

People's Democratic Republic of Algeria

Ministry of Higher Education and Scientific Research

Mohamed Boudiaf University of M'sila

Faculty of Technology

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة المسيلة

كلية التكنولوجيا



Département Électronique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

En vue de l'obtention du diplôme de :

MASTER

Option : AUTOMATIQUE.

Thème

METHODES D'APPROXIMATION DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Présenté par :

GOUADRIA Aya

ZEROUGA Hayat

Devant le jury composé de :

Encadreur : Pr. IDIR Abdelhakim

Université de Mohamed Boudiaf - M'sila

Co-Encadreur : Pr. KHETTAB Khatir

Université de Mohamed Boudiaf - M'sila

Examineur : Dr. BOUKHALFA Abdelouahab

Université de Mohamed Boudiaf - M'sila

Année universitaire 2024/2025

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Prof. IDIR Abdelhakim pour son encadrement précieux et ses conseils ainsi que pour le temps qu'il m'a accordé. Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté, de participer et d'analyser mon travail.

Je remercie tous les responsables du Hall Technologique de la Faculté de Technologie de l'Université Mohamed Boudiaf de M'sila. Je tiens à remercier tous dans le département de génie mécanique, en particulier nos chers professeurs.

Je tiens à exprimer mes remerciements à mes parents et à ma famille, qui m'ont apporté leur précieux soutien et leur assistance tout au long de ma période d'études.

Je tiens à exprimer ma gratitude aux personnes qui m'ont soutenu dans la réalisation de ce travail.

.

- A tous, Grand Merci -

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail :

À l'être le plus cher de ma vie, ma mère .

À celui qui m'a fait de moi un homme, mon père .

À Mes chers Frères et Sœurs .

À Monsieur IDIR Abdelhakim .

À tous mes amis de promotion de 2025 .

Toute personne qui occupe une place dans mon cœur .

À tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom Gouadria et Zerouga .

Je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à ma réussite.

Résumé

Les systèmes d'ordre fractionnaire suscitent un intérêt croissant dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie, en raison de leur capacité à modéliser des phénomènes complexes avec effets de mémoire ou comportements intermédiaires entre dynamique inertielle et visqueuse. Ces systèmes sont décrits par des équations différentielles fractionnaires, et leur représentation fréquentielle conduit généralement à des fonctions de transfert irrationnelles, rendant leur analyse théorique et leur mise en œuvre directe particulièrement délicates.

Face à l'absence de solutions analytiques exactes, l'utilisation de techniques numériques et d'outils d'approximation devient incontournable. Ainsi, dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux méthodes de résolution, d'implémentation analogique et d'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire, en nous appuyant sur des approximations rationnelles des fonctions de transfert irrationnelles correspondantes.

Nous avons procédé à l'extraction et à l'analyse des caractéristiques fréquentielles et temporelles de ces systèmes, afin d'évaluer la précision et la pertinence des méthodes étudiées. Des exemples illustratifs ont été développés pour démontrer l'efficacité des approches retenues. Les résultats obtenus à travers les simulations se sont révélés satisfaisants, et ont été discutés en détail puis comparés à d'autres méthodes récentes issues de la littérature spécialisée

ملخص

الأنظمة ذات الرتبة الكسرية تحظى باهتمام متزايد في مختلف مجالات العلوم التطبيقية والهندسة، وذلك لقدرتها على نمذجة الظواهر المعقدة التي تتضمن تأثيرات الذاكرة أو السلوكيات المتوسطة بين الديناميكا العطالية والديناميكا اللزجة. تُوصف هذه الأنظمة من خلال معادلات تفاضلية كسرية، وتؤدي تمثيلاتها في المجال الترددي غالباً إلى دوال تحويل غير نسبية، مما يجعل تحليلها النظري وتنفيذها المباشر أمراً بالغ الدقة والصعوبة.

وفي ظل غياب حلول تحليلية دقيقة، يصبح اللجوء إلى التقنيات العددية وأدوات التقريب أمراً لا مفر منه. ومن هذا المنطلق، تناولنا في هذا البحث طرق حل وتحقيق الأنظمة الكسرية وتحليلها، وذلك بالاعتماد على تقريب عقلائي للدوال التحويلية غير النسبية المقابلة.

