

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF MSILA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



جامعة محمد بوضياف - المسيلة  
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Numéro de série : .....

Numéro d'inscription : .....

## Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de

**DOCTORAT 3<sup>ème</sup> cycle :**

**Filière:** Physique

**Option:** Physique énergétique et énergie renouvelable

## THEME

**Etude numérique des transferts de chaleur et de masse au sein d'un espace annulaire elliptique d'axe horizontal rempli de nano-fluide**

**Présenté par :**

**AMROUNE Amina**

**Soutenue le : 05/11 /2025**

Devant le jury composé de :

<b><u>Nom et Prénom</u></b>	<b><u>Grade</u></b>	<b><u>Etablissement</u></b>	<b><u>Qualité</u></b>
<b>M. SALMI</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. de M'sila</b>	<b>Président</b>
<b>A.BOURAS</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ. de M'sila</b>	<b>Encadreur</b>
<b>A.NAHOUI</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ.de M'sila</b>	<b>Co-Encadreur</b>
<b>M. DJEZZAR</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ. de Constantine 1</b>	<b>Examinateur</b>
<b>D. TALOUB</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ. de M'sila</b>	<b>Examinateur</b>
<b>R. BENDERRADJI</b>	<b>MCA</b>	<b>Univ. de M'sila</b>	<b>Examinateur</b>

## **Dédicace**

*Je dédie ce travail à mes parents, en témoignage de ma gratitude pour leur amour, leur sagesse et leur soutien constant et inestimable.*

*À mon époux, pour sa patience, son encouragement et sa présence à mes côtés.*

*À mes frères et sœurs, ainsi qu'à toute ma famille, pour leur affection et leurs encouragements constants.*

*À mes amis fidèles, pour leur appui moral constant durant l'ensemble de ce parcours.*

*Avec toute ma gratitude et mon profond respect.*

# ***Remerciements***

Je souhaite adresser ma profonde reconnaissance à Monsieur **BOURAS Abdelkrim**, Professeur à l'Université Mohamed Boudiaf de M'sila, pour son accompagnement durant l'ensemble de ce travail, ainsi que pour ses conseils avisés et ses remarques constructives qui ont grandement contribué à son avancement.

Je remercie chaleureusement Monsieur **Salmi Mouhamed**, Professeur à l'Université Mohamed Boudiaf de M'sila, pour avoir fait l'honneur de présider mon jury de soutenance, et ce malgré ses multiples engagements professionnels.

Je tiens également à remercier chaleureusement Monsieur **Djezzar Mahfoud**, Professeur à l'Université des Frères Mentouri Constantine 1, Monsieur **Taloub Djedid**, Professeur à l'Université Mohamed Boudiaf de M'sila, ainsi que Monsieur **BENDERRADJI Razik**, Maître de Conférences à la même université, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer cette thèse et de siéger au sein de mon jury de soutenance.

Enfin, je tiens à remercier toutes celles et ceux qui, de manière directe ou indirecte, ont apporté leur soutien ou leur contribution à l'accomplissement de ce travail.

# Nomenclature

$B_2, B_1$  Grands axes des cylindres elliptiques externe et interne, [m]

$A_2, A_1$  Petits axes des cylindres elliptiques externe et interne, [m]

$C$  Concentration, [kg/m<sup>3</sup>]

$C_p$  Chaleur spécifique à pression constante, [J/kg.K]

$D$  Diffusivité massique, [m<sup>2</sup>/s]

$D_h$  Longueur caractéristique, [m]

$e_1$  L'excentricité de la section elliptique intérieure

$e_2$  L'excentricité de la section elliptique extérieure

$\vec{g}$  Accélération gravitationnelle, [m/s<sup>2</sup>]

$h$  Paramètre métrique, [m]

$H$  Paramètre métrique adimensionnel, [-]

$Nu$  Nombre de Nusselt, [-]

$Sh$  Nombre de Sherwood, [-]

$P$  Pression interne du fluide, [N/m<sup>2</sup>]

$Pr$  Nombre de Prandtl, [-]

$Ra$  Nombre de Rayleigh, [-]

$N$  Proportion des forces de flotabilité, [-]

$T$  Température du fluide, [K]

$\Delta T$  Différence de température, [K]

$\Delta C$  Différence de concentration, [kg/m<sup>3</sup>]

$t$  Temps, [s]

$U, V$  Les composantes de la vitesse dans les directions x et y, [m/s]

$V_\eta, V_\theta$  Les composantes de la vitesse dans les directions  $\eta$  et  $\theta$ , [m/s]

$x, y$  Système de référence cartésien, [m]

## Lettres grecques

$\alpha$  Diffusivité thermique, [m<sup>2</sup>/s]

$\gamma$  Angle d'inclinaison [°]

$\beta_T$	Coefficient d'expansion thermique, [K <sup>-1</sup> ]
$\beta_C$	Coefficient d'expansion solutale, [m <sup>3</sup> /kg]
$\Gamma_\Phi$	Coefficient de diffusion
$\eta, \theta, z$	Système de référence elliptique, [m]
$\lambda$	Coefficient de Conductivité thermique, [W/m.K]
$\nu$	Viscosité cinématique, [m <sup>2</sup> /s]
$\rho$	Masse volumique du fluide, [kg/m <sup>3</sup> ]
$\Psi$	Fonction de courant, [m <sup>2</sup> /s]
$\omega$	Vorticité, [s <sup>-1</sup> ]
$\tau_{ij}$	Tenseur des contraintes visqueuses
$\phi$	Fraction volumique des nanoparticules

## Indices

2	Extérieur
1	Intérieur
$\theta$	Selon la coordonnée $\theta$
$\eta$	Selon la coordonnée $\eta$
f	fluide
s	Nanoparticule solide
nf	Nanofluide

## Exposant

+	Paramètres adimensionnels
---	---------------------------

# ***Liste des tableaux***

<b>Tableau 1.1 :</b> les nombres adimensionnels. ....	<b>9</b>
<b>Tableau 3.1 :</b> Termes sources et coefficients diffusifs associés à la variable $\varphi$ .....	<b>35</b>
<b>Tableau 4.1:</b> Les valeurs maximales de la fonction de courant et aussi les valeurs moyennes des nombres de Sherwood et de Nusselt sur la paroi interne, obtenues pour différents maillages .....	<b>52</b>
<b>Tableau 4.2 :</b> Comparaison des nombres de Nusselt moyens aux ellipses externe et interne 52 obtenus dans ce travail avec les résultats d'autres auteurs. ....	<b>52</b>

# Liste des figures

<b>Figure 1.1</b> Transfert de chaleur d'une surface chaude à l'air par convection. ....	4
<b>Figure 2.1</b> Coupe transversale du système étudié. ....	19
<b>Figure 2.2</b> Diagramme des coordonnées elliptiques.....	24
<b>Figure 3.1</b> Schéma du domaine physique et de la grille de calcul. ....	30
<b>Figure 3.2</b> Schéma représentant le volume de contrôle .....	31
<b>Figure 3.3</b> Schéma représentatif de la disposition des points P, S, W et E considérés dans le maillage.....	38
<b>Figure 4.1</b> Les lignes isothermes et iso-courants pour diverses valeurs du Rayleigh à $\phi = 0\%$ .....	54
<b>Figure 4.2</b> Les lignes isothermes et isocourants pour diverses valeurs du Rayleigh à $\phi = 4\%$ .....	55
<b>Figure 4.3</b> Les lignes isothermes et isocourants pour diverses valeurs du Rayleigh à $\phi = 8\%$ .....	56
<b>Figure 4.4</b> La distribution du nombre moyen de Nusselt en fonction de la concentration des nanoparticules et du nombre de Rayleigh.....	57
<b>Figure 4.5</b> Les valeurs locales du nombre de Nusselt le long des parois intérieures du cylindre pour diverses concentration des nanoparticules en (a) $Ra=10^3$ et (b) $Ra=10^5$ .....	58
<b>Figure 4.6</b> Les valeurs locales du nombre de Nusselt le long des parois extérieures du cylindre pour diverses concentration des nanoparticules en (a) $Ra=10^3$ et (b) $Ra=10^5$ .....	58
<b>Figure 4.7</b> Isothermes et isocourants pour diverses valeurs du concentration des nanoparticules à $Ra=10^4$ et $\gamma = 30^\circ$ .....	60
<b>Figure 4.8</b> Isothermes et isocourants pour diverses valeurs du concentration des nanoparticules à $Ra=10^4$ et $\gamma = 45^\circ$ .....	61
<b>Figure 4.9</b> Isothermes et isocourants pour diverses valeurs du concentration des nanoparticules à $Ra=10^4$ et $\gamma = 60^\circ$ .....	62
<b>Figure 4.10</b> Impact du nombre de Rayleigh sur le nombre moyen de Nusselt à plusieurs angles où $\phi= (0.0, 0.04 \text{ et } 0.08)$ .....	63
<b>Figure 4.11</b> La distribution du nombre moyen de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour diverses concentrations de nanoparticules quand $\gamma = 30^\circ, 45^\circ, \text{ and } 60^\circ$ . .....	64
<b>Figure 4.12</b> Impact de l'angle d'inclinaison sur la distribution locale du nombre de Nusselt lorsque $\phi=(0,0,0,04 \text{ et } 0,08)$ à $Ra=10^4$ .....	65

<b>Figure 4.13</b> Impact de l'angle d'inclinaison sur la distribution locale du nombre de Nusselt lorsque $\phi = (0.0, 0.04 \text{ et } 0.08)$ à $\text{Ra}=10^4$ .....	<b>65</b>
<b>Figure 4.14</b> Les lignes isothermes, iso-courants et iso-concentrations pour $\text{Le}=2$ , $\text{Ra}=10^3$ , $N=1$ , $\gamma=0^\circ$ , $\text{Pr}=6.2$ , $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$ .....	<b>67</b>
<b>Figure 4.15</b> Les lignes isothermes, iso-courants et iso-concentrations pour $\text{Le}=2$ , $\text{Ra}=10^4$ , $N=1$ , $\gamma=0^\circ$ , $\text{Pr}=6.2$ , $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$ . .....	<b>67</b>
<b>Figure 4.16</b> Les lignes isothermes, iso-courants et iso-concentrations pour $\text{Le}=2$ , $\text{Ra}=10^5$ , $N=1$ , $\gamma=0^\circ$ , $\text{Pr}=6.2$ , $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$ . .....	<b>67</b>
<b>Figure 4.17</b> Les lignes isothermes, iso-courants et iso-concentrations pour $\text{Le}=2$ , $\text{Ra}=5 \times 10^5$ , $N=1$ , $\gamma=0^\circ$ , $\text{Pr}=6.2$ , $e_2=0.6$ et $e_1=0.8$ . .....	<b>68</b>
<b>Figure 4.18</b> Variation du nombre de Nusselt local pour différents valeurs de Rayleigh à $\phi=0$ .....	<b>68</b>
<b>Figure 4.19</b> Variation du nombre de Sherwood local pour différents valeurs de Rayleigh à $\phi=0$ .....	<b>69</b>
<b>Figure 4.20</b> Les lignes d'isothermes, d'iso-courants et d'iso-concentrations pour $\text{Le}=2$ , $\text{Ra}=10^3$ , $\gamma=0^\circ$ , $\text{Pr}=6.2$ , $e_1=0.8$ et $e_2=0.6$ .....	<b>73</b>
<b>Figure 4.21</b> Les lignes d'isothermes, d'iso-courants et d'iso-concentrations pour $\text{Le}=2$ , $\text{Ra}=10^4$ , $\gamma=0^\circ$ , $\text{Pr}=6.2$ , $e_1=0.8$ et $e_2=0.6$ .....	<b>75</b>
<b>Figure 4.22</b> Les lignes d'isothermes, d'iso-courants et d'iso-concentrations pour $\text{Le}=2$ , $\text{Ra}=10^5$ , $\gamma=0^\circ$ , $\text{Pr}=6.2$ , $e_1=0.8$ et $e_2=0.6$ .....	<b>78</b>
<b>Figure 4.23</b> Les lignes d'isothermes, d'iso-courants et d'iso-concentrations pour $\text{Le}=2$ , $\text{Ra}=5 \times 10^5$ , $\gamma=0^\circ$ , $\text{Pr}=6.2$ , $e_1=0.8$ et $e_2=0.6$ . .....	<b>80</b>
<b>Figure 4.24</b> La distribution du nombre moyen de Nusselt en fonction de Rayleigh et de la concentration en nanoparticules .....	<b>80</b>
<b>Figure 4.25</b> La distribution du nombre moyen de Sherwood en fonction de Rayleigh et de la concentration en nanoparticules .....	<b>81</b>
<b>Figure 4.26</b> Les lignes d'isothermes, d'iso-courants et d'iso-concentrations pour $\text{Le}=2$ $\text{Ra}=10^3$ , $\gamma=0^\circ$ , $N=1$ et $e_2=0.6$ . .....	<b>83</b>
<b>Figure 4.27</b> Les lignes d'isothermes, d'iso-courants et d'iso-concentrations pour $\text{Le}=2$ $\text{Ra}=10^5$ , $\gamma=0^\circ$ , $N=1$ et $e_2=0.6$ . .....	<b>84</b>

# Table des matières

<b>Dédicace .....</b>	<b>I</b>
<b>Remerciements .....</b>	<b>II</b>
<b>Nomenclature.....</b>	<b>III</b>
<b>Liste des tableaux .....</b>	<b>V</b>
<b>Liste des figures .....</b>	<b>VI</b>
<b>Table des matières .....</b>	<b>VIII</b>
<b>Introduction générale .....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 .....</b>	<b>3</b>
<b>Généralité et recherche bibliographique .....</b>	<b>3</b>
1.1 NOTIONS SUR LA CONVECTION .....	4
1.1.1. <i>Définition .....</i>	4
1.1.2. <i>Type de convection .....</i>	4
1.1.3. <i>Convection naturelle dans des enceintes annulaires.....</i>	5
1.1.3.1. <i>Enceinte annulaire incliné.....</i>	5
1.1.3.2 <i>Enceinte annulaire vertical .....</i>	6
1.1.4. <i>Convection naturelle double diffusive.....</i>	7
1.1.5. <i>Les nombres sans dimension .....</i>	9
1.2. NANO-FLUIDE.....	10
1.2.1. <i>Techniques de fabrication .....</i>	10
1.2.1.1 Techniques physiques.....	11
1.2.1.2 Techniques chimiques .....	11
1.2.2. <i>Paramètres physiques et thermiques des nano-fluides.....</i>	12
<b>Chapitre 2 .....</b>	<b>18</b>
<b>Modélisation mathématique.....</b>	<b>18</b>
2.1 INTRODUCTION .....	19
2.2 DESCRIPTION DU PROBLEME .....	19
2.3 HYPOTHESES DE SIMPLIFICATION.....	19
2.4 FORMULATION MATHÉMATIQUE .....	20
2.4.1. <i>Forme vectorielle.....</i>	20
2.4.2. <i>Forme indicielle.....</i>	21
2.4.3. <i>Expression des équations dans le système de coordonnées cartésiennes .....</i>	22
2.4.3.1 Suppression du terme de pression dans l'expression de l'équation de la quantité de mouvement.....	22
2.4.4. <i>Expression des équations dans le système de coordonnées elliptiques.....</i>	23
2.4.5. <i>Les conditions aux limites .....</i>	25
2.4.6. <i>Transformation des équations gouvernantes en forme adimensionnée.....</i>	26
2.4.7. <i>Expression sans dimension des conditions aux limites.....</i>	27
2.4.8. <i>Paramètres caractéristiques du transfert thermique et massique .....</i>	27
2.4.8.1 Les nombres de Sherwood et de Nusselt locaux .....	27

2.4.8.2 Les nombres de Sherwood et de Nusselt moyens .....	28
2.5 CONCLUSION: .....	28
<b>Chapitre 3 .....</b>	<b>28</b>
<b>Formulation numérique .....</b>	<b>28</b>
3.1. INTRODUCTION .....	29
3.2. LA METHODE DES VOLUMES FINIS : .....	29
3.2.1. <i>Volume de contrôle élémentaire</i> .....	30
3.2.2. <i>Formulation discrète de l'équation de conservation générale pour une variable <math>\phi</math> dans un volume de contrôle</i> .....	31
3.3. FORMULATION DISCRETE DE L'EQUATION DE L'ENERGIE .....	36
3.3.1. <i>Formulation discrète des conditions aux limites</i> .....	40
3.4. FORMULATION DISCRETE DE L'EQUATION D'ESPECES: .....	40
3.4.1. <i>Formulation discrète des Conditions aux limites</i> .....	41
3.5. FORMULATION DISCRETE DE L'EQUATION DE MOUVEMENT.....	42
3.5.1. <i>Formulation discrète des Conditions aux limites</i> .....	44
3.6. FORMULATION DISCRETE DE L'EQUATION ASSOCIEE A LA FONCTION DE COURANT .....	45
3.6.1. <i>Formulation discrète des Conditions aux limites</i> .....	46
3.7. FORMULATION DISCRETE DES COMPOSANTES DIRECTIONNELLES DE LA VITESSE .....	46
3.8. METHODE DE SOUS RELAXATION .....	47
3.9. ALGORITHME DE CALCUL .....	47
<b>Chapitre 4 .....</b>	<b>50</b>
<b>Résultats et discussions.....</b>	<b>50</b>
4.1 INTRODUCTION .....	51
4.2 ETUDE DE MAILLAGE .....	51
4.3 VALIDATION NUMERIQUE.....	52
4.4 PREMIERE PARTIE (CONVECTION NATURELLE).....	53
4.4.1 <i>L'impact du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique de nanoparticules</i> .....	53
4.4.1.1 Les isothermes et les iso-courants .....	53
4.4.1.2 Le nombre moyen de Nusselt.....	56
4.4.1.3 Le nombre de Nusselt local.....	57
4.4.2 <i>L'impact de l'inclinaison</i> .....	59
4.4.2.1 Les isothermes et les iso-courants .....	59
4.4.2.2 Le nombre moyen de Nusselt.....	62
4.4.2.3 Nombre de Nusselt local.....	64
4.5 DEUXIEME PARTIE (TRANSFERT DE MASSE ET DE CHALEUR).....	65
4.5.1 <i>L'impact du nombre de Rayleigh</i> .....	66
4.5.1.1 les isothermes et les iso-courants et les iso-concentrations .....	66
4.5.1.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux .....	68
4.5.2 <i>Les effets de la fraction volumique</i> .....	70
4.5.2.1 les isothermes et les iso-courants et les iso-concentrations.....	70
4.5.2.2 Les nombres moyens de Sherwood et de Nusselt .....	80
4.5.3 <i>L'impact de l'excentricité (<math>e_1</math>)</i> : .....	81
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>85</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>89</b>

## ***Introduction Générale***

# Introduction Générale

---

La convection thermosolutale a fait l'objet d'une recherche intensive en raison de son influence notable sur divers procédés techniques et géophysiques. Par exemple, la pollution des lacs et des récifs, l'intrusion de solutés dans les sédiments en milieu côtier, les rejets nucléaires, le mouvement des éléments polluants au sein des eaux souterraines, les processus chimiques et le déplacement d'espèces moléculaires à travers les membranes vivantes sont quelques exemples. Dans ce processus, la flottabilité induite par les variations de température et de concentration s'aident ou s'opposent, selon le type d'alliage et le procédé de chauffage.

Dans notre recherche, une analyse numérique a été menée sur le phénomène de convection double diffusive et purement thermique au sein d'un espace annulaire formée par deux sections elliptiques cylindriques avec des axes horizontaux. Cet espace contient un nanofluide. Dans cette étude, nous avons élaboré un programme de calcul en langage Fortran développé selon le principe des volumes finis pour analyser l'impact de divers paramètres sur les distributions concentriques et thermiques, la structure de l'écoulement, ainsi que sur les taux d'échange massique et thermique illustrés respectivement par les nombres moyens et locaux de Sherwood et de Nusselt.

Ce travail s'articule autour de quatre chapitres principaux. Le chapitre initial présente des notions générales sur la convection, suivi d'une analyse approfondie des recherches précédentes qui ont abordé la convection naturelle à partir des nanofluides dans des espaces annulaires, et ont abouti à des études traitant de la convection naturelle thermosolutale dans une variété de géométries pour les fluides et les milieux poreux saturés.

Le deuxième chapitre traite de la modélisation physique du problème. Il y est présenté les hypothèses de simplification adoptées, les équations gouvernantes exprimées en coordonnées cartésiennes accompagnées de leurs conditions aux limites, ainsi que leur reformulation en coordonnées elliptiques suivie de leur mise sous forme adimensionnelle.

Le troisième chapitre est dédié à la définition de l'approche des volumes finis utilisée pour discrétiser les équations des espèces et de la chaleur, de nature parabolique. L'équation du mouvement, de type elliptique, a quant à elle été discrétisée à l'aide d'un schéma à différences centrées. Les quatre équations obtenues ont ensuite été résolu à l'aide d'une méthode numérique intégrant une procédure de sous-relaxation successive.

Le quatrième chapitre s'ouvre sur une étude de sensibilité au maillage, suivi d'une phase de validation du code numérique développé par comparaison avec des résultats disponibles dans la littérature. Ce chapitre est ensuite consacré à la présentation et à l'analyse des résultats obtenus, structurées en deux volets : le premier traite de la convection naturelle purement thermique, tandis que le second porte sur la convection naturelle à double diffusion. L'effet de différents paramètres, tels que l'angle d'inclinaison, la fraction volumique des nanoparticules, le nombre de Rayleigh ainsi que l'excentricité, sur les transferts de chaleur et de masse, y est également examinée.

Nous finalisons ce travail par une conclusion générale qui synthétise les principaux résultats obtenus.

## ***Chapitre 1***

### ***Généralité et recherche bibliographique***

## 1.1 Notions sur la convection

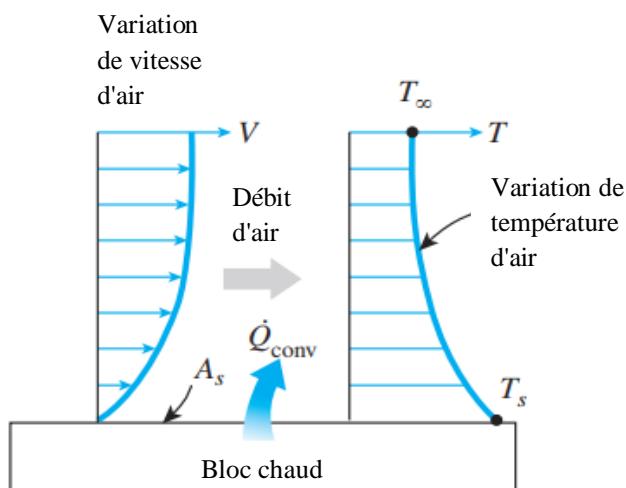
### 1.1.1. Définition

La convection constitue un mécanisme de transfert d'énergie entre un fluide et une surface solide en mouvement (gaz ou liquide), résultant de l'action conjointe de la conduction thermique et du déplacement du fluide. L'augmentation de la vitesse des particules fluide est influé sur la convection thermique par contre l'absence de mouvement global du fluide diminué la transmission de chaleur par convection. Toutefois, lorsque le fluide est animé d'un mouvement global, le transfert thermique est renforcé, bien que l'estimation précise des taux de transfert s'en trouve complexifiée.

Prenons l'exemple du refroidissement d'un bloc chaud soumis à un écoulement d'air frais sur sa face supérieure (voir Fig. 1.1). Dans un premier temps, la chaleur se propage par conduction vers la couche d'air située au contact direct du bloc. Par la suite, ce flux thermique est évacué par convection, mécanisme qui combine la conduction interne dans l'air, laquelle est liée à l'agitation thermique des molécules, et le transport global du fluide, qui entraîne l'air réchauffé à s'éloigner de la surface tout en le remplaçant par de l'air plus frais.

### 1.1.2. Type de convection

On parle de convection forcée lorsque l'écoulement du fluide au contact d'une surface est généré par une action extérieure, comme l'utilisation d'un ventilateur, d'une pompe ou par le vent. À l'inverse, on parle de convection libre (ou naturelle) lorsque le déplacement des particules du fluide résulte des forces de flottabilité provoquées par des variations de densité, elles-mêmes dues aux gradients de température au sein du fluide. Par exemple, en l'absence de ventilation, le transfert de chaleur depuis la surface d'un bloc chaud, comme illustré à la figure 1.1, relève de la convection naturelle : en raison de la différence de densité, l'air chaud monte vers le haut, tandis que l'air froid descend pour occuper l'espace libéré. Toutefois, si le gradient de température entre le bloc et l'air environnant est trop faible pour générer un mouvement du fluide, la chaleur est transmise uniquement par conduction.



**Figure 1.1** Transfert de chaleur d'une surface chaude à l'air par convection.

### 1.1.3. Convection naturelle dans des enceintes annulaires

#### 1.1.3.1. Enceinte annulaire incliné

De nombreuses études traitent des phénomènes de transfert thermique engendrés par la convection naturelle à partir des nanofluides dans des géométries simples, telles que des enceintes fermées de formes variées (triangulaires, carrées, rectangulaires, etc.) [1-11]. **Alguboori et al.** [12] Ont effectué une analyse numérique du transport thermique par convection naturelle dans une enceinte annulaire incliné remplie de nanofluide hybride Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/eau. Ils ont eu recours à une approche par volumes finis pour la résolution des équations régissant le transport de chaleur et l'écoulement. Les résultats mis en évidence indiquent que la répartition angulaire du nombre local de Nusselt sur les cylindres intérieur et extérieur est influencée par l'inclinaison de l'enceinte, la valeur de Rayleigh et de la concentration en nanoparticules. Différentes études ont utilisés des méthodes magnétohydrodynamiques / hydrodynamiques et de transfert thermique pour étudier le mouvement du fluide à travers un milieu poreux avec différentes configurations géométriques [13-15]. **Laidoudi et al.** [16] ont examiné numériquement l'échange thermique convectif d'un fluide newtonien en régime naturel contenu dans deux surfaces concentriques. Les résultats confirment que l'élévation de l'inclinaison de la cavité conduit à une amélioration des performances thermiques de la surface intérieure, indépendamment des valeurs du rapport d'aspect. **Bouzerzour et al.** [17] ont réalisé une analyse numérique du transport thermique par convection naturelle ainsi que de l'écoulement du fluide dans un anneau bidimensionnel délimité par deux ellipses confocales, différemment chauffés, orientés et remplis de nanofluide d'argent à base d'eau. Les résultats indiquent que l'introduction de nanoparticules d'argent dans le fluide principal entraîne une amélioration significative du transfert thermique global, l'impact étant plus sensible à un nombre de Rayleigh plus élevé. Pour tout angle d'orientation à un nombre de Rayleigh fixé, l'impact de La concentration de nanoparticules par rapport au taux de transport thermique est presque exact. **Sheikholeslami et al.** [18] ont examiné numériquement les impacts de transfert thermique dans une cavité circulaire externe froide, qui contient une cavité cylindrique elliptique interne orientée chaude, remplie des nanoparticules de cuivre à base d'eau. Les résultats montrent que le nombre de Nusselt croît avec l'élévation de la concentration en nanoparticules, des nombres de Rayleigh et de l'angle d'inclinaison. On observe également que l'élévation de nombre de Rayleigh entraîne une diminution de l'amélioration du transport thermique. Le rapport d'amélioration du transport thermique atteint sa valeur minimale dans les régimes caractérisés par un nombre de Rayleigh élevé. **Mejri et al.** [19] ont simulé numériquement le phénomène de la convection naturelle au sein d'une enceinte triangulaire, inclinée et contenant de l'eau. L'approche de Lattice Boltzmann (LBM) a été utilisée pour la résolution des équations couplées régissant les champs de température et de vitesse. Les résultats numériques révèlent que l'intensité du transfert thermique s'accroît à mesure que la valeur de Rayleigh augmente. Par ailleurs, On a observé que l'angle d'inclinaison de 135° conduit au plus faible échange thermique, tandis que la configuration correspondant à 0° d'inclinaison permet d'atteindre le transfert thermique maximal. Le taux de transfert thermique est fortement affecté par l'angle d'inclinaison, et ce, selon la valeur de Rayleigh. **Ghasemi et al.** [20] Ont effectué une simulation numérique du phénomène de convection naturelle au sein d'une enceinte circulaire extérieure froide

contenant un cylindre elliptique intérieur chaud incliné rempli d'air en utilisant l'approche des éléments finis basée sur le volume de contrôle. Les résultats montrent que les iso-courants, les isothermes et le nombre, la taille et la formation des cellules au sein de l'enceinte dépendent fortement de ces paramètres qui augmentent considérablement le taux de transfert thermique.

**Yu-Peng Hu et al.** [21] Ont réalisé une analyse numérique du transport thermique par convection naturelle de l'eau refroidie à une température voisine de son maximum de densité d'un cylindre chauffé à son enceinte elliptique coaxiale refroidie en utilisant la technique des volumes finis. L'analyse des résultats permet de constater que les nombres de Rayleigh, l'inclinaison de l'enceinte et la taille du cylindre interne affectent les isothermes, les iso-courants et le nombre de cellules dans la cavité, cela conduit à une amélioration significative du rendement thermique. **Park et al.** [22] ont simulé numériquement la convection naturelle entre une enceinte carrée inclinée extérieure froide et un cylindre de section circulaire intérieur chaud. Les résultats montrent que l'inclinaison de l'enceinte, les nombres de Rayleigh et la taille du cylindre intérieur affectent les lignes de température, les iso-courants et le nombre de cellules dans la cavité, ce qui améliore considérablement le rapport de transfert thermique. Il y a aussi eu quelques études récentes intéressantes sur le flux des nanofluides [23,24]. **Sheremet et al.** [25] ont mené une simulation numérique de l'écoulement par convection naturelle d'un nanofluide eau–alumine au sein d'une cavité de forme carrée avec une température temps-sinusoidale en résolvant les équations fondamentales gouvernantes à l'aide d'un algorithme fondé sur les différences finies. Les impacts du nombre de Rayleigh, fréquence d'oscillation, inclinaison de la cavité et la concentration en nanoparticules sur le transport thermique et l'écoulement du fluide et ont été analysés. On a constaté qu'un accroissement de la fréquence d'oscillation de la température limite entraîne une élévation de l'amplitude moyenne de l'oscillation du nombre de Nusselt et une réduction de la période d'oscillation. En même temps, la fréquence d'oscillation de la température limite est un très bon paramètre de contrôle qui permet d'intensifier le flux convectif et le transport thermique. **Mahfouz et al.** [26] ont étudié la problématique du transport thermique dans un espace fermé créé entre deux surfaces confocales elliptiques. On a constaté que plusieurs paramètres influencent le phénomène de convection au sein de l'enceinte, en particulier le nombre de Prandtl et le nombre de Rayleigh, lorsque la paroi interne est soumise à un chauffage. **Sultan et al** [27] Ont réalisé une analyse comparative des influences de trois nanofluides différents en Cu, TiO<sub>2</sub> et Ag sur le transfert thermique. Il a été constaté que l'accroissement de la concentration des trois nanofluides pour toutes les valeurs de Rayleigh améliore le transport thermique. **Bouras et al.** [28-31] Ont analysé le phénomène de convection naturelle en étudiant les changements de température et le nombre de Nusselt pour diverses valeurs de Rayleigh dans différents espaces annulaires (trapézoïdal, carré, elliptique et semi-elliptique). L'approximation de Boussinesq a été utilisée dans le cadre d'une approche par volumes finis.

### 1.1.3.2 Enceinte annulaire vertical

**Dawood et al.** [32,33] ont simulé numériquement la transmission thermique par convection mixte avec écoulement laminaire et tridimensionnel dans un anneau elliptique contenant un nanofluide. Quatre nanofluides distincts, soit Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, SiO<sub>2</sub>, CuO et ZnO, ont été utilisés. On peut voir que la glycérine-SiO<sub>2</sub> est la meilleure pour renforcer les performances thermiques

en comparaison avec d'autres fluides de base testés. **Zhang et al.** [34] ont simulé la convection naturelle instable numériquement au sein d'un anneau concentrique contenant des nano-fluides. La considération de la thermophorèse et du mouvement brownien indique que l'oscillation de la température à la paroi intérieure a un impact important sur les vitesses de transport massique et thermique. **Zamily et Amin** [35] ont simulé numériquement l'impact de la convection naturelle et la génération d'entropie au sein d'une cavité semi-circulaire contenant un nano-fluide eau-cuivre. Les résultats révèlent que l'irréversibilité et le taux de transfert thermique du système augmentent avec l'élévation du pourcentage des nanoparticules. **Cadena-de la Pena et al.** [36] ont mené des recherches expérimentales sur l'efficacité thermique de nano-fluides à base d'huile minérale, mis en œuvre comme fluide de refroidissement dans un système fonctionnant par convection naturelle. Le système comprend une cavité verticale circulaire fermée contenant deux types différents de nano-fluides, présentant différentes concentrations et tailles de nanoparticules. **Tayebi et al.** [37-39] s'intéressent aux espaces annulaires elliptiques remplis de nano-fluides. Ils ont analysé le mécanisme de convection naturelle qui se produit au sein d'un espace délimité par deux cylindres confocaux de formes elliptiques utilisant différentes nanoparticules et mélanges hybrides avec différentes sources de chauffage. L'étude prend en considération les impacts de l'excentricité, de la concentration en nanoparticules solide et du nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt. **Bouzerzour et al.** [40] ont effectué une analyse numérique du phénomène de convection naturelle dans deux cylindres elliptiques contenant du nano-fluide Cu-eau et partiellement chauffée. Il a été observé que la transmission thermique s'accroît à mesure que la valeur de Rayleigh croît ou de la concentration des nanoparticules. **Ahmad Khan et Altamush.** [41] ont effectué une analyse numérique sur l'échange thermique convectif en régime naturel au sein d'un anneau vertical rempli de nano-fluide (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-eau) et partiellement chauffé. Les résultats montrent que la concentration des nanoparticules améliore la performance thermique. **Mohammed et al.** [42] ont analysé mathématiquement l'échange thermique convectif en régime naturel au sein d'une cavité elliptique horizontale contenant un cylindre annulaire excentrique avec différents rapports d'aspect. **Lakshmi et al.** [43] ont analysé la convection naturelle à l'intérieur des anneaux poreux cylindriques saturés contenant du nanofluide en recourant au modèle modifié de Buongiorno-Darcy (MBDM) et la technique de linéarisation d'Oseen. **Zhang et al.** [44] ont simulé numériquement le transport thermique induit par convection naturelle à l'intérieur d'un anneau poreux rempli de nanofluide de Cu-eau. Le transfert thermique s'intensifie à mesure que la porosité croît.

#### 1.1.4. Convection naturelle double diffusive

De multiples études théoriques, numériques et expérimentales ont abordé le phénomène du transfert couplé thermique et massique dans une variété de géométries pour les milieux poreux entièrement saturés et les fluides. Une telle étude est la convection naturelle à double diffusion.

