être identifié à l'espace de Besov homogène qu'on peut dénoter par $\dot{\tilde{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ et peut être pris comme l'ensemble des classes des distributions tempérées modulo les polynômes $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\partial_j f\in\dot{\tilde{B}}_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $j=1,,..n,$ de plus l'expression suivante est une norme équivalente pour $\dot{\tilde{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{\dot{\tilde{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \approx \sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_{\dot{\tilde{B}}_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)}$$

Preuve

Pour la preuve voir [4]

3.1.2 Réalisations des espaces de Besov homogènes

Définition 3.8

Soit $\sigma : \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ *une application linéaire continue telle que* $\sigma(f) = [f]$ *est la classe d'équivalence de* f *modulo* $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ *, alors pour tout* $f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$*, on dit que* σ *est une réalisation modulo* $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ *de* $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$*, c'est un isomorphisme linéaire de* $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *sur son image, tel que l'espace* $\sigma\left(\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)\right)$ *muni de la norme,*

$$\|\sigma(f)\| = \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$$

devient un espace de Banach .

Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ et si la série $\sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$, alors on a

$$\sigma_m(f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n).$$

Définition 3.9

On dit qu'une distribution tempérée $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *tend vers* 0 *à l'infini si on a*

$$\lim_{\lambda\to 0} f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) = 0, \ dans\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

L'ensemble de telles distributions est noté $\widetilde{C}_0(\mathbb{R}^n)$ *.*

Si $C(\mathbb{R})$ dénote l'ensemble des fonctions réelles continues à valeurs réelles et $C_b(\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions bornées de $C(\mathbb{R})$ muni de la norme $\sup$ et $C_0(\mathbb{R})$ le sous-espace de Banach des fonctions de $C_b(\mathbb{R})$ avec une limite à valeur nulle à l'infini alors les distributions suivantes tendent vers 0 à l'infini.

- Les fonctions appartenant à $C_0(\mathbb{R}^n)$ ou à $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$.
- Les mesures boréliennes bornées.
- Les dérivées des fonctions continues bornées.
- Les dérivées des distributions appartenant à $\widetilde{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.10 *[4]*

Soit $1 \leq p < \infty$ *, telles que*

$$(0 < s < 1 + \frac{1}{p} \quad et \quad 1 \leq q \leq +\infty) \quad ou \quad (s = 1 + \frac{1}{p} \quad et \quad q = 1).$$

Si on dénote par $\dot{\mathcal{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *, l'ensemble des distributions tempérées* f *telles que*

$$[f] \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \;\; et \;\; \partial_j f \in \widetilde{C}_0, pour j = 1, ...n,$$

alors tout élément de $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *admet un représentant dans* $\dot{\mathcal{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *unique à l'addition près d'une constante et l'espace* $\dot{\mathcal{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *, ainsi défini peut être muni de la semi-norme de* $\|-\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$

3.1.3 Enoncé des résultats

Dans ce sous-paragraphe on compare entre les différents espaces $B_p^{s,q}$, $\dot{\tilde{B}}_p^{s,q} \approx \dot{B}_p^{s,q}$, $\dot{\mathcal{B}}_p^{s,q}$, concernant le calcul fonctionnel pour résoudre le problème de Composition en précisant les conditions li és à chacuns d'eux et en présentant deux Théorèmes comparatifs 3.12 et 3.13

Définition 3.11 *[4]*

Soient $p \in [1, +\infty[$ *et* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *, alors nous dénotons par* $\mathcal{U}_p(J)$ *, l'ensemble des fonctions mesurables* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *, telle que*

$$\sup_{|h| \leq t} |f(x+h) - f(x)| \;\; soit\ mesurable\ sur\ J\, , \;\; pour\ tout\ t > 0\, ,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{U}_p(J)}^p = \sup_{t > 0} t^{-1} \int_J \sup_{|h| \leq t} |f(x+h) - f(x)|^p \,\mathrm{d}\,x < +\infty.$$

On dit qu'une fonction continue f appartient à $U_p^1(\mathbb{R})$, s'il existe une fonction borélienne bornée $h \in \mathcal{U}_p(\mathbb{R})$, telle que

$$f(x) - f(0) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t, \qquad pour\;\; tout\;\; x \in \mathbb{R},$$

et pour toute fonction h bornée borélienne mesurable de classe $\mathcal{U}_p(\mathbb{R})$, on munit $U_p^1(\mathbb{R})$ de la semi-norme

$$\|f\|_{U_p^1} = \inf\left\{\sup_{\mathbb{R}} |h| + \|h\|_{\mathcal{U}_p},\ h = f' \ (p.p)\right\} \sim |f(0)| + \|f'\|_\infty + \|f'\|_{U_p(\mathbb{R})}$$

et juste comme nous avons défini $BV_p(\mathbb{R})$ à partir de $\mathcal{V}_p(\mathbb{R})$ (cf. Définition 1.19), nous définissons aussi $U_p(\mathbb{R})$ à partir de $\mathcal{U}_p(\mathbb{R})$, en prenant les fonctions qui sont presque partout égales au moins à un élément de $\mathcal{U}_p(\mathbb{R})$, et nous dotons $U_p(\mathbb{R})$ avec la semi-norme

$$\|f\|_{U_p(\mathbb{R})} = inf\left\{\ \|g\|_{\mathcal{U}_p(\mathbb{R})}\ ;\quad g \in \mathcal{U}_p(\mathbb{R}),\quad g = f \quad (p.p\ )\right\}$$

Théorème 3.12 *[2]*

Soient

$$p \in]1, +\infty[,\ s \in]0, 1 + \frac{1}{p}[,\ q \in [1, +\infty],\ f \in U_p^1(\mathbb{R})$$

(i) Si $f(0) = 0$, *alors* $T_f\left(B_p^{1+(1/p),1}(\mathbb{R}^n)\right) \subseteq B_p^{1+(1/p),\infty}(\mathbb{R}^n)$,

$$et\ \ \|f \circ g\|_{B_p^{1+(1/p),\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})}\,\|g\|_{B_p^{1+(1/p),1}(\mathbb{R}^n)},\ pour\ \ tout\ \ g \in B_p^{1+(1/p),1}(\mathbb{R}^n)$$

(ii) Si $f(0) = 0$, *alors* $T_f\left(B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)\right) \subseteq B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$,

$$et\ \ \|f \circ g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})}\,\|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)},\qquad pour\ \ tout\ \ g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$$

(iii) Si $g \in \dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})$, *alors* $\qquad f \circ g \in \dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},\infty}(\mathbb{R})$,

$$et\ \ \|f \circ g\|_{\dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},\infty}(\mathbb{R})} \leq c_p\,\|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})}\,(\|g\|_{\dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})} + |L_{g'}|),\ \ (c_p > 0).$$

(iv) Si $g \in BV_p^1(\mathbb{R})$, *alors* $\qquad f \circ g \in \dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},\infty}(\mathbb{R})$,

$$et\ \ \|f \circ g\|_{\dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},\infty}(\mathbb{R})} \leq c_p\,\|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})}\,\|g'\|_{BV_p(\mathbb{R})},\quad (c_p > 0)$$

Preuve

Pour la preuve voir [2] , le Théorème 3.12 peut se généraliser aux espaces $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, mais on ne connait pas une généralisation au cas n-dimensionnel pour les espaces BV_p^1

Théorème 3.13 *[4]*

Soient

$$1 \leq p < \infty,\ q \in [1, +\infty],\ 0 < s < 1 + \frac{1}{p}\ \check{s}et\ \ f \in U_p^1(\mathbb{R})$$

(i) Si $g \in \dot{\mathcal{B}}_p^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R}^n)$ *, alors on a*

$$[f \circ g] \in \dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},\infty}(\mathbb{R}^n),\ \partial_j(f \circ g) \in \widetilde{C}_0(\mathbb{R}^n),\ (j = 1, ..., n),$$

$$et \quad \|f \circ g\|_{\dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{U_p^1}\|g\|_{\dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R}^n)}, \quad (c > 0)$$

(ii) Si $g \in \dot{\mathcal{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *, alors on a*

$$f \circ g \in \dot{\mathcal{B}}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n),\ et\ \ \|f \circ g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{U_p^1}\|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}, \qquad (c > 0)$$

Preuve

Pour la preuve voir [4] , page 13

3.2 Théorème de Peetre

Lemme 3.14 *[8]*

$Soit\ \phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ une\ fonction\ \ absolument\ continue\ alors$

$$\nu_1(\phi, [a, b]) = \int_a^b |\phi'(x)|\ \mathrm{d}x\ ,$$

où

$$\nu_1(f, I) = \sup_{\{t_i\} \subset I} \sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

Théorème 3.15 *[14]*

Soient $\quad 1 \leq p_0 \, , \, p_1 \leq \infty \quad , \quad 0 < q_0 \, , \, q_1 \leq \infty \, , \quad 0 < \theta < 1$