قمنا باستخراج وتحليل الخصائص الترددية والزمنية لهذه الأنظمة من أجل تقييم دقة وملاءمة الطرق المدروسة. كما تم تطوير أمثلة توضيحية لإبراز فعالية المقاربات المعتمدة. وقد أظهرت النتائج المستخلصة من خلال المحاكاة نتائج مرضية، تم مناقشتها بالتفصيل ومقارنتها بطرق أخرى حديثة واردة في الأدبيات المتخصصة.

SOMMIARE

| | |
|--|-----------|
| REMERCIEMENTS | ----- |
| DEDICACES | ----- |
| SOMMIARE | ----- I |
| LIST DES FIGURES | ----- III |
| INTRODUCTION GENERALE | ----- 4 |
| CHAPITRE I :THEORIE SUR LES SYSTEMES FRACTIONNAIRE | ----- 6 |
| I.1. INTRODUCTION : | ----- 7 |
| I.2 OUTILS MATHEMATIQUES DE BASE | ----- 8 |
| I.2.1 CALCUL FRACTIONNAIRE | ----- 8 |
| I.2.2 FONCTIONS UTILISEES DANS LE CALCUL FRACTIONNAIRE | ----- 8 |
| I.2. 3 TRANSFORMATION DE LAPLACE ET PRODUIT DE CONVOLUTION : | ----- 10 |
| I.2.4 DEFINITIONS FONDAMENTALES | ----- 10 |
| I.2.3 PROPRIETES DES OPERATEURS D'ORDRE FRACTIONNAIRE | ----- 12 |
| I.2.4 TRANSFORMATION LAPLACE DES OPERATEURS D'ORDRE FRACTIONNAIRE | ----- 12 |
| I. 3 REPRESENTATION DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE | ----- 14 |
| 1.3.1 EQUATION DIFFERENTIELLE FRACTIONNAIRE | ----- 14 |
| I.3.2 FONCTION DE TRANSFERT D'ORDRE FRACTIONNAIRE | ----- 14 |
| I.3.3 REPRESENTATION D'ETAT D'UN SYSTEME D'ORDRE FRACTIONNAIRE | ----- 15 |
| I.3.4 COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE DES SYSTEMES FRACTIONNAIRES | ----- 16 |
| I.3.5 STABILITE DES SYSTEMES FRACTIONNAIRES | ----- 17 |
| I.4 CONCLUSION | ----- 18 |
| CHAPITRE IIMETHODES D'APPROXIMATION DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIR | ----- 20 |
| II. 1 INTRODUCTION : | ----- 21 |
| II. 2 APPROXIMATION DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE : | ----- 22 |
| II .2.1 APPROXIMATION NUMERIQUE DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE : | ----- 22 |
| II.2.1.2 APPROXIMATION PAR UN MODELE RATIONNEL DISCRET : | ----- 22 |
| II.2.1.3 APPROXIMATION EN UTILISANT UN MODELE ENTIER CONTINU : | ----- 23 |



| | |
|--|-------------------------------------|
| II.2.2. APPROXIMATION ANALOGIQUE DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE :----- | 23 |
| II.2.2.1 METHODES D'APPROXIMATION EN UTILISANT L'EXPANSION DES FONCTIONS CONTINUES :----- | 24 |
| II.2.2.2 APPROXIMATIONS UTILISANT L'AJUSTEMENT DE COURBES OU LES TECHNIQUES D'IDENTIFICATION :----- | 25 |
| II.3.CONCLUSION----- | 30 |
| CHAPITRE III APPLICATION DES METHODES D'APPROXIMATION DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE ----- | 32 |
| III. 1 INTRODUCTION ----- | 33 |
| III.2 APPLICATION DE LA METHODE D'OUSTALOUP ----- | 33 |
| III.2.1 DERIVATEUR FRACTIONNAIRE :----- | 33 |
| III.2.2 INTEGRATEUR FRACTIONNAIRE : ----- | 37 |
| III. 3 APPLICATION DE LA METHODE DE MATSUDA ----- | 40 |
| III.3.1 DERIVATEUR FRACTIONNAIRE :----- | 40 |
| III.3.2 INTEGRATEUR FRACTIONNAIRE : ----- | 44 |
| III. 4 ETUDE COMPARATIVE ----- | 46 |
| III.5 APPLICATION SUR UN SYSTEME FRACTIONNAIRE----- | 50 |
| III.6 CONCLUSION----- | 51 |
| CONCLUSION GENERALE----- | 52 |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES ----- | ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED. |