**Badruddin et Quadir** [45] ont étudié numériquement le transfert thermique et massique dans une enceinte poreuse en utilisant l'approche des éléments finis. L'impact du nombre de Lewis sur les coefficients de transfert thermique (Nusselt) et massique (Sherwood) le long de la hauteur de la cavité a été examiné. **Khan et Parvin** [46] ont étudié les influences de la

thermophorèse et du mouvement brownien sur la convection naturelle à l'intérieur d'une cavité avec un obstacle adiabatique rempli de nano-fluide de Cu-eau. On a examiné l'impact du nombre de Lewis sur les iso-courants, les isothermes, les iso-concentrations et les nombres locaux de Nusselt. **Moorthy et Senthilvadivu** [47] Ont mené une analyse numérique des transports massique et thermique induits par la convection naturelle à proximité d'une paroi verticale enfouie dans un milieu poreux entièrement saturé à viscosité variable. L'effet des paramètres de nombre de Soret, le nombre de Dufour, le nombre de Lewis sur les profiles de la vitesse, la concentration et la température a été examiné. **Grosan et al** [48] Ont mené une analyse numérique sur la convection naturelle stable et la génération de chaleur interne à l'intérieur d'une cavité carrée poreuse en deux dimensions remplie d'un nano-fluide. L'effet de rapport sans dimension entre le coefficient thermophorétique et brownien sur la température, la vitesse et la concentration en nanoparticules a été examiné. **Ahamad et al** [49] Ont mené une étude portant sur le transport thermique et massique dans une enceinte poreuse carrée ayant un réchauffeur en forme de pas placé au bas de la surface gauche. **Nazari et al** [50] Ont effectué une simulation numérique de la convection naturelle thermosolutale au sein d'une cavité carrée avec un obstacle carré chaud à l'intérieur en utilisant la méthode Boltzmann en treillis (LBM). **Rana et Bhargava** [51] Ont analysé le comportement de l'écoulement et les mécanismes de transfert thermique d'un nano-fluide sur une feuille d'étirement non linéaire. Le modèle appliqué au nanofluide prend en compte les effets conjoints du mouvement brownien et de la thermophorèse. **Hajri et al** [52] Ont effectué une analyse de la convection naturelle à double diffusion à l'intérieur d'une cavité triangulaire en utilisant une méthode numérique reposant sur les éléments finis dans le cadre du volume de contrôle. **Cheng** [53] a étudié la couche limite de convection naturelle s'écoule sur un cône tronqué intégré à l'intérieur d'un milieu poreux entièrement saturé de nanofluide à température de paroi constante et fraction volumique de nanoparticules à paroi constante. **Al-Farhany et Turan** [54] ont étudié le transport thermique et massique par convection naturelle bidimensionnelle à double diffusion au sein d'un milieu poreux rectangulaire incliné. **Hasanuzzaman et al** [55] ont analysé les impacts du nombre de Lewis sur le transport thermique et massique par convection mixte thermosolutale à l'intérieur d'une cavité triangulaire. **Rahman et al** [56] ont étudié les influences du nombre de Lewis et du ratio de flottabilité sur le transport thermique et massique par convection naturelle à l'intérieur d'une cavité triangulaire curviligne avec la paroi inférieure en forme de zig-zag. **Izadi et al** [57] ont étudié la transmission thermique par convection naturelle de différents nano-fluides au sein d'un milieu poreux compris entre deux cylindres horizontaux excentriques. Le modèle biphasique développé par Buongiorno a été adopté afin de modéliser l'évolution de la fraction des nanoparticules. **Hatami et Ganji** [58] ont étudié l'équation de distribution de température et l'efficacité de réfrigération pour des ailettes poreuses circulaires entièrement humides à sections variables par analyse combinée de transmission thermique et massique. **Kefayati** [59] a simulé la convection naturelle à double diffusion avec effets Soret et Dufour à l'intérieur d'une cavité carrée contenant un fluide de loi de puissance non newtonienne par l'approche de Boltzmann sur réseau combinée aux différences finies (FDLBM) tandis que les générations d'entropie par frottement fluide, transport theemique et transport massique ont été analysées. **Kefayati** [60,61] a analysé la convection naturelle à double diffusion ainsi que la génération d'entropie d'un fluide non newtonien obéissant à la loi de puissance à l'intérieur

d'une enceinte poreuse inclinée, en tenant compte des effets de Dufour et de Soret, en utilisant l'approche de Lattice Boltzmann aux différences finies. **Kefayati et Tang** [62] ont simulé la convection naturelle à double diffusion avec effets Soret et Dufour et la dissipation visqueuse dans une enceinte chauffée avec un cylindre intérieur froid rempli de fluide de Carreau non newtonien par FDLBM. **Esfahani et Bordbar** [63] ont simulé numériquement le flux de convection naturelle à double diffusion à l'intérieur d'une enceinte carrée contenant un nano-fluide à base d'eau et de différentes nanoparticules.

### 1.1.5. Les nombres sans dimension

Dans le domaine de la convection, les nombres adimensionnels les plus couramment employés sont :

**Tableau 1.1 :** les nombres adimensionnels.

nombre adimensionnel	sens physique	domaine	expression
Gr	Établit une comparaison entre la force de flottabilité et la force visqueuse	Convection naturelle	$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2}$ <p>L : longueur caractéristique  <math>g</math> : accélération gravitationnelle  <math>\Delta T</math> : gradient de température  <math>\beta</math> : coefficient d'expansion  <math>\nu</math> : viscosité cinématique</p>
Nu	Décrit la contribution convective au flux thermique	Transport thermique	$Nu = \frac{h \cdot L}{\lambda}$ <p><math>\lambda</math> : conductivité thermique  <math>h</math> : Coefficient d'échange thermique par convection</p>
Pe	Compare diffusion et convection	Transport thermique	$Pe = \frac{\rho \cdot C_p \cdot L \cdot u}{\lambda} = \frac{L \cdot u}{\alpha}$ <p><math>u</math> : vitesse  <math>\rho</math> : masse volumique  <math>C_p</math> : capacité calorifique</p>

			$\alpha$ : diffusivité thermique
Pr	Établit une comparaison entre la diffusion dynamique et thermique	Convection	$Pr = \frac{\mu \cdot C_p}{\lambda}$ $\mu$ : viscosité dynamique
Ra	Définit la convection naturelle	Transport thermique (convection naturelle)	$Ra = \frac{\mu \cdot C_p \cdot g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\lambda \cdot \nu^2}$ $= Pr \cdot Gr$
Re	Établit une comparaison entre la force d'inertie et la force visqueuse	Hydrodynamique, mécanique des fluides, transferts massique et thermique, agitation	$Re = \frac{L \cdot u \cdot \rho}{\mu}$
Sh	Décrit la contribution convective au flux massique	Transport massique	$Sh = \frac{K_D \cdot L}{D}$ $K_D$ : conductance de transfert massique $D$ : coefficient de diffusion

## 1.2. Nano-fluide

**Choi [64]** a utilisé pour la première fois le terme « nano-fluide » en 1995 pour caractériser un mélange constitué d'un liquide de base (huile, eau) incorporant des particules solides aux dimensions nanométriques, ce qui entraîne une conductivité thermique améliorée. L'utilisation des nano-fluides dans des applications pratiques consiste à optimiser l'efficacité du transfert thermique dans ces équipements tels que les dispositifs de stockage thermique et de refroidissement électronique, les échangeurs de chaleur et les collecteurs solaires. Différents nano-fluides tels que  $Al_2O_3$ , Ag, Au,  $AgO$ , Cu et  $CuO$  ont été utilisés dans les enceintes et les cavités pour améliorer le processus de transfert de chaleur.

### 1.2.1. Techniques de fabrication

Selon les recherches sur les nano-fluides, il est possible de les utiliser comme fluide caloporteur, la majorité des chercheurs ont rapporté une amélioration notable des performances thermiques. Les données les plus fréquemment mentionnées sont l'augmentation de transfert de chaleur ainsi que une augmentation de la viscosité lorsque le pourcentage de nano-solide augmente. L'utilisation des nano-liquides requiert des précautions

rigoureuses afin de prévenir la sédimentation des nanoparticules, l'élévation des pertes de charge et la corrosion des surfaces. En revanche, la plupart d'auteurs avancent que l'utilisation des nano-fluides peut, dans certaines conditions, s'avérer moins efficace que celle des liquides de base. Globalement, les nano-fluides contribuent à diminuer la taille et la consommation énergétique des systèmes de refroidissement industriels en améliorant leur efficacité. Puisque les nano-fluides sont des conducteurs thermiques efficaces, ils peuvent également être employés pour réchauffer de manière plus efficace. L'un des principaux désavantages des nano-liquides réside dans leur coût (environ 100 euros par litre) **Mammeri** [65]. Il est nécessaire de garantir leur rentabilité. Ils seront certainement utilisés pour les nouvelles technologies. Les nombreuses divergences qui expliquent l'augmentation des caractéristiques thermiques des nano-liquides démontrent clairement que cette nouvelle technologie demeure encore au stade de développement. La recherche dans ce domaine est prévue pour s'intensifier.

La fabrication des nanoparticules peut être réalisée à l'aide de multiples procédés, qu'ils soient d'ordre physique ou chimique. Ces méthodes variées permettent d'obtenir soit des particules encapsulées dans une matrice hôte, soit des nano-solides, offrant ainsi des possibilités de fonctionnalisation adaptées à différentes applications

### 1.2.1.1 Techniques physiques

La technique la plus facile est de diviser un matériau à des dimensions nanométriques. Toutefois, cette technique comporte des limites considérables puisqu'elle ne permet pas de contrôler de manière précise les distributions de taille. Pour mieux contrôler la taille et la morphologie, d'autres techniques physiques plus avancées peuvent être utilisées, telles que :

- Le recours à un plasma (par pulvérisation cathodique) ou à un faisceau laser de haute intensité (ablation laser) pour pulvériser un matériau cible. **Sakuma and Ishii** [66]
- L'évaporation thermique repose sur le principe de porter un matériau à une température très élevée, de manière à provoquer la vaporisation de ses constituants atomiques. Par la suite, un refroidissement approprié de ces vapeurs favorise la formation de nanoparticules. **Singh et al** [67].

Globalement, Les techniques physiques nécessitent des équipements onéreux tout en produisant, un rendement en nanoparticules faible. La majorité des situations, les nanoparticules obtenues sont déposées ou attachées à un substrat.

### 1.2.1.2 Techniques chimiques

Actuellement, diverses approches de synthèse chimique peuvent être utilisées. Elles ont l'avantage d'être, dans l'ensemble, faciles à appliquer, économiques et adaptées à une production en quantité. Ces approches permettent de synthétiser des particules caractérisées par une distribution granulométrique relativement étroite ainsi qu'une diversité de formes morphologiques. À l'instar des méthodes physiques, les nanoparticules issues de procédés chimiques peuvent être obtenues sous deux formes principales : soit libres, sous forme de poudre facilement dispersable dans un gel hôte ou un liquide, soit encapsulées au sein d'une matrice polymérique ou solide.

Nous mentionnons ici les techniques chimiques les plus fréquemment employées :

a) Dégradation de précurseurs organométalliques

Grâce à l'emploi de précurseurs organométalliques, il est possible de créer diverses structures de nanoparticules. Le procédé consiste à décomposer, en milieu organique sélectionné avec soin, une substance organométallique, où le métal est habituellement oxydé à faible degré. Cette méthode évite l'utilisation de réducteurs chimiques à fort pouvoir réactif, souvent responsables de la formation d'impuretés adsorbées sur les particules, difficiles à retirer. On procède à la dégradation en éliminant les ligands de coordination. En règle générale, cette élimination est réalisée par chauffage. **D. K. Lee et al [68]**.

b) Procédé par radiolyse

La synthèse des nano-solides par radiolyse repose sur la réduction des ions métalliques présents en solution, sous l'action d'espèces réactives générées, principalement des électrons.

Dans ces milieux, la concentration des ions métalliques est suffisamment faible pour que les rayonnements n'interagissent pas directement avec eux. La synthèse peut ainsi être décrite en deux étapes distinctes : d'abord, la radiolyse du solvant qui génère des espèces réactives, puis la réduction des ions métalliques par ces espèces, menant à la formation et à l'agglomération des atomes en nanoparticules. **R. Benoit et al [69]**.

Le rendement des techniques chimiques est souvent beaucoup plus élevé que celui des techniques physiques.

En résumé, la production de nanoparticules est un domaine technologique exigeant une grande précision, compte tenu des tailles et des formes variées requises par les chercheurs pour divers cas d'étude, ainsi que de l'importance des modifications chimiques superficielles pour garantir leur stabilité en suspension.

Il est primordial de considérer plusieurs aspects lors de la préparation des nano-fluides, notamment la stabilité et la durabilité de la suspension, la minimisation de l'agglomération des nanoparticules ainsi que l'absence d'échange chimique avec le fluide de base.

## 1.2.2. Paramètres physiques et thermiques des nano-fluides

L'incorporation de nano-solides modifie de manière significative les caractéristiques physiques et thermiques des solutions, notamment la densité, la capacité calorifique, la viscosité dynamique, la dilatation thermique et la conductivité thermique. Les caractéristiques thermophysiques du nano-fluide résultant sont fortement influencées par divers paramètres liés aux nanoparticules, tels que leur nature, leur taille, leur fraction volumique, ainsi que les conductivités respectives du liquide de base et des nano-solides, sans oublier l'effet de la température ambiante.

### La masse volumique

Pour un nano-fluide considéré comme parfaitement homogène, c'est-à-dire avec une dispersion optimale des nano-solides dans le liquide de base, la détermination de sa masse volumique correspondant à une température donnée  $T$  s'effectue en fonction de la concentration en nanoparticules.

La masse volumique résultante du nano-fluide se définit de la manière suivante :

$$\rho_{nf} = \left(\frac{m}{V}\right)_{nf} = \frac{m_f + m_s}{V_f + V_s} = \frac{\rho_f m_f + \rho_s m_s}{V_s + V_f} \quad 1.1$$

La fraction volumique des nanoparticules correspond au rapport entre le volume des nanoparticules et le volume total du mélange, comprenant à la fois le fluide et le solide.

$$\varphi = \frac{V_s}{V_s + V_f} \quad 1.2$$

La masse volumique résultante du nano-fluide est alors déduite :

$$\rho_{nf} = \rho_f(1 - \varphi) + \varphi\rho_s \quad 1.3$$

Avec :

$\rho_f$ : La masse volumique du fluide de base

$\rho_{nf}$ : La masse volumique du nano-fluide

$\rho_s$ : La masse volumique des nanoparticules solides

## La Chaleur spécifique

La chaleur spécifique désigne la capacité d'une substance homogène à emmagasiner de la quantité d'énergie thermique par unité de masse. Elle représente la chaleur  $dQ$  nécessaire pour augmenter la température d'une masse  $m$  donnée de 1 kelvin, soit  $C_p = \frac{dQ}{mdT}$ . Autrement dit, elle représente la quantité d'énergie thermique requise pour éléver la température d'un kilogramme de matière de 1 K au cours d'un processus donné.

Le calcul de la chaleur spécifique d'un nano-fluide repose sur l'utilisation de deux expressions fondamentales :

**Xuan et Roetzel [70]** ont utilisé :

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho C_p)_f + \varphi(\rho C_p)_s \quad 1.4$$

**Pak et Cho [71]** ont utilisé :

$$(C_p)_{nf} = (1 - \varphi)(C_p)_f + \varphi(C_p)_s \quad 1.5$$

Avec

$(C_p)_f$  : Chaleurs spécifique du fluide de base.

$(C_p)_{nf}$  : Chaleurs spécifique du nanofluide.

$(C_p)_s$  : Chaleurs spécifique des nanoparticules.

## Coefficient de dilatation thermique

Le coefficient de dilatation thermique, noté  $\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$ , exprime la sensibilité de la masse volumique aux variations de température à pression constante.

De nombreux auteurs ont utilisé la relation (1.3) pour la détermination de ce coefficient dans les nano-fluides, suite aux premiers travaux sur les nano-fluides.

L'expression suivante est déduite :

$$\beta_{nf} = \beta_f(1 - \varphi) + \varphi\beta_s \quad 1.6$$

Avec

$\beta_f$  : Coefficient de dilatation du fluide.

$\beta_s$  : Coefficient de dilatation des nanoparticules.

**Kim et al [72]** ont postulé que le coefficient de dilatation thermique du fluide de base ( $\beta_f$ ) est considérablement supérieur à celui des nanoparticules solides ( $\beta_s$ ). Il procède à une simplification de l'équation (1.6) selon l'expression suivante :  $\beta_{nf} = \beta_f(1 - \varphi)$

$$\rho_f = \rho_{0f} \left( 1 - \beta_f(T - T_0) \right)$$

$$\rho_{nf} = \rho_{0nf} \left( 1 - \beta_{nf}(T - T_0) \right)$$

$$\rho_s = \rho_{0s} \left( 1 - \beta_s(T - T_0) \right)$$

En substituant  $\rho_{nf}$  et  $\rho_f$  par leur valeur obtenue à partir de la relation (1.3), on obtient :

$$\beta_{nf}\rho_{0nf} = \beta_f\rho_{0f}(1 - \varphi) \quad 1.7$$

## La viscosité dynamique

La viscosité relative correspond à la proportion de la viscosité du nano-fluide par rapport à celle du fluide de base  $\frac{\mu_{nf}}{\mu_f}$

Il existe différents modèles permettant d'estimer la viscosité d'un nano-fluide, parmi lesquels on peut citer :

### Modèle d'Einstein [73]

La relation suivante s'applique aux suspensions diluées composées de particules fines, rigides et sphériques :

$$\mu_{nf} = \mu_f(1 + 2.5\varphi) \quad 1.8$$

Avec

$\mu_f$  : La viscosité dynamique du fluide de base.

$\mu_{nf}$  : La viscosité dynamique du nanofluide.

$\varphi$  : La fraction volumique des nanoparticules.

### Modèle de Brinkman [74]

A élargi la relation d'Einstein pour englober une vaste gamme de concentrations volumiques.

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-\varphi)^{2.5}} \quad 1.9$$

### Modèle de Batchelor [75]

Il a démontré que la viscosité ne dépend pas linéairement de la fraction volumique  $\varphi$ , comme le suggère la formule d'Einstein, mais suit plutôt une relation non linéaire avec celle-ci.

$$\mu_{nf} = \mu_f(2.6\varphi^2 + 2.5\varphi + 1) \quad 1.10$$

D'autres formules ont été suggérées dans les travaux antérieurs, chacune étant généralement limitée à des domaines d'application spécifiques, tels que **Maiga et al [76]**, qui ont établi la corrélation suivante à partir des résultats expérimentaux :

$$\mu_{nf} = \mu_f(123\varphi^2 + 7.3\varphi + 1) \quad 1.11$$

**Pack et Cho [71]** ont suggéré une corrélation spécifique aux nanoparticules d'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) en suspension dans l'eau, exprimée par la relation suivante :

$$\mu_{nf} = \mu_f(533.9\varphi^2 + 39.11\varphi + 1) \quad 1.12$$

Par conséquent, pour notre étude, nous avons employé le modèle de Brinkman, couramment utilisé dans les recherches scientifiques.

### Conductivité thermique

Faute de données expérimentales précises et de modèles théoriques bien établis pour évaluer la conductivité thermique des nanofluides, les chercheurs ont souvent adopté les formules existantes destinées aux suspensions de particules de tailles micrométriques ou millimétriques dans des fluides.

### Modèle de Maxwell [77]

Il a considéré que les particules sont suffisamment espacées pour qu'aucune interaction ni contact direct ne se produise entre elles.

$$\frac{K_{nf}}{K_f} = \frac{K_s + 2K_f - 2\varphi(K_f - K_s)}{K_s + 2K_f + \varphi(K_f - K_s)} \quad 1.13$$

Avec

$K_f$ : La conductivité thermique du fluide de base

$K_{nf}$  : La conductivité thermique du nanofluide.

$K_s$  : La conductivité thermique du particule solide.

### Modèle de Hamilton [78]

C'est un prolongement du modèle de Maxwell. Il s'applique aux particules de toute forme définie comme suit :

$$\frac{K_{nf}}{K_f} = \frac{K_s + (n-1)K_f - (n-1)(K_f - K_s)\varphi}{K_s + (n-1)K_f + \varphi(K_f - K_s)} \quad 1.14$$

Avec

$n = \frac{3}{\psi}$  : Facteur de forme empirique, prend une valeur de 3 pour les particules de forme sphériques et de 6 pour les particules de forme cylindrique.

### Modèle de Yu et Choi [79]

Ils ont suggéré de représenter les nano-fluides comme un fluide de base contenant des particules solides entourées d'une fine couche nanométrique, servant de canal de transport thermique entre les nanoparticules et le fluide.

$$\frac{K_{nf}}{K_f} = \frac{K_s + 2K_f - 2\varphi(K_f - K_s)(1+\beta)^3}{K_s + 2K_f + \varphi(K_f - K_s)(1+\beta)^3} \quad 1.15$$

Avec

$\beta$  : Rapport entre l'épaisseur de la couche interfaciale nanométrique et le rayon des nanoparticules.

Ainsi, les modèles employés dans notre étude pour chaque caractéristique thermophysique sont les suivants :

La capacité calorifique du nanofluide :  $(\rho C_p)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho C_p)_f + \varphi(\rho C_p)_s$

La viscosité dynamique du nanofluide :  $\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-\varphi)^{2.5}}$

La masse volumique du nanofluide :  $\rho_{nf} = \rho_f(1 - \varphi) + \varphi\rho_s$

Le coefficient d'expansion thermique :  $\beta_{nf} = \beta_f(1 - \varphi) + \varphi\beta_s$

La conductivité thermique du nanofluide :  $\frac{K_{nf}}{K_f} = \frac{K_s + 2K_f - 2\varphi(K_f - K_s)}{K_s + 2K_f + \varphi(K_f - K_s)}$

## ***Chapitre 2***

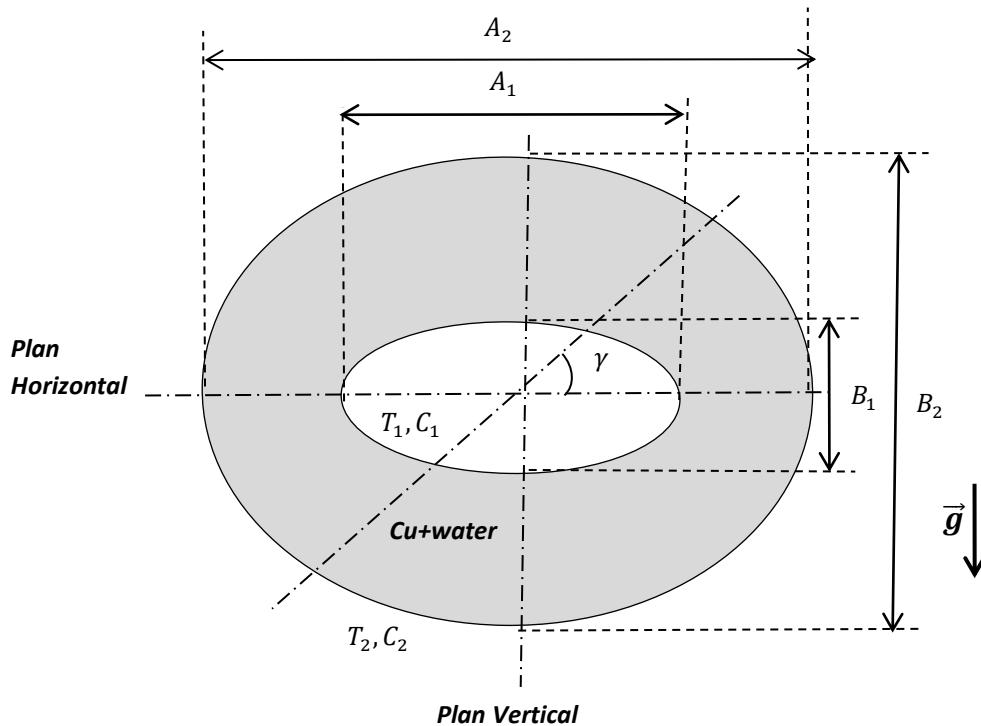
### ***Modélisation mathématique***

## 2.1 Introduction

On présente dans ce chapitre le modèle physique, en explicitant les hypothèses simplificatrices adoptées, ainsi que les équations mathématiques sous-tendant ce problème. Cela inclut les équations de la concentration, de l'énergie, de la quantité de mouvement et de continuité dans leurs formulations adimensionnelles et dimensionnelles accompagnées des conditions aux limites adaptées.

## 2.2 Description du problème

Considérons un domaine annulaire rempli de nanofluide, compris entre deux cylindres elliptiques confocaux dont les grands axes sont orientés horizontalement. Les surfaces internes et externes de ces ellipses sont supposées isothermes, portées respectivement aux concentrations  $C_1$  et  $C_2$ , ainsi qu'aux températures  $T_1$  et  $T_2$ , avec  $C_1 > C_2$  et  $T_1 > T_2$ . Le système étudié est bidimensionnel. La figure 2.1 illustre le modèle physique considéré.



**Figure 2.1** Coupe transversale du système étudié.

## 2.3 Hypothèses de simplification

- ❖ L'écoulement considéré est stationnaire, laminaire et bidimensionnel.
- ❖ Le travail des forces de pression et la dissipation visqueuse sont négligeables dans l'équation d'énergie.
- ❖ L'effet du rayonnement thermique est considéré comme négligeable.

- ❖ Les effets de Dufour et de Soret, traduisant l'interaction entre les transports thermiques et massiques, sont supposés négligeables
- ❖ Aucune réaction chimique ni source de masse et de chaleur.
- ❖ Les propriétés physiques et thermiques du nano-fluide restent constantes et sont établies à partir des valeurs de référence de concentration  $C_0$  et de température  $T_0$ . Toutefois, conformément à l'approximation de Boussinesq, la densité du fluide dans les forces volumiques est supposée varier linéairement avec la température  $T$  et la concentration  $C$ .

La relation mathématique suivante permet de représenter cette variation :

$$\rho_{nf}(C, T) = \rho_{0nf} \left( 1 - \beta_{Cnf}(C - C_0) - \beta_{Tnf}(T - T_0) \right) \quad (2.1)$$

Où :

$T_0$  : Température de référence

$C_0$  : concentration de référence

$\rho_{0nf}$  : La densité du nanofluide correspondant aux conditions de référence  $T_0$  et  $C_0$

$\beta_{Tnf}$  : coefficient d'expansion thermique égal :  $\beta_{Tnf} = -\frac{1}{\rho_{0nf}} \left( \frac{\partial \rho_{nf}}{\partial T} \right)_{P,C}$

$\beta_{Cnf}$  : coefficient d'expansion massique égal :  $\beta_{Cnf} = -\frac{1}{\rho_{0nf}} \left( \frac{\partial \rho_{nf}}{\partial C} \right)_{P,T}$

## 2.4 Formulation mathématique

### 2.4.1. Forme vectorielle

Les équations dimensionnelles qui décrivent le problème posé sont formulées sous forme vectorielle :

- Equation de conservation de masse:

Elle découle du principe fondamental de conservation de la masse et se formule de la manière suivante :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (2.2)$$

- Equation de Navier stocks:

Elle découle du principe de conservation de la quantité de mouvement et se formule de la manière suivante :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{V} = \frac{\nabla P}{\rho_{0nf}} + \frac{\rho_{nf}}{\rho_{0nf}} \vec{g} \quad (2.3)$$

- Equation de l'énergie :

Elle découle du premier principe fondamental de la thermodynamique et se formule de la manière suivante :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})T + \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_{Tnf} \nabla^2 T \quad (2.4)$$

- Equation de la masse :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})C + \frac{\partial C}{\partial t} = \alpha_{cnf} \nabla^2 C \quad (2.5)$$

Avec :

$\vec{g}$  : vecteur de l'accélération gravitationnelle.

$P$  : tenseur des forces de pression.

$\vec{V}$  : vecteur vitesse.

$C$  : concentration.

$T$  : température.

$\alpha_{cnf}$  : diffusivité massique du nanofluide.

$\alpha_{Tnf}$  : diffusivité thermique du nanofluide.

$t$  : temps.

#### 2.4.2. Forme indicelle

- Equation de continuité:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (V_j) = 0 \quad (2.6)$$

- Equation du mouvement:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{0nf} V_i V_j) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{0nf} V_i) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho_{0nf} [1 - \beta_{cnf} (C - C_0) - \beta_{Tnf} (T - T_0)] g \quad (2.7)$$

- Equation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (T V_j) + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_{Tnf} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.8)$$

- Equation de la masse:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (C V_j) + \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha_{cnf} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) \quad (2.9)$$

Avec :

$P$  : pression du nanofluide.

$\tau_{ij}$  : Tenseur des contraintes visqueuses du nanofluide.

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} \mu_{nf} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \mu_{nf} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.10)$$

Où :

$\mu_{nf}$  : Viscosité dynamique du nanofluide

$\delta_{ij}$  : Fonction indicelle de Kronecker

#### 2.4.3. Expression des équations dans le système de coordonnées cartésiennes

Puisque l'écoulement considéré est bidimensionnel et stationnaire, les équations de la concentration, de continuité, de l'énergie thermique et de la quantité de mouvement, et prennent les formes suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \cdot \sin(\alpha) [\beta_{Tnf} \Delta T - \beta_{Cnf} \Delta C] - \frac{1}{\rho_{0nf}} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu_{nf} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.12.a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \cdot \cos(\alpha) [\beta_{Tnf} \Delta T - \beta_{Cnf} \Delta C] - \frac{1}{\rho_{0nf}} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu_{nf} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.12.b)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{Tnf} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.13)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \alpha_{Cnf} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (2.14)$$

##### 2.4.3.1 Suppression du terme de pression dans l'expression de l'équation de la quantité de mouvement

En procédant à la dérivation de l'équation (2.12.b) par rapport à la variable  $x$  et de l'équation (2.12.a) par rapport à  $y$ , on obtient les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( g \cdot \cos(\alpha) [\beta_{Tnf} \Delta T - \beta_{Cnf} \Delta C] \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho_{0nf}} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \nu_{nf} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.15.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( g \cdot \sin(\alpha) [\beta_{Tnf} \Delta T - \beta_{Cnf} \Delta C] \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho_{0nf}} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \nu_{nf} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.15.b)$$

En effectuant la soustraction de l'équation (2.15.b) à partir de l'équation (2.15.a), puis en appliquant l'équation de continuité ainsi que la définition de la vorticité  $\omega$ , on parvient à l'expression suivante :

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = g \beta_{Tnf} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\alpha) - \frac{\partial T}{\partial y} \sin(\alpha) \right) + g \beta_{Cnf} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \sin(\alpha) - \frac{\partial C}{\partial x} \cos(\alpha) \right) + v_{nf} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.16)$$

Avec :

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (2.17.a)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.17.aa)$$

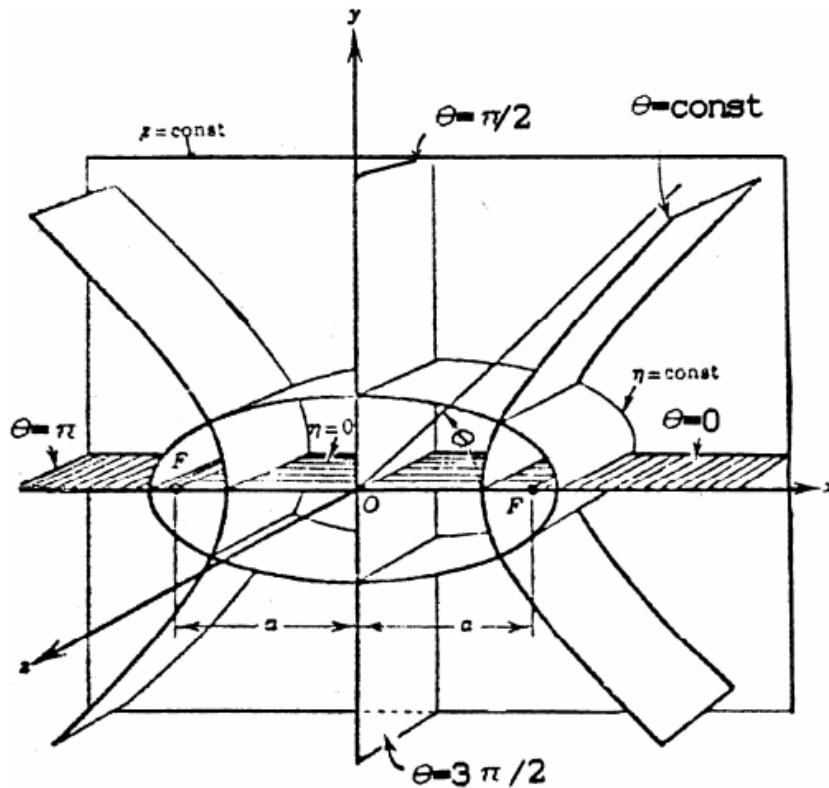
$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.17.b)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.17.bb)$$

#### 2.4.4. Expression des équations dans le système de coordonnées elliptiques

Pour notre étude, le choix du système de coordonnées elliptiques  $(\eta, \theta)$  permet de représenter les frontières physiques du domaine par des valeurs constantes de ces coordonnées, ce qui facilite la modélisation géométrique du problème. La surface du cylindre elliptique interne est définie par  $\eta = \eta_1$ , une valeur constante, tandis que celle du cylindre elliptique externe est donnée par  $\eta = \eta_2$ , également constante. L'axe des abscisses (x) correspond à la coordonnée  $\eta$  nulle.

Dans le repère elliptique  $(\eta, \theta, z)$ , les surfaces correspondant à une valeur constante de  $\eta$  représentent des cylindres elliptiques. Celles pour lesquelles  $\theta$  est constant correspondent à des cylindres hyperboliques, tandis que les plans  $z = \text{constante}$  sont parallèles entre eux. Ces différentes surfaces sont illustrées dans la figure 2.2.



**Figure 2.2** Diagramme des coordonnées elliptiques.

Le passage du repère cartésien au repère elliptique à travers les formules suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} x = a \operatorname{ch}(\eta) \cos(\theta) \\ y = a \operatorname{sh}(\eta) \sin(\theta) \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

Les équations de masse, de mouvement, d'énergie, et de continuité s'écrivent respectivement comme suit :

$$V_\theta \frac{\partial(HV_\theta)}{\partial\theta} + V_\eta \frac{\partial(HV_\eta)}{\partial\eta} = 0 \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial\omega}{\partial\theta} + \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial\omega}{\partial\eta} = & \frac{g\beta_{Tnf}}{h} \left( \frac{\partial T}{\partial\theta} [F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] + \frac{\partial T}{\partial\eta} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) + \right. \\ & \left. G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \right) + \frac{g\beta_{Cnf}}{h} \left( \frac{\partial C}{\partial\theta} [G(\eta, \theta) \cos(\alpha) - F(\eta, \theta) \sin(\alpha)] + \frac{\partial C}{\partial\eta} [-G(\eta, \theta) \sin(\alpha) - \right. \\ & \left. F(\eta, \theta) \cos(\alpha)] \right) + \frac{v_{nf}}{h^2} \left( \frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$V_\theta \frac{\partial T}{\partial\theta} + V_\eta \frac{\partial T}{\partial\eta} = \frac{\alpha_{Tnf}}{h} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial\eta^2} \right) \quad (2.21)$$

$$V_\theta \frac{\partial C}{\partial\theta} + V_\eta \frac{\partial C}{\partial\eta} = \frac{\alpha_{Cnf}}{h} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial\eta^2} \right) \quad (2.22)$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} F(\eta, \theta) &= \frac{\cos(\theta)sh(\eta)}{\sqrt{\sin^2(\theta)+sh^2(\eta)}} \\ G(\eta, \theta) &= \frac{\sin(\theta)ch(\eta)}{\sqrt{\sin^2(\theta)+sh^2(\eta)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Les composantes de la vitesse selon les directions  $\theta$  et  $\eta$  sont respectivement désignées par  $V_\theta$  et  $V_\eta$ .

En introduisant la fonction de courant  $\psi$  de manière à ce qu'elle vérifie l'équation de continuité de manière identique, nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} V_\theta &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \\ V_\eta &= \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

$$\omega = -\frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) \quad (2.25)$$

#### 2.4.5. Les conditions aux limites

Dans la première partie (le cas de la convection naturelle purement thermique), les conditions aux limites sont définies comme suit :

- L'ellipse interne chaude :

$$U = V = 0$$

$$T = T_1$$

- L'ellipse externe froide :

$$U = V = 0$$

$$T = T_2$$

Dans la deuxième partie (le cas de la convection naturelle thermosolutale), les conditions aux limites sont définies comme suit :

- L'ellipse interne chaude :

$$V_\theta = V_\eta = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0$$

$$T = T_1, C = C_1$$

- L'ellipse externe froide :

$$V_\theta = V_\eta = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0$$

$$T = T_2, C = C_2$$

#### 2.4.6. Transformation des équations gouvernantes en forme adimensionnée

Pour passer à une formulation adimensionnelle du problème, on utilise les grandeurs physiques suivantes:

$D_h = c$  (La longueur caractéristique, sélectionnée arbitrairement, est représentée par la distance focale propre au système de coordonnées elliptiques).

$$H = \frac{h}{D_h}, V_\eta^+ = V_\eta \frac{D_h}{\alpha_f}, V_\theta^+ = V_\theta \frac{D_h}{\alpha_f}, \omega^+ = \omega \frac{D_h^2}{\alpha_f}, \Psi^+ = \frac{\Psi}{\alpha_f}, T^+ = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \text{ et } C^+ = \frac{C - C_2}{C_1 - C_2}$$

$$\text{Avec } h = c(\sin^2 \theta + sh^2 \eta)^{\frac{1}{2}}$$

Les équations (2.19), (2.20), (2.21), et (2.22) deviennent :

$$V_\theta \frac{\partial(HV_\theta^+)}{\partial \theta} + V_\eta \frac{\partial(HV_\eta^+)}{\partial \eta} = 0 \quad (2.26)$$

$$HV_\theta^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} + HV_\eta^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} = H \cdot Ra \cdot Pr \left( \frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_s} + 1} \frac{\beta_s}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_s}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right) \times \left( \left\{ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] + \frac{\partial T^+}{\partial \eta} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \right\} + N \left\{ \frac{\partial C^+}{\partial \theta} [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] + \frac{\partial C^+}{\partial \eta} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \right\} \right) + \frac{Pr}{(1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \left( \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \eta^2} \right) \quad (2.27)$$

$$HV_\theta^+ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} + HV_\eta^+ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} = \left( \frac{\frac{K_{nf}}{K_f}}{\frac{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}} \right) \left( \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} \right) \quad (2.28)$$

$$HV_\theta^+ \frac{\partial C^+}{\partial \theta} + HV_\eta^+ \frac{\partial C^+}{\partial \eta} = \frac{1}{Le} \left( \frac{\frac{K_{nf}}{K_f}}{\frac{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}} \right) \left( \frac{\partial^2 C^+}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 C^+}{\partial \eta^2} \right) \quad (2.29)$$

$$\text{Avec : } \omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} \right) \quad (2.30)$$

La mise sous forme adimensionnelle des équations de conservation fait apparaître des grandeurs sans dimension, représentatives des caractéristiques physiques du problème étudié.