(i) Si $\quad s = (1-\theta)\, s_0 + \theta s_1 \, , \; \dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1} \, , \; \dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1} \, ,$ *alors*

$$B_p^{s,\min(q,p)}\left(\mathbb{R}^n\right) \hookrightarrow \left(B_{p_0}^{s_0,q_0}\left(\mathbb{R}^n\right) \, , \, B_{p_1}^{s_1,q_1}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)_{\theta,p} \hookrightarrow B_p^{s,\max(q,p)}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

(ii) Si $\quad s = (1-\theta)\, s_0 + \theta s_1 \, , \; 0 < \theta < 1 \, , \; r \in \mathbb{R} \, ,$ *alors*

$$\left(B_p^{s_0,q_0}\left(\mathbb{R}^n\right) \, , \, B_p^{s_1,q_1}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)_{\theta,r} = B_p^{s,r}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

(iii) Si $\quad \dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1} \, ,$ *alors*

$$\left(B_p^{s_0,q_0}\left(\mathbb{R}^n\right) \, , \, B_p^{s_1,q_1}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)_{\theta,q} = B_p^{s,q}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Preuve

Pour la preuve voir la monographie de Peetre , [14] Chap 5, P107. Le Théorème 3.15 reste vrai pour les espaces de Besov homogènes .

Proposition 3.16 *[2]*

(i) Soit $p \in]1, +\infty[$ *, si* g *est un élément de* $\dot{B}_p^{\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})$ *, alors* g *est une fonction continue et la limite* $L_g = \lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *.*

En particulier, chaque élément de $\dot{B}_p^{\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})$ *est congruent modulo* $\mathcal{P}_0$ *à exactement un élément de* $C_0(\mathbb{R})$ *.*

(ii) Soit $p \in [1, +\infty[$ *alors l'espace* $\dot{B}_p^{\frac{1}{p},1}(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ *doté de la restriction de la semi-norme* $\|\cdot\|_{\dot{B}_p^{\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})}$ *, est un espace de Banach isométrique à* $\dot{\tilde{B}}_p^{1/p,1}(\mathbb{R})$ *.*

Théorème 3.17 *[2]*

Soit $p \in]1, +\infty[$ *, alors on a les inclusions continues suivantes qui sont vérifiées*

$$\dot{\tilde{B}}_p^{1/p,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow (L^\infty(\mathbb{R}), BV_1(\mathbb{R}))_{1/p,p} = (BV_\infty(\mathbb{R}), BV_1(\mathbb{R}))_{1/p,p}$$

$$\hookrightarrow BV_p(\mathbb{R}) \hookrightarrow U_p(\mathbb{R}) \hookrightarrow \dot{\tilde{B}}_p^{1/p,\,\infty}(\mathbb{R})$$

Preuve

(1) Si on applique le Théorème 3.15, (i) en prenant

$$\theta = s = 1/p,\ p_0 = \infty,\ s_0 = 0,\ s_1 = q_0 = q_1 = p_1 = 1\,, \qquad \text{alors}$$

$$\dot{\tilde{B}}_p^{1/p,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow (\dot{\tilde{B}}_\infty^{0,1}(\mathbb{R}), \dot{\tilde{B}}_1^{1,1}(\mathbb{R}))_{1/p,p} \hookrightarrow \dot{\tilde{B}}_p^{1/p,p}(\mathbb{R}),$$

et d'après la Proposition 3.16, (ii) on a

$$\dot{B}_p^{1/p,1}(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R}) \approx \dot{\tilde{B}}_p^{1/p,1}(\mathbb{R}) \quad et \quad \dot{B}_\infty^{0,1}(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}) \approx \dot{\tilde{B}}_\infty^{0,1}(\mathbb{R}),$$

d'où
$$\dot{B}_p^{1/p,1}(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R}) \hookrightarrow \left(\dot{B}_\infty^{0,1}(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}), \dot{B}_1^{1,1}(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})\right)_{1/p,p}$$

– Prouvons les injections

$\dot{\tilde{B}}_1^{1,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow BV_1(\mathbb{R})$

– Si $f \in \dot{\tilde{B}}_1^{1,1}(\mathbb{R})$, alors en utilisant l'inégalité de Bernstein on obtient

$$\begin{aligned} \|f'\|_1 &\leq cR\,\|f\|_1 = cR\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f\right\|_1 \\ &\leq cR\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j\,\|Q_j f\|_1 = C\,\|f\|_{\dot{\tilde{B}}_1^{1,1}}, \end{aligned}$$

où $\quad supp(\hat{f}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$

d'où $\quad \|f\|_{\dot{W}^{1,1}(\mathbb{R})} \leq C\,\|f\|_{\dot{\tilde{B}}_1^{1,1}(\mathbb{R})}\,,\quad$ et donc $\quad \dot{\tilde{B}}_1^{1,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R})\,.$

– Si $f \in \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R})$, alors f est absolument continue, et selon le Lemme 3.14 on a

$$\|f\|_{BV_1(\mathbb{R})} = \nu_1\left(\tilde{f},(\mathbb{R})\right)+\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\tilde{f}(x)\right| \leq 2\nu_1\left(\tilde{f},\mathbb{R}\right) \leq 2\int_{\mathbb{R}}\left|\tilde{f}'(x)\right|\,\mathrm{d}x \leq 2\,\|f\|_{\dot{W}^{1,1}(\mathbb{R})}\,,$$

d'où $\quad \dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow BV_1(\mathbb{R})\,,\quad$ et donc $\quad \dot{\tilde{B}}_1^{1,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow BV_1(\mathbb{R})\,.$

– On prouve aussi que $\dot{\tilde{B}}_\infty^{0,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$, car on a

$$\|f\|_\infty = \left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f\right\|_\infty \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}}\|Q_j f\|_\infty = \|f\|_{\dot{\tilde{B}}_\infty^{0,1}(\mathbb{R})}\,,$$

– en appliquant le Théorème 3.3 d'interpolation on obtient

$$(\dot{\tilde{B}}_\infty^{0,1}(\mathbb{R})\,,\dot{\tilde{B}}_1^{1,1}(\mathbb{R}))_{1/p,p} \hookrightarrow (L^\infty(\mathbb{R})\,,BV_1(\mathbb{R}))_{1/p,p}\,,$$

d'où
$$\dot{\tilde{B}}_p^{1/p,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow (L^\infty(\mathbb{R})\,,BV_1(\mathbb{R}))_{1/p,p}$$

(2) Si E est la fermeture de $BV_1(\mathbb{R})$ par rapport à $L^\infty(\mathbb{R})$, alors

$$(L^\infty(\mathbb{R})\,,BV_1(\mathbb{R}))_{1/p,p} = (E\,,BV_1(\mathbb{R}))_{1/p,p}\,,$$

et puisque $E \hookrightarrow BV_\infty(\mathbb{R})$ alors

$$(E,BV_1(\mathbb{R}))_{1/p,p} \hookrightarrow (BV_\infty(\mathbb{R})\,,BV_1(\mathbb{R}))_{1/p,p}\,,$$

d'où
$$(L^\infty(\mathbb{R})\,,BV_1(\mathbb{R}))_{1/p,p} \hookrightarrow (BV_\infty(\mathbb{R})\,,BV_1(\mathbb{R}))_{1/p,p}$$

(3) On définit les normes de l'espace l_N^p des suites finies $\{t_i\}_{1\leq i\leq N} \subset \mathbb{R}$, par

$$\|t_i\|_{l_N^p} = (\sum_{i=1}^{i=N}|t_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad et \quad \|t_i\|_{l_N^\infty} = \sup_{1\leq i\leq N}|t_i|$$