LIST DES FIGURES

Figure de chapitre I

| | |
|--|----|
| Figure I. 1: Domaine de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire dans le plan complexe | 18 |
|--|----|

Figure de chapitre III

| | |
|---|----|
| Figure III. 1 Tracé de Bode de $G(s) = s^{0.2}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup | 35 |
| Figure III. 2 Tracé de Bode de $G(s) = s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup | 36 |
| Figure III. 3 Tracé de Bode de $G(s) = s^{0.7}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup | 37 |
| Figure III. 4 Tracé de Bode de $G(s) = 1s^{0.2}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup | 38 |
| Figure III. 5 : Tracé de Bode de $G(s) = 1s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup | 39 |
| Figure III. 6 Tracé de Bode de $G(s) = 1s^{0.7}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup | 39 |
| Figure III. 7. Tracé de Bode de $G(s) = s^{0.2}$ et de son approximé par la méthode de Matsuda | 41 |
| Figure III. 8. Tracé de Bode de $G(s) = s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode de Matsuda | 42 |
| Figure III. 9 Tracé de Bode de $G(s) = s^{0.7}$ et de son approximé par la méthode de Matsuda | 43 |
| Figure III. 10. Tracé de Bode de $G(s) = 1s^{0.2}$ et de son approximé par la méthode de Matsuda | 44 |
| Figure III. 11 Tracé de Bode de $G(s) = 1s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode de Matsuda | 45 |
| Figure III. 12 Tracé de Bode de $G(s) = 1s^{0.7}$ et de son approximé par la méthode de Matsuda | 46 |
| Figure III. 13: Tracé de Bode de $s^{0.2}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup et Matsuda dans la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$, $N = 5$ | 47 |
| Figure III. 14: Tracé de Bode de $s^{0.2}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup et Matsuda dans la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$, $N = 20$ | 47 |
| Figure III. 15: Tracé de Bode de $s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup et Matsuda dans la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$, $N = 5$ | 48 |
| Figure III. 16: Tracé de Bode de $s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup et Matsuda dans la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$, $N = 20$ | 48 |
| Figure III. 17: Tracé de Bode de $s^{0.7}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup et Matsuda dans la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$, $N = 5$ | 49 |
| Figure III. 18: Tracé de Bode de $s^{0.7}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup et Matsuda dans la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$, $N = 20$ | 49 |



INTRODUCTION GENERALE

Les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire constituent une extension naturelle des systèmes classiques à ordre entier. En remplaçant les dérivées entières par des dérivées d'ordre réel ou fractionnaire, ces systèmes offrent un cadre mathématique plus flexible, capable de modéliser avec réalisme des phénomènes complexes, notamment ceux présentant des effets de mémoire, d'hystérésis ou de diffusion anormale. De nombreuses applications concrètes existent dans les domaines électrochimiques, biologiques, thermiques ou mécaniques.

Cependant, la mise en œuvre des opérateurs fractionnaires dans un cadre de simulation ou de régulation soulève une difficulté importante : leur nature irrationnelle rend leur traitement direct impossible avec les outils classiques d'automatique. Pour surmonter cela, plusieurs méthodes d'approximation ont été développées afin de représenter ces opérateurs sous forme de fonctions de transfert rationnelles, compatibles avec les environnements de simulation et de commande.

Dans ce travail, nous nous concentrons sur l'étude comparative de deux méthodes d'approximation particulièrement connues : **la méthode d'Oustaloup** et **la méthode de Matsuda**. Contrairement à certaines approches qui en explorent plusieurs, nous avons choisi de nous focaliser uniquement sur ces deux techniques afin d'en analyser plus en profondeur les avantages, les limitations, et les comportements respectifs.

Le contenu de ce mémoire est structuré comme suit :

- Le **premier chapitre** introduit les notions fondamentales du calcul fractionnaire, ainsi que les propriétés mathématiques associées aux dérivées et intégrales d'ordre non entier.
- Le **deuxième chapitre** est dédié à la présentation des méthodes d'approximation, en mettant en évidence leurs principes de fonctionnement, leurs formulations mathématiques, ainsi que leurs domaines d'application.
- Le **troisième chapitre** regroupe les résultats issus des simulations numériques. Nous y avons appliqué les deux méthodes sur des opérateurs d'ordre fractionnaire choisis, analysé leurs réponses fréquentielles (diagrammes de Bode) et temporelles (réponses indicielle), puis comparé leurs performances selon divers critères dynamiques.