Le nombre de Lewis:  $Le = \frac{\alpha_T}{\alpha_C}$

Le nombre de Prandtl:  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$

Le nombre de Rayleigh:  $Ra = \frac{g\beta_T \Delta T D_h^3}{\alpha v}$

Le rapport entre la poussée solutale et la poussée thermique:  $N = \frac{\beta_C \Delta C}{\beta_T \Delta T}$

Où les composantes  $V_\eta^+$ ,  $V_\theta^+$  de la vitesse adimensionnelles sont définies par:

$$V_\eta^+ = \frac{1}{H} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta} \quad (2.31.a)$$

$$V_\theta^+ = -\frac{1}{H} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} \quad (2.31.b)$$

#### 2.4.7. Expression sans dimension des conditions aux limites

Dans la première partie (le cas de la convection naturelle purement thermique), les conditions aux limites adimensionnelles sont les suivantes :

- La paroi interne chaude :

$$U^+ = V^+ = 0 \quad (2.32.a)$$

$$T_1^+ = 1 \quad (2.32.b)$$

- La paroi externe froide :

$$U^+ = V^+ = 0 \quad (2.33.a)$$

$$T_2^+ = 0 \quad (2.33.b)$$

Dans la deuxième partie (le cas de la convection naturelle thermosoliale), les conditions aux limites adimensionnelles sont les suivantes :

- La paroi interne chaude ( $\eta = \eta_i = \text{constant}$ ):

$$V_\theta^+ = V_\eta^+ = \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} = 0 \quad (2.34.a)$$

$$\Psi^+ = -\frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} \right) \quad (2.34.b)$$

$$T_1^+ = 1 \text{ et } C_1^+ = 1 \quad (2.34.c)$$

- La paroi externe froide ( $\eta = \eta_e = \text{constant}$ ):

$$V_\theta^+ = V_\eta^+ = \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} = 0 \quad (2.35.a)$$

$$\Psi^+ = -\frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} \right) \quad (2.35.b)$$

$$T_2^+ = 0 \text{ et } C_2^+ = 0 \quad (2.35.c)$$

#### 2.4.8. Paramètres caractéristiques du transfert thermique et massique

Cette étude vise à évaluer les échanges de masse et de chaleur dans le fluide, en les quantifiant à l'aide des nombres sans dimension de Sherwood et de Nusselt.

##### 2.4.8.1 Les nombres de Sherwood et de Nusselt locaux

Les nombres de Sherwood et de Nusselt locaux sont donnés respectivement par:

$$Sh = -\frac{1}{H} \frac{\partial C^+}{\partial \eta} \Big|_{\eta=cst} \quad (2.36)$$

$$Nu = -\frac{1}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \Big|_{\eta=cst} \quad (2.37)$$

#### 2.4.8.2 Les nombres de Sherwood et de Nusselt moyens

Les nombres de Sherwood et de Nusselt moyens sont donnés respectivement par:

$$\overline{Sh} = \frac{1}{\theta_{NN} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{NN}} Sh \, d\theta \quad (2.38)$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\theta_{NN} - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_{NN}} Nu \, d\theta \quad (2.39)$$

#### 2.5 Conclusion:

Une fois les équations de masse et de chaleur, de conservation de la masse, de quantité de mouvement établies, accompagnées de leurs conditions aux limites respectives, une modélisation numérique du problème est envisagée. Le chapitre suivant est ainsi consacré à la présentation de la méthode de résolution numérique appliquée à notre modèle mathématique.

## ***Chapitre 3***

### ***Formulation numérique***

### 3.1. Introduction

Le chapitre précédent a été consacré à l'établissement des équations principales décrivant les mécanismes d'écoulement ainsi que les transferts de masse et de chaleur dans les fluides. Ces équations constituent un système de dérivées partielles complexes, à la fois hautement couplées et non linéaires. Résoudre analytiquement un tel système est extrêmement complexe. On procède donc à leur résolution de manière numérique.

Il existe une multitude de méthodes documentées dans la littérature. On peut mentionner par exemple :

- L'approche des éléments finis.
- L'approche des volumes finis.
- L'approche des différences finies.

### 3.2. La méthode des volumes finis :

De nombreux chercheurs ont employé cette méthode avec succès, décrite initialement par Patankar et Spalding en 1971, puis publiée par **Patankar [80]** en 1980.

Le principe de cette méthode est de subdiviser l'espace de calcul en plusieurs sous-domaines finis, qu'on désigne sous le nom de volumes de contrôle. Les équations aux dérivées partielles paraboliques sont intégrées dans chaque volume de contrôle selon la méthode des volumes finis, exposées précédemment, sur chacun des volumes de contrôle. Un nœud est associé à chaque volume de contrôle appelé "nœud principal".

Le domaine physique ainsi que le domaine de calcul associé sont présentés dans la figure 3.1.

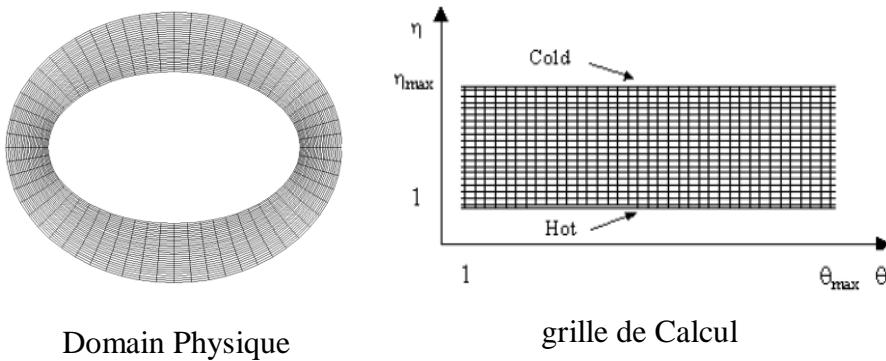
Afin de discréteriser le domaine, nous avons opté pour des pas uniformes  $\Delta\theta$  et  $\Delta\eta$  :

$$\Delta\theta = \frac{\theta_{NN} - \theta_1}{NN-1} \quad \text{et} \quad \Delta\eta = \frac{\eta_1 - \eta_{NI}}{NI-1}$$

Avec:

NI : Le nombre de nœuds dans la direction  $\eta$ .

NN : Le nombre de nœuds dans la direction  $\theta$ .



**Figure 3.1** Schéma du domaine physique et de la grille de calcul.

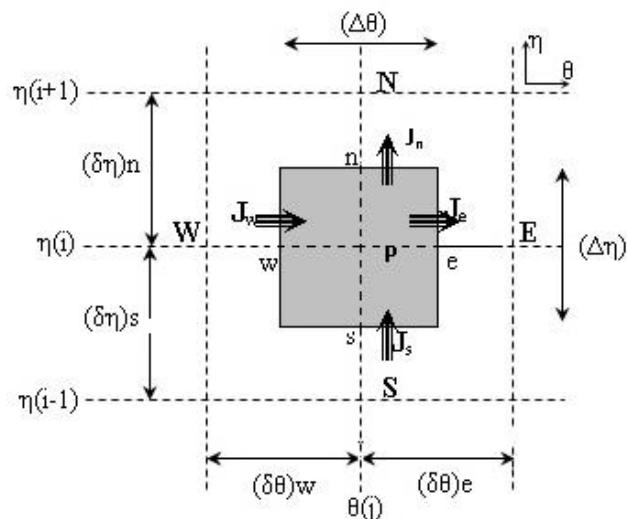
### 3.2.1. Volume de contrôle élémentaire

La division de l'espace annulaire en fonction des directions des coordonnées elliptiques  $\theta$  et  $\eta$  en un certain nombre de volumes identiques nous procure des volumes de contrôle.

L'espace annulaire est discréteisé suivant les directions  $\theta$  et  $\eta$  en une série de volumes élémentaires, appelés "volumes de contrôle", dont le volume est donné par  $\langle H^2 \cdot \Delta\eta \cdot \Delta\theta \cdot 1 \rangle$ .

Le problème étant bidimensionnel, une épaisseur unitaire est considérée dans la direction Z. Chaque volume de contrôle typique est centré en un point P et possède des faces latérales désignées respectivement par w «ouest», e «est», s «sud», et n «nord». Un volume fini intérieur est bordé par quatre volumes voisins, dont les centres sont situés en W, E, S et N. Les grandeurs scalaires telles que la vorticité, la température et la concentration sont localisées aux centres des volumes de contrôle. Par conséquent, les équations de transport associées à ces variables sont intégrées sur un volume fini représentatif.

Les nœuds N et E sont situés respectivement dans les directions positives des coordonnées  $\eta$  et  $\theta$ , tandis que les nœuds W et S se trouvent dans les directions opposées.



**Figure 3.2** Schéma représentant le volume de contrôle

La figure 3.2 illustre un volume fini type ainsi que son voisinage direct au sein du domaine de calcul. Dans cette représentation, le volume de contrôle centré au nœud P est délimité par les faces latérales notées w, n, e et s.

### 3.2.2. Formulation discrète de l'équation de conservation générale pour une variable $\varphi$ dans un volume de contrôle

Dans le but de démontrer l'application de la discrétisation des équations de transfert par l'approche des volumes finis, nous adoptons une formulation générale de l'équation considérée.

Pour mieux appréhender cette approche, nous commençons par examiner l'équation de la quantité mouvement (2.27), l'équation de l'énergie thermique (2.28) ainsi que de celle régissant la concentration (2.29), elles s'écrivent respectivement comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( HV_\theta^+ \omega^+ - \Gamma_{\omega^+} \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( HV_\eta^+ \omega^+ - \Gamma_{\omega^+} \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} \right) = S_{\omega^+} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( HV_\theta^+ T^+ - \Gamma_{T^+} \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( HV_\eta^+ T^+ - \Gamma_{T^+} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right) = S_{T^+} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( HV_\theta^+ C^+ - \Gamma_{C^+} \frac{\partial C^+}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( HV_\eta^+ C^+ - \Gamma_{C^+} \frac{\partial C^+}{\partial \eta} \right) = S_{C^+} \quad (3.3)$$

Les trois équations peuvent être exprimées sous une forme générale commune, décrite comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( HV_\theta^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( HV_\eta^+ \varphi - \Gamma_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = S_\varphi \quad (3.4)$$

Avec:

$\Gamma_\varphi$  : Coefficient adimensionnel.

$\varphi$  : Fonction générale.

$S_\varphi$  : Terme source.

L'équation discrétisée d'une variable  $\varphi$  est dérivée à partir de l'intégration de son équation de conservation sur un volume de contrôle représentatif. Ce qui suit présente un exemple de discrétisation appliquée à l'équation de transfert de  $\varphi$ .

$$\int_{w s}^{e n} \int \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^{+} \varphi - \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) d\eta d\theta + \int_{w s}^{e n} \int \frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^{+} \varphi - \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}) d\eta d\theta = \int_{w s}^{e n} \int S_{\varphi} d\eta d\theta$$

ou bien :

$$\underbrace{\int_{w s}^{e n} \int \left[ \frac{\partial (H V_{\theta}^{+} \varphi)}{\partial \theta} + \frac{\partial (H V_{\eta}^{+} \varphi)}{\partial \eta} \right] d\eta d\theta}_1 = \underbrace{\int_{w s}^{e n} \int \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right] d\eta d\theta}_2 + \underbrace{\int_{w s}^{e n} \int S_{\varphi} d\eta d\theta}_3$$

Les trois termes représentent les intégrales doubles sur le volume de contrôle, délimitée par les faces w-e et s-n. Ils traduisent, dans l'ordre, les effets de la diffusion, de la convection et du terme source de la variable  $\varphi$ . On adopte le schéma de la loi de puissance (Power-Law) pour effectuer la discréétisation spatiale, qui permet d'estimer les gradients de  $\varphi$  entre les nœuds du maillage. Ce schéma est particulièrement apprécié pour sa stabilité inconditionnelle.

Posons:

$$\left. \begin{aligned} J_{\theta} &= \left( \varphi H V_{\theta}^{+} - \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \\ J_{\eta} &= \left( \varphi H V_{\eta}^{+} - \Gamma_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \right\}$$

$J_{\theta}$  et  $J_{\eta}$  représentent les flux totaux, résultant de la combinaison des effets de convection et de diffusion.

En substituant  $J_{\theta}$  et  $J_{\eta}$  dans l'équation (3.4), nous obtenons:

$$\frac{\partial J_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial J_{\eta}}{\partial \eta} = S_{\varphi} \quad (3.5)$$

En procédant à l'intégration de l'équation (3.5) sur le volume de contrôle, on aboutit à l'expression suivante :

$$J_e - J_w + J_n - J_s = \overline{S_{\varphi}} \cdot \Delta V$$

(3.6)

$J_w$ ,  $J_n$ ,  $J_e$ , et  $J_s$  représentent les flux totaux (convection + diffusion) évalués aux interfaces nord, sud, est et ouest du volume de contrôle.

Dans le volume de contrôle considéré  $\bar{S}_\varphi$  représente la valeur moyenne du terme source  $S$ . En général, ce terme peut être linéarisé par rapport à la variable  $\varphi_p$  (au centre du volume) et exprimé sous la forme suivante :

$$\bar{S}_\varphi = \varphi_p \cdot S_p + S_0 \quad (3.7)$$

Avec  $S_p < 0$

En conséquence, l'équation (3.6) peut être reformulée de la manière suivante :

$$J_e - J_w + J_n - J_s = (S_p \cdot \varphi_p + S_0) \cdot \Delta V \quad (3.8)$$

En procédant à l'intégration de l'équation de continuité (2.25) sur un volume de contrôle typique, on obtient l'expression suivante :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (3.9)$$

Où  $F_s$ ,  $F_n$ ,  $F_w$  et  $F_e$  correspondent respectivement aux débits massiques traversant les faces sud, nord, ouest et est du volume de contrôle.

$$\left. \begin{array}{l} F_n = \Delta\theta (H V_\eta^+)_n \\ F_s = \Delta\theta (H V_\eta^+)_s \\ F_e = \Delta\eta (H V_\theta^+)_e \\ F_w = \Delta\eta (H V_\theta^+)_w \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

En procédant à la multiplication de l'équation (3.9) par la variable  $\varphi_p$ , puis en soustrayant cette expression de l'équation (3.8), on déduit :

$$\begin{aligned} (J_e - F_e \cdot \varphi_p) - (J_w - F_w \cdot \varphi_p) + (J_n - F_n \cdot \varphi_p) \\ - (J_s - F_s \cdot \varphi_p) = \Delta V (S_p \cdot \varphi_p + S_0) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} J_n - \varphi_p \cdot F_n = (\varphi_p - \varphi_N) a_N \\ J_s - \varphi_p \cdot F_s = (\varphi_S - \varphi_p) a_S \\ J_e - \varphi_p \cdot F_e = (\varphi_p - \varphi_E) a_E \\ J_w - \varphi_p \cdot F_w = (\varphi_W - \varphi_p) a_W \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

Leur substitution dans l'équation (3.11) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} a_E (\varphi_p - \varphi_E) - a_W (\varphi_W - \varphi_p) + a_N (\varphi_p - \varphi_N) \\ - a_S (\varphi_S - \varphi_p) = \Delta V (S_p \cdot \varphi_p + S_0) \end{aligned} \quad (3.13)$$

On obtient donc finalement l'équation de discréétisation :

$$\varphi_P a_P = \varphi_E a_E + \varphi_W a_W + \varphi_N a_N + \varphi_S a_S + b \quad (3.14)$$

Avec:

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N - \Delta V S_p \quad (3.15)$$

$$b = \Delta V S_0 \quad (3.16)$$

Selon **PATANKAR** [80], la fonction  $A(|P|)$  est décrite comme suit :

$$A(|P|) = \max(0, (1 - 0.1|P|)^5)$$

Le symbole  $\max(A, B)$  désigne la sélection de la valeur maximale entre A et B.

$$\left. \begin{array}{l} a_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_E = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \\ a_W = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

Les grandeurs  $D_n$ ,  $D_s$ ,  $D_e$  et  $D_w$ , sont définies par:

$$\left. \begin{array}{l} D_n = \frac{\Delta\theta(\Gamma_\varphi)_n}{(\delta\eta)_n} \\ D_s = \frac{\Delta\theta(\Gamma_\varphi)_s}{(\delta\eta)_s} \\ D_e = \frac{\Delta\eta(\Gamma_\varphi)_e}{(\delta\theta)_e} \\ D_w = \frac{\Delta\eta(\Gamma_\varphi)_w}{(\delta\theta)_w} \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

Les nombres de Péclet  $P_n$ ,  $P_s$ ,  $P_e$  et  $P_w$  sont définis comme suit:

$$\left. \begin{array}{l} P_n = F_n \frac{1}{D_n} \\ P_s = F_s \frac{1}{D_s} \\ P_e = F_e \frac{1}{D_e} \\ P_w = F_w \frac{1}{D_w} \end{array} \right\} \quad (3.19)$$

Les intervalles d'intégration  $(\delta\theta)_e$ ,  $(\delta\theta)_w$ ,  $(\delta\eta)_n$  et  $(\delta\eta)_s$  peuvent, en principe, différer des pas de discréétisation  $\Delta\theta$  et  $\Delta\eta$ . Néanmoins, dans le cadre de cette étude, ils sont considérés comme constants et égaux aux pas de calcul susmentionnés, à savoir  $\Delta\theta$  et  $\Delta\eta$ . Par ailleurs, les interfaces désignées par n, s, e et w sont supposées être localisées au milieu des segments reliant respectivement les nœuds (P, N), (P, S), (P, E) et (P, W).

Les grandeurs précédemment définies s'expriment comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} D_n = \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} (\Gamma_\varphi)_n \\ D_s = \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} (\Gamma_\varphi)_s \\ D_e = \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} (\Gamma_\varphi)_e \\ D_w = \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} (\Gamma_\varphi)_w \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

Pour maintenir les conditions de convergence et de stabilité de la méthode employée, certaines conditions doivent être impérativement respectées. En particulier, dans l'équation (3.14), tous les coefficients associés aux nœuds voisins doivent être strictement positifs, le terme source linéarisé  $S_P$  doit être négatif. De plus, le coefficient central  $a_p$  doit être défini comme le total des coefficients des nœuds adjacents, à laquelle s'ajoute le terme  $S_P\Delta V$ .

La procédure de discréétisation évoquée ci-dessus est applicable aux équations aux dérivées partielles régissant l'ensemble des variables dépendantes du problème. La fonction  $\varphi$  désigne l'une de ces grandeurs adimensionnelles, à savoir  $T^+$ ,  $\omega^+$  et  $C^+$ . Les coefficients diffusifs  $\Gamma_\varphi$  ainsi que les termes sources  $S_\varphi$  correspondants sont récapitulés dans le tableau 3.1.

**Tableau 3.1 :** Termes sources et coefficients diffusifs associés à la variable  $\varphi$

Equation	$\varphi$	$\Gamma_\varphi$	$S_\varphi$
3.1	$\omega^+$	$\frac{Pr}{(1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)}$	$H.Ra.Pr \left( \frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_s} + 1} \frac{\beta_s}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_s}{(1-\phi)\rho_f} + 1} \right) \times \left( \left\{ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] + N \frac{\partial C^+}{\partial \theta} [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] + \frac{\partial C^+}{\partial \eta} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \right\} \right)$
3.2	$T^+$	$\left( \frac{\frac{K_{nf}}{K_f}}{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f}} \right)$	0
3.3	$C^+$	$\frac{1}{Le} \left( \frac{\frac{K_{nf}}{K_f}}{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f}} \right)$	0

### 3.3. Formulation discrète de l'équation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie est formulée sur un volume de contrôle élémentaire, de dimensions  $H^2$ .  $(\Delta\theta)_p$ .  $(\Delta\eta)_p$ . En appliquant la procédure de discréétisation selon l'approche des volumes finis, on parvient à l'expression algébrique suivante :

$$a_p T_p^+ = a_E T_E^+ + a_w T_w^+ + a_p T_p^+ + a_s T_s^+ + b \quad (3.21)$$

Dans le cas de l'équation (3.2), l'absence du terme source  $S_T$  entraîne la nullité du coefficient  $b$ . Par conséquent, le coefficient  $a_P$  de l'équation (3.15) s'exprime comme suit :

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (3.22)$$

Les expressions des coefficients  $a_N$ ,  $a_S$ ,  $a_E$  et  $a_W$  sont identiques à celles présentées dans le système (3.17).

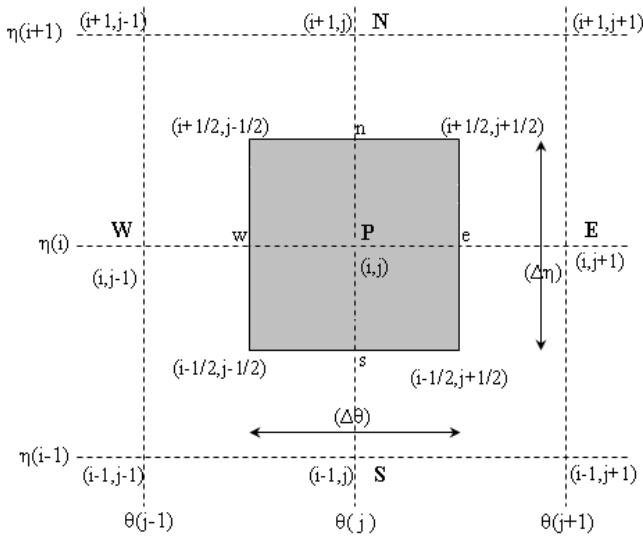
L'introduction de la grandeur adimensionnelle  $\psi^+$  (fonction de courant) apparaissant dans le système (3.10) conduit à l'expression suivante :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_n \cdot \Delta \theta \\ F_s &= \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \right)_s \cdot \Delta \theta \\ F_e &= \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e \cdot \Delta \eta \\ F_w &= \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_w \cdot \Delta \eta \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Dans la suite, nous supposons que :

$$\begin{aligned} \psi_n^+ &= \frac{1}{2} [\psi^+(i, j) + \psi^+(i+1, j)] \\ \psi_w^+ &= \frac{1}{2} [\psi^+(i, j-1) + \psi^+(i, j)] \\ \psi_s^+ &= \frac{1}{2} [\psi^+(i-1, j) + \psi^+(i, j)] \\ \psi_e^+ &= \frac{1}{2} [\psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j)] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Le calcul du gradient de la fonction de courant au niveau de l'interface “e” est effectué conformément à la méthodologie proposée par **NOGOTOV [81]**, comme illustré à la figure 3.3.



**Figure 3.3** Schéma représentatif de la disposition des points P, S, W et E considérés dans le maillage.

$$\left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e = \frac{1}{\Delta \eta} [\psi^+(i+1/2, j+1/2) - \psi^+(i-1/2, j+1/2)]$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_e &= \frac{1}{2\Delta \eta} \left[ \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} + \frac{\psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i+1, j)}{2} \right] \\ &- \frac{1}{2\Delta \eta} \left[ \frac{\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1)}{2} + \frac{\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j)}{2} \right] \end{aligned}$$

En conséquence, la fonction  $F_e$  se présente sous la forme suivante:

$$F_e = \frac{1}{4} [\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i-1, j) - \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i+1, j)] \quad (3.25.a)$$

De manière similaire, Le gradient au niveau de l'interface « w » s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right)_w &= \frac{1}{\Delta \eta} [\psi^+(i+1/2, j-1/2) - \psi^+(i-1/2, j-1/2)] \\ &= \frac{1}{4\Delta \eta} [\psi^+(i-1, j) + \psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i+1, j) - \psi^+(i-1, j-1)] \end{aligned}$$

La fonction  $F_w$  se présente sous la forme suivante:

$$F_w = \frac{1}{4} [\psi^+(i-1, j) + \psi^+(i-1, j-1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i+1, j)] \quad (3.25.b)$$

De manière similaire, Le gradient au niveau de l'interface « n » s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n &= \frac{1}{\Delta \theta} [\psi^+(i+1/2, j+1/2) - \psi^+(i+1/2, j-1/2)] \\ \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n &= \frac{1}{2\Delta \theta} \left[ \frac{\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1)}{2} + \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta \theta} \left[ \frac{\psi^+(i, j-1) + \psi^+(i+1, j-1)}{2} + \frac{\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i, j)}{2} \right] \\ \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_n &= \frac{1}{4\Delta \theta} [\psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i+1, j+1) - \psi^+(i, j-1)]\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$F_n = \frac{1}{4} [\psi^+(i+1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) - \psi^+(i, j-1)] \quad (3.25.c)$$

Le gradient au niveau de l'interface « s » peut s'exprimer comme suit:

$$\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial \theta}\right)_s = \frac{1}{4\Delta \theta} [\psi^+(i, j+1) - \psi^+(i+1, j-1) + \psi^+(i-1, j+1) - \psi^+(i, j-1)]$$

L'expression de  $F_s$  devient :

$$F_s = \frac{1}{4} [\psi^+(i-1, j+1) + \psi^+(i, j+1) - \psi^+(i-1, j-1) - \psi^+(i, j-1)] \quad (3.25.d)$$

Le coefficient  $\Gamma_\phi$  est donné, selon le tableau 3.1, par :  $\Gamma_\phi = \left( \frac{\frac{\kappa_{nf}}{\kappa_f}}{(1-\phi)+\phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}} \right)$

En substituant cette expression dans le système (3.20), les coefficients  $D_w$ ,  $D_e$ ,  $D_s$  et  $D_n$  s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} D_s = D_n = \frac{\Delta \theta}{\Delta \eta} \left( \frac{\frac{\kappa_{nf}}{\kappa_f}}{(1-\phi)+\phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}} \right) \\ D_w = D_e = \frac{\Delta \eta}{\Delta \theta} \left( \frac{\frac{\kappa_{nf}}{\kappa_f}}{(1-\phi)+\phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}} \right) \end{cases} \quad (3.26)$$

Par conséquent, les nombres de Péclet associés au système d'équations (3.19) prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} P_n = F_n \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \left( \frac{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{\frac{K_{nf}}{K_f}} \right) \\ P_s = F_s \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} \left( \frac{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{\frac{K_{nf}}{K_f}} \right) \end{cases} ; \quad \begin{cases} P_e = F_e \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \left( \frac{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{\frac{K_{nf}}{K_f}} \right) \\ P_w = F_w \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} \left( \frac{(1-\phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{\frac{K_{nf}}{K_f}} \right) \end{cases} \quad (3.27)$$

Afin d'uniformiser les notations dans l'équation (3.21), les points P, W, S, N et E sont désignés respectivement par (i,j), (i,j-1), (i+1,j), (i,j+1) et (i-1,j).

Les coefficients  $a_w$ ,  $a_E$ ,  $a_S$  et  $a_N$  sont évalués au nœud de coordonnées (i, j).

Par conséquent, l'équation (3.21) peut être exprimée sous la forme suivante :

$$a_P T^+(i, j) = a_N T^+(i+1, j) + a_E T^+(i, j+1) + a_w T^+(i, j-1) + a_S T^+(i-1, j) \quad (3.28)$$

### 3.3.1. Formulation discrète des conditions aux limites

Afin de respecter les conditions prescrites sur la température des parois, il est nécessaire que :

- Au niveau de la paroi extérieure elliptique (I=NI).

$$a_P = 1$$

$$a_w = a_E = a_S = a_N = 0 \text{ et } S_T = 0$$

- Au niveau de la paroi intérieure elliptique (I=1).

$$a_P = 1$$

$$a_w = a_E = a_S = a_N = 0 \text{ et } S_T = 1$$

### 3.4. Formulation discrète de l'équation d'espèces:

L'équation sous forme discrète (3.14) peut être exprimée de la manière suivante :

$$a_p C_p^+ = a_S C_S^+ + a_p C_p^+ + a_w C_w^+ + a_E C_E^+ + b \quad (3.29)$$

L'égalité entre le coefficient  $a_P$  et celui spécifié dans l'équation (3.15) permet d'obtenir:

$$a_p = a_S + a_N + a_w + a_E \quad (3.30)$$

Les coefficients  $a_N$ ,  $a_S$ ,  $a_W$  et  $a_E$  sont exprimés conformément aux relations définies dans le système (3.17).

Le coefficient  $\Gamma_\phi = \frac{1}{Le} \left( \frac{\frac{K_{nf}}{K_f}}{(1-\phi)+\phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}} \right)$ , selon le tableau 3.1, au niveau des interfaces w, e, s et n; les coefficients  $D_w$ ,  $D_e$ ,  $D_s$  et  $D_n$  sont déterminés à partir des expressions suivantes:

$$\begin{cases} D_s = D_n = \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta Le} \left( \frac{\frac{K_{nf}}{K_f}}{(1-\phi)+\phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}} \right) \\ D_w = D_e = \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta Le} \left( \frac{\frac{K_{nf}}{K_f}}{(1-\phi)+\phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}} \right) \end{cases} \quad (3.31)$$

Les nombres de Péclet associés au système d'équations (3.19) prennent alors les formes suivantes:

$$\begin{cases} P_n = \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} F_n Le \left( \frac{(1-\phi)+\phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{\frac{K_{nf}}{K_f}} \right) \\ P_s = \frac{\Delta\eta}{\Delta\theta} F_s Le \left( \frac{(1-\phi)+\phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{\frac{K_{nf}}{K_f}} \right) \end{cases} ; \quad \begin{cases} P_e = \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} F_e Le \left( \frac{(1-\phi)+\phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{\frac{K_{nf}}{K_f}} \right) \\ P_w = \frac{\Delta\theta}{\Delta\eta} F_w Le \left( \frac{(1-\phi)+\phi \frac{(\rho c_p)_s}{(\rho c_p)_f}}{\frac{K_{nf}}{K_f}} \right) \end{cases} \quad (3.32)$$

Afin d'uniformiser les notations dans l'équation (3.29), les points P, E, W, S et N sont respectivement notés (i,j), (i,j-1), (i-1,j) , (i+1,j) et (i,j+1).

Les coefficients  $a_W$ ,  $a_E$ ,  $a_S$  et  $a_N$  sont évalués au nœud de coordonnées (i, j).

Par conséquent, l'équation (3.29) s'exprime de la manière suivante :

$$a_P C^+(i, j) = a_W C^+(i, j-1) + a_E C^+(i, j+1) + a_S C^+(i-1, j) + a_N C^+(i+1, j) \quad (3.33)$$

### 3.4.1. Formulation discrète des Conditions aux limites

Pour respecter les conditions applicables à la concentration à proximité des parois, il est nécessaire que:

- Au niveau de la paroi extérieure elliptique (I=NI).

$$a_P = 1$$

$$a_w = a_E = a_s = a_N = 0 \text{ et } S_T = 0$$

- Au niveau de la paroi intérieure elliptique (I=1).

$$a_P = 1$$

$$a_w = a_E = a_s = a_N = 0 \text{ et } S_T = 1$$

### 3.5. Formulation discrète de l'équation de mouvement

L'équation sous forme discrète (3.14) peut être exprimée de la manière suivante :

$$a_P \omega_P^+ = a_S \omega_S^+ + a_N \omega_N^+ + a_W \omega_W^+ + a_E \omega_E^+ + b \quad (3.34)$$

L'égalité entre le coefficient  $a_P$  et celui spécifié dans l'équation (3.15) conduit à l'expression suivante:

$$a_P = a_S + a_N + a_W + a_E \quad (3.35)$$

Avec:

$$\Delta V \cdot S_P = 0$$

Les coefficients  $a_N$ ,  $a_S$ ,  $a_W$  et  $a_E$  sont définis selon les expressions fournies dans le système (3.17).

Le coefficient  $\Gamma_\phi = \frac{Pr}{(1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_S}{\rho_f} \right)}$ , selon le tableau 3.1, au niveau des interfaces w, e, s et

n; les coefficients  $D_w$ ,  $D_e$ ,  $D_s$  et  $D_n$  sont obtenus à partir des expressions suivantes:

$$\begin{cases} D_s = D_n = \frac{\Delta \theta}{\Delta \eta} \left( \frac{Pr}{(1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \right) \\ D_w = D_e = \frac{\Delta \eta}{\Delta \theta} \left( \frac{Pr}{(1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right)} \right) \end{cases} \quad (3.36)$$

Les nombres de Péclet associés au système d'équations (3.19) s'écrivent alors sous les formes suivantes:

$$\begin{cases} P_n = \frac{\Delta \eta}{\Delta \theta} \frac{F_n}{Pr} (1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \\ P_s = \frac{\Delta \eta}{\Delta \theta} \frac{F_s}{Pr} (1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \end{cases} ; \quad \begin{cases} P_e = \frac{\Delta \theta}{\Delta \eta} \frac{F_e}{Pr} (1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \\ P_w = \frac{\Delta \theta}{\Delta \eta} \frac{F_w}{Pr} (1-\phi)^{2.5} \left( (1-\phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right) \end{cases} \quad (3.37)$$

Les expressions des coefficients  $F_e$ ,  $F_w$ ,  $F_n$  et  $F_s$  sont identiques à celles définies dans les équations (3.25.a), (3.25.b), (3.25.c) et (3.25.d).

Le tableau 3.1 indique que le terme constant ( $S_0$ ) associé au terme de source est exprimé par la relation suivante :

$$S_0 = Ra \cdot Pr \left( \frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_s}+1} \frac{\beta_s}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_s}{(1-\phi)\rho_f}+1} \right) \times \left( \left\{ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] + \frac{\partial T^+}{\partial \eta} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \right\} + N \left\{ \frac{\partial C^+}{\partial \theta} [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] + \frac{\partial C^+}{\partial \eta} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \right\} \right) \quad (3.38)$$

En conséquence, le coefficient  $b$  s'écrit comme suit:

$$b = \Delta V S_0$$

Avec:

$$\Delta V = H^2 \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \eta \cdot 1$$

Le coefficient  $b$  s'exprime alors comme suit :

$$b = H^2 \cdot Ra \cdot Pr \left( \frac{1}{\frac{(1-\phi)\rho_f}{\phi\rho_s}+1} \frac{\beta_s}{\beta_f} + \frac{1}{\frac{\phi\rho_s}{(1-\phi)\rho_f}+1} \right) \times \left( \left\{ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] + \frac{\partial T^+}{\partial \eta} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \right\} + N \left\{ \frac{\partial C^+}{\partial \theta} [-F(\eta, \theta) \sin(\alpha) - G(\eta, \theta) \cos(\alpha)] + \frac{\partial C^+}{\partial \eta} [F(\eta, \theta) \cos(\alpha) - G(\eta, \theta) \sin(\alpha)] \right\} \right) \Delta \theta \cdot \Delta \eta \quad (3.39)$$

Avec:

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{1}{2 \Delta \theta} [T^+(i, j+1) - T^+(i, j-1)] \quad (3.40)$$

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{1}{2 \Delta \eta} [T^+(i+1, j) - T^+(i-1, j)] \quad (3.41)$$

$$\left. \frac{\partial C^+}{\partial \theta} \right|_{i,j} = \frac{1}{2 \Delta \theta} [C^+(i, j+1) - C^+(i, j-1)] \quad (3.42)$$

$$\left. \frac{\partial C^+}{\partial \eta} \right|_{i,j} = \frac{1}{2 \Delta \eta} [C^+(i+1, j) - C^+(i-1, j)] \quad (3.43)$$

Afin d'homogénéiser les notations, et en se référant au paragraphe antérieur, les nœuds P, W, E, S et N sont respectivement associés aux positions (i+1,j), (i,j), (i,j-1), , (i-1,j) et (i,j+1).

Les coefficients  $a_S, a_N, a_W, a_E$  ainsi que le terme  $b$  sont évalués au niveau du nœud (i,j).