Considérons $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$, et soit la fonction continue U définie par

$$U \ : \ BV_\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow l_N^\infty(\mathbb{R})$$

$$f \longmapsto U(f) = \left(\tilde{f}\ (t_k) - \tilde{f}\ (t_{k-1}) \right)_{1 \leq k \leq N} ,$$

nous avons alors

$$\|U(f)\|_{l_N^\infty} = \sup_{1\leq i\leq N} \left| \tilde{f}\ (t_i) - \tilde{f}\ (t_{i-1}) \right| \leq \sup_{1\leq i\leq N} \left(\left| \tilde{f}\ (t_i) \right| + \left| \tilde{f}\ (t_{i-1}) \right| \right)$$

$$\leq 2 \sup \left| \tilde{f} \right| = 2 \|f\|_{BV_\infty(\mathbb{R})} ,$$

et $$\|U(f)\|_{l_N^1} = \sum_{k=1}^{k=N} \left| \tilde{f}\ (t_k) - \tilde{f}\ (t_{k-1}) \right| \leq \nu_1\left(\tilde{f}\right) \leq \|f\|_{BV_1(\mathbb{R})} ,$$

on a $(L^\infty(X), L^1(X))_{\frac{1}{p},p} = L^p(X)$, et si on prend comme cas particulier les espaces l_N^p on obtient par le Théorème 3.3 d'interpolation

$$\|U(f)\|_{l_N^p} \leq c_p \|f\|_{(BV_\infty(\mathbb{R}),BV_1(\mathbb{R}))_{\frac{1}{p},p}} ,$$

et puisque $\|f\|_{BV_p(\mathbb{R})} = \inf_a \left\{ a > 0 : \left\| U(\tilde{f}) \right\|_{l_N^p} \leq a \right\}$, alors

$$\|f\|_{BV_p(\mathbb{R})} \leq c_p \|f\|_{(BV_\infty(\mathbb{R}),BV_1(\mathbb{R}))_{\frac{1}{p},p}} ,$$

ce qui donne $(BV_\infty(\mathbb{R}), BV_1(\mathbb{R}))_{\frac{1}{p},p} \hookrightarrow BV_p(\mathbb{R})$

(4)

On a $$\int_{\mathbb{R}} \sup_{|h|\leq t} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{mt}^{(m+1)t} \sup_{|h|\leq t} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx$$

$$= \int_0^t \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sup_{|h|\leq t} |f(y+mt+h) - f(y+mt)|^p \, dy .$$

Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$, il existe $h_m(y) \in [-t, t]$, tel que

$$|f(y + mt + h_m(y) - f(y + mt))|^p \geq \sup_{|h| \leq t} |f(y + mt + h) - f(y + mt)|^p - \frac{\varepsilon}{4} 2^{-|m|} .$$

Puisque la famille d'intervalles $\{]y + kt, y + kt + h(y)[\}$ est disjointe alors

$$\int_0^t \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sup_{|h| \leq t} |f(y + mt + h) - f(y + mt)|^p \, \mathrm{d}y \leq \int_0^t \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ |f(y + mt + h_m(y)) - f(y + mt)|^p + \frac{\varepsilon}{4} 2^{-|m|} \right\} \mathrm{d}y$$

$$\leq \int_0^t \left(2\nu_p^p(f) + \varepsilon\right) \mathrm{d}y = t\left(\left(2\nu_p^p(f) + \varepsilon\right)\right) .$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous obtenons l'inégalité $\|f\|_{\mathcal{U}_p(\mathbb{R})} \leq 2^{1/p} \|f\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})}$, ce qui donne $\mathcal{V}_p(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{U}_p(\mathbb{R})$, et l'on déduit que $BV_p(\mathbb{R}) \hookrightarrow U_p(\mathbb{R})$

(5) On a pour tout $g = f$, $(p \, . \, p)$

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{1/p,\infty}(\mathbb{R})} = \sup_{|h| \geq 1} \left[h^{-\frac{1}{p}} \|\tau_{-h} f - f\|_{L^p} \frac{1}{|h|} \right] ,$$

$$\leq \left[\sup_{t > 0} t^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{|h| \leq t} |g(x + h) - g(x)|^p \right) \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{p}} = \|g\|_{\mathcal{U}_p(\mathbb{R})} ,$$

d'où $$\|f\|_{\dot{B}_p^{1/p,\infty}(\mathbb{R})} \leq \inf \left\{ \|g\|_{\mathcal{U}_p(\mathbb{R})} ; \quad g \in \mathcal{U}_p(\mathbb{R}) , \; g = f \quad (p.p) \right\} = \|f\|_{U_p(\mathbb{R})} ,$$

donc $$\|f\|_{\dot{B}_p^{1/p,\infty}(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{U_p(\mathbb{R})} ,$$

ce qui donne $$U_p(\mathbb{R}) \hookrightarrow \dot{B}_p^{1/p,\infty}(\mathbb{R})$$

Chapitre 4

Composition des opérateurs dans les espaces $BV_p^\alpha(I)$

Dans ce chapitre on donne les définitions des espaces $\mathcal{V}_p^\alpha(I)$, $BV_p^\alpha(I)$, des fonctions définies sur les intervalles I de $\mathbb{R}$ à p-variation bornées d'ordre α et l'espace de leurs classes d'équivalence par rapport à l'égalité presque partout, ensuite on étudie les cas particuliers $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$, $(p \geq 1)$ qui donnent les espaces $W^{1,p}(I)$ et on donne une généralisation du Théorème 3.17 de Peetre aux espaces $BV_p^\alpha(I)$, $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, enfin on présente quelques exemples sur des opé rateurs de compositions définis dans certains espaces fonctionnels.

4.1 Notions de base

Dans ce paragraphe on présente quelques notions de base sur les espaces $\mathcal{V}_p^\alpha(I)$ des fonctions à p-variation bornées d'ordre α telles que $p \geq 1$, $\alpha \geq 0$, ainsi que l'espace de ses primitives $BV_p^\alpha(I)$, pour généraliser certains résultats des chapitres précédents.

4.1.1 Les espaces $\mathcal{V}_p^\alpha(I)$

Définition 4.1

Soit $p \in [1, +\infty]$ on définit la norme de l'espace l_N^p, des suites réelles finies $\{t_i\}_{1 \leq i \leq N}$, par

$$\begin{cases} \|t_i\|_{l_N^p} = \left(\sum_{i=1}^{i=N} |t_i|^p\right)^{1/p}, & si\ \ p \neq \infty \\ \\ \|t_i\|_{l_N^\infty} = \sup_{1 \leq i \leq N} |t_i|, & si\ \ p = \infty \end{cases}$$

Définition 4.2

Soient $p \in [1, +\infty[$, $\alpha \geq 0$, *alors une fonction* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite à p-variation bornées d'ordre* α *ou brièvement á p-v . b d'ordre* α *, si pour toutes les suites réelles, strictes et finies* $t_0 < t_1 < ...... < t_N$, *de I il existe* $c > 0$, *telle que*

$$\left\| \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1})^{\alpha}} \right\|_{l_N^p} \leq c < \infty \tag{4.1}$$

ou bien si le nombre $\sup\limits_{\{t_k\}_{1 \leq k \leq n, t_{k-1} < t_k} \subset I} \left[\sum\limits_{k=1}^{N} \left| \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1})^{\alpha}} \right|^p \right]$ *est fini ,*

l'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{V}_p^{\alpha}(I)$, $\left(\mathcal{V}_p^{\alpha} \text{ si } I = \mathbb{R}\right)$, *et le minimum de telles constantes c est noté* $\nu_p^{\alpha}(f, I)$, $\left(\nu_p^{\alpha} \text{ si } I = \mathbb{R}\right)$

$$\nu_p^{\alpha}(f, I) = \inf_c \left\{ c > 0 : \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1})^{\alpha}} \right|^p \leq c^p, \text{ pour tout } \{t_k\}_{1 \leq k \leq n, t_{k-1} < t_k} \subset I \right\}$$

Remarque 4.3

- *Nous convenons de prendre* $\mathcal{V}_p^0(I) = \mathcal{V}_p(I)$
- *La condition (4.1) est équivalante au fait que pour toute famille d'intervalles disjoints* $[a_k, b_k]$, $a_k \neq b_k$ *de I on a* $\sum\limits_{k=1}^{N} \left| \frac{f(a_k) - f(b_k)}{(a_k - b_k)^{\alpha}} \right|^p \leq c < \infty, \ (c > 0)$
- $\mathcal{V}_1^{\alpha}(I)$ *ou simplement* $\mathcal{V}^{\alpha}(I)$ *est appel é l'espace des fonctions à variation bornées d'ordre* α *sur I , et* $\mathcal{V}_{\infty}^{\alpha}(I)$ *est un espace de Banach pour la norme*

$$\|f\|_{\mathcal{V}_{\infty}^{\alpha}(I)} = \nu_{\infty}^{\alpha}(f, I) = \sup_{x \in I \ /\{0\}} \left| \frac{f(x)}{x^{\alpha}} \right|,$$

et l'on a $\mathcal{V}_{\infty}^{\alpha}(I) = Lip_{\alpha}(I)$, *pour* $0 \leq \alpha < 1$

Proposition 4.4

Soient $x, y \in I$, $p \in [1, +\infty[$, *et* $0 \leq \alpha < 1$, *alors chaque élément de* $\mathcal{V}_p^{\alpha}(I)$ *est une fonction Lipchitzienne d'ordre* α, *et* $\mathcal{V}_p^{\alpha}(I)$ *devient un espace de Banach s'il est doté de la norme suivante ,*

$$\|f\|_{\mathcal{V}_p^{\alpha}(I)} = \sup_{x \in I} |f(x)| + \nu_p^{\alpha}(f, I). \tag{4.2}$$

Preuve

Si $f \in \mathcal{V}_p^{\alpha}(I)$ alors f est ν_p^{α}-Lipchitzienne d'ordre α car

$$|\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{\alpha}}| \leq \nu_p^{\alpha}(f,I) \qquad pour\ \ tout\ \ x,y \in I.$$

et la norme (4.2) vérifie toutes les conditions rendant $\mathcal{V}_p^{\alpha}(I)$ un espace de Banach.