Enfin, une **conclusion générale** résume les résultats obtenus, met en lumière les points forts et les limites de chaque méthode, et propose quelques pistes pour des travaux futurs

CHAPITRE I

Théorie sur les systèmes fractionnaire

I.1. Introduction :

Les systèmes d'ordre fractionnaire constituent un domaine de recherche en pleine expansion dans les mathématiques appliquées, la physique et l'ingénierie. Ces systèmes généralisent les modèles classiques basés sur des dérivées et intégrales d'ordre entier, en introduisant la notion de dérivation et d'intégration d'ordre non entier (fractionnaire). Ce concept permet de mieux modéliser des phénomènes complexes présentant des comportements non locaux, des effets de mémoire ou des propriétés viscoélastiques.

Un système d'ordre fractionnaire se caractérise par des équations différentielles où l'ordre de dérivation ou d'intégration n'est pas nécessairement un entier, mais peut être un réel, voire un nombre complexe. L'ordre fractionnaire représente ainsi une généralisation naturelle de la notion classique de dérivée ou d'intégrale. Ces systèmes sont particulièrement utiles pour modéliser des phénomènes à mémoire ou des processus non markoviens, c'est-à-dire dont l'évolution dépend de l'ensemble des états passés .

Dans le domaine de l'automatique, le calcul fractionnaire est utilisé pour la modélisation, l'identification et la commande des systèmes. Des conférences internationales prestigieuses, telles que le CDC (Conference on Decision and Control) ou l'IFAC (International Federation of Automatic Control), organisent régulièrement des sessions spéciales consacrées à la dérivation non entière et à ses nombreuses applications. Depuis 2004, un workshop biennal spécifiquement dédié au calcul fractionnaire et à ses applications a également vu le jour

L'objectif de ce chapitre est de présenter certaines bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire, nécessaires à la compréhension et au développement des chapitres suivants. Nous introduirons les principales définitions, propriétés et outils mathématiques fondamentaux associés à ces opérateurs.

I.2 Outils mathématiques de base

I.2.1 Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est le champ de l'analyse mathématique et d'application des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et encore nouveau. Ces dernières années l'intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par son application dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie. La représentation mathématique des systèmes fractionnaires dans le domaine temporel et fréquentiel correspond à des équations différentielles à exploiter. Vu l'absence des méthodes mathématiques, les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire étaient jusque-là étudiés de façon marginale seulement, que ce soit en théorie ou en application [1], [2]. Pour des raisons d'analyse, de synthèse, et de simulation de tels systèmes, l'utilisation des fonctions rationnelles pour l'approximation s'avère d'une grande importance. Alors pour analyser et concevoir les systèmes de commande d'ordre fractionnaire il faut les approximer par des fonctions rationnelles [3].

I.2.2 Fonctions utilisées dans le calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présenterons deux fonctions largement utilisées qui fournissent généralement des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire : la fonction Gamma d'Euler et la fonction de Mittag-Leffler.

La Fonction Gamma (Γ)

La fonction Gamma est une fonction mathématique fondamentale, principalement utilisée pour étendre la notion de la factorielle aux réels et aux nombres complexes. Elle joue un rôle important dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique, en particulier dans l'analyse complexe, la théorie des probabilités, et les équations différentielles [4]

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \alpha > 0 \quad (I. 1)$$

A partir de l'expression (I.1), on peut déduire que :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 1 \quad (I.2)$$

L'intégration par parties de l'expression (I.1), conduit à la formule de récurrence suivante, qui est une propriété importante de la fonction Gamma :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{\infty} y^{\alpha} e^{-y} dy = [-e^{-y} y^{\alpha}]_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \alpha \Gamma(\alpha) \\ \Gamma(\alpha + 1) &= \alpha \Gamma(\alpha) \end{aligned} \quad (I. 3)$$

Et pour $\alpha \in \mathbb{N}$ on a : $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$ (I. 4)

Puisque $\Gamma(1) = 1$ dans (I.2), et en utilisant la formule (I.3) pour $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2! \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3!\end{aligned}$$

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n! \quad (I. 5)$$

Dans ce qui suit on donne quelques valeurs particulières de $\Gamma(\alpha)$:

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Pour $\alpha = n + \frac{1}{2}$, avec n un entier positif $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$