L'équation discrétisée du mouvement (3.34) s'exprime finalement sous la forme suivante:

$$a_P \omega_P^+(i, j) = a_S \omega_S^+(i-1, j) + a_N \omega_N^+(i+1, j) + a_W \omega_W^+(i, j-1) + a_E \omega_E^+(i, j+1) + b \quad (3.44)$$

### 3.5.1. Formulation discrète des Conditions aux limites

Pour évaluer la vorticité aux parois, nous adoptons la méthode proposée par Roache [82], laquelle consiste à exprimer la vorticité en fonction de la fonction de courant à l'aide d'un développement en série de Taylor.

- Condition appliquée à la paroi interne elliptique (I=1).

$$\omega_1^+ = - \frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=\eta_1}$$

Afin de calculer le comportement de la fonction de courant près de la paroi interne, nous effectuons un développement en série de Taylor en ce point (i=1,j):

$$\psi^+(2, j) = \psi^+(1, j) + \frac{\Delta \eta}{1!} \frac{\partial \psi^+(1, j)}{\partial \eta} + \frac{(\Delta \eta)^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi^+(1, j)}{\partial \eta^2} + \dots$$

La vorticité au niveau de cette paroi s'exprime comme suit :

$$\omega^+(1, j) = - \frac{1}{H^2(1)} \left[ \frac{2}{(\Delta \eta)^2} (\psi^+(2, j) - \psi^+(1, j)) + \frac{1}{(\Delta \theta)^2} (\psi^+(1, j+1) - 2\psi^+(1, j) + \psi^+(1, j-1)) \right]$$

- Au niveau de la paroi extérieure elliptique (I=NI).

$$\omega_2^+ = - \frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=\eta_2}$$

La vorticité au niveau de cette paroi s'exprime comme suit:

$$\omega^+(NI, j) = -\frac{1}{H^2(NI)} \left[ \frac{2}{(\Delta\eta)^2} (-\psi^+(NI, j) + \psi^+(NI-1, j)) + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} (\psi^+(NI, j+1) - 2\psi^+(NI, j) + \psi^+(NI, j-1)) \right]$$

### 3.6. Formulation discrète de l'équation associée à la fonction de courant

L'équation sous forme adimensionnelle (2.30) peut être reformulée de la manière suivante:

$$-H^2 \omega^+ = \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{\partial \psi^+}{\partial\eta} \right) \quad (3.45)$$

La correspondance entre cette équation et l'équation (3.4) ne pouvant être établie aisément, la discrétisation a été effectuée à l'aide d'un procédé d'approximation utilisant la série de Taylor :

$$-H^2(i, j) \omega^+(i, j) = \left. \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial\theta^2} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial\eta^2} \right|_{i,j}$$

Avec:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (3.46)$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} -H^2(i, j) \omega^+(i, j) &= \left[ \frac{1}{(\Delta\theta)^2} (-2\psi^+(i, j) + \psi^+(i, j+1) + \psi^+(i, j-1)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\Delta\eta)^2} (\psi^+(i+1, j) - 2\psi^+(i, j) + \psi^+(i-1, j)) \right] \\ (3.47) \end{aligned}$$

On exprime alors la fonction de courant au point P à partir des valeurs aux nœuds voisins E, W, S et N, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \psi^+(i, j) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(\Delta\theta)^2} + \frac{1}{(\Delta\eta)^2} \right]^{-1} \left[ \frac{1}{(\Delta\theta)^2} (\psi^+(i, j-1) + \psi^+(i, j+1)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\Delta\eta)^2} (\psi^+(i+1, j) + \psi^+(i-1, j)) + H^2(i, j) \omega^+(i, j) \right] \quad (3.48) \end{aligned}$$

### 3.6.1. Formulation discrète des Conditions aux limites

Conformément aux équations (2.31.a) et (2.32.a), les parois sont soumises aux conditions aux limites suivantes :

- Au niveau de la paroi intérieure elliptique (I=1):

$$\left. \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \right|_{1,j} = \frac{1}{2 \Delta \eta} \left[ -\psi^+(3,j) + 4\psi^+(2,j) - 3\psi^+(1,j) \right] = 0$$

$$\psi^+(1,j) = \frac{1}{3} \left[ -\psi^+(3,j) + 4\psi^+(2,j) \right]$$

(3.49.a)

- Au niveau de la paroi extérieure elliptique (I=NI):

$$\psi^+(NI,j) = \frac{1}{3} \left[ -\psi^+(NI-2,j) + 4\psi^+(NI-1,j) \right]$$

(3.49.b)

Le système linéaire résultant est résolu numériquement en appliquant la méthode des sur-relaxations successives.

### 3.7. Formulation discrète des composantes directionnelles de la vitesse

L'équation (2.33.a) permet de déterminer les composantes adimensionnées  $V_\eta^+$  et  $V_\theta^+$  de la vitesse. En appliquant la méthode des différences centrées, telle qu'utilisée par **ROACHE [82]**, on obtient les expressions discrétisées suivantes de ces composantes:

$$V_\eta^+(i,j) = \frac{1}{H(i,j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \theta} \Big|_{i,j} = \frac{1}{H(i,j)} \left[ \frac{1}{2\Delta\theta} (\psi^+(i,j+1) - \psi^+(i,j-1)) \right] \quad (3.50.a)$$

$$V_\theta^+(i,j) = \frac{-1}{H(i,j)} \frac{\partial \psi^+}{\partial \eta} \Big|_{i,j} = \frac{-1}{H(i,j)} \left[ \frac{1}{2\Delta\eta} (\psi^+(i+1,j) - \psi^+(i-1,j)) \right] \quad (3.50.b)$$

$$\forall (i,j) \quad i \neq 1 ; i \neq NI$$

$$j \neq 1 ; j \neq NN$$

### 3.8. Méthode de sous relaxation

Parmi les différentes approches utilisées pour résoudre les systèmes d'équations, les méthodes itératives occupent une place importante. Elles sont généralement préférées dans les cas suivants :

- La résolution des systèmes de grande dimension.
- La résolution des systèmes composés d'équations algébriques non linéaires et fortement couplées.

Parmi ces approches, la méthode de relaxation est employée afin de contrôler la convergence du processus itératif, en permettant soit de ralentir, soit d'accélérer la convergence vers la solution recherchée.

### 3.9. Algorithme de calcul

La résolution du système constitué des équations (3.28), (3.33), (3.44) et (3.48) repose sur l'approche proposée par **E.F. NOGOTOV [81]**.

Il est possible de reformuler ces équations de manière à les rendre compatibles avec une méthode itérative intégrant des coefficients de sous-relaxation, selon l'expression suivante :

$$T^{n+1}(i, j) = (1 - R_T)T^n(i, j) + \left( \frac{R_T}{a_P} \right) [ a_E T^n(i, j+1) \\ a_W T^{n+1}(i, j-1) + a_N T^n(i+1, j) + a_S T^{n+1}(i-1, j) ] \quad (3.51)$$

$$C^{n+1}(i, j) = (1 - R_C)C^n(i, j) + \left( \frac{R_C}{a_P} \right) [ a_E C^n(i, j+1) \\ a_W C^{n+1}(i, j-1) + a_N C^n(i+1, j) + a_S C^{n+1}(i-1, j) ] \quad (3.52)$$

$$\omega^{n+1}(i, j) = (1 - R_\omega)\omega^n(i, j) + \left( \frac{R_\omega}{a_P} \right) [ a_E \omega^n(i, j+1) \\ + a_W \omega^{n+1}(i, j-1) + a_N \omega^n(i+1, j) + a_S \omega^{n+1}(i-1, j) + b(i, j) ] \quad (3.53)$$

$$\psi^{n+1}(i, j) = (1 - R_\psi)\psi^n(i, j) + \frac{R_\psi}{2} \left[ \frac{1}{(\Delta\theta)^2} + \frac{1}{(\Delta\eta)^2} \right]^{-1} \\ \left[ \frac{\psi^n(i, j+1) + \psi^{n+1}(i, j-1)}{(\Delta\theta)^2} + \frac{\psi^n(i+1, j) + \psi^{n+1}(i-1, j)}{(\Delta\eta)^2} + H^2(i, j)\omega^{n+1}(i, j) \right] \quad (3.54)$$

n : ordre de l'itération.

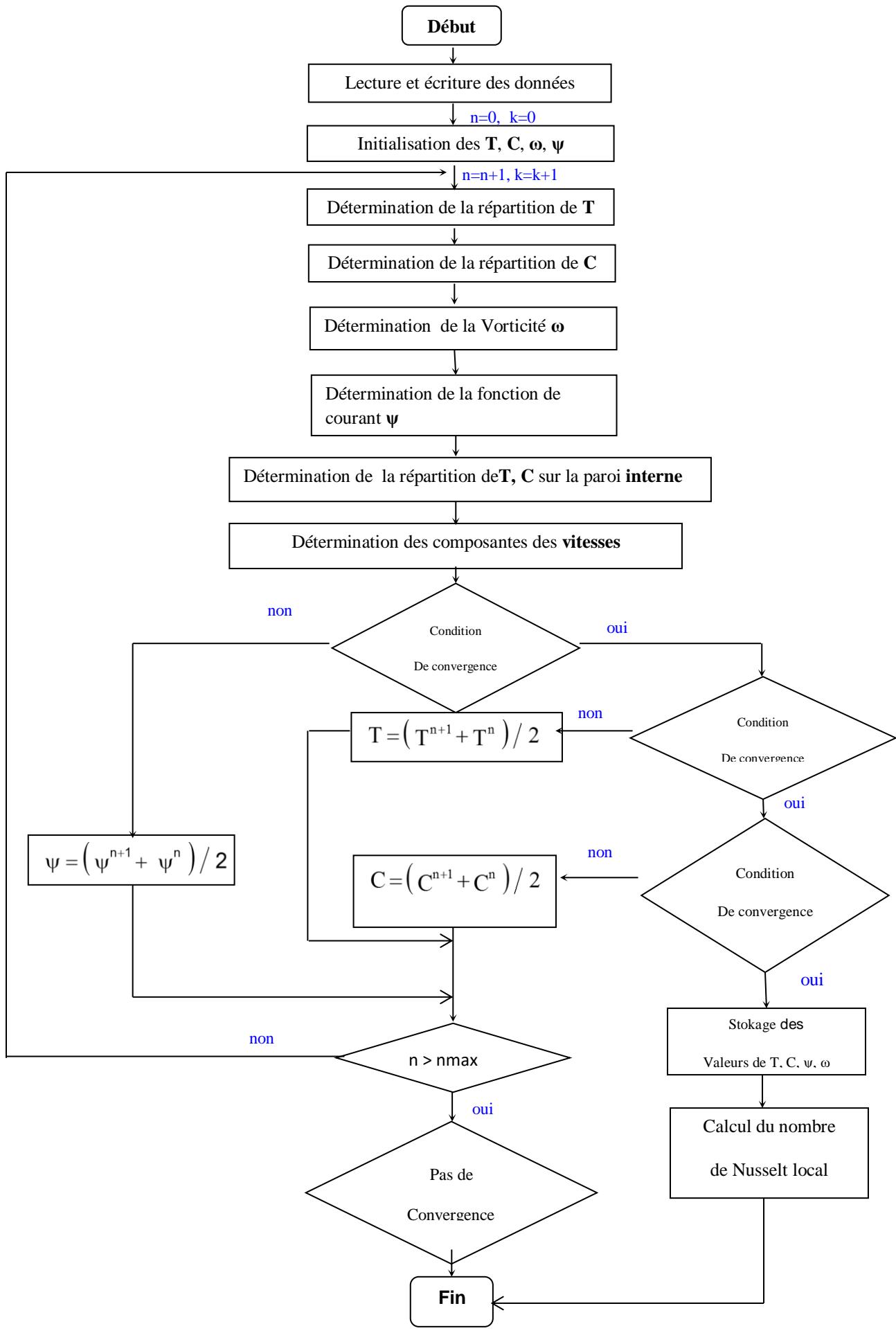
Nous procémons à la résolution du système constitué par les équations (3.51), (3.52), (3.53) et (3.54) selon la démarche suivante :

1. Mise en place des valeurs initiales de la concentration, de la température, de la fonction de courant et de la vorticité sur l'ensemble du maillage.
2. Évaluation de la répartition de la concentration dans l'ensemble du domaine.
3. Détermination de la répartition de la température dans tout le domaine du maillage.
4. Évaluation de la répartition de la fonction de courant dans l'ensemble du domaine.
5. Détermination de la distribution de la vorticité dans le domaine de calcul.
6. Détermination des composantes de la vitesse selon les directions du maillage.
7. L'itération se poursuit tant que la valeur de  $\psi$  présente des variations significatives, et s'arrête dès que celles-ci deviennent négligeables, conformément au critère de convergence suivant :

$$\left| \frac{\max \psi^{n+1} - \max \psi^n}{\max \psi^{n+1}} \right| \leq 10^{-8}$$

8. Le même critère de convergence est appliqué à la température.
9. Le même critère de convergence est appliqué à la concentration.
10. Enregistrement des valeurs calculées de  $C$ ,  $T$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  à la fin du processus de convergence.

### 3.10. L'organigramme



## ***Chapitre 4***

### ***Résultats et discussions***

#### 4.1 Introduction

Ce chapitre présente les résultats obtenus ainsi que leur discussion. Afin d'illustrer ces résultats de manière optimale, ces derniers ont été segmentés en deux sections. La première se concentre sur le phénomène de convection induit exclusivement par la température, correspondant au cas où  $N=0$ , au cours de laquelle nous représentons la distribution de la température à l'aide de courbes isothermes, tandis que la circulation du nano-fluide est représentée par l'iso-courant. Le taux du transfert thermique à la surface des parois de l'anneau sera représenté par les nombres locaux et moyens de Nusselt.

La seconde partie porte sur la convection naturelle thermosolutale ( $N \neq 0$ ). La structure de l'écoulement y est représentée à l'aide de lignes de courant, celle de la concentration à l'aide des lignes d'iso-concentrations et la répartition de la température à l'aide des lignes d'isothermes. Les taux de transport de masse et de chaleur aux parois de l'anneau sont illustrés par les nombres locaux et moyens de Sherwood et de Nusselt.

Les principaux paramètres influents pris en compte dans cette étude sont :

Paramètres d'écoulement :

- Le nombre de Lewis ( $Le=2$ ), exprimant le rapport entre la diffusivité thermique et la diffusivité massique.
- La proportion entre les forces de flottabilité ( $N=1$ ), qui représente la relation entre les gradients de concentration et de température.
- le nombre de Rayleigh thermique ( $10^3 \leq Ra \leq 5 \times 10^5$ ), qui représente la variation thermique.

Paramètres géométriques :

- L'angle d'inclinaison de l'anneau «  $\gamma$  »
- Les excentricités respectives des cylindres elliptiques interne ( $e_1$ ) et externe ( $e_2$ ).

#### 4.2 Etude de maillage

Une procédure approfondie de test de maillage a été réalisée pour s'assurer que la solution finale ne dépend pas du maillage. Il y a une augmentation de la taille du maillage de  $11 \times 21$  à  $71 \times 141$ . Le tableau 4.1 illustre les valeurs maximales de la fonction de courant, ainsi que les valeurs moyennes des nombres de Nusselt et de Sherwood sur la paroi interne, obtenues pour divers maillages avec  $Ra = 10^3$ , l'angle d'inclinaison  $\gamma = 0^\circ$ , les excentricités  $e_1=0.8$  et  $e_2=0.6$ , et différentes concentrations volumiques de nanoparticules  $\phi = (0, 0.03, 0.06)$ . Par conséquent, il est décidé de sélectionner  $61 \times 121$ .

**Tableau 4.1:** Les valeurs maximales de la fonction de courant et aussi les valeurs moyennes des nombres de Sherwood et de Nusselt sur la paroi interne, obtenues pour différents maillages

Maillage			11×21	21×41	31×61	41×81	51×101	<b>61×121</b>	71×141
Ra=10 <sup>3</sup>	$\phi = 0$	$\overline{Nu}_i$	2.39	2.45	2.47	2.48	2.48	2.49	2.49
		$\overline{sh}_i$	2.40	2.53	2.53	2.53	2.52	2.52	2.52
		$\psi_{max}$	0.65	0.66	0.67	0.67	0.67	0.66	0.66
	$\phi = 0.03$	$\overline{Nu}_i$	2.61	2.67	2.69	2.70	2.71	2.72	2.72
		$\overline{sh}_i$	2.62	2.76	2.75	2.75	2.75	2.75	2.75
		$\psi_{max}$	0.59	0.60	0.60	0.60	0.60	0.60	0.60
	$\phi = 0.06$	$\overline{Nu}_i$	2.84	2.91	2.93	2.95	2.95	2.96	2.96
		$\overline{sh}_i$	2.85	3.00	3.00	3.00	3.00	2.99	2.99
		$\psi_{max}$	0.54	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55

### 4.3 Validation numérique

Les résultats numériques sont comparés au cas du transport thermique par convection naturelle purement thermique au sein de deux cylindres elliptiques concentriques [83] et [37] pour la validation du modèle mathématique et numérique.

Le tableau 4.2 présente la variation du nombre moyen de Nusselt. Dans les deux cas, on note que ces valeurs sont en excellent accord.

**Tableau 4.2 :** Comparaison des nombres de Nusselt moyens aux ellipses externe et interne obtenus dans ce travail avec les résultats d'autres auteurs.

$e_I$	$\Theta$	$Ra_t$	$Nu_o$	$Nu_o$	$Nu_o$	$Nu_i$	$Nu_i$	$Nu_i$
				(Nos résultats)	[83]	[37]	(Nos résultats)	[83]
0.90	0	10 <sup>4</sup>	1.17	1.19	1.15	3.46	3.53	3.54
0.86	90	10 <sup>4</sup>	1.37	1.35	1.39	3.73	3.68	3.70
0.86	90	4x10 <sup>4</sup>	1.90	1.93	1.87	5.20	5.34	5.27

#### 4.4 Première partie (convection naturelle)

Dans cette partie où on traite uniquement le transfert thermique par convection naturelle dans un anneau elliptique remplie de nano-fluide cuivre-eau, on va examiner l'effet de la fraction volumique des nanoparticules, l'angle d'inclinaison et le nombre de Rayleigh sur le taux de transfert thermique. Les résultats sont présentés sous forme des isothermes et des lignes de courant, ainsi que des nombres de Nusselt locaux et moyens.

##### 4.4.1 L'impact du nombre de Rayleigh et de la fraction volumique de nanoparticules

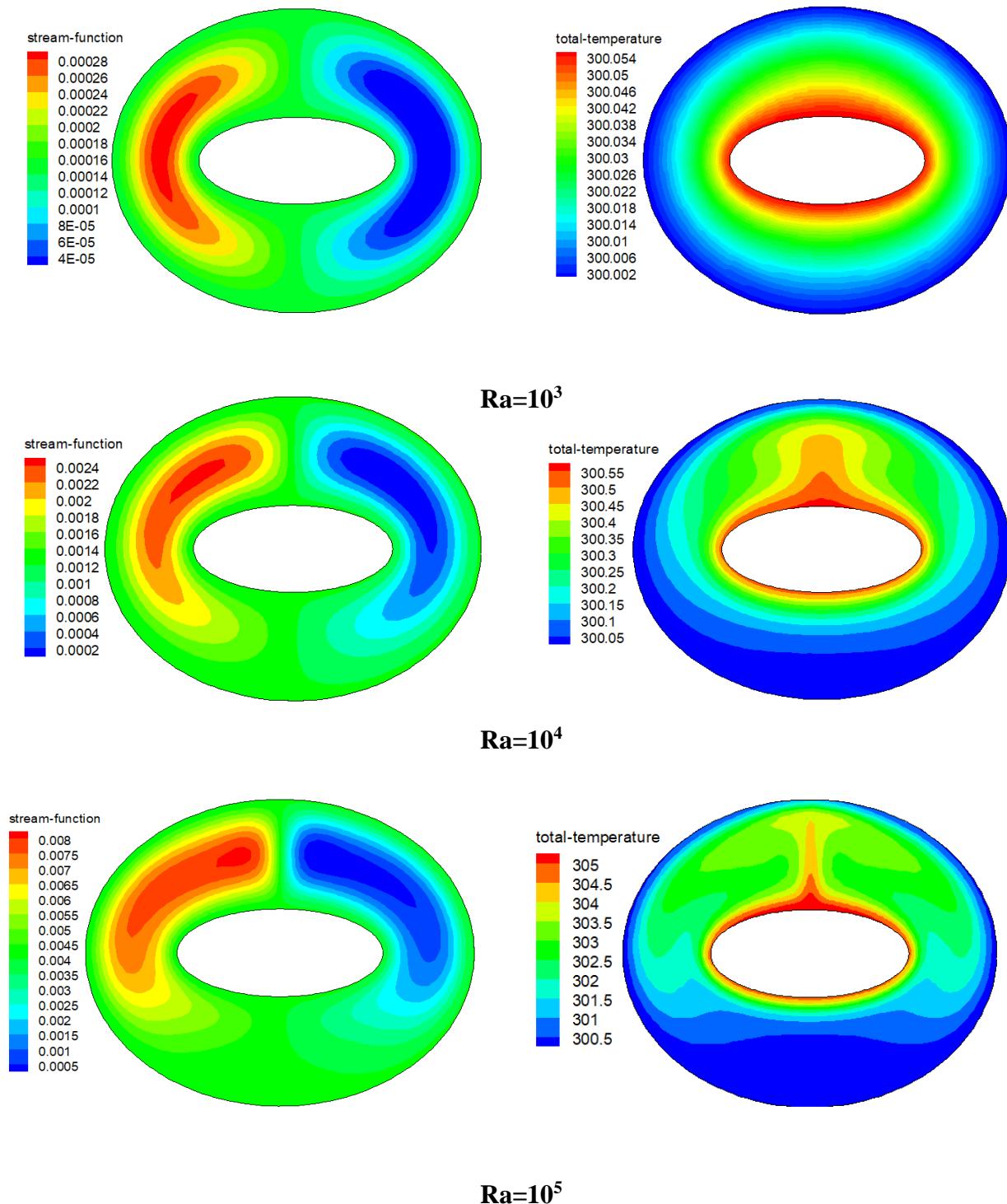
###### 4.4.1.1 Les isothermes et les iso-courants

La figure 4.1 représente les isothermes et les isocourants pour diverses valeurs de Rayleigh lorsque  $\phi=0\%$ . On observe qu'à  $Ra=10^3$ , la conduction est dominante, où les contours des isothermes sont presque concentriques et parallèles, et la répartition thermique montrant une baisse de température de l'ellipse chaude vers l'ellipse froide. Le flux est structuré en deux cellules tournant très lentement en sens opposé, et la fonction de courant présente des valeurs très faibles. Pour  $Ra = 10^4$ , il y a des changements significatifs dans les lignes des isothermes et la fonction de courant présente une augmentation marquée de ses valeurs, indiquant une transition du transfert thermique par conduction au transfert thermique par convection, toutefois cette dernière demeure peu prononcée. Pour  $Ra=10^5$ , la convection est prédominante, il est évident qu'à mesure que le nombre de Rayleigh croît, l'épaisseur de la couche isotherme près de la paroi du cylindre s'élargit progressivement. Ainsi, l'écart de température entre les parois elliptiques augmente. Le champ d'écoulement se compose de deux cellules symétriques qui tournent lentement dans la direction opposée et la fonction de courant présente une augmentation significative de ses valeurs. Il est observé que l'élévation du nombre de Rayleigh se traduit par une hausse du transport de chaleur.

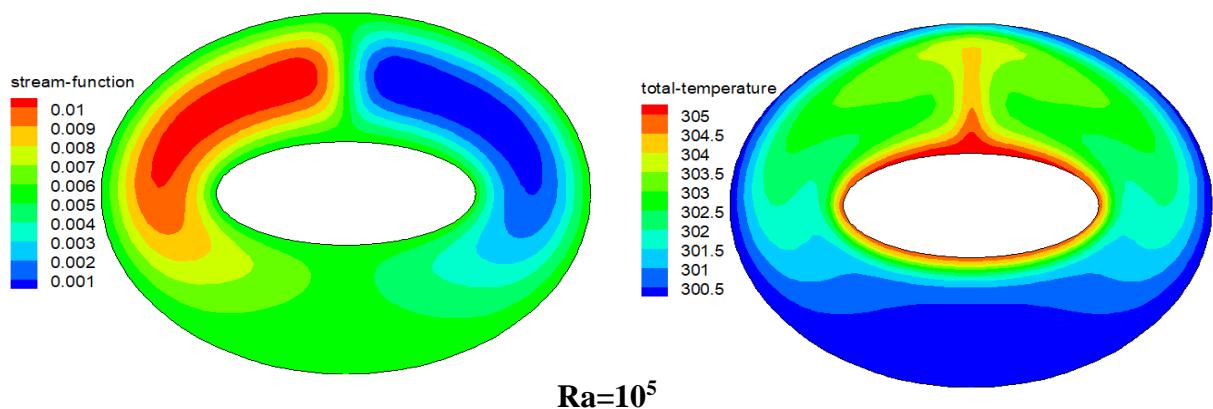
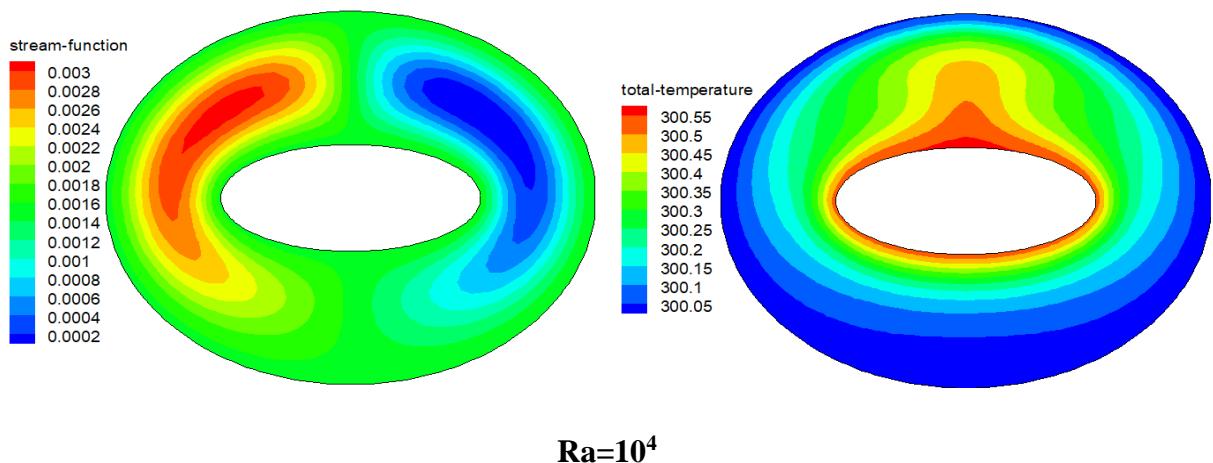
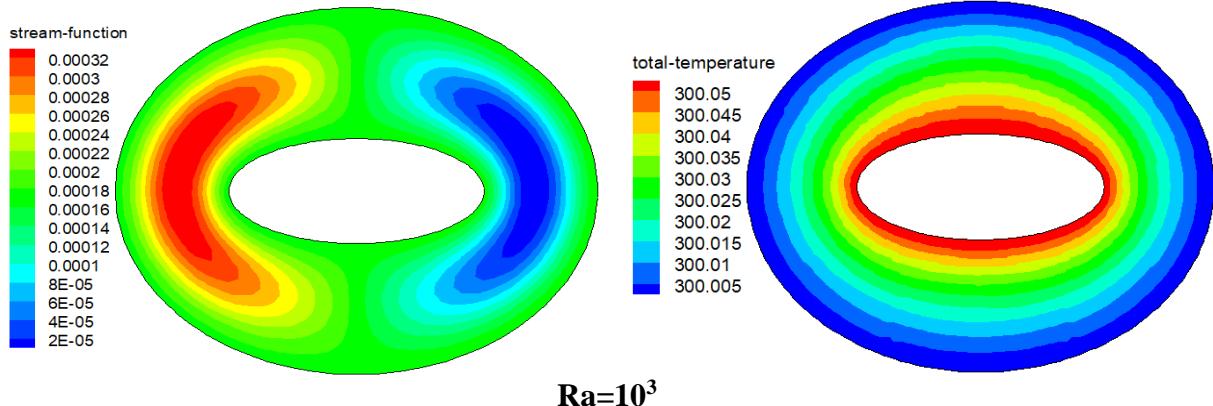
Les figures 4.2 et 4.3 représentent les lignes isothermes et isocourants pour diverses valeurs de Rayleigh à  $\phi=4\%$  et  $\phi=8\%$  respectivement. On observe qu'à  $Ra=10^3$ , les contours des isothermes sont presque concentriques et parallèles. La répartition thermique montrant une baisse de température de la paroi de l'ellipse chaude vers la paroi de l'ellipse froide, et la conduction est dominante. Le champ d'écoulement est constitué de deux cellules symétriques animées de rotations lentes en sens opposés, et la fonction de courant présente des valeurs faibles. Pour  $Ra = 10^4$ , Le champ d'écoulement est constitué de deux cellules qui tournent rapidement en sens opposé. L'intensité de l'écoulement, représentée par la fonction de courant, s'accroît de manière notable, indiquant une transition du transfert thermique par conduction vers le transfert thermique par convection, cependant elle reste relativement faible. Pour  $Ra=10^5$ , la convection est prédominante. On observe qu'une augmentation du nombre de Rayleigh entraîne un épaississement de la couche isotherme proche de la paroi du cylindre. Ainsi, le gradient de température entre les parois des ellipses augmente. Dans ces régions, le flux est plus rapide. On constate des valeurs élevées de la fonction de courant et de taux de transport thermique.

L'impact de la proportion de nanoparticules de cuivre sur la structure du flux est illustré dans les figures 4.2 et 4.3. Il est évident que l'ampleur des fonctions de courant augmente avec

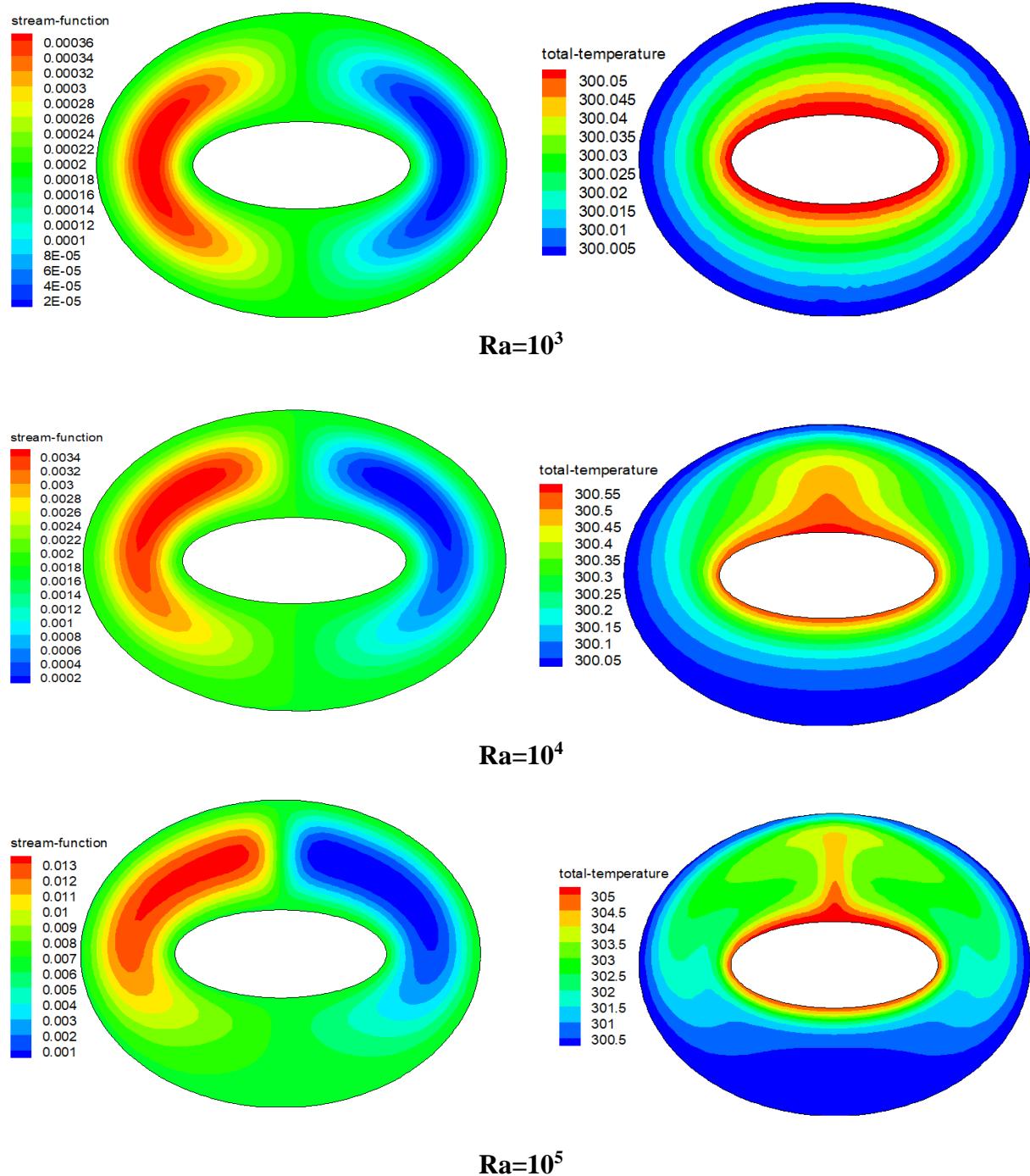
l'élévation de la proportion de nanoparticules provoquant ainsi une amélioration du transport de chaleur



**Figure 4.1** Les lignes isothermes et iso-courants pour diverses valeurs du Rayleigh à  $\phi = 0\%$



**Figure 4.2** Les lignes isothermes et isocourants pour diverses valeurs du Rayleigh à  $\phi = 4\%$



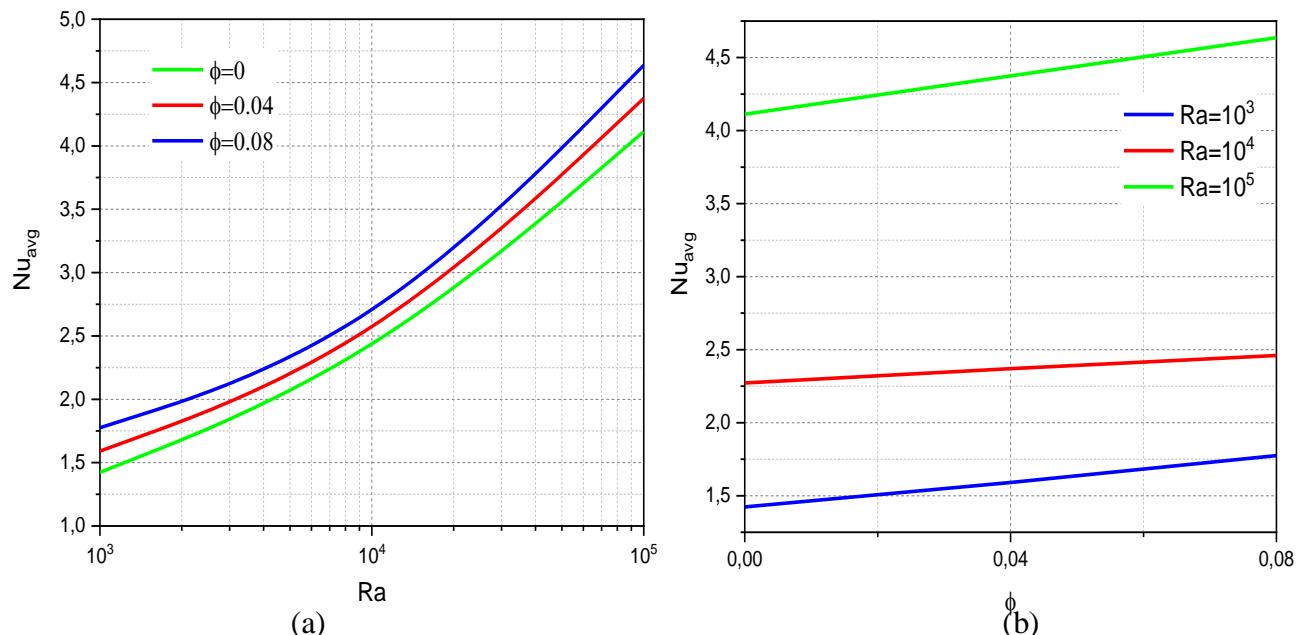
**Figure 4.3** Les lignes isothermes et isocourants pour diverses valeurs du Rayleigh à  $\phi = 8\%$

#### 4.4.1.2 Le nombre moyen de Nusselt

La variation du nombre moyen de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh, selon des proportions variées des nanoparticules illustre sur la figure 4.4 (a). Les observations montrent qu' à concentration volumique de nanoparticules constante, le nombre moyen de Nusselt croît de manière significative avec l'élévation du nombre de Rayleigh, et le taux de transfert thermique maximal est atteint en incorporant des nanoparticules de cuivre dans le liquide de

base. Il est évident qu'à des nombres de Rayleigh élevés, lorsque la convection est prédominante, l'effet de la concentration des nanoparticules est plus perceptible.