Proposition 4.5

L'espace $\mathcal{V}_p^{\alpha}(I)$ est une algèbre de Banach pour la multiplication ponctuelle des fonctions ,

$$tel\ que \quad \|f.g\|_{\mathcal{V}_p^{\alpha}(I)} \leq \|f\|_{\mathcal{V}_p^{\alpha}(I)} \|g\|_{\mathcal{V}_p^{\alpha}(I)} \qquad pour \quad tout \ \ f,g \in \mathcal{V}_p^{\alpha}(I)$$

Preuve

Soit $x_0 < x_1 < ... < x_n$ une suite finie dans I et $f,g \in \mathcal{V}_p(I)$ .Puisque $p \geq 1$ et en utilisant l'inégalité de Minkowski on obtient

$$\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{fg(x_j)-fg(x_{j-1})}{(x_j-x_{j-1})^{\alpha}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{N}\left|f(x_j)\left(\frac{g(x_j)-g(x_{j-1})}{(x_j-x_{j-1})^{\alpha}}\right)\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{N}\left|g(x_{j-1})\left(\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{(x_j-x_{j-1})^{\alpha}}\right)\right|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq \sup_I |f| \,.\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{g(x_j)-g(x_{j-1})}{(x_j-x_{j-1})^{\alpha}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \sup_I |g| \,.\left(\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{(x_j-x_{j-1})^{\alpha}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_I |f| \,.\, \nu_p^{\alpha}(g,I) + \sup_I |g| \,.\, \nu_p^{\alpha}(f,I)\,, \quad \text{d'où}$$

$$\nu_p^{\alpha}(f\,.g,I) = \sup_I \left(\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{fg(x_j)-fg(x_{j-1})}{(x_j-x_{j-1})^{\alpha}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_I |f| \,.\, \nu_p^{\alpha}(g,I) + \sup_I |g| \,.\, \nu_p^{\alpha}(f,I)\,, \quad \text{et donc}$$

$$\|f\,.\,g\|_{\mathcal{V}_p^{\alpha}(I)} = \nu_p^{\alpha}(f.\,g,I) + \sup_I |f| \ .\ \sup_I |g| \leq \sup_I |f| \ .\, \nu_p^{\alpha}(g,I) + \sup_I |g| \ .\, \nu_p^{\alpha}(f,I) + \sup_I |f| \ .\ \sup_I |g|$$

$$\leq \sup_I |f| \,.\, \nu_p^{\alpha}(g,I) + \sup_I |g| \,.\, \nu_p^{\alpha}(f,I) + \sup_I |f| + \sup_I |g| + \underbrace{\left[\nu_p^{\alpha}(g,I).\, \nu_p^{\alpha}(f,I)\right]}_{\geq 0}$$

$$= \left(\sup_I |f| + \nu_p^{\alpha}(f,I)\right) . \left(\sup_I |g| + \nu_p^{\alpha}(g,I)\right) = \|f\|_{\mathcal{V}_p^{\alpha}(I)} \cdot \|g\|_{\mathcal{V}_p^{\alpha}(I)}\ ,$$

4.1.2 Les espaces $BV_p^\alpha(I)$

Dans ce paragraphe on généralise l'espace des classes $BV_p(I)$ à l'espace des classes $BV_p^\alpha\,(I)$ telle que $0 \leq \alpha < 1$, puis on dé finit l'espace des distributions $BV_p^\alpha,$ telles que $\alpha \geq 1$ de leurs primitives.

Définition 4.6

Soient $p \in [1, +\infty\,],\ 0 \leq \alpha < 1,$ *alors nous dénotons par* $\mathcal{BV}_p^\alpha\,(I)$ *, l'ensemble des fonctions* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *telle qu'il existe une fonction* $g \in \mathcal{V}_p^\alpha\,(I)$ *qui coïncide avec* f *presque partout.*

$$\mathcal{BV}_p^\alpha\,(I) = \left\{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \qquad \exists g \in \mathcal{V}_p^\alpha\,,\ tel\ que \quad f = g\ \ (p.p)\right\},$$

et on pose

$$\varepsilon_p^\alpha\,(f) = \inf\left\{\nu_p^\alpha\ (g) \quad ; \qquad g \in \mathcal{V}_p^\alpha\,,\ tel\ que \quad g\ = f \quad (p.p)\right\},$$

et nous dénotons par $BV_p^\alpha\,(I)$ *l'ensemble quotient par rapport à la relation d'équivalence, "égalité dans* $\mathcal{BV}_p^\alpha\,(I)$ *presque partout", telles que*

$$\dot{f} \ = \ \left\{g \in \mathcal{BV}_p^\alpha\,(I) \quad ; \qquad g = f \quad (p.p)\right\},$$

et

$$BV_p^\alpha\,(I) \ = \ \left\{\ \dot{f} \quad ; \qquad f \in \mathcal{BV}_p^\alpha\,(I)\right\} = \mathcal{BV}_p^\alpha\,(I)\,/e.p.p \ .$$

Si $h \in BV_p^\alpha\,(I)$, *nous dénotons par* $\varepsilon_p^\alpha\,(h)$, *le nombre* $\varepsilon_p^\alpha\,(f)$, *pour n'importe quels des représentants* f *de* h.

Nous convenons de prendre $BV_p^0\,(I) = BV_p\,(I)$

Proposition 4.7

Soient $p \in [1,+\infty], 0 \leq \alpha < 1$, *si* $f \in BV_p^{\alpha}(\mathbb{R})$ *alors* f *a un représentatif normal unique* $\tilde{f} \in \mathcal{V}_p^{\alpha}$, *et nous avons*

$$\varepsilon_p^{\alpha}(f) = \nu_p^{\alpha}(\tilde{f}) .$$

Nous considérerons donc $BV_p^{\alpha}(\mathbb{R})$, comme un espace de Banach des distributions doté de la norme suivante

$$\begin{aligned} \|f\|_{BV_p^{\alpha}(\mathbb{R})} &= \varepsilon_p^{\alpha}(f) + \left\| \frac{f(x)}{x^{\alpha}} \right\|_{\infty} \\ &= \nu_p^{\alpha}(\tilde{f}) + \sup_{x \in \mathbb{R}/\{0\}} \left| \frac{\tilde{f}(x)}{x^{\alpha}} \right| . \end{aligned}$$

Il faut noter que pour $p = \infty$, on obtient

$$\|f\|_{BV_{\infty}^{\alpha}(I)} \sim \sup_{x \in I\ /\{0\}} \left| \frac{\tilde{f}(x)}{x^{\alpha}} \right|$$

Définition 4.8

Soient $p \in [\, 1,\ +\infty\,]$, $\alpha \geq 1$, *alors nous disons qu'une fonction* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *appartient à* $BV_p^{\alpha}(I)$ *, s'ils existent* $c, x_0 \in \mathbb{R}$, *et* $g \in BV_p^{\alpha-1}(I)$ *tel que*

$$f(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)\, \mathrm{d}t \qquad \textit{pour tout } x \in I . \tag{4.3}$$

Si (4.3) est vérifiée, alors f est une fonction de Lipchitz continue, et nous dotons $BV_p^{\alpha}(I)$ avec la norme

$$\|f\|_{BV_p^{\alpha}(I)} = |f(x_0)| + \|f'\|_{BV_p^{\alpha-1}(I)} ,$$

pour laquelle $BV_p^{\alpha}(I)$ devient un espace de Banach, et à chaque point x_0 de I, nous obtenons une norme équivalente .