La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une fonction complexe qui généralise plusieurs fonctions spéciales importantes en analyse mathématique. Elle a été introduite par l'analyste suédois Gösta Mittag-Leffler. La fonction est souvent utilisée dans des contextes liés aux équations différentielles fractionnaires et à l'analyse des systèmes dynamiques [5]

La fonction de Mittag-Leffler, notée $E_{\alpha, \beta}$, est définie par la série infinie suivante :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (I. 6)$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre, introduite par Mittag-Leffler en 1903 :

$$E_{\alpha, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0 \quad (I. 7)$$

Pour $\alpha = 1$, dans la fonction (I.7), on peut déduire la fonction exponentielle comme suit :

$$E_{1, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} \quad (I. 8)$$

Puisque $k \in \mathbb{N}$ et d'après la propriété de la fonction Gamma (I.4) donc :

$$\Gamma(k + 1) = k! \quad (I. 9)$$

En remplaçant dans (I.8), on obtient l'expression de développement en séries de l'exponentiel :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^k \quad (I. 10)$$

Pour les équations différentielles d'ordre non entier, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

I.2. 3 Transformation de Laplace et produit de convolution :

La transformée de Laplace est un outil mathématique utilisé dans l'analyse des systèmes, et dans la résolution de certains problèmes complexes dans le domaine temporel tels que, les produits de convolution et les équations différentielles.

La transformée de Laplace d'une fonction est définie comme suit :

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (I. 11)$$

La transformée de Laplace de la $i^{\text{ème}}$ dérivée de $f(t)$; est donnée par: [6]

$$\mathcal{L}\{f^{(i)}(x)\} = s^i F(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^k f^{(i-k-1)}(0) \quad (I. 12)$$

Où

$f^{(i)}(0)$ représente les conditions initiales.

Le produit de convolution est un opérateur mathématique et un produit commutatif, noté $(f * g)$, qui associe aux deux fonctions f et g l'intégrale suivante :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau = g(t) * f(t) \quad (I. 13)$$

Cette intégrale étant difficile à résoudre dans le domaine temporel, il devient préférable d'utiliser sa transformée de Laplace qui est exprimée par le produit des deux transformées de Laplace des fonctions f et g

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(t)\} = F(s)G(s) \quad (I. 14)$$

I.2.4 Définitions fondamentales

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Parmi les plus notables, on peut mentionner les trois suivantes :

\ a) Définition de Grunwald-Letnikov (G-L)

Cette définition est peut considère comme une généralisation de la dérivée classique d'une fonction $f(t)$ d'ordre $n \in \mathcal{R}$ qui prend la forme suivante :

$$D^n(t) = \lim_{n \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (I.15)$$

Avec :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (I.16)$$

Remplaçant le nombre entier n par $\alpha \in \mathcal{R}$, on peut réécrire (I.16) comme suit

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} \quad (I.17)$$

Maintenant on définit la dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre α de G-L comme suit [7] :

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{n \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-\alpha}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (I.18)$$

Où h est le pas d'échantillonnage, $[x]$ représente la partie entière de x et $\binom{\alpha}{j}$ appelés coefficient binominaux.

b) Définition de Riemann-Liouville (R-L)

Définition 1 :

Soient \mathbb{C} et \mathcal{R} les anneaux des nombres complexes et réels respectivement, $\mathcal{R}(\cdot)$ Symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}(\alpha) > 0$, $t_0 > R$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty[$.

$$I^\alpha f(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d(\tau) \quad (I.19)$$

Définition 2 :

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}(\alpha) > 0$, n un entier positif, $t_0 \in \mathcal{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty[$. La dérivée d'ordre fractionnaire α de la fonction de f borne inférieure t_0 est définie par:

$$\alpha_{RL} D_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d(\tau) \quad (I.20)$$

Où le nombre entier n est tel que $(n - 1) < \alpha < n$.

Remarque: pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite I^α pour I_0^α et D^α pour D_0^α

c) Définition de Caputo

Une autre définition de la dérivée d'ordre fractionnaire est proposée par Caputo comme la forme suivante [8] :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) \triangleq I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau \quad (I.21)$$

Où

$$n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}.$$

Pour t_0 , à partir des deux des équations (I.20) et (I.21), on peut trouver les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha f(t) &= {}^cD^n f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{(k-\alpha)}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \\ {}^{RL}D^\alpha \left(f(t) \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) &= {}^cD^n f(t) \end{aligned} \quad (I.22), (I.23)$$

I.2.3 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [9] :

Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^\alpha f(z)$ est une fonction analytique de z et α

Pour $\alpha = n$, ou n est un entier, l'opération $D^\alpha f(z)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .