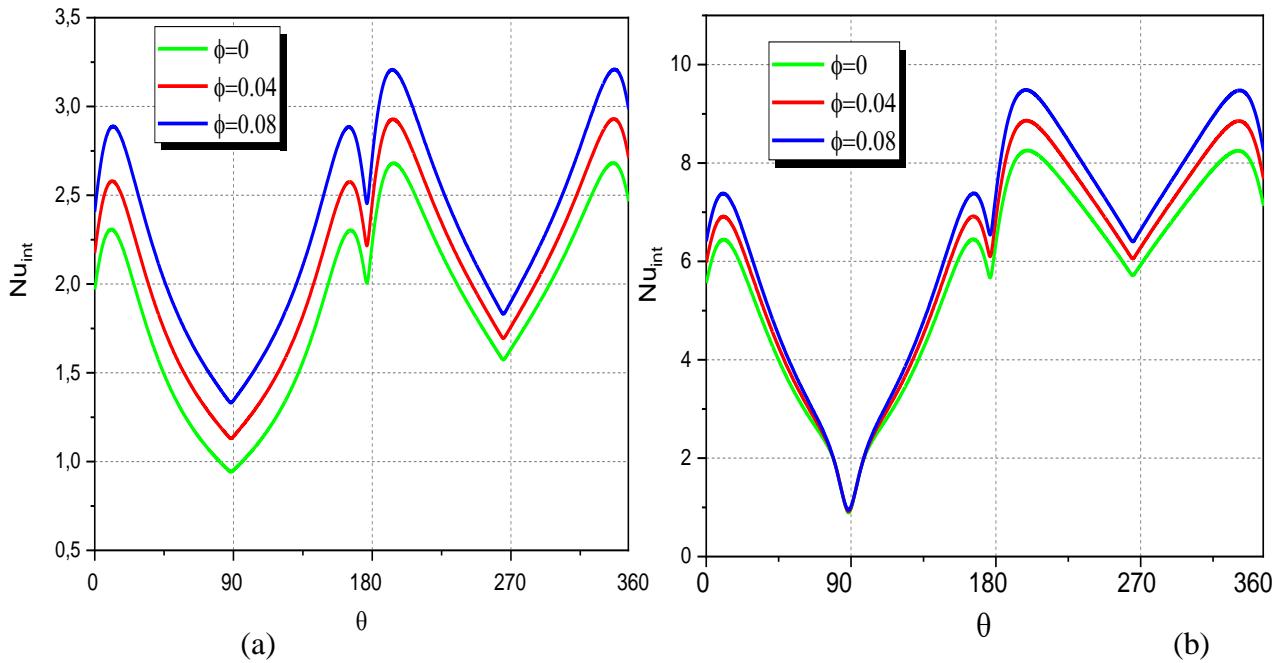
La figure 4.4 (b) met en évidence l'impact de la concentration de nanoparticules sur le nombre moyen de Nusselt pour diverses valeurs du Rayleigh. Les observations montrent qu'à nombre de Rayleigh constant, le nombre de Nusselt croît linéairement en augmentant la concentration de nanoparticules, cette élévation devient plus considérable (la pente de la ligne est augmentée) pour une forte valeur de Rayleigh ( $Ra = 10^5$ ).



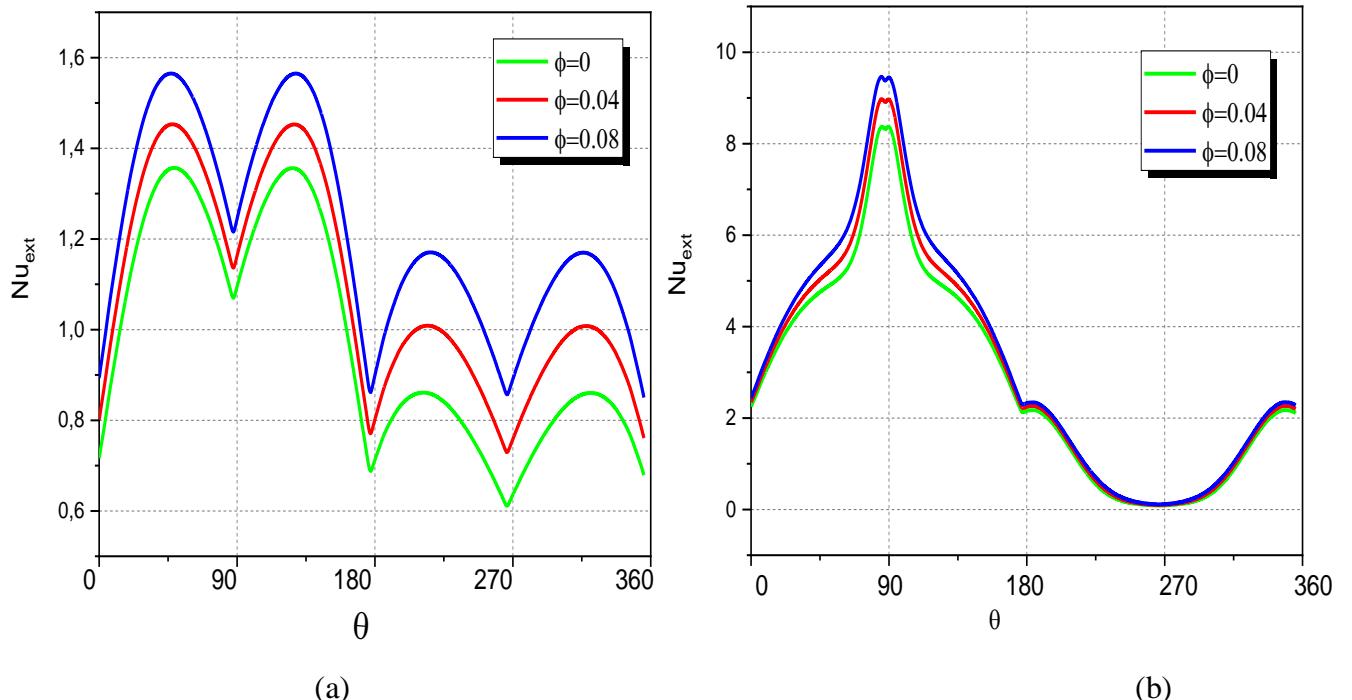
**Figure 4.4** La distribution du nombre moyen de Nusselt en fonction de la concentration des nanoparticules et du nombre de Rayleigh

#### 4.4.1.3 Le nombre de Nusselt local

Les figures 4.5 et 4.6 montrent la distribution des valeurs locales du nombre de Nusselt au niveau des parois interne et externe du cylindre, respectivement. Il est remarqué que les valeurs locales minimales du nombre de Nusselt le long du paroi intérieur sont obtenues à la position  $\theta = 90^\circ$  (au milieu du fond le plus froid) ainsi que les valeurs locales les plus faibles du nombre de Nusselt le long du paroi extérieur sont obtenues à la position  $\theta = 270^\circ$ . De plus, on observe que l'existence de nanoparticules affecte les valeurs locales maximales du nombre de Nusselt (sur les parois intérieures et extérieures) lorsque le nombre de Rayleigh est élevé, mais pas sur les valeurs les plus faibles. Nous observons également qu'un nombre de Rayleigh élevé conduit à des valeurs locales maximales plus importantes du nombre de Nusselt.



**Figure 4.5** Les valeurs locales du nombre de Nusselt le long des parois intérieures du cylindre pour diverses concentrations des nanoparticules en (a)  $Ra=10^3$  et (b)  $Ra=10^5$

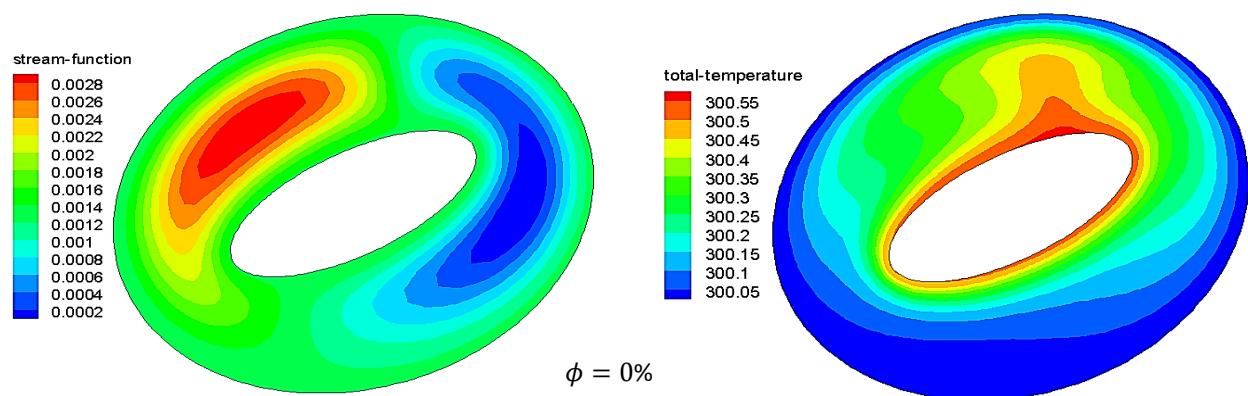


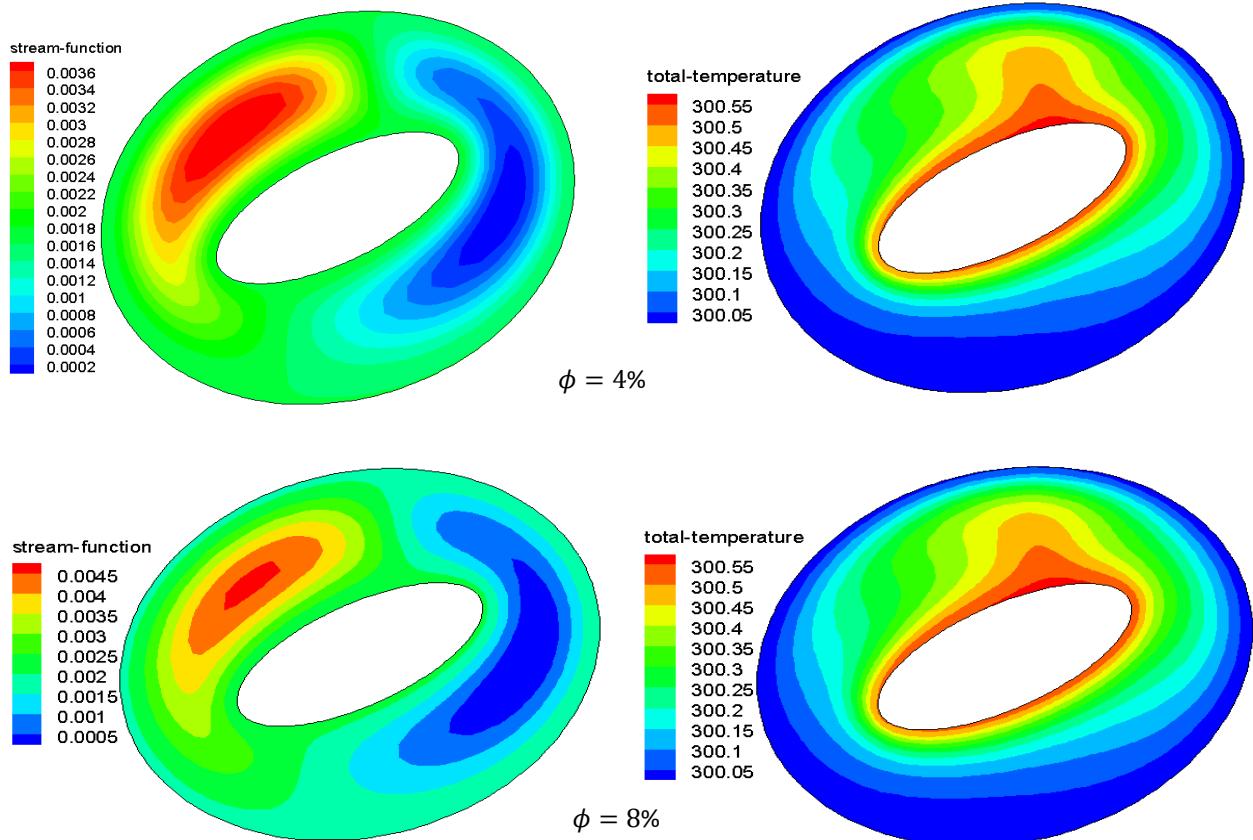
**Figure 4.6** Les valeurs locales du nombre de Nusselt le long des parois extérieures du cylindre pour diverses concentrations des nanoparticules en (a)  $Ra=10^3$  et (b)  $Ra=10^5$

#### 4.4.2 L'impact de l'inclinaison

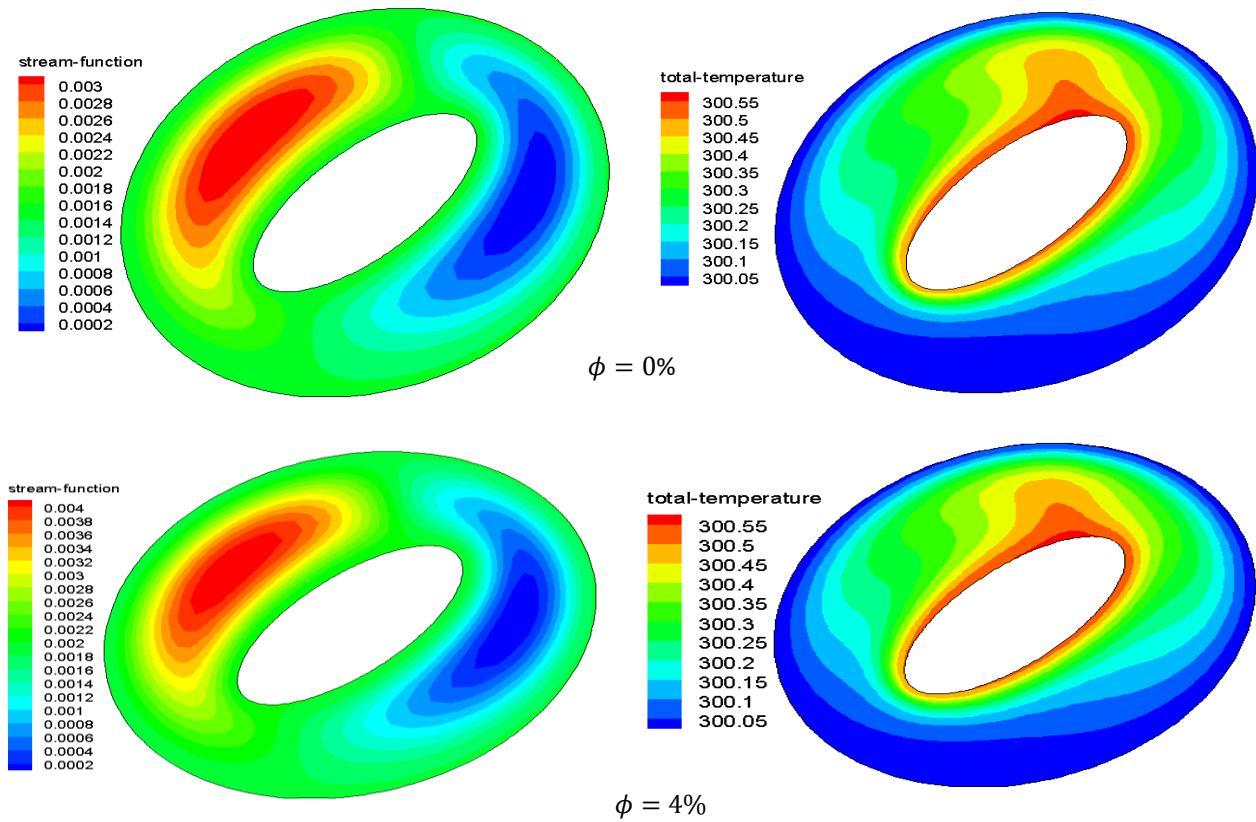
##### 4.4.2.1 Les isothermes et les iso-courants

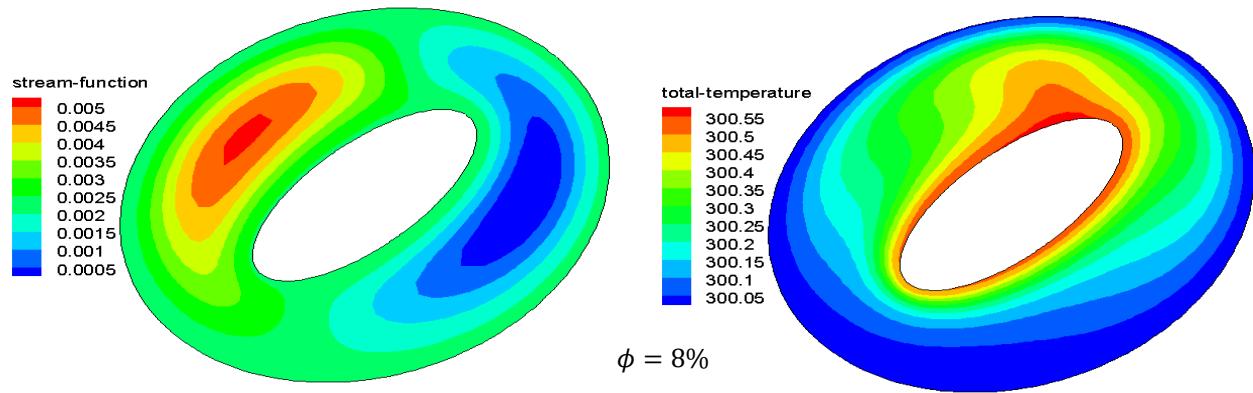
Les figures 4.7, 4.8 et 4.9 illustrent les isocourants et les isothermes pour diverses valeurs de concentration de nanoparticules et d'angle d'inclinaison égale à  $\gamma = 30^\circ, 45^\circ, et 60^\circ$ , dans l'ordre, lorsque le nombre de Rayleigh égal à  $Ra=10^4$ . On observe que pour toutes les valeurs de l'angle d'inclinaison ainsi que de le pourcentage volumique des nanoparticules, les isothermes ont la forme d'un champignon. La chaleur est transférée de la paroi elliptique interne jusqu'à la paroi elliptique externe. Dans le cas d'une enceinte inclinée  $\gamma = 30^\circ$  lorsque  $\phi = 0$ , la structure du flux est formée par deux cellules animées de rotations lentes en sens opposés, et la fonction de courant présente des valeurs très petites, avec une valeur maximale égale à  $\Psi_{max} = 0.0028$ . Pour  $\phi = 0.04$  et  $\phi = 0.08$ , la structure du flux est formée par deux cellules tournant rapidement dans des directions contraires, et la fonction de courant montre une élévation significative de ses valeurs, avec des valeurs maximales égales à  $\Psi_{max} = 0.0036$  et  $\Psi_{max} = 0.0045$ , respectivement. On note que les intensités d'iso-courants augmentent avec la hausse de la concentration de nanoparticules. Dans le cas d'une enceinte inclinée  $\gamma = 45^\circ$ , on observe que pour toutes les valeurs de la concentration des nanoparticules  $\phi = (0, 0.04 \text{ et } 0.08)$ , la structure de l'écoulement est formée par deux cellules animées de rotations rapides en sens opposés. Dans ces conditions, la fonction de courant présente des valeurs très élevées, avec des valeurs maximales égales à  $\Psi_{max} = 0.003$ ,  $\Psi_{max} = 0.004$ , et  $\Psi_{max} = 0.005$ , respectivement. Dans le cas de  $\gamma = 60^\circ$  avec  $\phi = (0, 0.04 \text{ et } 0.08)$ , les valeurs de la fonction de courant sont  $\Psi_{max} = (0.0032, 0.004$ , et  $0.005$ ), respectivement. Ainsi, on constate que pour tous les angles d'inclinaison, si l'angle d'inclinaison augmente, les valeurs de la distribution du flux augmentent. L'effet des fractions volumiques de nanoparticules de cuivre et de l'angle d'inclinaison sur la structure du flux est montré dans les Figs 4.7-4.9. De ces résultats, on peut conclure que plus la fraction volumique des nanoparticules et l'angle d'inclinaison augmentent, plus les valeurs des lignes de courant s'accroissent, ce qui entraîne une augmentation du taux de transfert thermique.



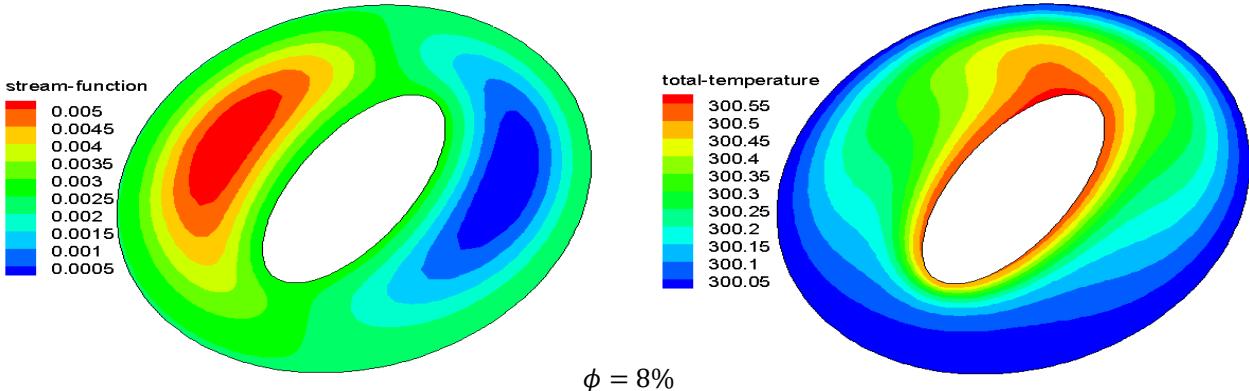
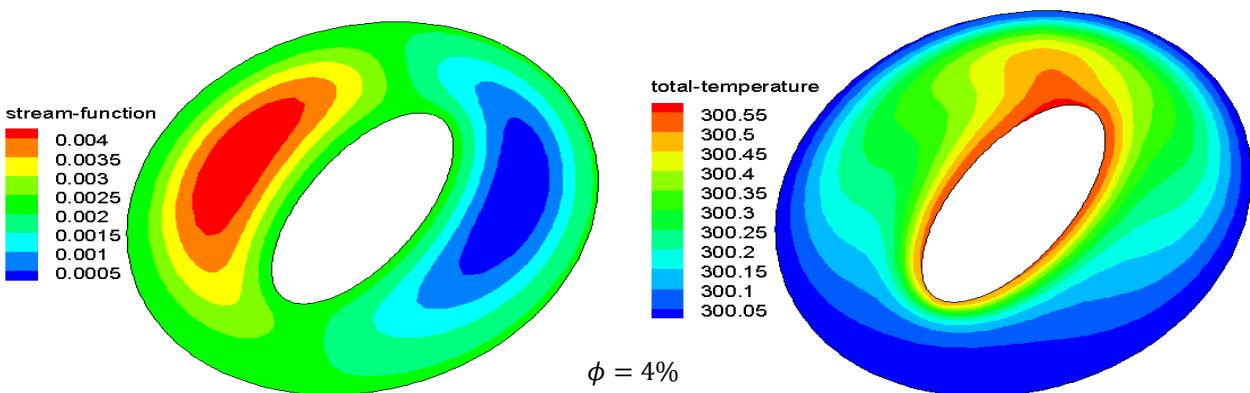
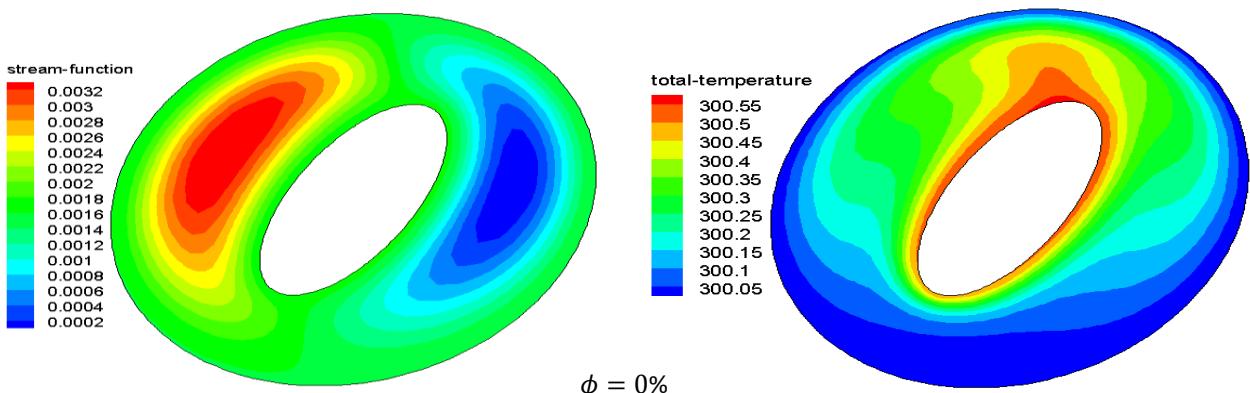


**Figure 4.7** Isothermes et isocourants pour diverses valeurs du concentration des nanoparticules à  $Ra=10^4$  et  $\gamma = 30^\circ$ .





**Figure 4.8** Isothermes et isocourants pour diverses valeurs du concentration des nanoparticules à  $\text{Ra}=10^4$  et  $\gamma = 45^\circ$ .



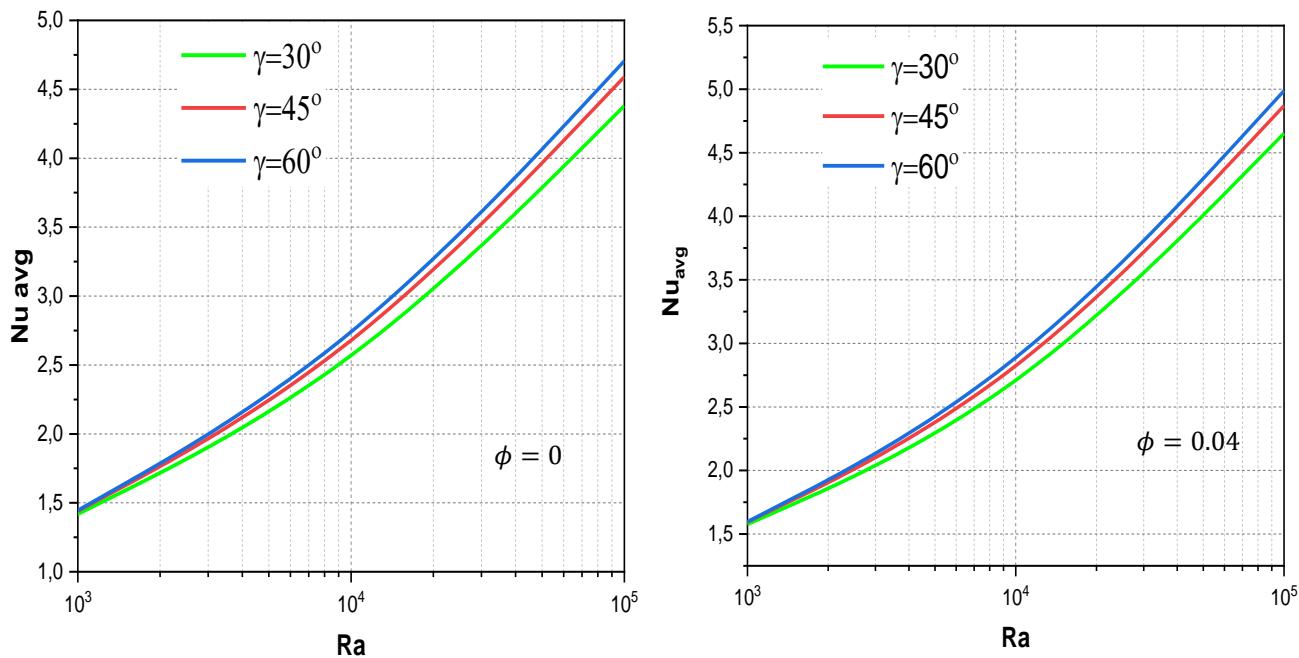
**Figure 4.9** Isothermes et isocourants pour diverses valeurs du concentration des nanoparticules à  $\text{Ra}=10^4$  et  $\gamma = 60^\circ$ .

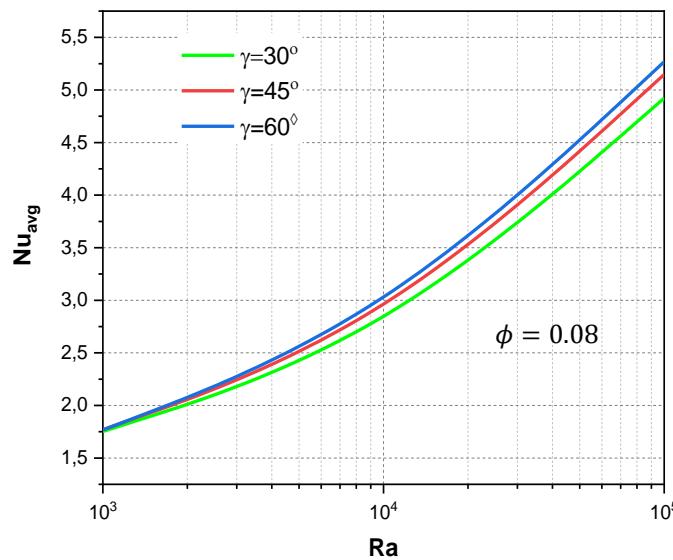
#### 4.4.2.2 Le nombre moyen de Nusselt

La figure 4.10 analyse l'influence du nombre de Rayleigh sur la valeur moyenne de Nusselt pour diverses inclinaisons lorsque  $(0 \leq \phi \leq 0.08)$ . De ces résultats, on observe que quelle que soit l'angle d'inclinaison considéré, le nombre moyen de Nusselt croît exponentiellement avec l'élévation du nombre de Rayleigh. En effet, on note qu'à faible nombre de Rayleigh, le transport thermique s'effectue principalement par conduction au niveau de l'ellipse chauffée.

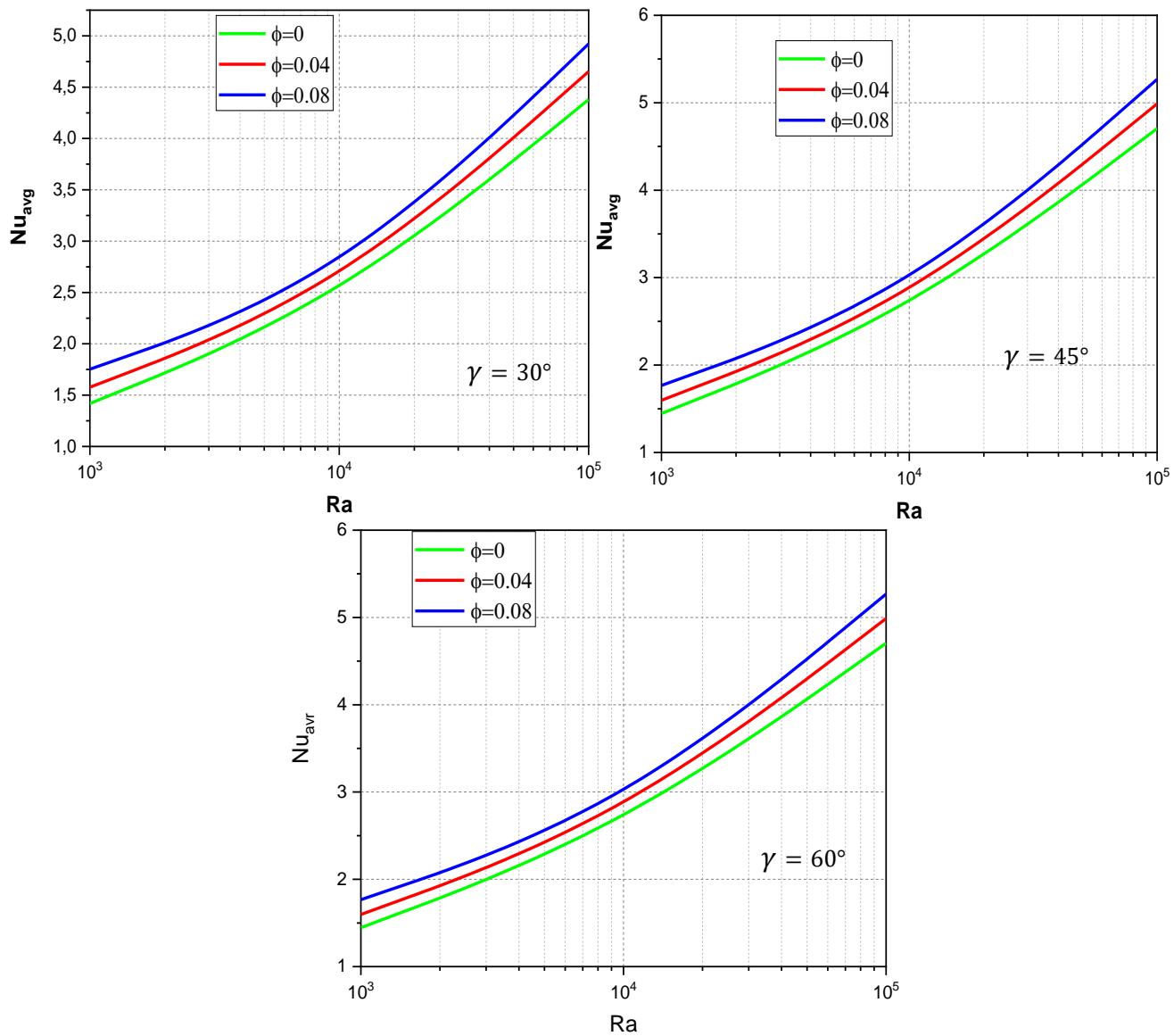
On peut également voir que l'impact de l'angle d'inclinaison devient plus marqué à des valeurs élevées du nombre de Rayleigh où le mode dominant du transfert thermique est la convection. Il est également observé qu'une élévation de la fraction volumique des nanoparticules entraîne une amélioration du nombre moyen de Nusselt.

La figure 4.11 illustre l'évolution du nombre moyen de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différents fractions volumiques de nanoparticules et différentes enceintes inclinées à  $\gamma = 30^\circ, 45^\circ$ , et  $60^\circ$ . A partir de ces résultats, on observe que pour chaque valeur de concentration volumique, le nombre moyen de Nusselt croît avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. On note également que le nombre moyen de Nusselt croît avec l'augmentation de la concentration des nanoparticules. Ainsi, à mesure que la concentration volumique et l'angle d'inclinaison augmentent, le taux de transport de chaleur augmente également.