4.2 Les espaces $W^{1,p}(\Omega)$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Dans ce paragraphe on étudie l'espace $W^{1,p}(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, qui s'avère très intéréssant compte tenu de sa régularité par rapport aux opérateurs de compositions. Voir les travaux de H.Brezis [6]

4.2.1 Propriétés des espaces $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 4.9 *[15]*

$*$ *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *et* $1 \leq p \leq \infty$, *alors on définit l'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \,(au\ sens\ des\ distributions) \in L^p(\Omega),\ i = 1, ..n \right\}.$$

$*$ *On pose* $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ *qui est muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)},$$

$$et\ la\ norme\ associée\ est\ \|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$*$ *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

$*$ *Si* $1 < p < +\infty$, *alors*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \sim \left[\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right]^{1/p}$$

$*$ *Si on note par* $g_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, *alors* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *si et seulement si*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \forall i = 1, ...n \quad ; \qquad \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \ ,$$

Définition 4.10 *[15]*

$*$ *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \geq 2$,

alors on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *, par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) \; ; \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \, , \; \; pour \; \; tout \; \; i = 1, ...N \right\} .$$

$*$ *On pose* $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ *qui devient un espace de Hilbert ,*

s'il est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \; .$$

$*$ *L'espace* $W^{m,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p} \; .$$

$*$ *Si on note par* $g_\alpha = D^\alpha u = \dfrac{D^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} .... \partial x_n^{\alpha_n}}$ *, alors on a pour tout* $u \in L^p(\Omega)$

$u \in W^{m,p}(\Omega)$, *si et seulement si* $\forall \; \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$, $\exists g_\alpha \in L^p(\Omega)$ *, tel que*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \, , \quad pour \; \; tout \; \; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \; .$$

$*$ *Si* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *dénote l'adhérence de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$,

alors on a l'inégalité suivante dite de Poincaré

$$\forall \; u \; \in \; W_0^{1,p}(\Omega) \quad ; \qquad \int_\Omega |u|^p \leq c(\Omega)^p \int_\Omega \|\nabla u\|^p \; , \quad c(\Omega) > \; 0 \, , \quad p \geq 1 \, .$$

Où $\nabla u \; = \; \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_k}, ... \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)$, $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \in L^p(\Omega)$, $\quad k = 1, ...n$

Proposition 4.11 *[8]*

Soit $I = [a, b]$ *tel que* $a, b \in \mathbb{R}$,

et considérons une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *, et une partition* $\mathcal{P} \subset I$ *telle que*

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}\,,\ \textit{où}\ a = x_0 < x_1 < x_2 < ..... < x_n = b,$$

si on définit les sommes $S(f, \mathcal{P})$ *,* $s(f, \mathcal{P})$ *,* $V(f, \mathcal{P})$ *par*

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \sup\{f(x) \quad ; \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \,.\, (x_k - x_{k-1})$$

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \inf\{f(x) \quad ; \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \,.\, (x_k - x_{k-1})$$

$$V(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \quad et \quad \nu(f, [a, b]) = \sup\{V(f, \mathcal{P}) \quad ; \quad \mathcal{P} \subset [a, b]\}\,,$$

$$alors \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{S(f, \mathcal{P}) \quad ; \quad \mathcal{P} \subset [a, b]\} = \sup\{s(f, \mathcal{P}) \quad ; \quad \mathcal{P} \subset [a, b]\}\,,$$

et si f *est absolument continue alors* $\qquad \nu(f, [a, b]) = \displaystyle\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$

Proposition 4.12 *[6]*

Soient $1 < p < \infty$ *,* $s \in \mathbb{N}$ *,* $0 < \sigma \leq s$ *,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, alors on peut trouver des normes équivalentes à l'espace* $W^{s,p}(\Omega)$ *définies par*

$$\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sup_{h \in \mathbb{R}^n,\, h \neq 0} \frac{\|\Delta_h^s f\|_{L^p(\Omega)}}{|h|^\sigma}$$

Lemme 4.13 *[8]*

Soit $1 < p < \infty$ *, alors pour tout intervalle I de* $\mathbb{R}$ *, on a*

$$W^{1,p}(I) = \mathcal{V}_p^{1-\frac{1}{p}}(I)$$

Preuve

– Si $f \in \mathcal{V}_p^{1-\frac{1}{p}}([a,b])$, alors pour toute partition $\mathcal{P} = \{a \leq x_{k-1} < x_k \leq ...b\}$,

on a $$\left(\sum_{k\geq 0} |x_k - x_{k-1}| \, . \left(\frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|x_k - x_{k-1}|}\right)^p\right)^{1/p} \leq c < \infty \, ,$$

fixons la différence $|x_k - x_{k-1}| = h$, et considérons la fonction g_h , définie

par $g_h(x) = (|f(x+h) - f(x)|)^p$, alors selon la Proposition 4.11 on a

$$\int_a^b g_h(x)\, \mathrm{d}x = \inf_{\mathcal{P}\subset[a,b]} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sup_x \{g_h(x) \quad ; \qquad x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \, . \, (x_k - x_{k-1}) \right\} \, , \text{ d'où}$$

$$\int_a^b (|f(x+h) - f(x)|)^p \leq \sum_{k\geq 0} |x_k - x_{k-1}| \, (|f(x_k) - f(x_{k-1})|)^p \, ,$$

en divisant par $|x_k - x_{k-1}|^p$, les deux côtés on obtient

$$\left[\frac{\int_a^b (|f(x+h) - f(x)|)^p \, \mathrm{d}x}{|h|^p}\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k\geq 0} |x_k - x_{k-1}| \, (\frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|x_k - x_{k-1}|})^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{\mathcal{V}_p^{1-\frac{1}{p}}} \, ,$$

et donc $\mathcal{V}_p^{1-\frac{1}{p}}(I) \subset W^{1,p}(I)$.

– Considérons une suite d'intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ de I, on peut toujours choisir une sous suite

d'intervalles telle que $[a'_k, b'_k] \subset [a_k, b_k]$, $|b'_k - a'_k| = |h| \neq 0$

Si $f \in W^{1,p}(I)$, alors on a selon la Proposition 4.12

$$\frac{\left[\sum_{k\geq 0} (|f(b_k) - f(a_k)|)^p\right]^{1/p}}{|b_k - a_k|^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{(\sum_{k\geq 0} (|f(a_k + h) - f(a_k)|)^p)^{1/p}}{|h|^{1-\frac{1}{p}}}$$

$$\leq \frac{(\int_a^b (|f(x+h) - f(x)|)^p \, \mathrm{d}x)^{1/p}}{|h|^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{\|\Delta_h^1 f\|_{L^p}}{|h|^{\sigma}} \leq c < \infty \, ,$$

avec $0 < \sigma = 1 - \dfrac{1}{p} < 1$, car $p > 1$, d'où $W^{1,p}(I) \subset \mathcal{V}_p^{1-\frac{1}{p}}(I)$

4.2.2 Composition dans les espaces $W^{1,p}(\Omega)$

Corollaire 4.14 *[15]*
Soient $G \in C^1(\mathbb{R})$, $G(0) = 0$, $1 \leq p < \infty$, $u \in W^{1,p}(I)$, *alors*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad et \quad (G \circ u)' = (G' \circ u)\, u'$$

Preuve

Par le théorème des accroissements finis on a

$$\frac{|G(s) - G(0)|}{|s - 0|} \leq 1_{supp\ G}(s) \,.\, \|G'\|_\infty \,.$$

Si $G(s) = 0$, le résultat est immédiat, sinon $1_{supp\ G}(s) = 1$, et puisque $G \in C^1(\mathbb{R})$ alors $\|G'\|_\infty \leq c < \infty$, et en prenant $M = \|u\|_{L^\infty}$, donc pour tout $M > 0$, on a

$$\forall\, s \in [-M, +M] \;, \quad |G(s)| \leq c\,|s| \leq c\,\|u\|_{L^\infty} \;,$$

or $\|u\|_{L^\infty} \leq c' \|u\|_{W^{1,p}}$, $c' > 0$, d'où

$$|G \circ u| \leq c\,\|u\|_{L^\infty} \leq c'' \|u\|_{W^{1,p}} < \infty,$$

et puisque $u \in L^p(I)$, $u' \in L^p(I)$, alors

$$G \circ u \in L^p(I) \,, (G \circ u')\, u' \in L^p(I) \,,$$

et du fait que $1 \leq p < \infty$, alors il existe une suite u_n de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(I)$ et dans $L^\infty(I)$, et donc

$$G \circ u_n \quad \longrightarrow \quad G \circ u \in L^\infty(I)$$

$$\text{et } \; (G' \circ u_n)u_n' \quad \longrightarrow \quad (G' \circ u)u' \in L^p(I) \,,$$

or on a $$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(I) \,, \quad \int_I (G \circ u_n)\varphi' = -\int_I (G' \circ u_n) u_n' \varphi \,,$$

d'où le résultat, car il suffit de prendre $\varphi(t) = e^{-t} \in \mathcal{D}(I)$

Lemme 4.15 *[15]*

Soient Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $1 \le p < \infty$, $G \in C^1(\mathbb{R})$, *telles que*

$$G(0) = 0\,,\ et\ \ |G'(s)| \le M\,,\ (M > 0)\ \ pour\ tout\ s \in \mathbb{R}\,,$$

$$on\ a \quad si \quad u \in W^{1,p}(\Omega)\,,\ alors \qquad G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad et \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Preuve

Les mêmes étapes de la preuve du Corollaire 4.14 nous donnent le Lemme 4.15.