Pour $\alpha = 0$, l'opération $D^\alpha f(z)$ est l'opérateur identité : $D^0 f(z) = f(z)$

La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires: $D^\alpha f(af(z) + bg(z)) = aD^\alpha f(z) + bD^\alpha g(z)$

La loi additive (propriété du semi groupe) : $D^\alpha D^\beta f(z) = D^\beta D^\alpha f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z)$ est valable

sous certaines contraintes sur la fonction $f(z)$.

I.2.4 Transformation Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

a) Intégration fractionnaire

La transformée de Laplace de l'opérateur d'intégration non entier défini par (I.6) est donné par

$$L\{I_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s), \alpha > 0 \quad (I.24)$$

Où : $(n-1) < \alpha < n$.

b) Dérivation fractionnaire

Du fait de la non unicité de la définition de la dérivée non entière, l'expression de sa transformée de Laplace n'est pas unique et fait apparaître des différences dans la manière de prendre en compte les conditions initiales [10] [11] [12] [13].

Les différentes définitions de la transformée de Laplace de la dérivation fractionnaires sont des généralisations de la transformée de Laplace de la dérivée nème entière donnée par :

$$L\{D^n f(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \{D_t^{(n-k-1)} f(t)\}$$

- Au sens de Riemann-Liouville(R-L)

$$L\{D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \{ {}^{RL}_0 D_t^{(n-k-1)} f(t) \}_{t_0} \quad (I.25)$$

Les conditions initiales apparaissant dans (I.25) sont données en fonction d'une dérivée entière évaluée à l'origine.

- Au sens de Caputo

$$L\{L\{ {}^c D_t^\alpha f(t) \}\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(\alpha-k-1)} f^k(0), \quad \alpha > 0 \quad (I.26)$$

Les conditions initiales apparaissant dans (I.26) sont données en fonction d'une dérivée entière évaluée à l'origine.

- Définition Grunwald-Letnikov(G-L)

$$L\{L\{ {}^c D_t^\alpha f(t) \}\} = s^\alpha F(s) \quad (I.27)$$

Remarque 1 : Les transformées de Laplace des dérivées d'ordre non entier de Riemann Liouville et de Caputo sont équivalentes si et seulement si le système est au repos pour $t < 0$. Elles se réduisent à

$$L\{L\{ {}^c D_t^\alpha f(t) \}\} = L\{L\{ D_t^\alpha f(t) \}\} = s^\alpha F(s) \quad (I.28)$$

Remarque 2 : La transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue. Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des conditions initiales.

I. 3 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire

Plusieurs représentations peuvent décrire un système entier (équation différentielle, équation de récurrence, représentation d'état, fonction de transfert...), le comportement d'un système d'ordre fractionnaire est le plus souvent décrit par des équations différentielles ou des fonctions de transfert contenant des opérateurs d'ordre fractionnaire.

Dans cette section nous présentons les trois modes existants de représentation des systèmes non entiers : [14]

Equation différentielle

Fonction de transfert

Représentation d'état

1.3.1 Equation différentielle fractionnaire

Plusieurs systèmes dynamiques naturels ont un comportement qui peut être modélisé par des équations différentielles comprenant des dérivées d'ordre fractionnaire. Il est préférable d'utiliser la dérivation de Caputo, car aux conditions initiales, elle ne contient que des dérivées d'ordre entier, et sa dérivée d'une constante est égale à 0. Ce qui conduit à une transformation de Laplace plus simple de (I.42). Un système mono-variable (SISO) peut être identifié par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante : [15] [16]

$$a_0 Y(t) + \sum_{i=1}^n a_i D^{\alpha_i} Y(t) = b_0 u(t) + \sum_{j=1}^m b_j D^{\beta_j} u(t) \quad (I.29)$$

Où $u(t) \in R$ et $y(t) \in R$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système. $a_i, b_j \in R$, $\alpha_i, \beta_j \in R^+$, et les ordres de dérivation sont ordonnés pour des raisons évidentes d'identifiabilité :

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \quad 0 < \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_m$$

Comme dans le cas d'une équation différentielle à dérivées entières, les ordres de dérivation doivent vérifier la contrainte $\alpha_n > \beta_m$ pour que le système soit strictement propre.