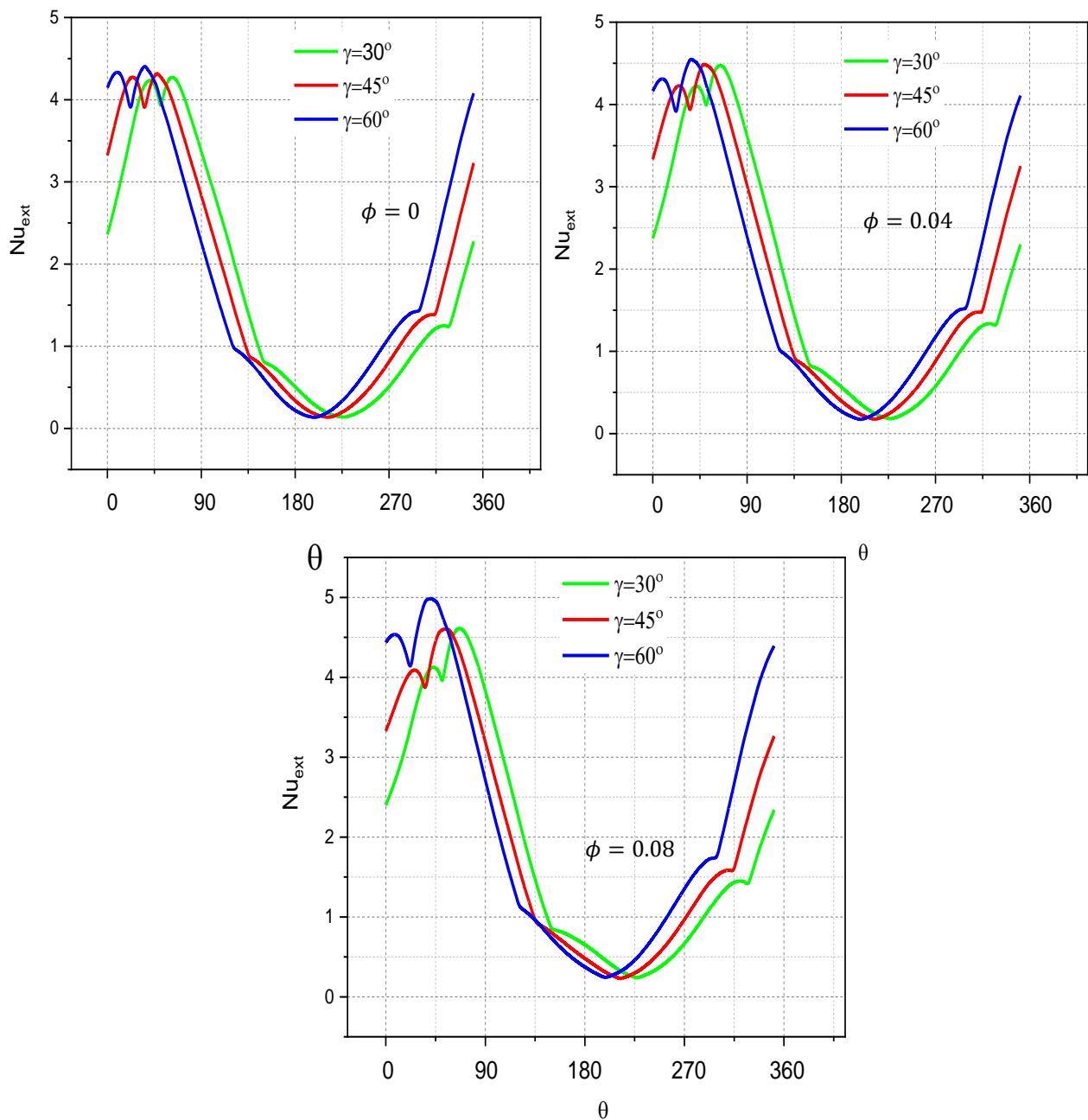
**Figure 4.10** Impact du nombre de Rayleigh sur le nombre moyen de Nusselt à plusieurs angles où  $\phi = (0.0, 0.04 \text{ et } 0.08)$ .



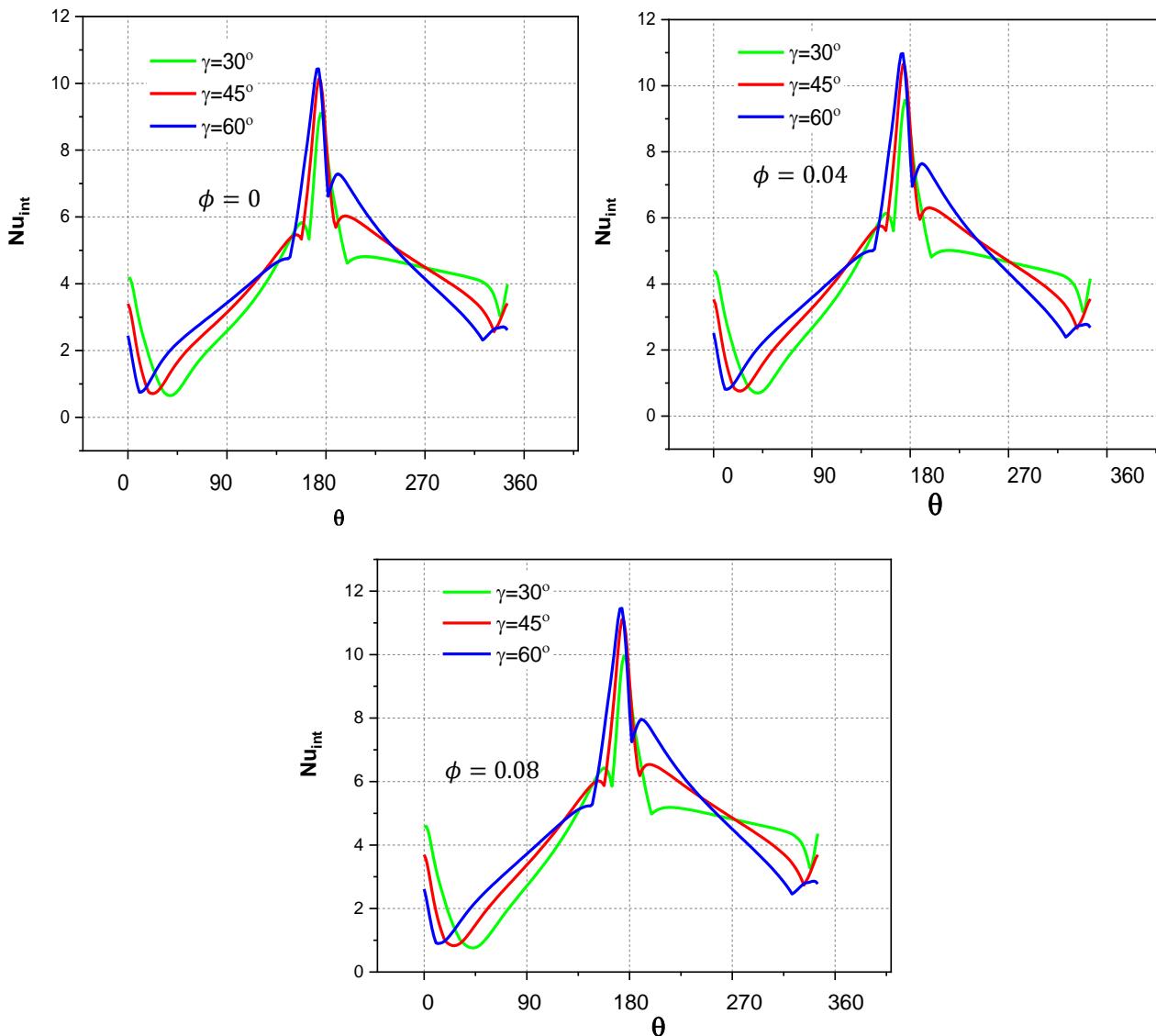
**Figure 4.11** La distribution du nombre moyen de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour diverses concentrations de nanoparticules quand  $\gamma = 30^\circ, 45^\circ, and 60^\circ$ .

#### 4.4.2.3 Nombre de Nusselt local

Les figures 4.12 et 4.13 présentent les distributions du nombre local de Nusselt sur les surfaces externe et interne de l'anneau pour différents angles d'inclinaison lorsque  $\phi = (0, 0.04, et 0.08)$  à  $Ra=10^4$ . On remarque que le nombre local de Nusselt concernant la surface extérieure de l'annulus est très faible quand  $180^\circ < \theta \leq 225^\circ$ , alors qu'il est très élevé quand  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ . Le nombre local de Nusselt au niveau de l'ellipse interne de l'anneau est très faible lorsque  $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$  alors qu'il est très élevé lorsque  $180^\circ \leq \theta < 225^\circ$ . On note également que l'angle d'inclinaison augmente, ce qui augmente le nombre local de Nusselt. En effet, on note que les nombres de Nusselt extérieurs et intérieurs montrent une distribution inverse.



**Figure 4.12** Impact de l'angle d'inclinaison sur la distribution locale du nombre de Nusselt lorsque  $\phi = (0.0, 0.04 \text{ et } 0.08)$  à  $\text{Ra}=10^4$ .



**Figure 4.13** Impact de l'angle d'inclinaison sur la distribution locale du nombre de Nusselt lorsque  $\phi = (0.0, 0.04 \text{ et } 0.08)$  à  $\text{Ra}=10^4$ .

#### 4.5 Deuxième partie (transfert de masse et de chaleur)

Dans cette étude, des simulations numériques ont été menées en faisant varier plusieurs paramètres de contrôle. Le nombre de Prandtl a été fixé à  $\text{Pr} = 6.2$ , tandis que le nombre de Lewis a été maintenu constant à  $\text{Le} = 2$ . Différentes fractions volumiques de nanoparticules de cuivre dispersées dans l'eau (fluide de base) ont été considérées :  $\phi = 0, 0.03, 0.06, 0.09$  et  $0.12$ . Par ailleurs, quatre valeurs du nombre de Rayleigh ont été analysées :  $\text{Ra} = 10^3, 10^4, 10^5$  et  $5 \times 10^5$ . L'étude s'est concentrée sur l'influence de ces paramètres sur la structure de

l'écoulement ainsi que sur les mécanismes de transfert thermique et massique dans l'espace annulaire étudié.

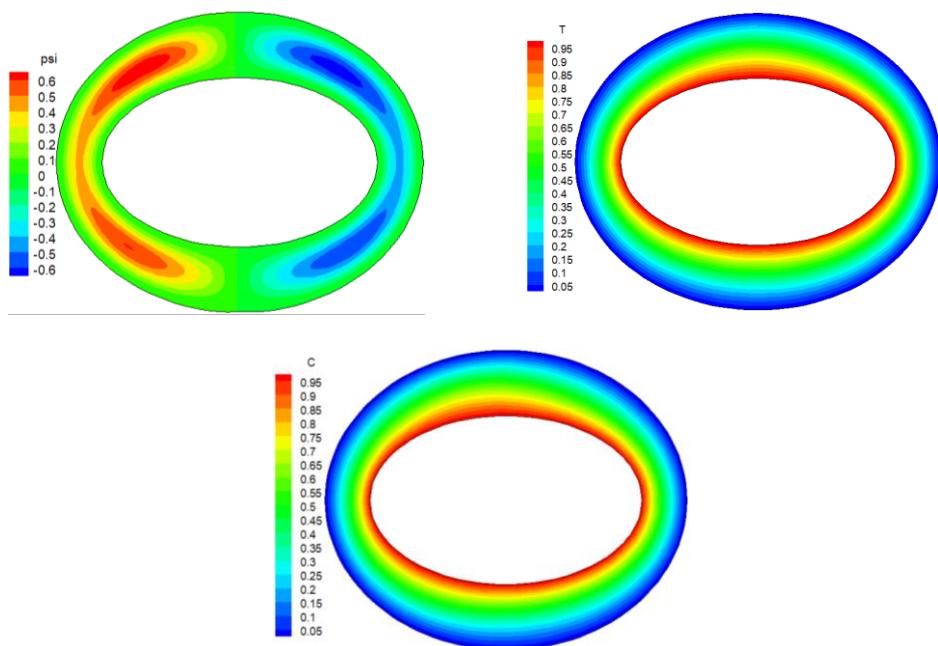
### 4.5.1 L'impact du nombre de Rayleigh

#### 4.5.1.1 les isothermes et les iso-courants et les iso-concentrations

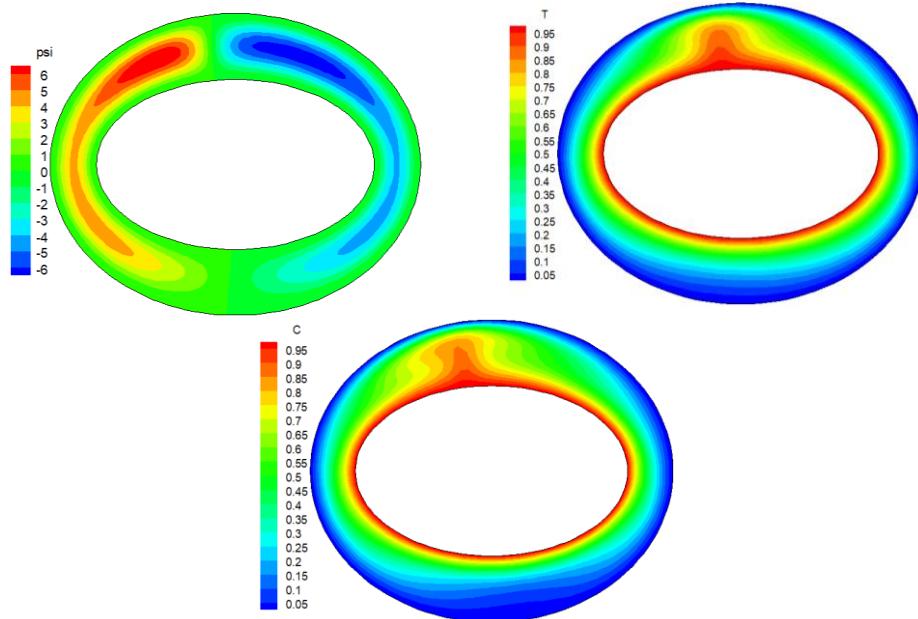
Les figures (4.14- 4.17) illustrent les lignes iso-concentrations, isothermes et iso-courants pour diverses valeurs du Rayleigh, lorsque l'angle  $\gamma$  est égal à  $0^\circ$  et  $\phi = 0$ . Ces figures révèlent que l'écoulement se développe selon un régime monocellulaire. Plus précisément, dans la zone gauche de l'anneau, la cellule de convection se déplace dans le sens trigonométrique, tandis que sur la partie droite, elle évolue dans la direction opposée. Ce comportement est dû à l'impact des forces de flottabilité, qui entraînent les particules du fluide vers le haut. La figure 4.14 illustre qu'à un petit nombre de Rayleigh ( $Ra = 10^3$ ), les lignes iso-concentrations et isothermes adoptent une forme quasi parallèle et concentrique. Le transfert massique au sein de l'anneau est principalement contrôlé par la diffusion. Les iso-courants se regroupent en deux cellules animées de rotations lentes en sens opposés.

En revanche, pour  $Ra = 10^4$ , la figure 4.15 révèle que les lignes iso-concentrations et isothermes évoluent progressivement pour adopter une forme caractéristique en champignon. On remarque également une dissymétrie entre les distributions de concentration et de température, cela s'explique par un nombre de Lewis  $Le = 2.0$ , signifiant que la diffusivité thermique est deux fois supérieure à la diffusivité massique.

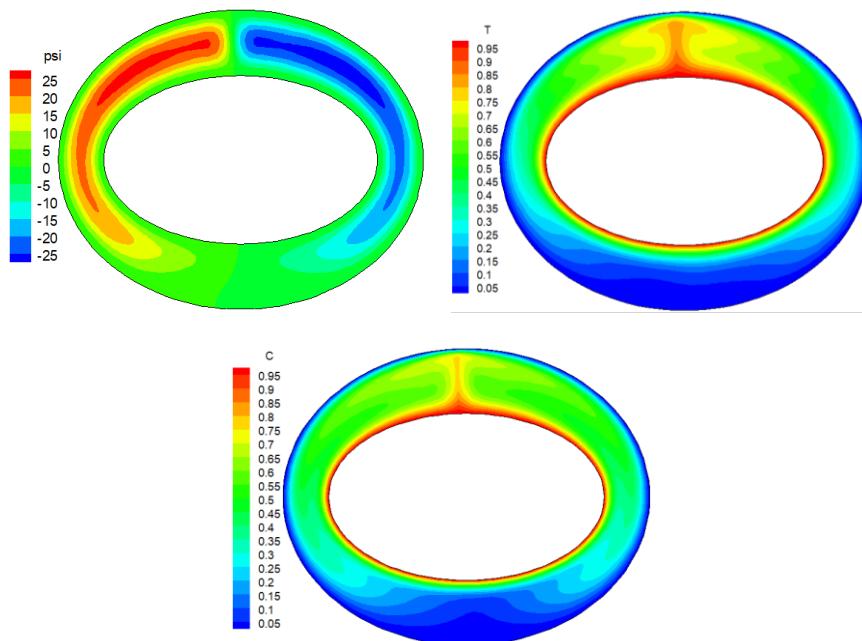
Pour un nombre de Rayleigh plus grand ( $Ra = 10^5$  et  $5 \times 10^5$ ), les figures 4.16 et 4.17 indiquent que les lignes isothermes et iso-concentrations se concentrent davantage à proximité des parois. De plus, au centre de l'anneau, les valeurs de ces isolignes restent presque constantes dans la moitié supérieure de cet anneau.



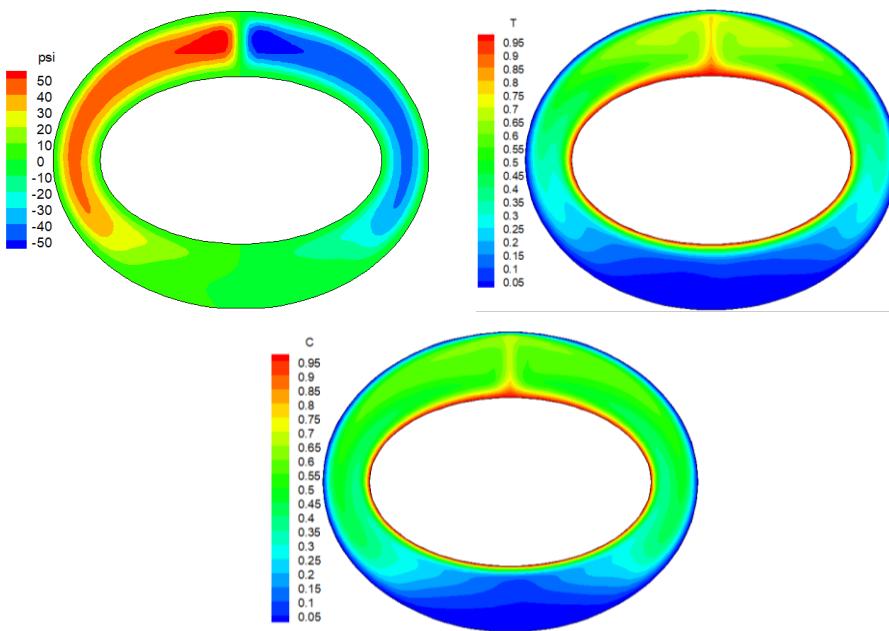
**Figure 4.14** Les lignes isothermes, iso-courants et iso-concentrations pour  $Le=2$ ,  $Ra=10^3$ ,  $N=1$ ,  $\gamma=0^\circ$ ,  $Pr=6.2$ ,  $e_2=0.6$  et  $e_1=0.8$



**Figure 4.15** Les lignes isothermes, iso-courants et iso-concentrations pour  $Le=2$ ,  $Ra=10^4$ ,  $N=1$ ,  $\gamma=0^\circ$ ,  $Pr=6.2$ ,  $e_2=0.6$  et  $e_1=0.8$ .

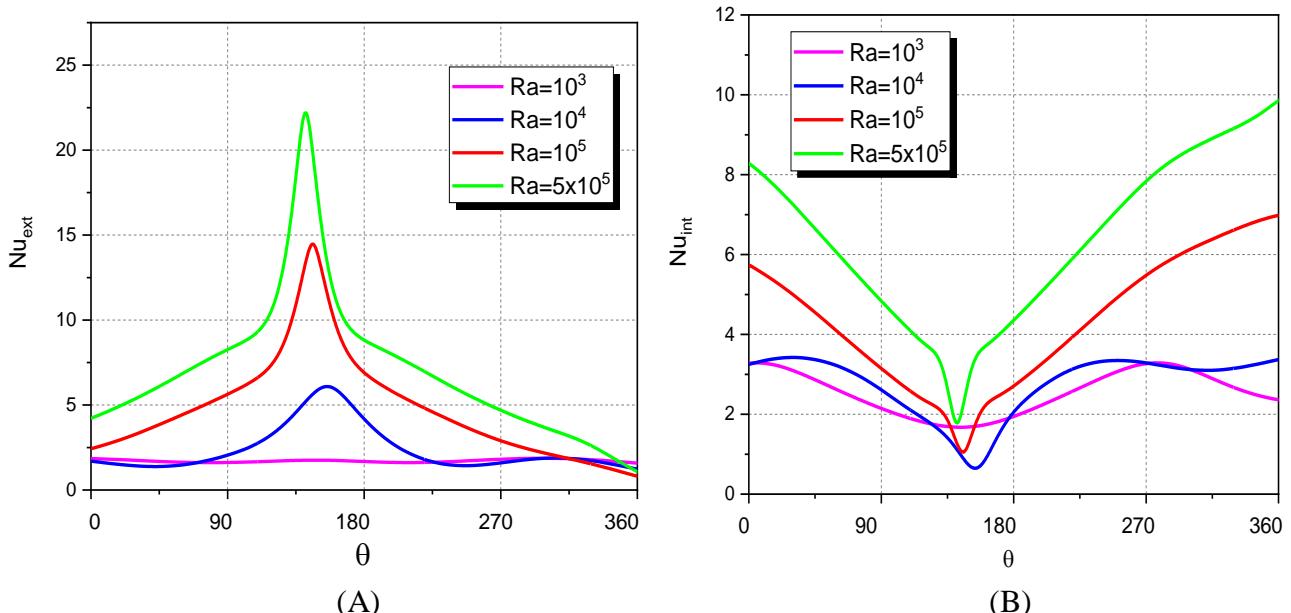


**Figure 4.16** Les lignes isothermes, iso-courants et iso-concentrations pour  $Le=2$ ,  $Ra=10^5$ ,  $N=1$ ,  $\gamma=0^\circ$ ,  $Pr=6.2$ ,  $e_2=0.6$  et  $e_1=0.8$ .

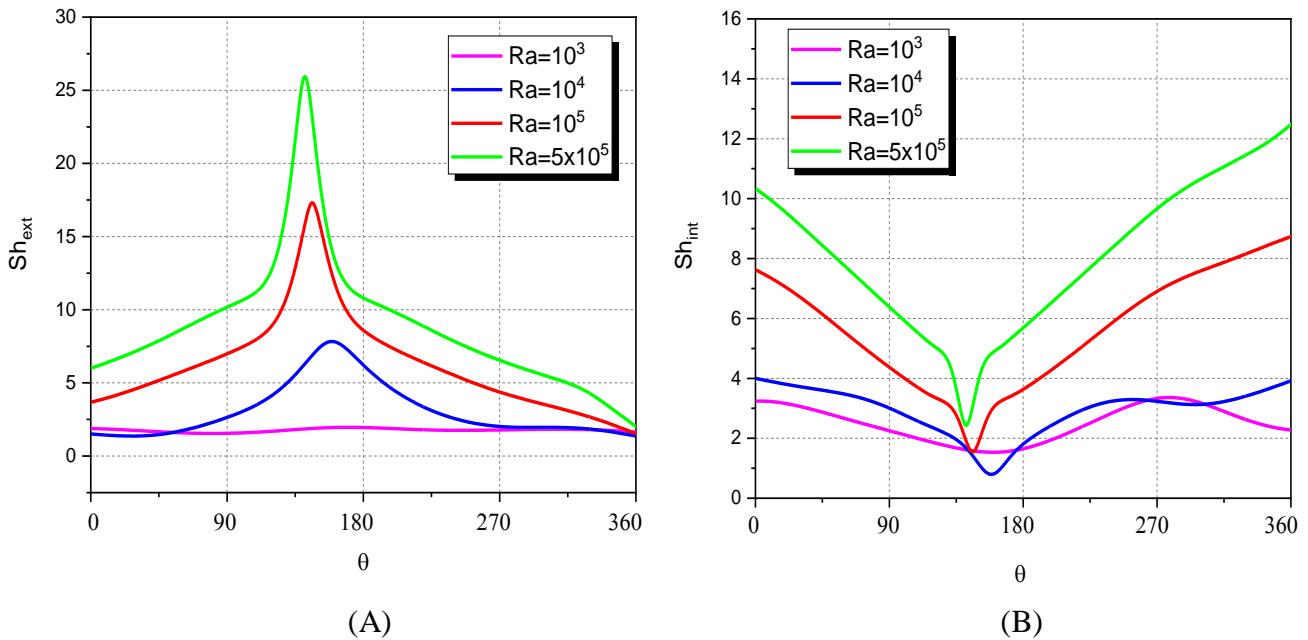


**Figure 4.17** Les lignes isothermes, iso-courants et iso-concentrations pour  $Le=2$ ,  $Ra=5\times 10^5$ ,  $N=1$ ,  $\gamma=0^\circ$ ,  $Pr=6.2$ ,  $e_2=0.6$  et  $e_1=0.8$ .

#### 4.5.1.2 Les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux



**Figure 4.18** Variation du nombre de Nusselt local pour différents valeurs de Rayleigh à  $\phi=0$ .



**Figure 4.19** Variation du nombre de Sherwood local pour différents valeurs de Rayleigh à  $\phi=0$ .

La figure 4.18(A) illustre la distribution du nombre local de Nusselt sur la surface externe de l'anneau pour différentes valeurs de Rayleigh lorsque  $\phi = 0$  et  $e_1 = 0,8$ . On remarque que pour de faibles valeurs de Rayleigh ( $Ra=10^3$ ), le nombre de Nusselt externe reste relativement faible et quasi uniforme sur tout le domaine angulaire. Cela traduit une dominance du transfert thermique par conduction avec une influence négligeable de la convection naturelle. Lorsque Rayleigh augmente à  $10^4$ , une légère augmentation de  $Nu_{ext}$  apparaît entre  $135^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , indiquant le début d'une contribution notable de la convection naturelle dans le transfert de chaleur. Pour des valeurs plus élevées de Rayleigh ( $10^5$  et  $5 \times 10^5$ ), une pointe marquée est visible autour de  $\theta = 135^\circ$ , traduisant un transfert de chaleur localement intensifié par des courants de convection plus vigoureux. De manière générale, l'élévation de Rayleigh entraîne une augmentation significative de  $Nu_{ext}$ , soulignant que la convection naturelle devient progressivement le mécanisme de transfert thermique prédominant.

La figure 4.18 (B) montre la variation du nombre de Nusselt interne selon l'angle  $\theta$  pour diverses valeurs de Rayleigh. On observe que lorsque le nombre de Rayleigh est relativement bas, telles que  $Ra=10^3$  et  $Ra=10^4$ , le profil du nombre de Nusselt interne reste relativement bas et présente une variation modérée selon l'angle  $\theta$ . On note la présence d'un minimum local dans la plage angulaire comprise entre  $135^\circ$  et  $180^\circ$ , ce qui traduit une faible intensité de convection naturelle dans cette région. Avec l'élévation du nombre de Rayleigh, notamment pour  $Ra=10^5$  et  $Ra=5 \times 10^5$ , le nombre de Nusselt interne croît globalement sur l'ensemble du domaine angulaire. Cette évolution indique une intensification notable du transfert thermique par convection naturelle. On observe également une dépression plus marquée autour de  $\theta = 135^\circ$ , suggérant la présence d'une zone de stagnation thermique ou d'un point de séparation des lignes de courant, où le transfert de chaleur est localement réduit. En revanche,

pour les angles proches de  $0^\circ$  et  $180^\circ$ , le nombre de Nusselt interne atteint ses valeurs maximales, témoignant d'un renforcement significatif du flux thermique dans ces régions.

La figure 4.19(A) montre la distribution du nombre de Sherwood local sur la surface externe de l'anneau pour différentes valeurs de Rayleigh lorsque  $\phi=0$  et  $e_1 = 0.8$ . On observe que pour de faibles valeurs de Rayleigh, notamment  $Ra=10^3$  et  $Ra=10^4$ , le profil du nombre de Sherwood externe  $Sh_{ext}$  reste globalement faible et relativement uniforme sur l'ensemble de l'intervalle angulaire. Cela suggère un transport de masse limité et peu influencé par les mouvements convectifs naturels. Cependant, à mesure que  $Ra$  augmente, notamment pour  $Ra=10^5$  et  $Ra=5\times 10^5$ , on observe une nette augmentation du  $Sh_{ext}$ , avec une intensification marquée autour de  $\theta = 135^\circ$ . Ce pic prononcé traduit une forte concentration de transfert de masse dans cette zone, en lien direct avec les courants ascendants induits par la convection naturelle.

La figure 4.19 (B) montre la variation du nombre de Sherwood interne selon l'angle  $\theta$ , pour diverses valeurs de Rayleigh. On observe que dans le cas de faibles nombres de Rayleigh ( $10^3$  et  $10^4$ ), le profil reste relativement modéré, avec une légère dépression centrée dans l'intervalle  $135^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , traduisant une zone de faible convection naturelle due probablement à une stagnation locale du fluide. À mesure que le nombre de Rayleigh croît ( $10^5$  et  $5\times 10^5$ ), la distribution de nombre de Sherwood devient plus marquée : une chute prononcée se manifeste toujours autour de  $\theta = 135^\circ$ . En revanche, les extrémités angulaires, notamment vers  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 180^\circ$ , affichent des valeurs maximales, ce qui traduit une intensification significative du transfert de masse.

On peut également noter que les nombres de Nusselt et de Sherwood externe et interne présentent une distribution opposée. La paroi externe présente un maximum, tandis que la paroi interne présente un minimum. Ces deux extrêmes sont atteints pour un angle situé approximativement dans l'intervalle  $135^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ .

Ainsi, la distribution angulaire du nombre local de Sherwood suit une tendance similaire à celle du nombre local de Nusselt, mettant en évidence une corrélation étroite entre les mécanismes de transport thermique et massique en régime de convection naturelle. De plus, les valeurs atteintes par le nombre de Sherwood sont supérieures à celles du nombre de Nusselt, traduisant un transfert de masse plus intense que le transfert de chaleur dans des conditions identiques.

## 4.5.2 Les effets de la fraction volumique

### 4.5.2.1 les isothermes et les iso-courants et les iso-concentrations

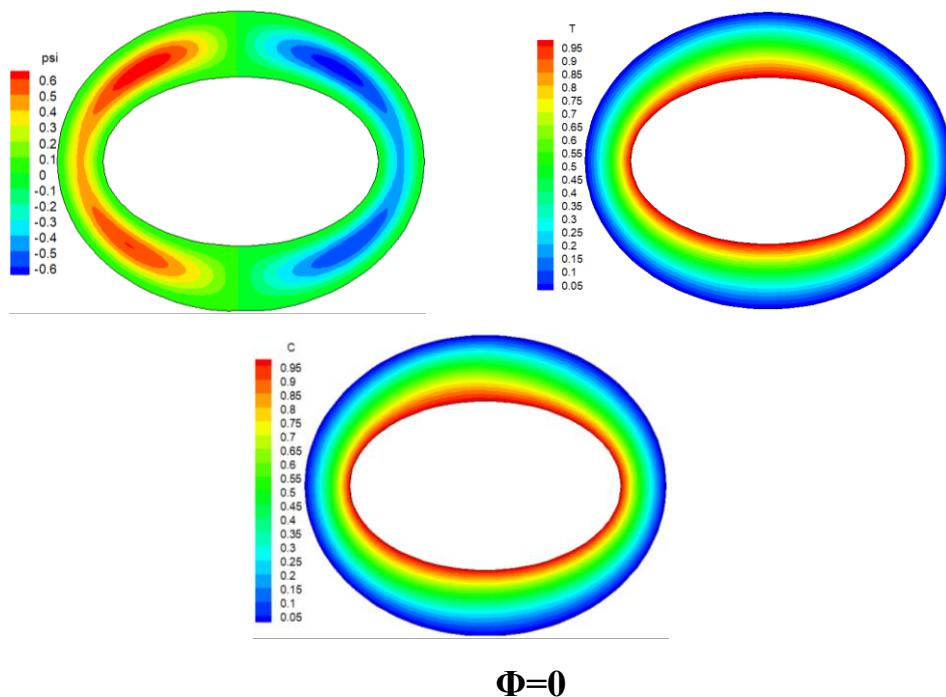
Les figures (4.20 – 4.23) illustrent les lignes isothermes, iso-courants et iso-concentrations pour diverses valeurs de Rayleigh, en fonction des fractions volumiques d'un nano-fluide. Il est observé que l'élévation du nombre de Rayleigh s'accompagne d'une intensification de la recirculation interne, résultant de forces de flottabilité plus importantes.

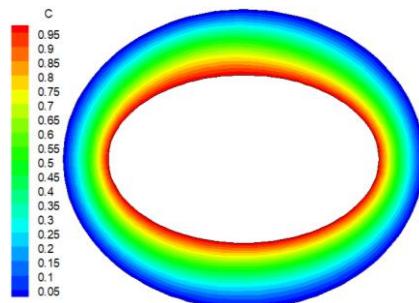
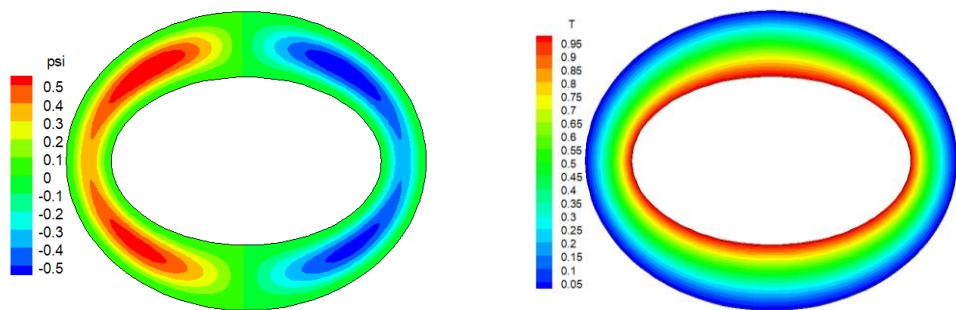
La figure (4.20) montre que les isothermes et les iso-concentrations sont des courbes presque parallèles et concentriques ce qui dénote que pour un faible nombre de Rayleigh  $Ra=10^3$ , le transport de masse dans l'espace annulaire est essentiellement contrôlé par le processus de diffusion. Les lignes de courant de fluide s'organisent en deux cellules qui tournent très lentement dans des directions opposées.

Sur la figure (4.21)  $Ra=10^4$  pour  $\Phi=0.09$  l'augmentation du nombre de Rayleigh qui traduit une intensification de transfert de chaleur et de masse , a permis l'apparition d'une bifurcation donnant naissance à un cellule supplémentaire tournant dans le sens contraire des cellules voisines. L'augmentation du nombre de Rayleigh et a fraction volumique, nous a permis donc de passer à un autre régime d'écoulement, qui est l'écoulement multicellulaire, avec l'apparition de ces bifurcations dans la partie supérieure de notre espace annulaire,

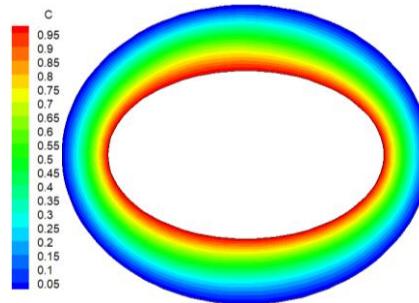
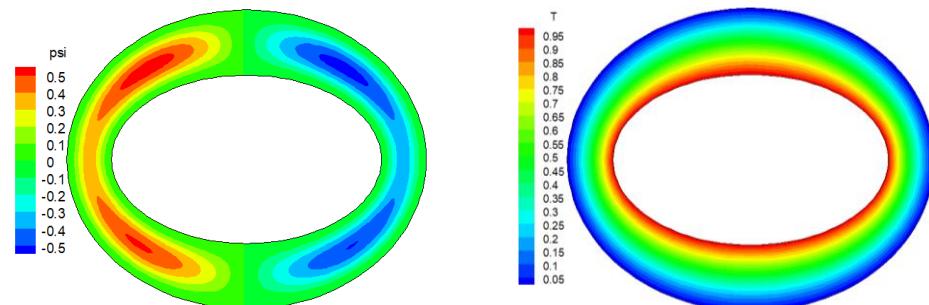
Les figures (4.22, 4.23) montrent que le transfert de chaleur et de masse augmente avec l'augmentation de la fraction volumique solide dans le nanofluide à des grands nombres de Rayleigh, les valeurs de la fonction d'écoulement augmentent et les tourbillons se déplacent vers le haut.