Proposition 4.16 *[6]*

Soient Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $s > 1$, $1 < p < \infty$, $sp = n$, $k = [s] + 1$, *telles que*

$$G \in C^k(\mathbb{R})\ ,\ G(0) = 0 \quad et \quad D^j G \in L^\infty(\mathbb{R})\ , \quad pour\ \ tout\ \ j \le k\ ,$$

$$on\ a\,, \qquad\qquad si \quad u \in W^{s,p}(\Omega) \quad alors \quad G \circ u \in W^{s,p}(\Omega)\ .$$

Cette Proposition 4.16, est une généralisation du Lemme 4.15 mais elle n'est pas vérifiée pour $p = 1$, voir [6]

Théorème 4.17 *[5]*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *une fonction de Borel mesurable telle que* $f(0) = 0$

(i) Si $1 \le p \le \infty$, *alors* T_f *opère sur* $W^{1,p}(\mathbb{R})$ *si et seulement si* f *est une fonction continue et localement Lipchitzienne.*

(ii) Si $1 \le p \le \infty$ *et* $m \ge 2$, *alors*

$$T_f\ \ opère\ sur \quad W^{m,p}(\mathbb{R})\ \ si\ et\ seulement\ si\ f \in W^{m,p}_{\ell oc}(\mathbb{R})\ .$$

Il resulte que si l'opérateur de composition T_f opère sur un espace de Sobolev alors il doit être borné, ce Théorème 4.17 est dû à Marcus et Mizel, [5].

4.3 Théorème de Peetre dans les espaces $BV_p^\alpha(I)$

Théorème 4.18

Soient $p \in]1,+\infty[\,,\ 0 \leq \alpha < 1\,,$ *alors on a les injections continues suivantes qui sont vérifiées*

$$\dot{\tilde{B}}_p^{1/p,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \left(L^\infty(\mathbb{R}), BV_1^\alpha(\mathbb{R})\right)_{1/p,p} = \left(BV_\infty^\alpha(\mathbb{R}), BV_1^\alpha(\mathbb{R})\right)_{1/p,p}$$

$$\hookrightarrow BV_p^\alpha(\mathbb{R}) \hookrightarrow U_p(\mathbb{R}) \hookrightarrow \dot{\tilde{B}}_p^{1/p,\infty}(\mathbb{R})$$

Preuve

1) Comme on a vu dans la preuve du Théorème 3.17 on a

$$\dot{B}_p^{1/p,1}(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R}) \hookrightarrow \left(\dot{B}_\infty^{0,1}(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}), \dot{B}_1^{1,1}(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})\right)_{1/p,p}$$

– Prouvons les injections $\dot{\tilde{B}}_1^{1,1} \hookrightarrow \dot{W}^{1,1} \hookrightarrow BV_1^\alpha\,,$

∗ L'injection $\dot{\tilde{B}}_1^{1,1} \hookrightarrow \dot{W}^{1,1}$ est vérifiée (Théorème 3.17).

∗ Puisque $\nu_1^\alpha(f,\mathbb{R}) = \sup\limits_{\{t_0<t_1<\ldots t_k\ldots<t_n\}\subset\, \mathbb{R}, n\in\mathbb{N}} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{|f(t_k)-f(t_{k-1})|}{|t_k-t_{k-1}|^\alpha}\right]$, alors

$$\|f\|_{BV_1^\alpha(\mathbb{R})} = \nu_1^\alpha\left(\tilde{f}\right) + \sup_{x\in\mathbb{R}/\{0\}} \left|\frac{\tilde{f}'(x)}{x^\alpha}\right| \leq 2\nu_1^\alpha\left(\tilde{f}\right), \text{ car } 0 \leq \alpha < 1$$

$$\leq 2\int_{\mathbb{R}/\{0\}} \left|\frac{\tilde{f}'(x)}{x^\alpha}\right| \mathrm{d}x \sim 2\|f\|_{\dot{W}^{1,1}(\mathbb{R})}\,,$$

d'où $\dot{W}^{1,1} \hookrightarrow BV_1^\alpha$, et donc $\dot{\tilde{B}}_1^{1,1} \hookrightarrow BV_1^\alpha$.

∗ On prouve aussi que $\dot{\tilde{B}}_\infty^{0,1} \hookrightarrow L^\infty$, (Théorème 3.17).

– En appliquant alors le le Théorème 3.3 d'interpolationon obtient

$$(\dot{\tilde{B}}_\infty^{0,1}, \dot{\tilde{B}}_1^{1,1})_{1/p,p} = \dot{\tilde{B}}_p^{1/p,1} \hookrightarrow (L^\infty, BV_1^\alpha)_{1/p,p}$$

(2) Si E_α est la fermeture de $BV_1^\alpha(\mathbb{R})$, par rapport à $L^\infty(\mathbb{R})$, alors

$$(L^\infty(\mathbb{R}), BV_1^\alpha(\mathbb{R}))_{1/p,p} = (E_\alpha, BV_1^\alpha(\mathbb{R}))_{1/p,p}$$

et puisque $E_\alpha \hookrightarrow BV_\infty^\alpha(\mathbb{R})$, alors

$$(E_\alpha, BV_1^\alpha(\mathbb{R}))_{1/p,p} \hookrightarrow (BV_\infty^\alpha(\mathbb{R}), BV_1^\alpha(\mathbb{R}))_{1/p,p},$$

d'où $$(L^\infty(\mathbb{R}), BV_1^\alpha(\mathbb{R}))_{1/p,p} \hookrightarrow (BV_\infty^\alpha(\mathbb{R}), BV_1^\alpha(\mathbb{R}))_{1/p,p}$$

(3) On définit les normes de l'espace l_N^p des suites $\{t_i\}_{1\leq i\leq N}$, par

$$\|t_i\|_{l_N^p} = \left(\sum_{i=1}^{i=N} |t_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|t_i\|_{l_N^\infty} = \sup_{1\leq i\leq N} |t_i| .$$

Fixons une suite réelle finie et stricte $\{t_i\}_{0\leq i\leq N}$ tel que $t_0 < t_1 < ... < t_N$, et associons pour tout $0 \leq \alpha < 1$, une fonction U_α, définie par,

$$\begin{aligned} U_\alpha : \quad BV_\infty^\alpha(\mathbb{R}) &\longrightarrow l_N^\infty \\ f &\longmapsto \left(\frac{\tilde{f}(t_i) - \tilde{f}(t_{i-1})}{|t_i - t_{i-1}|^\alpha}\right)_{1\leq i\leq N}, \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \|U_\alpha(f)\|_{l_N^\infty} = \sup_{t_k\in\{t_i\}} \left|\frac{\tilde{f}(t_k) - \tilde{f}(t_{k-1})}{|t_k - t_{k-1}|^\alpha}\right| \leq \sup_{t_k\in\{t_i\}} \left(\left|\frac{\tilde{f}(t_k)}{|t_k - t_{k-1}|^\alpha}\right| + \left|\frac{\tilde{f}(t_{k-1})}{|t_k - t_{k-1}|^\alpha}\right|\right)$$

$$\leq 2 \sup_{t\in\mathbb{R}/\{0\}} \left|\frac{\tilde{f}(t)}{t^\alpha}\right| = 2\|f\|_{BV_\infty^\alpha(\mathbb{R})},$$

d'où $$\|U_\alpha(f)\|_{l_N^\infty} \leq 2\|f\|_{BV_\infty^\alpha(\mathbb{R})},$$

et donc $$BV_\infty^\alpha(\mathbb{R}) \hookrightarrow l_N^\infty .$$

D'autre part on a

$$\left\|U_\alpha(f)\right\|_{l_N^1} = \sum_{k=1}^{N}\left|\frac{\tilde f(t_k)-\tilde f(t_{k-1})}{|t_k-t_{k-1}|^\alpha}\right| \leq \nu_1^\alpha(\tilde f)+\sup\left|\tilde f\right| = \|f\|_{BV_1^\alpha(\mathbb{R})} \ ,$$

d'où $\quad \left\|U_\alpha(f)\right\|_{l_N^1} \leq \|f\|_{BV_1^\alpha(\mathbb{R})}$,

et donc $\quad BV_1^\alpha(\mathbb{R}) \hookrightarrow l_N^1$.