I.3.2 Fonction de transfert d'ordre fractionnaire

L'application de la transformée de Laplace à l'équation (I.29), en considérant les conditions initiales nulles, permet de déduire la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + \sum_{j=1}^m b_j s^{\beta_j}}{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i}} \quad (I.30)$$

Où $Y(s)$ et $U(s)$ sont, respectivement, les transformées de Laplace de $y(t)$ et $u(t)$. Lorsque les ordres de dérivation α_i et β_j sont quelconques le système est appelé système fractionnaire généralisé. Dans le cas d'un système commensurable, cette fonction de Transfert s'écrit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + \sum_{j=1}^m b_j s^{j\alpha}}{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i s^{i\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (I.31)$$

Par contre dans le cas général du système non entier multi variables, ayant L entrées et Q sorties, il est décrit par un système d'équations différentielles d'ordre non entier, dont la matrice de fonction de transfert a pour expression :

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1L}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{Q1}(s) & \cdots & G_{QL}(s) \end{pmatrix} \quad (I.32)$$

I.3.3 Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire

Comme dans le cas entier, une représentation d'état non entière comporte deux équations:

Une équation d'état non entière dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre fractionnaire réel.

Une équation d'observation identique à celle des systèmes d'ordre entier.

Elle est ainsi définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ Y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (I.33)$$

Où :

$$D^{(\alpha)}(x) = [D^{\alpha_1}X_1, D^{\alpha_2}X_2 \dots D^{\alpha_n}X_n]^T \quad (I.34)$$

Dans lequel :

u : vecteur des entrées dimension (1×1) ;

x : Vecteur d'état non entier de dimension $(n \times 1)$;

y : Vecteur des sorties de dimension $(q \times 1)$;

α : L'ordre de dérivation non entière ;

Les matrices A, B, C, E sont toutes à éléments constants.

Dans le cas des systèmes commensurables le modèle d'état non entier (I.33) devient :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Eu(t) \end{cases} \quad (I.35)$$

Où :

$$D^\alpha(x) = D^\alpha[x_1, x_2 \dots x_n]^T \quad (I.36)$$

I.3.4 Commandabilité et observabilité des systèmes fractionnaires

a) Commandabilité

La définition de la Commandabilité des systèmes fractionnaires est la même que celle des systèmes entiers.

Le système non entier d'ordre commensurable de l'équation (L.35) est Commandable si pour un temps donné t_0 il existe $t_1 > t_0$ tel que, quelque soient deux états : $x(t_0) = x_0$ et $x(t_1) = x_1$ dans L'espace d'état, il existe une entrée de commande $u(t), t \in [t_0, t_1]$ qui permet de transférer l'état $x(t)$ de x_0 à x_1 en un temps fini t_1 .

Le système non entier d'ordre commensurable est commandable si le rang de la matrice de Commandabilité soit égal à n .

$$\begin{aligned} C &= [BABAA^2B \dots A^{n-1}B] \\ \text{rang}(C) &= n \end{aligned} \quad (I.36)(I.37)$$

b) Observabilité

De la même manière, la condition d'observabilité des systèmes d'ordre non entier commensurables est établie en utilisant la définition d'observabilité des systèmes entiers, et est donnée par :

Les systèmes non entiers d'ordre commensurable de l'équation (I.35) sont observables pendant l'intervalle de temps $[t_0 t_1]$, $t_1 > 0$, si n'importe quel état $x(t_0)$ peut être déduit à partir des observations de la sortie $y(t)$ et de l'entrée $u(t)$ pendant un temps fini $t \in [t_0 t_1]$. Dans ce cas aussi, la condition d'observabilité du système est que le rang de la matrice d'observabilité soit égal à n .

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (I.38)/(I.39)$$

$$\text{rang}(O) = n$$

I.3.5 Stabilité des systèmes fractionnaires

La définition de stabilité au sens BIBO (Bounded Input, Bounded Output), dite aussi stabilité externe, est donnée par la définition suivante : [16]

Un système est dit BIBO stable si et seulement si, à une entrée bornée, correspond une sortie bornée.

Dans le cas des systèmes entiers, la condition de stabilité est que l'équation caractéristique du système n'admet aucune racine à partie réelle positive. Par contre les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier peuvent avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stable.