### 1) $Ra=10^3$

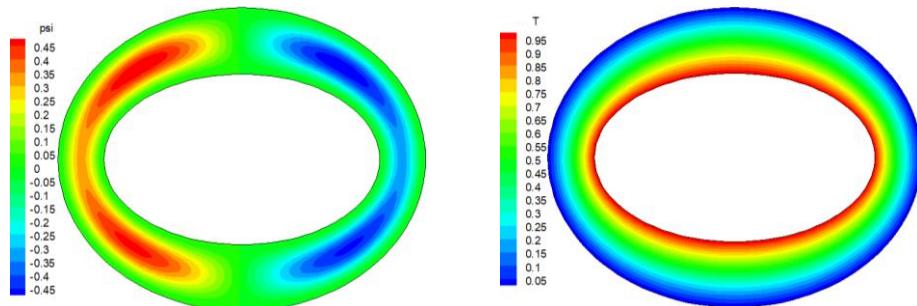


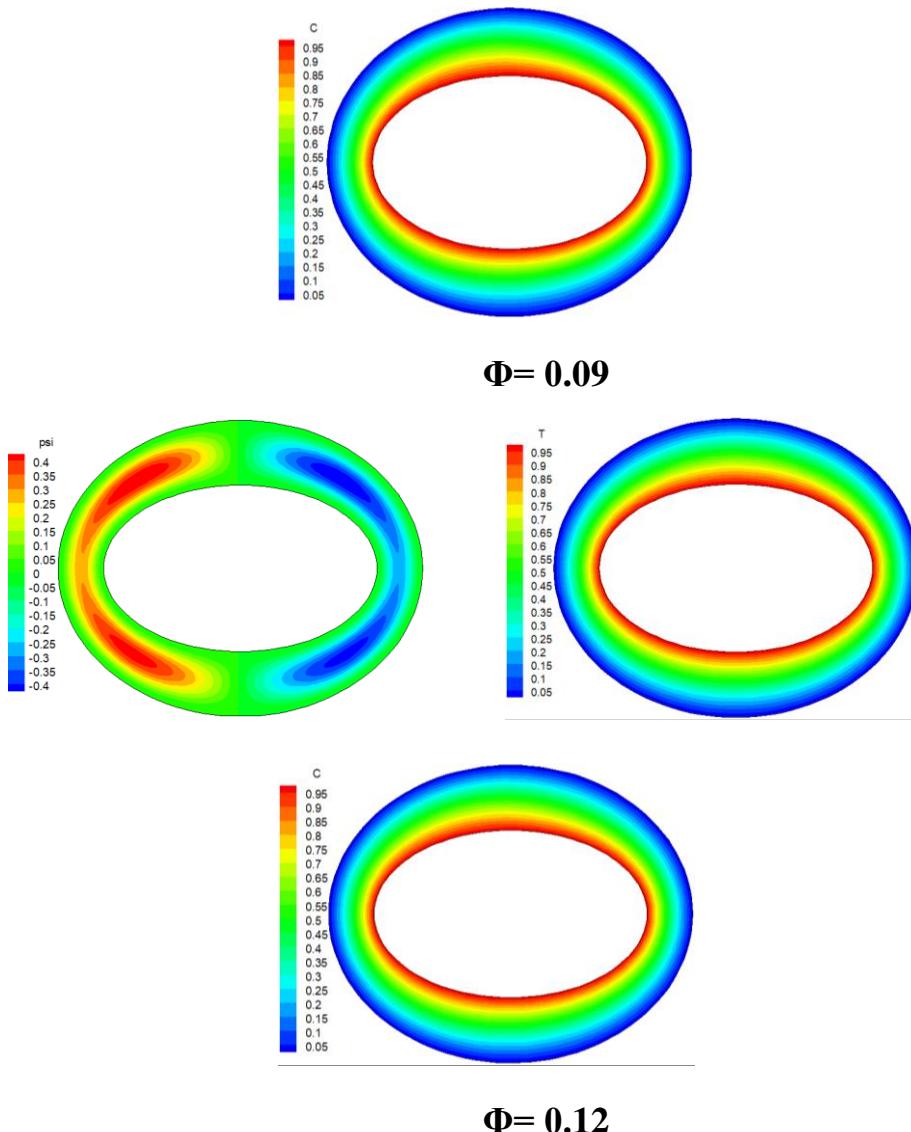


$\Phi = 0.03$



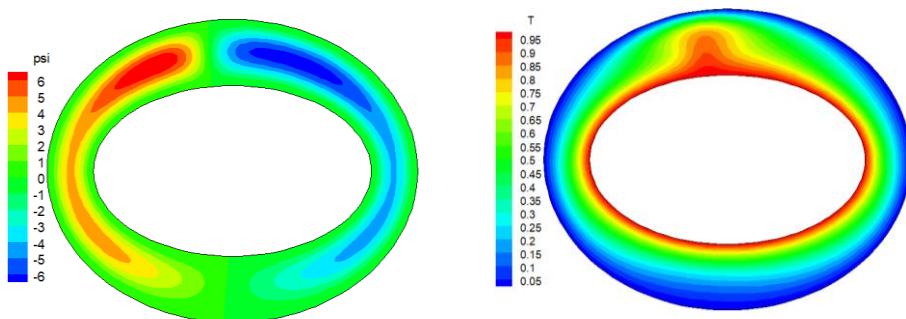
$\Phi = 0.06$

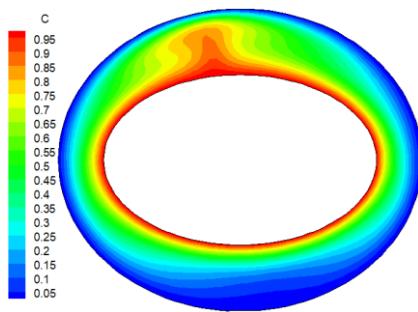




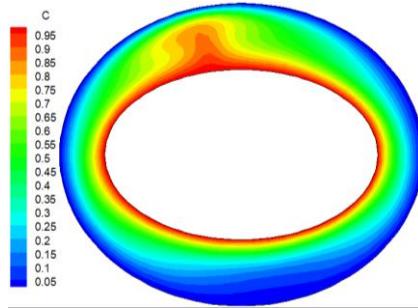
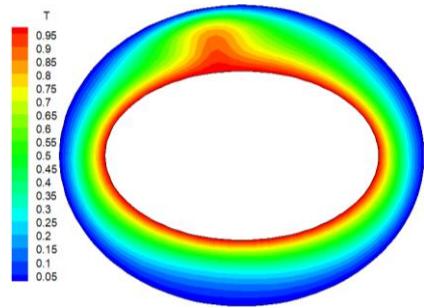
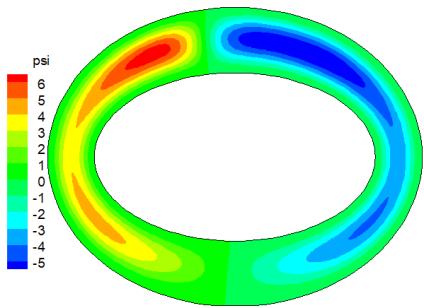
**Figure 4.20** Les lignes d'isothermes, d'iso-courants et d'iso-concentrations pour  $Le=2$ ,  $Ra=10^3$ ,  $\gamma = 0^\circ$ ,  $Pr=6.2$ ,  $e_1=0.8$  et  $e_2=0.6$

2)  $Ra=10^4$

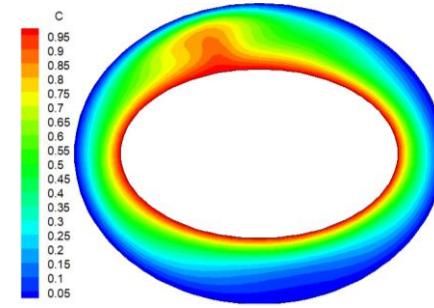
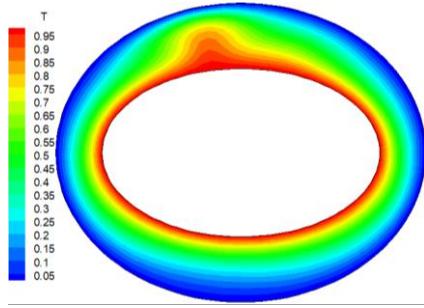
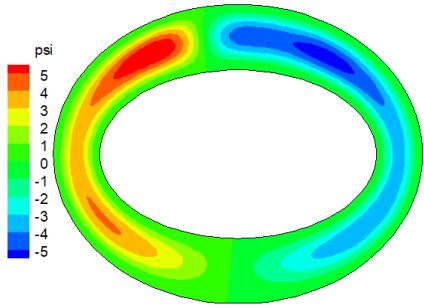




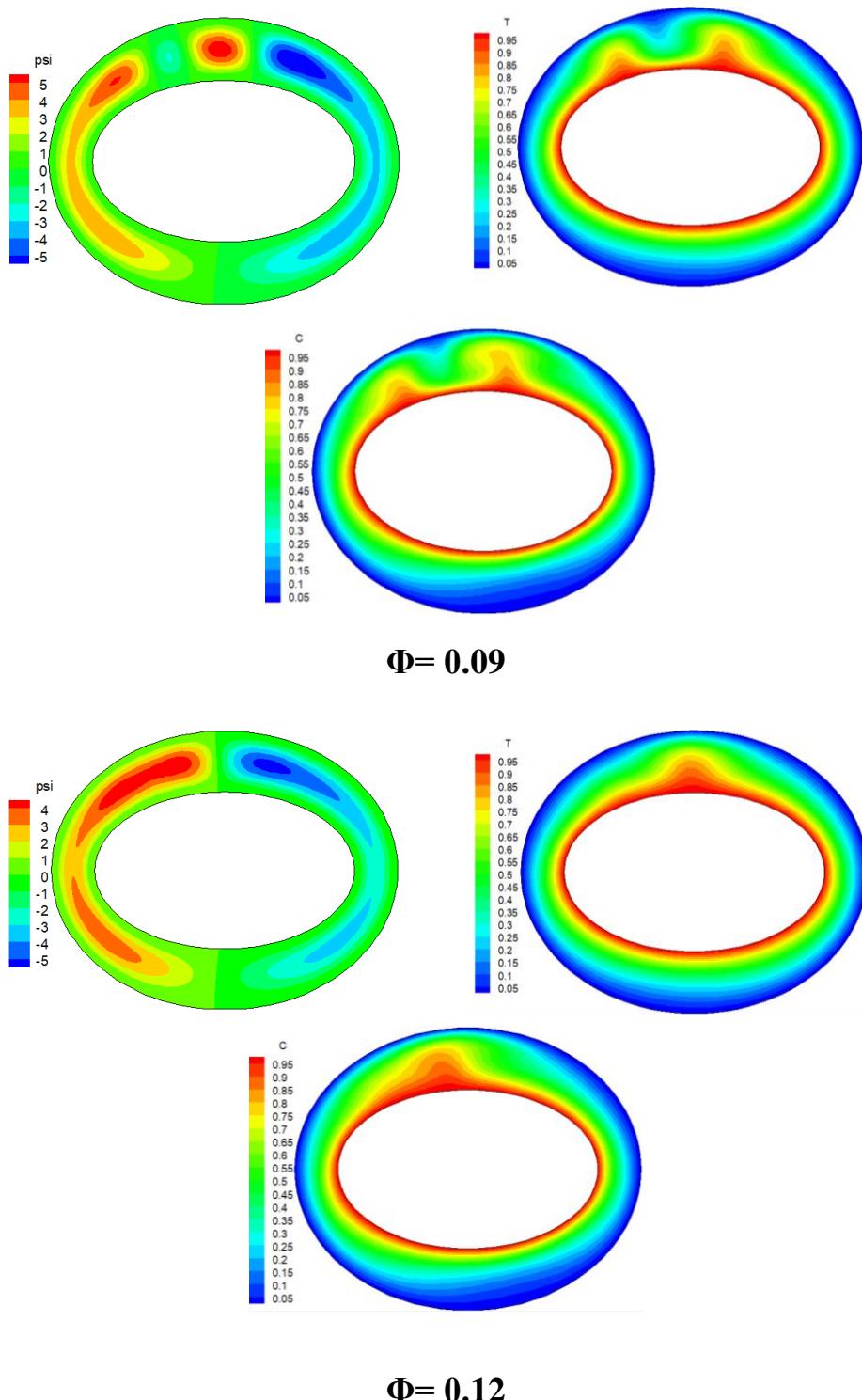
$\Phi = 0$



$\Phi = 0.03$

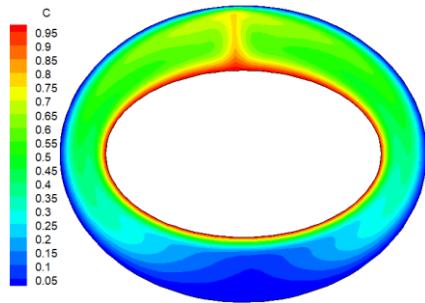
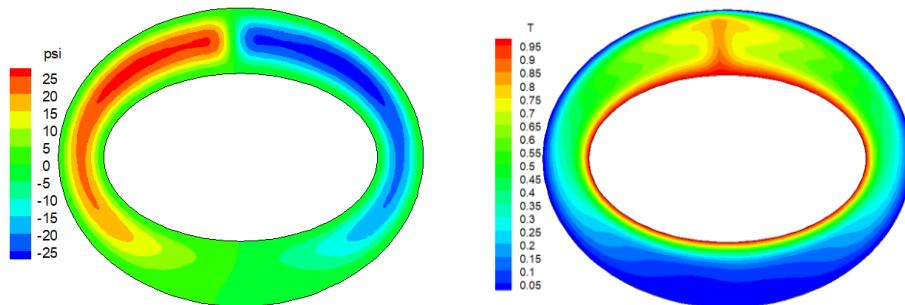


$\Phi = 0.06$

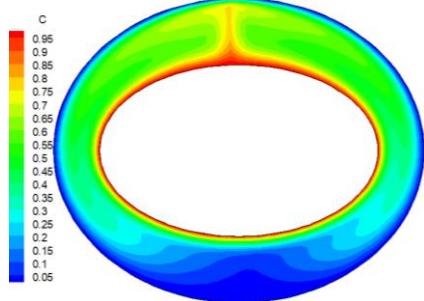
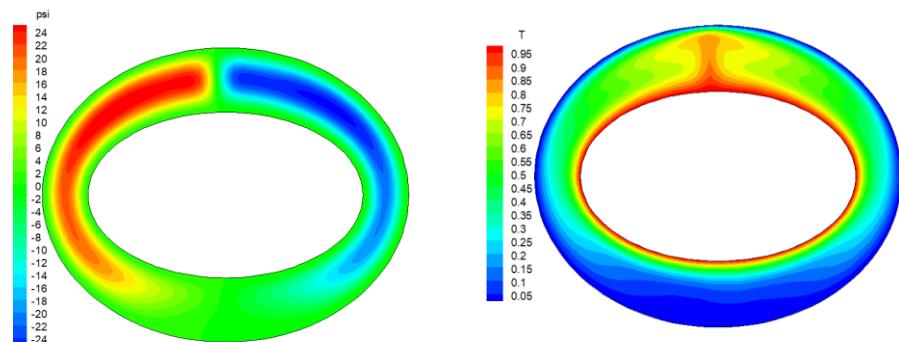


**Figure 4.21** Les lignes d'isothermes, d'iso-courants et d'iso-concentrations pour  $Le=2$ ,  $Ra=10^4$ ,  $\gamma=0^\circ$ ,  $Pr=6.2$ ,  $e_1=0.8$  et  $e_2=0.6$ .

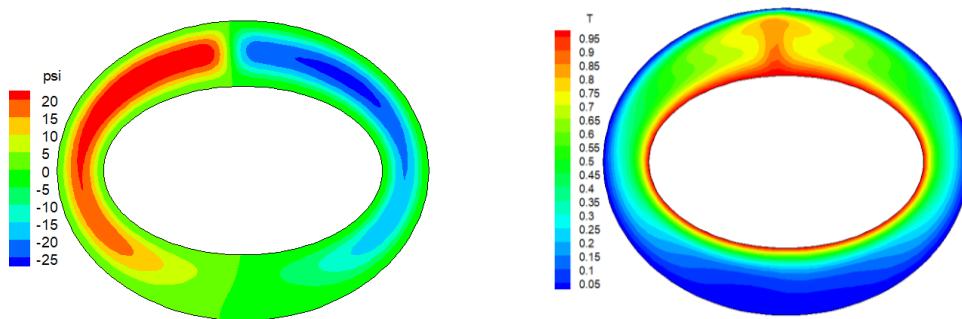
3)  $Ra=10^5$

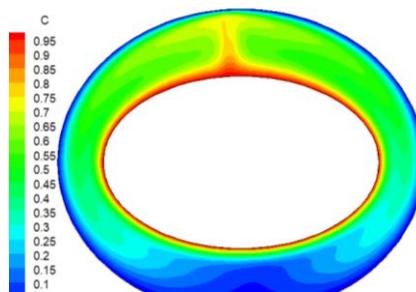


$\Phi = 0$

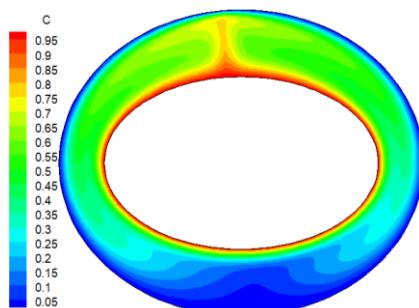
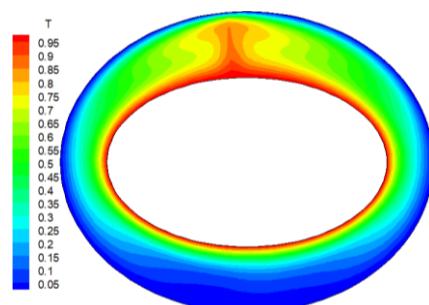
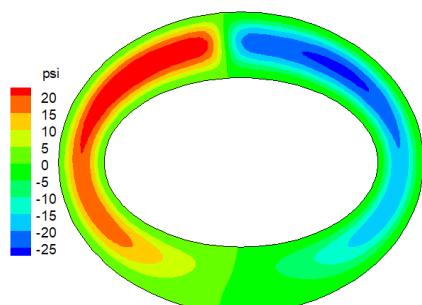


$\Phi = 0$

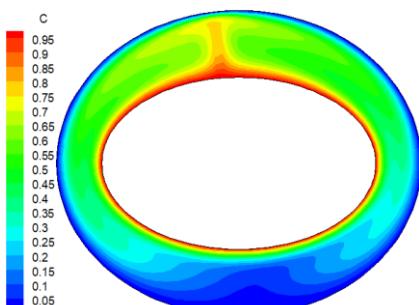
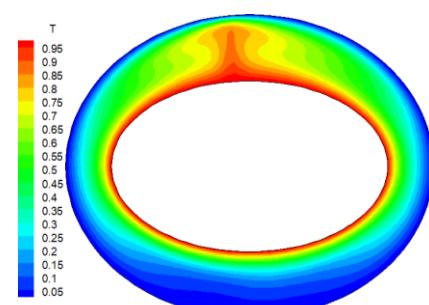
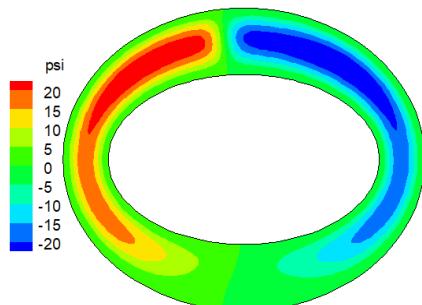




$\Phi = 0.06$



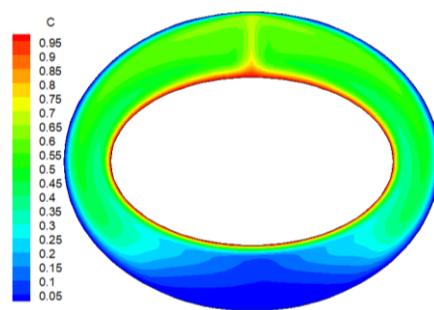
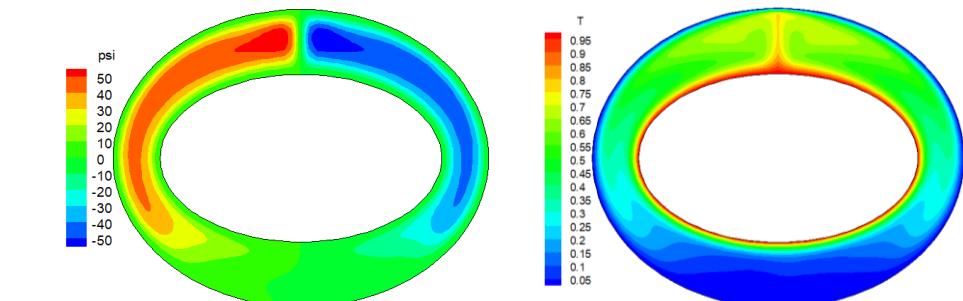
$\Phi = 0.09$



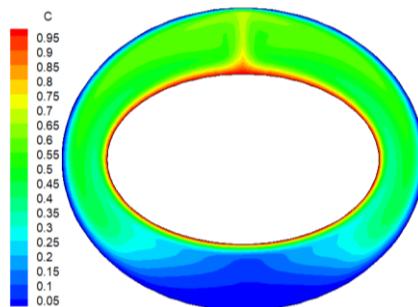
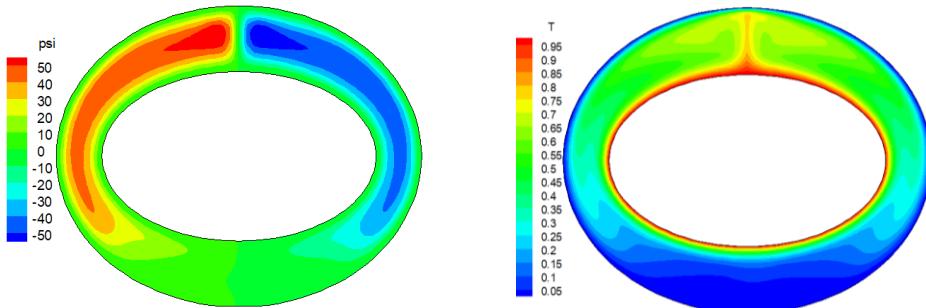
$\Phi = 0.12$

**Figure 4.22** Les lignes d'isothermes, d'iso-courants et d'iso-concentrations pour  $Le=2$ ,  $Ra=10^5$ ,  $\gamma=0^\circ$ ,  $Pr=6.2$ ,  $e_1=0.8$  et  $e_2=0.6$ .

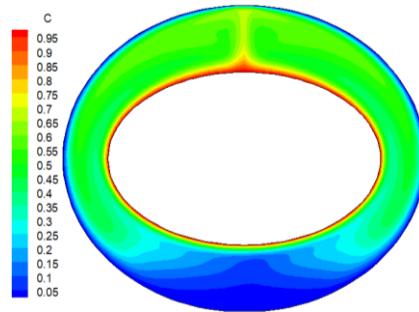
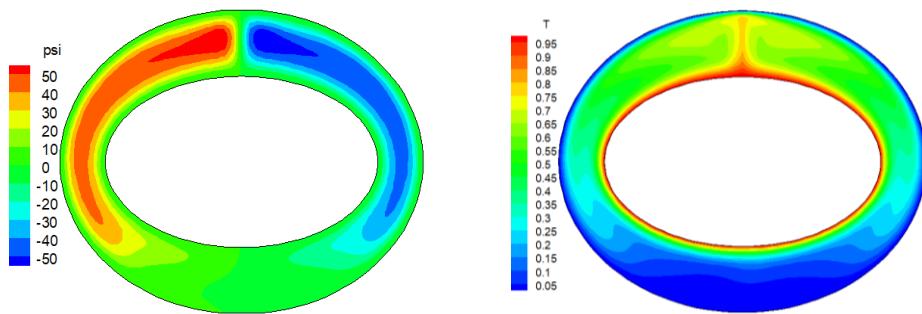
4)  $Ra=5 \times 10^5$



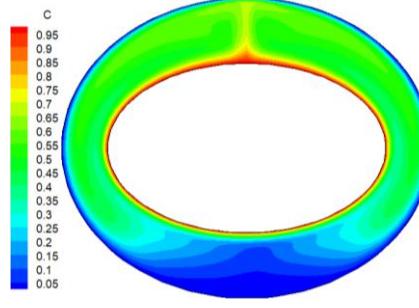
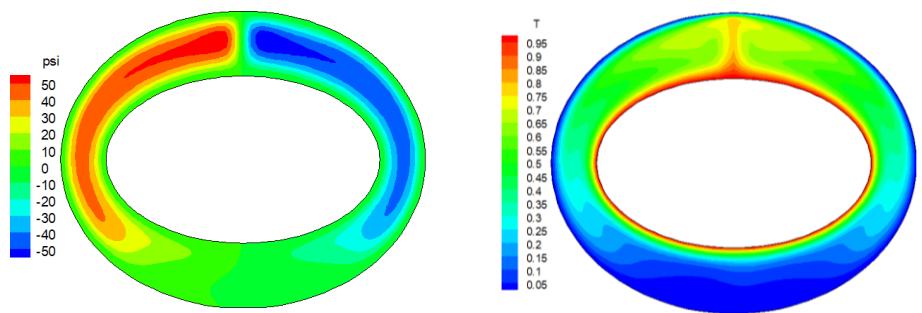
$\Phi=0$



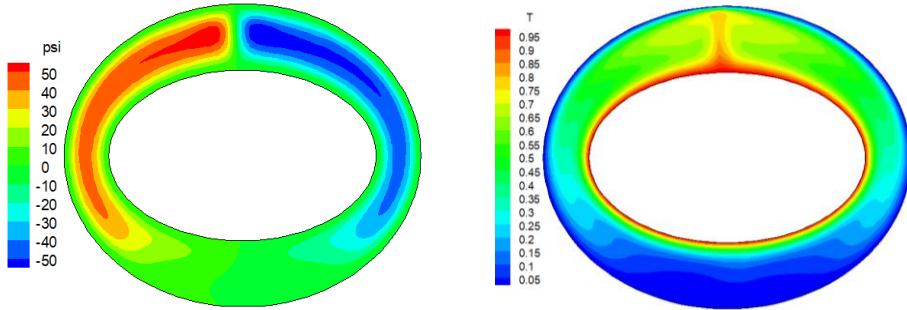
$\Phi=0.03$

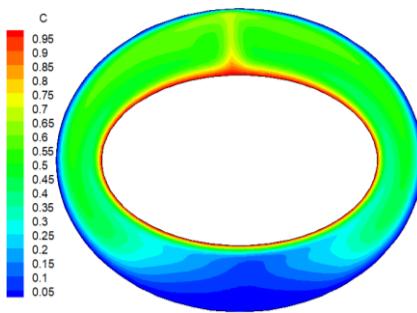


$\Phi = 0.06$



$\Phi = 0.09$

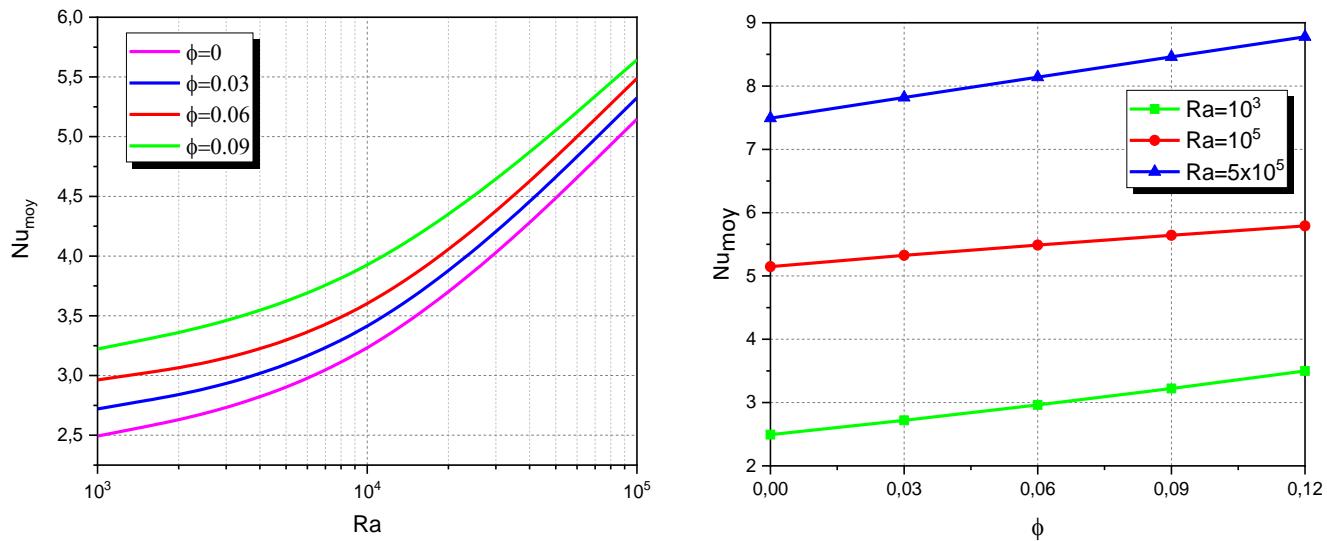




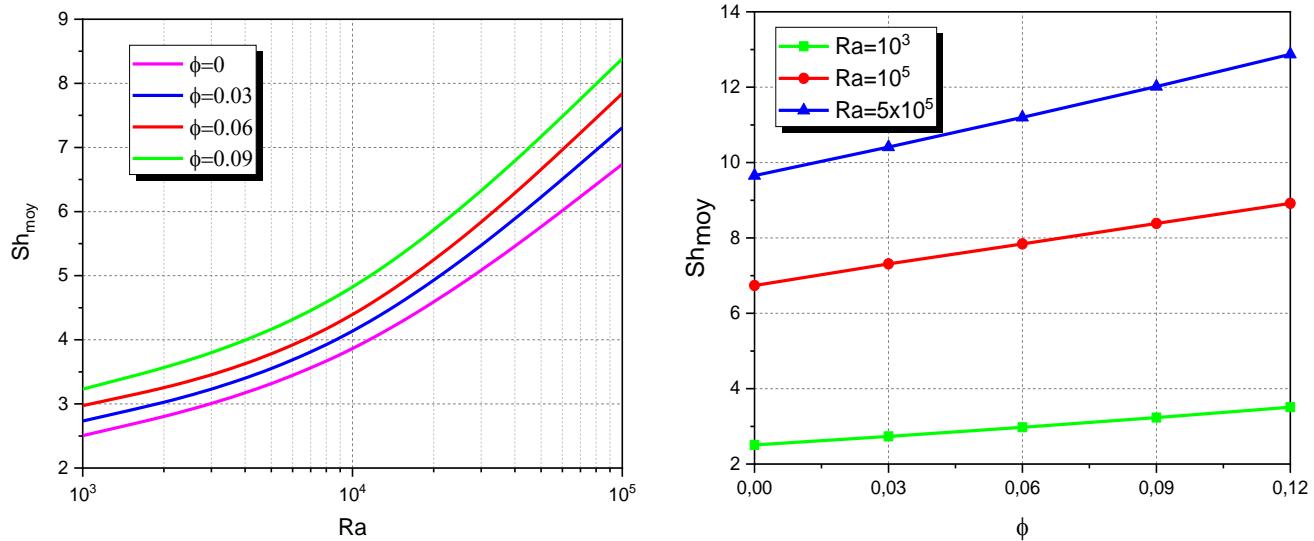
**Φ = 0.12**

**Figure 4.23** Les lignes d’isothermes, d’iso-courants et d’iso-concentrations pour  $Le=2$ ,  $Ra=5\times10^5$ ,  $\gamma=0^\circ$ ,  $Pr=6.2$ ,  $e_1=0.8$  et  $e_2=0.6$ .

#### 4.5.2.2 Les nombres moyens de Sherwood et de Nusselt



**Figure 4.24** La distribution du nombre moyen de Nusselt en fonction de Rayleigh et de la concentration en nanoparticules



**Figure 4.25** La distribution du nombre moyen de Sherwood en fonction de Rayleigh et de la concentration en nanoparticules

La figure 4.24 présente la distribution du nombre moyen de Nusselt en fonction de la concentration volumique des nanoparticules et du nombre de Rayleigh. On observe tout d'abord que, quel que soit les valeurs de  $\phi$ , le nombre moyen de Nusselt s'accroît avec la hausse du nombre de Rayleigh, ce qui reflète une intensification du transfert thermique par convection naturelle à mesure que l'effet de la flottabilité devient plus important. On note également pour chaque valeur fixe de Ra, l'augmentation de  $\phi$  entraîne une élévation du  $\text{Nu}_{\text{moy}}$ . Ce résultat s'explique par l'incorporation de nanoparticules à haute conductivité thermique dans le fluide de base, ce qui améliore globalement la capacité de transfert thermique du nano-fluide.

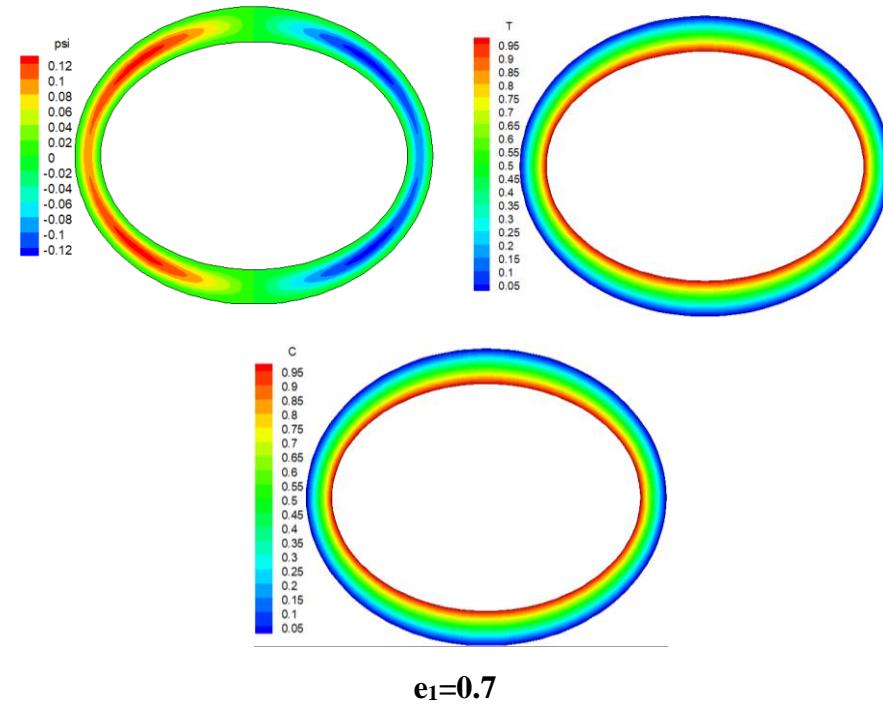
À faibles valeurs de Ra, les écarts entre les différentes courbes sont relativement importants. Cependant, lorsque Ra augmente, la différence devient moins significative. Cela s'explique par le fait qu'à faible Ra, l'effet de la concentration volumique  $\phi$  est plus marqué à cause de la dominance de la conduction thermique. En revanche, à des valeurs plus élevées de Ra, le mécanisme convectif prédomine, et l'effet additionnel des nanoparticules devient moins prononcé relativement. La courbe correspondant à  $\phi=0,09$  atteint les valeurs les plus élevées, suggérant que cette concentration offre les meilleures performances thermiques parmi celles étudiées.

La figure 4.25 montre la distribution du nombre moyen de Sherwood  $\text{Sh}_{\text{moy}}$  en fonction de Rayleigh et de la concentration en nanoparticules. On constate tout d'abord que, pour toutes les valeurs de  $\phi$ ,  $\text{Sh}_{\text{moy}}$  augmente progressivement avec l'accroissement de Ra, ce qui reflète l'intensification du transport massique par convection naturelle, notamment lorsque les forces de flottabilité deviennent dominantes par rapport aux forces diffusives. De plus, on observe que pour un nombre de Rayleigh constant, l'accroissement de la concentration volumique  $\phi$  entraîne une hausse de  $\text{Sh}_{\text{moy}}$ . Cela s'explique par l'amélioration des caractéristiques de transport du fluide due à la présence des nanoparticules. Il est néanmoins important de remarquer que l'écart entre les courbes correspondant aux différentes valeurs de  $\phi$  est relativement faible pour les petites valeurs de Ra, tandis qu'il devient de plus en plus prononcé lorsque Ra augmente. Ainsi, l'effet de la concentration volumique devient plus significatif à des valeurs de Rayleigh élevées.