On a $(L^\infty(X), L^1(X))_{\frac{1}{p},\,p} = L^p(X)$, et par le Théorème 3.3 d'interpolation on obtient

$$\left\|U_\alpha(f)\right\|_{l_N^p} \leq c_{p,\alpha}\,\|f\|_{\left(BV_\infty^\alpha(\mathbb{R}), BV_1^\alpha(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{p},\,p}} \ , \ c_{p,\alpha}>0 \, .$$

Puisque $\|f\|_{BV_p^\alpha(\mathbb{R})} = \inf_a\left\{a>0 : \left\|U_\alpha(f)\right\|_{l_N^p}\leq a\right\}$, alors

$$\|f\|_{BV_p^\alpha(\mathbb{R})} \leq c_{p,\alpha}\,\|f\|_{\left(BV_\infty^\alpha(\mathbb{R}), BV_1^\alpha(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{p},\,p}} \ , \ c_{p,\alpha}>0,$$

ce qui donne $\quad \left(BV_\infty^\alpha(\mathbb{R}), BV_1^\alpha(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{p},\,p} \hookrightarrow BV_p^\alpha(\mathbb{R})$

(4) Selon la preuve du Théorème 3.17 , et puisque $0\leq\alpha<1$, alors on a

$$\|f\|_{\mathcal{U}_p(\mathbb{R})} \leq 2^{1/p}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p(\mathbb{R})} \leq 2^{1/p}\,\|f\|_{\mathcal{V}_p^\alpha(\mathbb{R})} \ ,$$

d'où $\quad \mathcal{V}_p^\alpha(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{V}_p(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{U}_p(\mathbb{R})$,

et l'on déduit que $\quad BV_p^\alpha(\mathbb{R}) \hookrightarrow BV_p(\mathbb{R}) \hookrightarrow U_p(\mathbb{R})$,

ce qui donne $\quad BV_p^\alpha \hookrightarrow U_p$

(5) L'inclusion continue $U_p \hookrightarrow \dot{\tilde{B}}_p^{1/p,\infty}$, a été prouvée dans la preuve du Théorème 3.17 .

4.4 Exemples

Les suivants exemples sont pris des travaux de [2], [3], [11], [16] [5], [7], [10], [1], [4]. On dénote par $\mathcal{E}_p$ la fermeture de $BV_p(\mathbb{R}) \cap C^{\infty}(\mathbb{R})$ dans $BV_p(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{E}_p^1$ la fermeture de $BV_p^1(\mathbb{R}) \cap C^{\infty}(\mathbb{R})$ dans $BV_p^1(\mathbb{R})$

4.4.1 Exemple 1 : [11], [5], [16]

- [11] Soient $1 < p < \infty,\ 1 < s < 1 + 1/p,\ 1 \leq q \leq \infty$, et soit F une fonction de la variable réelle, Lipchitzienne, $F(0) = 0,\ F \in \dot{B}_p^{1+(1/p),\infty}(\mathbb{R})$, alors on a
- $F\left(B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)\right) \subset B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$
- $\exists C\ (n, s, p, q) > 0 : \ \|F(f)\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \max\left(\|F'\|_{\infty}, \|F\|_{\dot{B}_p^{1+(1/p),\infty}}\right) . \|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$
- [11] Soit l'opérateur non linéaire $F_\mu : f \longmapsto |f|^{\mu},\ \mu > 0,$
  - Si $\mu > 1, 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty,\ 0 < s < \mu + \dfrac{1}{p},$ alors il existe une constante $C(s, p, q, n, \mu) > 0$, telle que
    - $\|F_\mu(f)\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{\infty}^{\mu-1}, \forall f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$
    - et $\||g|^{\mu}\|_{B_p^{\mu+(1/p),\infty}(\mathbb{R})} \leq C \|g\|^{\mu}_{B_p^{\mu+(1/p),\infty}(\mathbb{R})}, \forall g \in B_p^{\mu+(1/p),\infty}(\mathbb{R})$
  - Si $\mu > 1,\ 1 < p < \infty,\ m < n/p$, alors on a une équivalence entre
    - $\left\{|f|^{\mu} : f \in W^{m,t}\right\} \subset W^{m,p}$, et
    - $m < \mu + \dfrac{1}{p},\ \dfrac{n\mu}{m(\mu - 1) + \frac{n}{p}} \leq t \leq p\mu,$

  le résultat reste vrai si on remplace $F_\mu : f \longmapsto |f|^{\mu}$, par

$$\tilde{F}_\mu : f \longmapsto f\,|f|^{\mu-1}, \text{ ou bien par } \bar{F}_\mu : f \longmapsto (\max(f, 0))^{\mu}$$

- Si $m \in \mathbb{N},\ 1 < p < \infty,\ m < n/p,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$, alors on a une équivalence entre

- $\left\{ f^k : f \in W^{m,t} \right\} \subset W^{m,p}$, et
- $\dfrac{nk}{m\,(k-1)+\frac{n}{p}} \leq t \leq pk\,.$

L'opérateur $f \longmapsto f\,|f|^{\mu}$ joue un rôle essentiel dans l'étude du problème de cauchy à valeurs initiales pour l'equation aux dérivées partielles non linéaires de Schrödinger.

4.4.2 Exemple 2 : [2] , [3]

- Soit $p \geq 1$, et considérons l'opérateur de la valeur absolue $T_{F_1} = T_{|\cdot|}$ tel que

$$T_{F_1}\,(g) = F_1\,(g) = |g|\,,$$

alors $|\cdot|$ appartient à $BV_p^1\,(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{E}_{p,\ell oc}^1$, et il vérifie

  - $T_{|\cdot|}$ opère sur $BV_p^1\,(I)$, tel que

$$\|\,|g|\,\|_{BV_p^1(I)} \leq c\,\|g\|_{BV_p^1(I)} \quad , (c>0)$$

  - $T_{|\cdot|}$ envoie $B_p^{1+1/p,1}\,(\mathbb{R}^n)$ à $B_p^{1+1/p,\infty}\,(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|\,|g|\,\|_{B_p^{1+1/p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|g\|_{B_p^{1+1/p,1}(\mathbb{R}^n)} \quad , (c>0)$$

  - L'opérateur $T_{|\cdot|}$ n'est pas continu de $B_p^{1+1/p,\infty}\,(\mathbb{R}^n)$ à $B_p^{1+1/p,\infty}\,(\mathbb{R}^n)$).
  - Si $0 < s < 1 + (1/p)$, $1 \leq q \leq \infty$, il opère sur $B_p^{s,q}\,(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$\|\,|g|\,\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}\,,\ (c>0)$$

  - Si $0 < s < \infty$, $1 \leq q < \infty$, il opère continûment sur $B_p^{s,q}\,(\mathbb{R}^n)$

- Soit la famille des fonctions

$$u_\alpha(x) = |x+\alpha| - |\alpha|\ ,\ x, \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

alors

$$\|u_\alpha\,(g)\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} = \|\,|g+\alpha| - |\alpha|\,\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} \leq c_p\,\|g\|_{BV_p^1(\mathbb{R})} \quad ,$$

4.4.3 Exemple 3 : [3]

- Soit $p \geq 1$, et l'opérateur $T_\psi : g \longmapsto \psi \circ g$, telles que

  – $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $supp\,\rho \subseteq [-1/2, 1/2]$, $\rho(t) = 1$ dans $[-1/e, 1/e]$,

  – $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, et $\psi(t) = |t| \dfrac{\rho(t)}{\log|t|}$, si $t \neq 0$, $\psi(0) = 0$,

  alors les assertions suivantes sont vérifiées

  a) La fonction ψ appar tient à $\mathcal{E}_p^1$

  b) T_ψ opère sur $BV_p^1(I)$ tel que $\|\psi \circ g\|_{BV_p^1(I)} \leq c\,\|g\|_{BV_p^1(I)}$, $(c > 0)$

  c) T_ψ envoie $B_p^{1+1/p,1}(\mathbb{R}^n)$ à $B_p^{1+1/p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|\psi \circ g\|_{B_p^{1+1/p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|g\|_{B_p^{1+1/p,1}(\mathbb{R}^n)}, \ (c > 0)$$

  d) T_ψ est continu de $B_p^{1+1/p,1}(\mathbb{R}^n)$ à $B_p^{1+1/p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

  e) Si $0 < s < 1 + (1/p)$, $1 \leq q \leq \infty$, alors T_ψ opère sur $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, telle que

$$\|\psi \circ g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\ \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \quad , \ (c > 0).$$

  f) Si $q \in [1, \infty[$, alors l'opé rateur en (e) est continu. Les propriétés ci-dessus ne changent pas si $\log|t|$ est remplac é par des logarithmes r éitérés comme $\log|\log|t||$ ou $\log|\log|\log|t|||$

4.4.4 Exemple 4 : [3]

- Puisque les espaces $BV_p^1(\mathbb{R})$ décroissent par rapport à p alors on cherche les fonctions qui appartiennent à $BV_{p_0}^1(\mathbb{R})$ telles que $p > p_0$, et en considérant donc la famille des fonctions $\psi_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par

$$\psi_{\alpha,\beta}(t) = |t|^{\alpha+1} \rho(t) \sin(|t|^{-\beta}) \text{ si } t \neq 0, \text{ et } \psi_{\alpha,\beta}(0) = 0, 0 < \beta < \alpha,$$