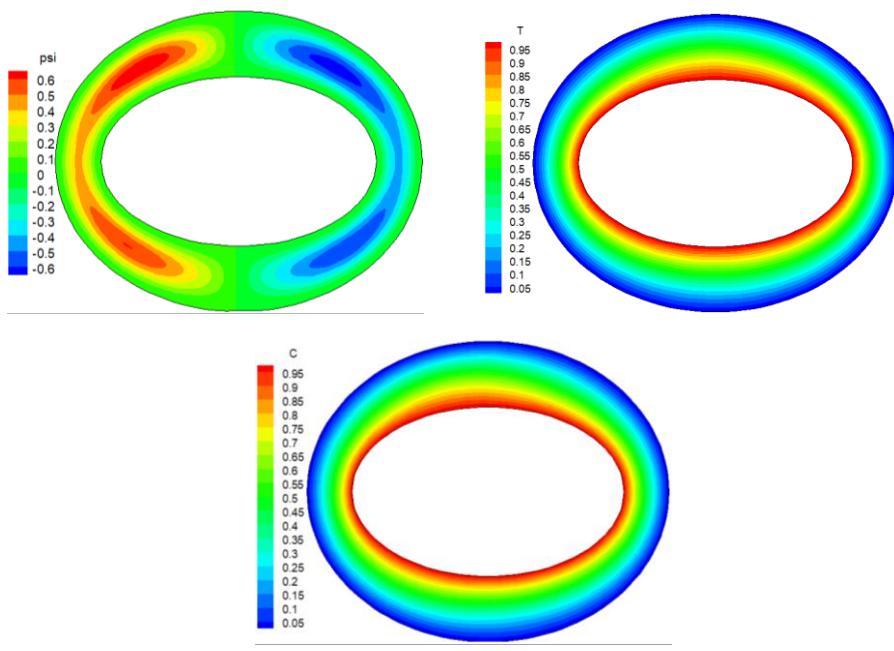
#### 4.5.3 L'impact de l'excentricité ( $e_1$ ):

Les figures 4.26 et 4.27 examiné l'impact de l'excentricité ( $e_1$ ) du cylindre intérieur. Pour  $\gamma = 0^\circ$ ,  $\phi=0$  et Ra prenant les valeurs  $10^3$ , et  $10^5$  avec  $e_2$  fixé à 0.6, nous avons considéré trois valeurs de  $e_1$  (0.7, 0.8, et 0.9) afin d'étudier les distributions des isothermes, des iso-concentrations et des iso-courants. Les résultats illustrés dans ces figures montrent qu'indépendamment de l'espace annulaire choisi (c'est-à-dire de la valeur de  $e_1$ ), une augmentation du nombre de Rayleigh mène à une élévation du taux de transfert de masse et de chaleur, ainsi qu'à un accroissement des valeurs maximales de la fonction de courant. De plus, l'augmentation de l'excentricité  $e_1$  de l'ellipse intérieure entraîne un élargissement de

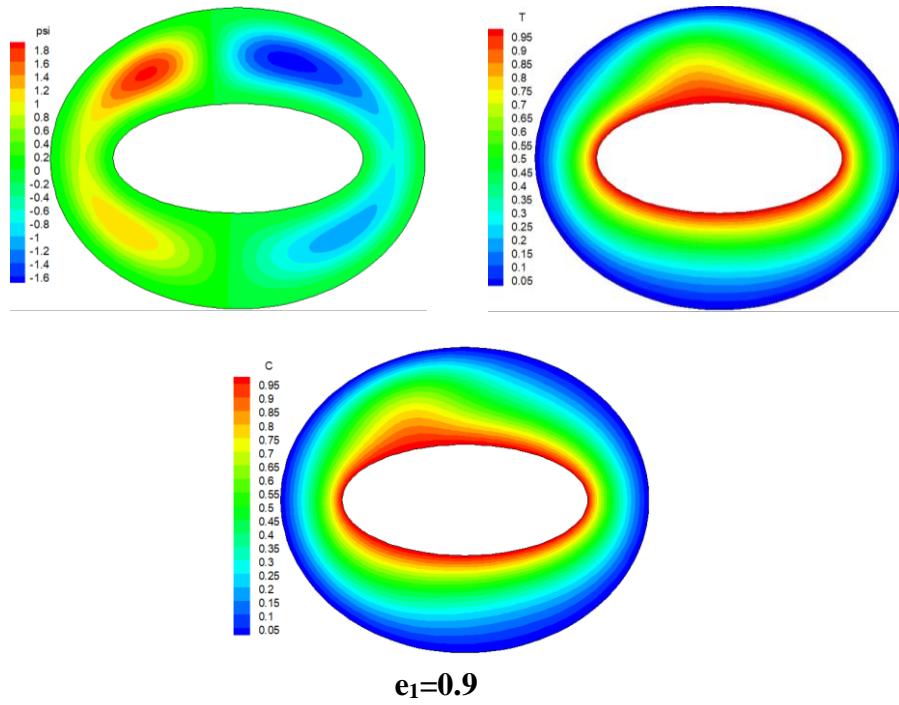
l'anneau, dû à l'accroissement de l'espace séparant les surfaces elliptiques interne et externe, ce qui intensifie le mécanisme de convection naturelle à double diffusion.



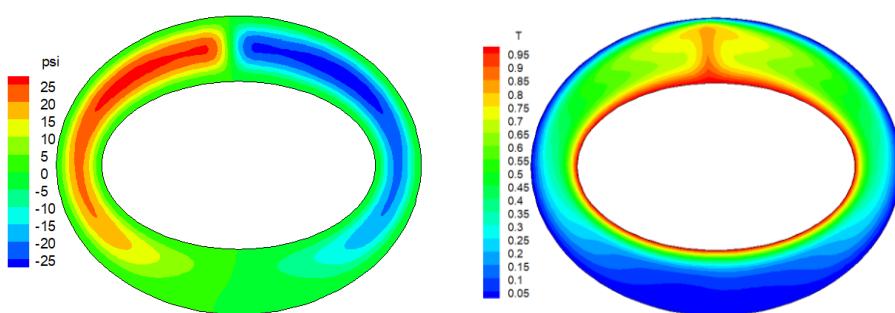
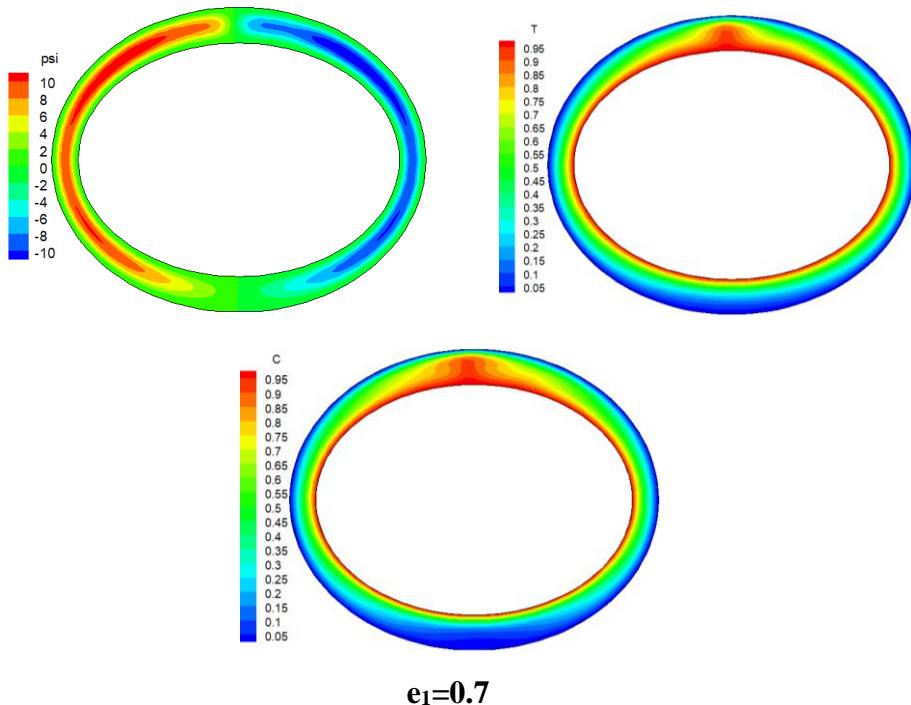
$e_1=0.7$

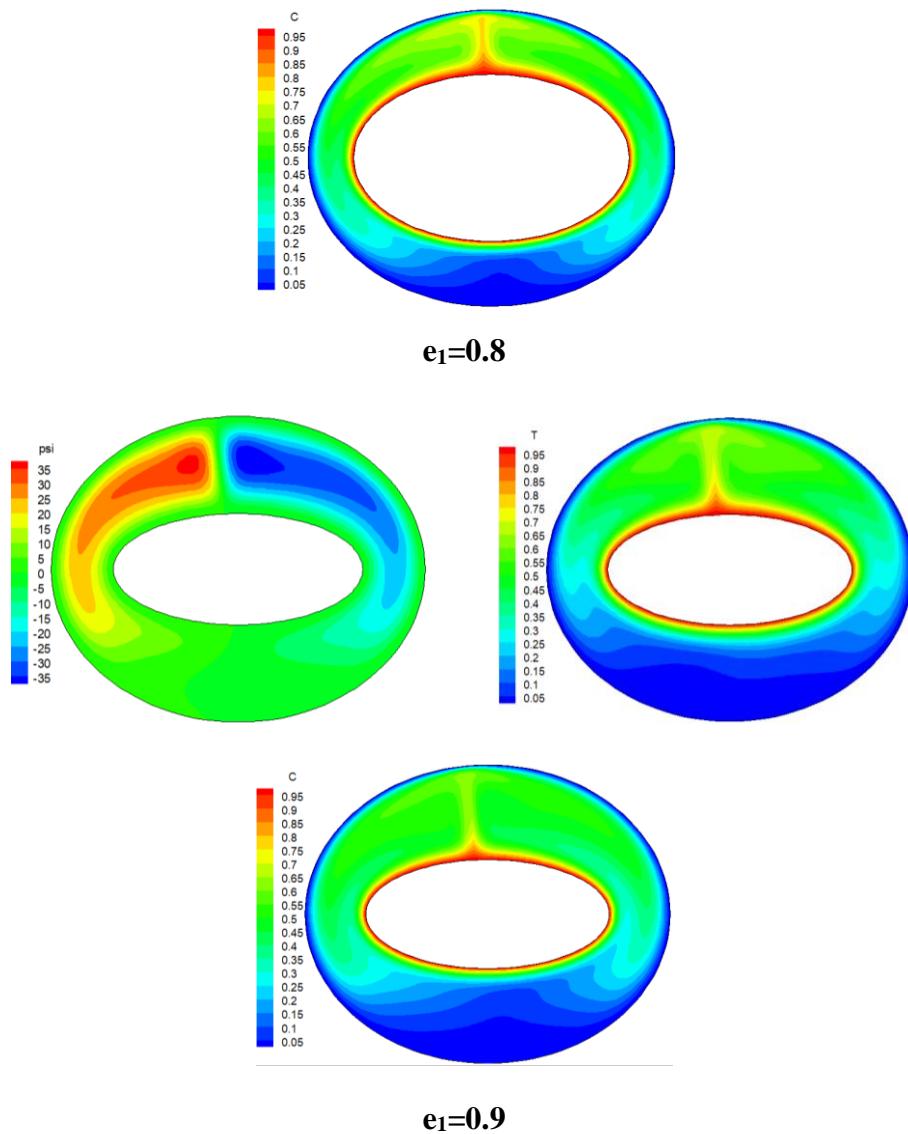


$e_1=0.8$



**Figure 4.26** Les lignes d'isothermes, d'iso-courants et d'iso-concentrations pour  $Le=2$   
 $Ra=10^3$ ,  $\gamma = 0^\circ$ ,  $N=1$  et  $e_2=0.6$ .





**Figure 4.27** Les lignes d'isothermes, d'iso-courants et d'iso-concentrations pour  $Le=2$   
 $Ra=10^5$ ,  $\gamma = 0^\circ$ ,  $N=1$  et  $e_2=0.6$ .

## *Conclusion générale*

## Conclusion Générale

---

La présente étude porte sur l'analyse du transfert simultané de masse et de chaleur par convection naturelle dans un anneau elliptique à axe horizontal, rempli d'un nanofluide de Cuivre-eau. L'influence de plusieurs paramètres a été examinée, notamment l'angle d'inclinaison de l'anneau elliptique, la concentration volumique des nanoparticules, le nombre de Rayleigh ainsi que l'excentricité interne du cylindre à base elliptique, sur les caractéristiques de nano-fluide et les performances de transfert thermique et massique.

Les résultats obtenus indiquent ce qui suit :

- Pour tous les angles d'inclinaison, une augmentation de la fraction volumique des nanoparticules conduit à une intensification de l'écoulement, observable à travers les lignes de courant.
- L'ajout de nanoparticules a considérablement renforcé les performances de transfert thermique et massique.
- Les isothermes et les fonctions de courant ne sont pas réparties symétriquement pour tous les angles d'inclinaison, sauf  $\gamma = 0^\circ$ .
- Avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, l'impact de l'angle d'inclinaison sur le transport de chaleur devient plus important, en particulier lorsque la convection naturelle prédomine.
- Le transfert thermique, exprimé par le nombre moyen de Nusselt, s'intensifie avec la hausse du nombre de Rayleigh.
- Une augmentation de l'angle d'inclinaison entraîne une élévation du taux de transfert thermique, quelles que soient les valeurs de la concentration des nanoparticules.
- Dans tous les cas, la répartition des isothermes et des iso-courants est symétrique autour de la ligne verticale.
- Par rapport au fluide basique, les impacts des nanoparticules sur les isothermes et les iso-courants sont plus visibles dans le nano-fluide, en particulier pour les nombres de Rayleigh élevés.
- L'accroissement de la concentration volumique des nanoparticules pour différentes valeurs de Rayleigh conduit à une amélioration du nombre moyen de Nusselt du nano-fluide.
- Lorsque l'excentricité  $e_1$  du cylindre elliptique interne augmente, l'espace annulaire s'élargit en raison de la plus grande séparation entre les parois interne et externe, favorisant ainsi un renforcement de la convection naturelle doublement diffusive.

Ces résultats seront utilisés dans des applications industrielles impliquant un transfert thermique et massique par convection naturelle sous des formes similaires à celle étudiée. Ces effets peuvent également être utilisés pour créer des chauffages de cockpit et des échangeurs de chaleur.

## Conclusion Générale

---

À l'avenir, il est proposé une étude tridimensionnelle, ainsi que d'utiliser d'autres nanofluides pour trouver les meilleurs.

*Références bibliographiques*

## Références Bibliographiques

---

- [1] Sourtiji, E., Ganji, D. D., & Seyyedi, S. M. (2015). Free convection heat transfer and fluid flow of Cu–water nanofluids inside a triangular–cylindrical annulus. *Powder Technology*, 277, 1-10.
- [2] Ravnik, J., & Škerget, L. (2015). A numerical study of nanofluid natural convection in a cubic enclosure with a circular and an ellipsoidal cylinder. *International journal of heat and mass transfer*, 89, 596-605.
- [3] Hatami, M., Song, D., & Jing, D. (2016). Optimization of a circular-wavy cavity filled by nanofluid under the natural convection heat transfer condition. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 98, 758-767.
- [4] Dogonchi, A. S., Ismael, M. A., Chamkha, A. J., & Ganji, D. D. (2019). Numerical analysis of natural convection of Cu–water nanofluid filling triangular cavity with semicircular bottom wall. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 135, 3485-3497.
- [5] Guestal, M., Kadja, M., & Hoang, M. T. (2018). Study of heat transfer by natural convection of nanofluids in a partially heated cylindrical enclosure. *Case studies in thermal engineering*, 11, 135-144.
- [6] Siddiqa, S., Begum, N., Hossain, M. A., & Gorla, R. S. R. (2018). Numerical solutions of free convection flow of nanofluids along a radiating sinusoidal wavy surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 126, 899-907.
- [7] Mahalakshmi, T., Nithyadevi, N., Oztop, H. F., & Abu-Hamdeh, N. (2018). Natural convective heat transfer of Ag-water nanofluid flow inside enclosure with center heater and bottom heat source. *Chinese Journal of Physics*, 56(4), 1497-1507.
- [8] Bouras, A., Taloub, D., Amroune, A., & Driss, Z. (2022, September). The impact of nanofluid on natural convection in an isosceles rectangular container with a heat source. In *Advanced Engineering Forum* (Vol. 47, pp. 19-28). Trans Tech Publications Ltd.
- [9] Abdulkadhim, A., Hamzah, H. K., Ali, F. H., Abed, A. M., & Abed, I. M. (2019). Natural convection among inner corrugated cylinders inside wavy enclosure filled with nanofluid superposed in porous–nanofluid layers. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 109, 104350.
- [10] Chandra Roy, N. (2019). Flow and heat transfer characteristics of a nanofluid between a square enclosure and a wavy wall obstacle. *Physics of Fluids*, 31(8).
- [11] Hu, Y. P., Li, Y. R., Lu, L., Mao, Y. J., & Li, M. H. (2020). Natural convection of water-based nanofluids near the density maximum in an annulus. *International Journal of Thermal Sciences*, 152, 106309.
- [12] Alguboori, A. R., Al-azzawi, M. M., Kalash, A. R., & Habeeb, L. J. (2020). Natural convection heat transfer in an inclined elliptic enclosure with circular heat source. *Journal of Mechanical Engineering Research and Developments*, 43(6), 207-222.
- [13] Jalili, P., Narimisa, H., Jalili, B., Shateri, A., & Ganji, D. D. (2023). A novel analytical approach to micro-polar nanofluid thermal analysis in the presence of thermophoresis, Brownian motion and Hall currents. *Soft Computing*, 27(2), 677-689.
- [14] Jalili, P., Sadeghi Ghahare, A., Jalili, B., & Domiri Ganji, D. (2023). Analytical and numerical investigation of thermal distribution for hybrid nanofluid through an oblique artery with mild stenosis. *SN Applied Sciences*, 5(4), 95.
- [15] Jalili, P., Azar, A. A., Jalili, B., Asadi, Z., & Ganji, D. D. (2022). Heat transfer analysis in cylindrical polar system with magnetic field: a novel hybrid analytical and numerical technique. *Case Studies in Thermal Engineering*, 40, 102524.
- [16] Laidoudi, H. (2020). Enhancement of natural convection heat transfer in concentric annular space using inclined elliptical cylinder. *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*, 17(2), 89-99.
- [17] Bouzerzour, A., Tayebi, T., Chamkha, A. J., & Djezzar, M. (2020). Numerical investigation of natural convection nanofluid flow in an annular space between confocal

## Références Bibliographiques

---

- elliptic cylinders at various geometrical orientations. *Computational Thermal Sciences: An International Journal*, 12(2).
- [18] Sheikholeslami, M., Ellahi, R., Hassan, M., & Soleimani, S. (2014). A study of natural convection heat transfer in a nanofluid filled enclosure with elliptic inner cylinder. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 24(8), 1906-1927.
- [19] Mejri, I., Mahmoudi, A., Abbassi, M. A., & Omri, A. (2016). LBM simulation of natural convection in an inclined triangular cavity filled with water. *Alexandria Engineering Journal*, 55(2), 1385-1394.
- [20] Ghasemi, E., Soleimani, S., & Bararnia, H. (2012). Natural convection between a circular enclosure and an elliptic cylinder using control volume based finite element method. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39(8), 1035-1044.
- [21] Hu, Y. P., Li, Y. R., Yuan, X. F., & Wu, C. M. (2013). Natural convection of cold water near its density maximum in an elliptical enclosure containing a coaxial cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 60, 170-179.
- [22] Park, H. K., Ha, M. Y., Yoon, H. S., Park, Y. G., & Son, C. (2013). A numerical study on natural convection in an inclined square enclosure with a circular cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 66, 295-314.
- [23] Jalili, P., Kazerani, K., Jalili, B., & Ganji, D. D. (2022). Investigation of thermal analysis and pressure drop in non-continuous helical baffle with different helix angles and hybrid nano-particles. *Case Studies in Thermal Engineering*, 36, 102209.
- [24] Jalili, B., Aghaee, N., Jalili, P., & Ganji, D. D. (2022). Novel usage of the curved rectangular fin on the heat transfer of a double-pipe heat exchanger with a nanofluid. *Case Studies in Thermal Engineering*, 35, 102086.
- [25] Sheremet, M. A., Pop, I., & Mahian, O. J. I. J. O. H. (2018). Natural convection in an inclined cavity with time-periodic temperature boundary conditions using nanofluids: application in solar collectors. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 116, 751-761.
- [26] Mahfouz, F. M. (2011). Buoyancy driven flow within an inclined elliptic enclosure. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(10), 1887-1899.
- [27] Sultan, K. F. (2015). Numerical solution of heat transfer and flow of nanofluids in annulus with fins attached on the inner cylinder. *Journal of Babylon University/Engineering Sciences*, 23(2), 465-484.
- [28] Bouras, A., Taloub, D., Djazzar, M., & Driss, Z. (2018). Natural convective heat transfer from a heated horizontal elliptical cylinder to its coaxial square enclosure. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 5(4), 379-385.
- [29] Bouras, A., Taloub, D., & Driss, Z. (2020). Effect of Rayleigh number on internal eccentricity in a heated horizontal elliptical cylinder to its coaxial square enclosure. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 25(3).
- [30] Abdelkarim, B., & Djedid, T. (2019). Numerical investigation of natural convection phenomena in uniformly heated trapezoidal Cylinder inside an elliptical Enclosure. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 50(2), 315-323.
- [31] Bouras, A., Taloub, D., Beghidja, A., & Driss, Z. (2019). Laminar natural convection study in a horizontal half-elliptical enclosure using heater on horizontal wall. *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*, 53(2), 223-233.
- [32] Dawood, H. K., Mohammed, H. A., & Munisamy, K. M. (2014). Heat transfer augmentation using nanofluids in an elliptic annulus with constant heat flux boundary condition. *Case Studies in Thermal Engineering*, 4, 32-41.
- [33] Dawood, H. K., Mohammed, H. A., Sidik, N. A. C., Munisamy, K. M., & Alawi, O. A.

## Références Bibliographiques

---

- (2017). Heat transfer augmentation in concentric elliptic annular by ethylene glycol based nanofluids. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 82, 29-39.
- [34] Zhang, C., Zheng, L., Jiang, Y., & Zhang, X. (2016). Unsteady natural convection heat transfer of nanofluid in an annulus with a sinusoidally heated source. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 69(1), 97-108.
- [35] Al-Zamily, A., & Amin, M. R. (2015). Natural convection and entropy generation in a nanofluid-filled semi-circular enclosure with heat flux source. *Procedia Engineering*, 105, 418-424.
- [36] Cadena-de la Peña, N. L., Rivera-Solorio, C. I., Payán-Rodríguez, L. A., García-Cuéllar, A. J., & López-Salinas, J. L. (2017). Experimental analysis of natural convection in vertical annuli filled with AlN and TiO<sub>2</sub>/mineral oil-based nanofluids. *International Journal of Thermal Sciences*, 111, 138-145.
- [37] Tayebi, T., Chamkha, A. J., Djezzar, M., & Bouzerzour, A. (2017). Natural convective nanofluid flow in an annular space between confocal elliptic cylinders. *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, 9(1), 011010.
- [38] Tayebi, T., & Chamkha, A. J. (2016). Free convection enhancement in an annulus between horizontal confocal elliptical cylinders using hybrid nanofluids. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 70(10), 1141-1156.
- [39] Tayebi, T., Chamkha, A. J., & Djezzar, M. (2019). Natural convection of CNT-water nanofluid in an annular space between confocal elliptic cylinders with constant heat flux on inner wall. *Scientia Iranica*, 26(5), 2770-2783.
- [40] Bouzerzour, A., Djezzar, M., Ozturk, H. F., Tayebi, T., & Abu-Hamdeh, N. (2020). Natural convection in nanofluid filled and partially heated annulus: Effect of different arrangements of heaters. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 538, 122479.
- [41] Ahmad Khan, S., & Altamush Siddiqui, M. (2020). Numerical studies on heat and fluid flow of nanofluid in a partially heated vertical annulus. *Heat Transfer*, 49(3), 1458-1490.
- [42] Mohammed, A. A., Al-Musawi, S. T. M., Ayed, S. K., Alkhataat, A., & Habeeb, L. J. (2020). Natural Convection Heat Transfer in Horizontal Elliptic Cavity with Eccentric Circular Inner Cylinder. *Journal of Mechanical Engineering Research and Developments*, 43(7), 340-355.
- [43] Lakshmi, K. M., Siddheshwar, P. G., & Laroze, D. (2020). Natural convection of water-copper nanoliquids confined in low-porosity cylindrical annuli. *Chinese journal of physics*, 68, 121-136.
- [44] Zhang, L., Hu, Y., & Li, M. (2021). Numerical study of natural convection heat transfer in a porous annulus filled with a Cu-nanofluid. *Nanomaterials*, 11(04), 990.
- [45] Badruddin, I. A., & Quadir, G. A. (2016, June). Heat and mass transfer in porous cavity: Assisting flow. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1738, No. 1). AIP Publishing.
- [46] Khan, T. Z., & Parvin, S. (2019, July). Effects of Lewis number on two phase natural convection flow of nanofluid inside a square cavity with an adiabatic obstacle. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2121, No. 1). AIP Publishing.
- [47] Moorthy, M. B. K., & Senthilvadivu, K. (2012). Soret and Dufour effects on natural convection flow past a vertical surface in a porous medium with variable viscosity. *Journal of Applied Mathematics*, 2012(1), 634806.
- [48] Groşan, T., Revnic, C., Pop, I., & Ingham, D. B. (2015). Free convection heat transfer in a square cavity filled with a porous medium saturated by a nanofluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 87, 36-41.
- [49] Ahamad, N. A., Soudagar, M. E. M., & Badruddin, I. A. (2017, July). Double diffusion in arbitrary porous cavity: Part I. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1859, No. 1). AIP Publishing.
- [50] Nazari, M., Louhghalam, L., & Kayhani, M. H. (2015). Lattice Boltzmann simulation of

## Références Bibliographiques

---

- double diffusive natural convection in a square cavity with a hot square obstacle. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 23(1), 22-30.
- [51] Rana, P., & Bhargava, R. (2012). Flow and heat transfer of a nanofluid over a nonlinearily stretching sheet: a numerical study. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(1), 212-226.
- [52] Hajri, I., Omri, A., & Nasrallah, S. B. (2007). A numerical model for the simulation of double-diffusive natural convection in a triangular cavity using equal order and control volume based on the finite element method. *Desalination*, 206(1-3), 579-588.
- [53] Cheng, C. Y. (2012). Natural convection boundary layer flow over a truncated cone in a porous medium saturated by a nanofluid. *International communications in heat and mass transfer*, 39(2), 231-235.
- [54] Al-Farhany, K., & Turan, A. (2012). Numerical study of double diffusive natural convective heat and mass transfer in an inclined rectangular cavity filled with porous medium. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39(2), 174-181.
- [55] Hasanuzzaman, M., Rahman, M. M., Öztop, H. F., Rahim, N. A., & Saidur, R. (2012). Effects of Lewis number on heat and mass transfer in a triangular cavity. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39(8), 1213–1219.
- [56] Rahman, M. M., Öztop, H. F., Ahsan, A., & Orfi, J. (2012). Natural convection effects on heat and mass transfer in a curvilinear triangular cavity. *International journal of heat and mass transfer*, 55(21-22), 6250-6259.
- [57] Izadi, M., Sinaei, S., Mehryan, S. A. M., Oztop, H. F., & Abu-Hamdeh, N. (2018). Natural convection of a nanofluid between two eccentric cylinders saturated by porous material: Buongiorno's two phase model. *International journal of heat and mass transfer*, 127, 67-75.
- [58] Hatami, M., & Ganji, D. D. (2014). Investigation of refrigeration efficiency for fully wet circular porous fins with variable sections by combined heat and mass transfer analysis. *International journal of refrigeration*, 40, 140-151.
- [59] Kefayati, G. R. (2015). FDLBM simulation of entropy generation in double diffusive natural convection of power-law fluids in an enclosure with Soret and Dufour effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 89, 267-290.
- [60] Kefayati, G. R. (2016). Simulation of double diffusive natural convection and entropy generation of power-law fluids in an inclined porous cavity with Soret and Dufour effects (Part I: Study of fluid flow, heat and mass transfer). *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 94, 539–581.
- [61] Kefayati, G. R. (2016). Simulation of double diffusive natural convection and entropy generation of power-law fluids in an inclined porous cavity with Soret and Dufour effects (Part II: Entropy generation). *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 94, 582-624.
- [62] Kefayati, G. R., & Tang, H. (2018). Double-diffusive natural convection and entropy generation of Carreau fluid in a heated enclosure with an inner circular cold cylinder (Part I: Heat and mass transfer). *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 120, 731-750.
- [63] Esfahani, J. A., & Bordbar, V. (2011). Double diffusive natural convection heat transfer enhancement in a square enclosure using nanofluids.
- [64] Choi, S. U. S. (1995). Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles. ASME Publication FED, 231, 99–106.
- [65] Mammeri, A. (2014). *Amélioration des performances énergétiques des systèmes de refroidissement industriels: Application aux serveurs informatiques* (Doctoral dissertation, Ecole nationale supérieure d'arts et métiers-ENSAM).
- [66] Sakuma, H., & Ishii, K. (2009). Gas flow sputtering: Versatile process for the growth of nanopillars, nanoparticles, and epitaxial thin films. *Journal of magnetism and magnetic*

## Références Bibliographiques

---

- materials*, 321(7), 872-875.
- [67] Singh, Y., Javier, J. R., Ehrman, S. H., Magnusson, M. H., & Deppert, K. (2002). Approaches to increasing yield in evaporation/condensation nanoparticle generation. *Journal of Aerosol Science*, 33(9), 1309-1325.
- [68] Lee, D. K., Kim, Y. H., Zhang, X. L., & Kang, Y. S. (2006). Preparation of monodisperse Co and Fe nanoparticle using precursor of M<sup>2+</sup>-oleate<sub>2</sub> (M= Co, Fe). *Current Applied Physics*, 6(4), 786-790.
- [69] Benoit, R., Warmont, F., Meynen, V., De Witte, K., Cool, P., Treguer-Delapierre, M., & Saboungi, M. L. (2009). Optimisation of the surface properties of SBA-15 mesoporous silica for in-situ nanoparticle synthesis. *Microporous and mesoporous materials*, 120(1-2), 2-6.
- [70] Xuan, Y., & Roetzel, W. (2000). Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids. *International Journal of heat and Mass transfer*, 43(19), 3701-3707.
- [71] Pak, B. C., & Cho, Y. I. (1998). Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles. *Experimental Heat Transfer an International Journal*, 11(2), 151-170.
- [72] Kim, J., Kang, Y. T., & Choi, C. K. (2004). Analysis of convective instability and heat transfer characteristics of nanofluids. *Physics of fluids*, 16(7), 2395-2401.
- [73] Einstein, A. (1956). *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Courier Corporation.
- [74] Brinkman, H. C. (1952). The viscosity of concentrated suspensions and solutions. *Journal of chemical physics*, 20(4), 571-571.
- [75] Batchelor, G. (1976). Brownian diffusion of particles with hydrodynamic interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 74(1), 1-29.
- [76] Maiga, S. E. B., Palm, S. J., Nguyen, C. T., Roy, G., & Galanis, N. (2005). Heat transfer enhancement by using nanofluids in forced convection flows. *International journal of heat and fluid flow*, 26(4), 530-546.
- [77] Maxwell, J. C. (1873). *A treatise on electricity and magnetism* (Vol. 1). Clarendon press.
- [78] Hamilton, R. L., & Crosser, O. K. (1962). Thermal conductivity of heterogeneous two-component systems. *Industrial & Engineering chemistry fundamentals*, 1(3), 187-191.
- [79] Yu, W., & Choi, A. S. (2003). The role of interfacial layers in the enhanced thermal conductivity of nanofluids: a renovated Maxwell model. *Journal of nanoparticle research*, 5, 167-171.
- [80] Patankar, S. (2018). *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC press.
- [81] Nogotov, E. F. (1978). Applications of numerical heat transfer. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 79, 14672.
- [82] Roache, P. J. (1976). Computational fluid dynamics. *Computational Fluid Dynamics*.
- [83] Elshamy, M. M., Ozisik, M. N., & Coulter, J. P. (1990). Correlation for laminar natural convection between confocal horizontal elliptical cylinders. *Numerical heat transfer*, 18(1), 95-112.

## **Résumé:**

Dans cette thèse, le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle dans un cylindre elliptique horizontal rempli d'un nanofluide Cu-eau a été étudié numériquement. Les surfaces elliptiques intérieures chaudes et extérieures froides de l'enceinte ont été maintenues à des températures et des concentrations constantes  $T_1$ ,  $C_1$  et  $T_2$ ,  $C_2$ , respectivement, avec  $T_2 < T_1$  et  $C_2 < C_1$ . Les équations gouvernantes ont été résolues par la méthode du fonction de courant-vorticité. La méthode de volumes finis a été utilisée pour discréteriser les équations de contrôle (mouvement, continuité, énergie et concentration). La plage de la fraction volumique des nanoparticules et le nombre de Rayleigh étaient les suivants:  $0 < \phi < 0.12$  et  $10^3 < Ra < 5 \times 10^5$ , respectivement. Les angles d'inclinaison étaient  $\gamma = 0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ . Les résultats ont été donnés sous forme de contours isothermes, lignes de courant, isoconcentrations, nombres de Nusselt moyens et locaux. L'impact des angles d'inclinaison, du nombre de Rayleigh, de la fraction volumique des nanoparticules et de l'excentricité du cylindre elliptique interne  $e_1$  sur le taux de transfert de chaleur et de masse a été examiné.

**Mots-clés :** cylindre elliptique, nanofluid , le nombre de Rayleigh, convection naturelle thermosolutale.

## دراسة عدديّة لعمليّات نقل الحرارة والكتلة داخل فضاء حقي إهليجي لمحور أفقي مملوء بالسوائل النانوية.

### ملخص:

في هذه الأطروحة تمت دراسة عدديّة لانتقال الحرارة والكتلة بواسطة الحمل الطبيعي داخل أسطوانة إهليجية أفقيّة مملوءة بمائع نانوي يتكون من جزيئات النحاس والماء. افترضنا الأسطح الإهليجية الداخلية الساخنة والخارجية الباردة ثابتة درجة الحرارة والتركيز  $T_1$  ،  $T_2$  ،  $C_1$  و  $C_2$  على التوالي، مع  $T_1 < T_2$  و  $C_2 < C_1$ . تم استخدام برنامج يعتمد على طريقة الحجوم المنتهية وفي صياغة التدويم- دالة التيار من أجل حل المعادلات الحاكمة وهي معادلة الاستمرارية، كمية الحركة ومعادلة الطاقة ومعادلة التركيز . كان نطاق نسبة حجمية الجسيمات النانوية وعدد رايلي على التوالي كما يلي:  $0.12 < \phi < 0$  و  $10^3 < 5 \times 10^5 < Ra$ . وكانت زوايا الميل  $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ . تم تمثيل النتائج على شكل خطوط متساوية الحرارة، التيار، والتركيز، وأرقام نسلت المتوسطة والمحليّة. تم فحص تأثير زوايا الميل، عدد رايلي، نسبة حجمية الجسيمات النانوية، واللاتمركز الداخلي  $e_1$  على معدل انتقال الحرارة والكتلة.

**الكلمات المفتاحية:** أسطوانة إهليجية، مائع نانوي، عدد رايلي، الحمل الحراري-الكتلي الطبيعي.

## **NUMERICAL STUDY OF HEAT AND MASS TRANSFERS WITHIN AN ELLIPTIC ANNULAR SPACE OF HORIZONTAL AXIS FILLED WITH NANO-FLUID.**

### **Abstract:**

In this thesis, heat and mass transfer with natural convection in a horizontal elliptical cylinder filled with a Cu-water nanofluid has been numerically studied. The hot interior and cold exterior elliptical surfaces of the enclosure were maintained at constant temperatures and concentrations  $T_1, C_1$  and  $T_2, C_2$ , respectively, with  $T_2 < T_1$  and  $C_2 < C_1$ . The governing equations have been solved by the stream function-vorticity approach. The finite volume approach was utilized to discretise the controlling equations (movement, continuity, energy, and concentration). The volume fraction range of the nanoparticles and the Rayleigh number was as follows:  $0 < \phi < 0.12$  and  $10^3 < Ra < 5 \times 10^5$ , respectively. The inclination angles were  $\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ , and  $60^\circ$ . Results were given as isotherm contours, streamlines, isoconcentrations, average and local Nusselt numbers. The impact of inclination angles, Rayleigh number, nanoparticle volume fraction, and the eccentricity of the internal elliptical cylinder  $e_1$  on the rate for heat and mass transfer was examined.

**Keywords:** elliptic cylinder, nanofluid, the Rayleigh number, thermosolutal natural convection.