  Alors on obtient une équivalence entre les suivantes assertions (a), (b), (c) telles que

a) $\frac{1}{p} < \frac{\alpha}{\beta} - 1$

b) La fonction $\psi_{\alpha,\beta}$ appartient à $BV_p^1(\mathbb{R})$

c) L'opérateur $T_{\psi_{\alpha,\beta}}$ envoie $BV_p^1(\mathbb{R})$ à $BV_p^1(\mathbb{R})$,

et si $\frac{1}{p} < \frac{\alpha}{\beta} - 1$, alors l'opérateur $T_{\psi_{\alpha,\beta}}$, satisfait les propriétés (c)-(f) du trosiéme exemple si on remplace ψ par $\psi_{\alpha,\beta}$

4.4.5 Exemple 5 : [7] , [10]

- Pour le problème de composition des opérateurs on a

i) Un théorème classique dû à B.E.J.Dahlberg (cf [7]) pour l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ enonçant que

Si $1 + \frac{1}{p} < m < \frac{n}{p}$, $p \neq 0$, ou bien $1 < p < \infty$, $2 \leq m < \frac{n}{p}$, alors

$$T_G(W^{m,p}(\mathbb{R}^n)) = \{G(f) \quad ; \quad f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)\} \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^n),$$

implique $\quad G(t) = c.t, \ c \in \mathbb{R}$

ii) Un résultat classique dû à S . Igari ([10]) pour l'espace de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, qui énonce que ,

Si $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < s < 1/p$ alors

$$T_G\left(B_p^{s,q}\right) \subset B_p^{s,q}, \text{ si et seulement si } G \text{ est Lipchitzienne et } G(0) = 0$$

4.4.6 Exemple 6 : [2] , [1]

- Les opérateurs liés aux fonctions continues de Lipchitz satisfont la propriété d'inégalité des normes sur $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mais non pas sur $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, cette restriction est dûe au résultat suivant

Proposition 4.19 *[6]*

Soient $1 < p \leq +\infty,\ s > 1 + (1/p)$ *et* N *une norme sur* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Si E *est un espace normé tel que* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset E \subset W^{1,1}_{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$

$$\underset{h\neq 0}{sup}\, |h|^{1-s} \left(\left| \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i}(x+h) \right| - \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \leq A \|g\|_E \ ,\ (A > 0)$$

pour tout $g \in E$, *et* $i = 1, ..., n,$ *et s'il existe une fonction différentiable continue* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *, et une constante* $B > 0$ *, telle que* T_f *injecte* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *dans* E *, et telle que l'inégalité suivante soit vérifiée, alors* f *doit être une fonction affine.*

$$\|f \circ g\|_E \leq B(N(g) + 1) \qquad pour\ \ tout\ \ g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,,$$

- Les opérateurs de superposition liés à des fonctions affines satisfont trivialement les propriétés des d'inégalités des normes par rapport à la composition des fonctions pour tout espace fonctionnel normé.

- Pour l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N},\ 1 \leq p \leq \infty$, les opérateurs non triviaux de superposition qui satisfont la propriété d'inégalité des normes existent si et seulement si

$$(m = 0)\ \ ou\ \ (m = 1)\ \ ou\ \ (m = 2\ \ et\ \ p = 1),$$

- Pour tout $\mu > 1,\ m < \mu + \frac{1}{p},\ f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\|F_\mu(f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\, \|f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_\infty^{\mu-1}\ ,\ (c > 0)\,,$$

La propriété d'inégalité des normes pour l'opérateur $F_\mu = |\cdot|^\mu$, n'est pas entièrement vérifiée sur $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ mais partiellement sur $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

- [1] - Soient $p \geq 1,\ m > \max(n/p, 1)\,,\ m \in \mathbb{N},$ alors

  l'opérateur de composition T_f opère sur $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, si et seulement si $f \in W^{m,p}_{\ell oc}(\mathbb{R}^n)$

4.4.7 Exemple 7 : [4]

- On obtient une solution pour le **P.S.O**, avec une propriété supplémentaire d'inégalité des normes dans les espaces de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ par le Théorème 4.20, en introduisant l'espace des fonctions à variation bornée $BV(\mathbb{R}^n)$ muni de la semi-norme suivante :

$$\|f\|_{BV(\mathbb{R}^n)} \sim \nu(f) = \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j f\|_M \sim \sup_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

où $\|g\|_M$ désigne la variation totale de la mesure g, et l'espace $BH(\mathbb{R})$ des distributions dont la dérivée appartient à $BV(\mathbb{R})$, muni de la semi-norme

$$\|f\|_{BH} = \nu(f') + \|f'\|_\infty,$$

Théorème 4.20 *[4]*

Soient $1 \le p \le \infty$, $0 < s < 1 + (1/p)$, *alors toute fonction* $f \in BH(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, *opère sur* $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, *de plus il existe* $c(s,p,n) > 0$, *telle que*

$$\|f \circ g\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \le c(s,p,n)\,\|f\|_{BH}\,\|g\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \quad , \quad \text{pour tout } g \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$$

4.4.8 Exemple 8 : [1]

- Tout opérateur de composition tel que $T_f(g) = f \circ g$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, défini sur $B_\infty^{s,\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$, l'espace de Hölder-Zygmund vérifie

$$T_f(\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$$

si et seulement si on a les conditions suivantes

i) f est continue et localement Lipchitzienne, pour $0 < s < 1$

ii) f appartient localement à $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, pour $s > 1$

iii) f est continue et localement Lipchitzienne et satisfaisant la condition

$$f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) = O\left(\frac{t}{|\log t|}\right), \text{ avec } t \longrightarrow 0^+,$$

uniformément en chaque sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$, pour $s = 1$.

Références

[1] G. Bourdaud and M. Lanza de Cristoforis, *Functional calculus in Hölder-Zygmund spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 4109–4129.

[2] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis, and W. Sickel, *Superposition operators and functions of bounded p-variation*, Rev. Mat. Iberoamer (Fév., 2004), (to appear). Prépublication 362. Institut de Mathématiques de Jussieu. Unité Mixte de Recherche 7586. Université Paris VI et Paris VII / CNRS. www.institut.math.jussieu.fr.

[3] G. Bourdaud, Massimo Lanza de Cristoforis, and W. Sickel, *Superposition operators and functions of bounded p-variation II*, Nonlinear Analysis Series A **Volume. 62** (2005), 483–518.

[4] G. Bourdaud and Y. Meyer, *Le calcul fonctionnel sous-linéaire dans les espaces de Besov homogènes*, (1^{er} novembre 2004).

[5] G. Bourdaud, M. Moussai, and W. Sickel, *Towards Sharp Superposition Theorems in Besov and Lizorkin-Triebel Spaces* , (March 29, 2006).

[6] H. Brezis and P. Mironescu, *Conposition in fractional Sobolev spaces*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **Number 2. Volume 7** (April 2001), 241–246, Website: http://math.smsu.edu/journal.

[7] B. E. J. Dahlberg, *A note on Sobolev spaces*, Proc. Symp in Pure Math **N. 35 Vol. 1** (1979), 183–185, MR 81h:46030.

[8] A. Giroux, *Notes de cours. Mesure et integration*, D épartement de Mathématiques et Statistique. Université de Montr éal, Mai 2004.

[9] J. Heinonen, *Lectures on Lipchitz Analysis*, Lectures at the 14th Jyväskylä Summer School in August 2004. Supported by NSF grant DMS 0353549 and DMS 0244421, April 28, 2005.

[10] S. Igari, *Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace* $\widehat{A^2}$, Ann. Inst. Fourier. Grenoble **15-21** (1965), 525–533.

[11] D. Kateb, *On the boundedness of the mapping* $\longmapsto |f|^{\mu}, \mu > 1$, *on Besov Spaces*, Math.Nachr **248-249** (2003), 110–128.

[12] A. Kufner, *Some difference inequalities with weights and interpolation*, L. E. Persson **Volume 1. Number 3** (1998), 437–444, Mathematical inequalities Applications.

[13] B. Maurey and J. P. Tacchi, *Ludwing Scheffer et les extensions du théorème des accroissements finis*, Version du 27/10/01.

[14] J. Peetre, *New Thoughts on Besov Spaces*, Mathematics Series. No.1, Mathematics Department. Duke University. Durham. N.C, 1976. MR 57:1108 .

[15] C. Portenier, *Cours d'analyse fonctionnelle*, Version du 29 novembre 2004.

[16] W. Sickel, *Necessary conditions on composition operators acting on Sobolev spaces of fractional order*, Forum Math. 9 (1997), 267–302.

[17] H. Triebel, *Theory of Function Spaces III*, Birkhäuser Verlag, P. O. Box : 133. CH-4010 Basel. Switzerland. e-ISBN : 3-7643-7643-7582-5, 2006.

[18] D. C. Ullrich, *Besov spaces. A primer*, Departement of Mathematics Oklahoma State University. Stilwater OK 74078.