Il n'y a en ce moment aucune technique polynomiale pour analyser la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire, telles que le critère de Routh-Hurwitz pour les systèmes d'ordre entier. Jusqu'à maintenant le seul moyen connu, est l'application du principe basé sur les conditions sur l'argument.

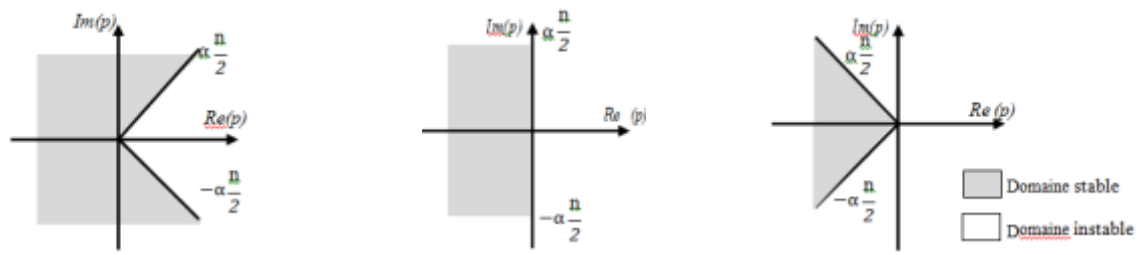
Un système d'ordre commensurable ayant pour polynôme caractéristique $\Delta(p)$ de (I.40): avec

$$\Delta(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0$$

Est stable si et seulement si :

$$|\text{Arg}(p_i)| \geq \alpha \frac{\pi}{2}, \forall i$$

Avec p_i la $i^{\text{ème}}$ racine de $\Delta(p)$. Cette condition définit la région (domaine) de stabilité d'un système d'ordre fractionnaire, dans le plan complexe S , représentée dans **la figure (I.1)** suivante :



$$0 < \alpha < 1 \quad 1 < \alpha < 2$$

Figure I. 1: Domaine de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire dans le plan complexe

I.4 Conclusion

Ce chapitre a introduit les concepts fondamentaux liés au calcul différentiel et intégral d'ordre fractionnaire. Il a posé les bases théoriques nécessaires à la compréhension du reste de notre travail.

Les systèmes à ordre fractionnaire constituent une généralisation puissante des systèmes classiques à ordre entier. En autorisant des dérivées et intégrales d'ordre non entier, ils offrent une capacité accrue de modélisation de phénomènes complexes, notamment ceux présentant des effets de mémoire, d'hystérésis ou de diffusion anormale — caractéristiques fréquemment rencontrées dans les domaines physique, biologique ou économique.

Nous avons présenté les principales définitions des dérivées fractionnaires, telles que celles de Riemann-Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov, en mettant en évidence leurs particularités et domaines d'application. Ces notions sont essentielles pour l'analyse et la modélisation des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire.

Enfin, nous avons abordé les différents modèles mathématiques permettant de représenter ces systèmes, ainsi que les propriétés fondamentales associées, notamment la stabilité, la commandabilité et l'observabilité.

La compréhension de ces outils théoriques ouvre des perspectives prometteuses en matière de conception de lois de commande, d'analyse de stabilité et d'identification de systèmes complexes.

CHAPITRE II

Méthodes d'Approximation des Systèmes d'Ordre Fractionnaire

II. 1 Introduction :

Au cours des dernières décennies, les systèmes d'ordre fractionnaire ont suscité un intérêt croissant dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Contrairement aux systèmes classiques modélisés par des équations différentielles d'ordre entier, les systèmes fractionnaires intègrent des dérivées d'ordre non entier, offrant ainsi une capacité de modélisation plus riche et plus fidèle de certains phénomènes physiques complexes [17].

Cependant, en raison de leur formulation mathématique basée sur des fonctions irrationnelles, ces systèmes ont longtemps été écartés des outils classiques d'analyse et de simulation. Ce n'est que récemment, avec l'évolution des méthodes numériques et le développement d'outils informatiques adaptés, que les opérateurs fractionnaires ont trouvé une place significative dans la modélisation des systèmes dynamiques, notamment dans le domaine du génie électrique.

L'une des principales difficultés réside dans le fait que la majorité des logiciels d'analyse sont conçus pour les systèmes à ordre entier. Pour surmonter cette limite, il est nécessaire de recourir à des méthodes d'**approximation** qui permettent de représenter les opérateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles. Ces techniques d'approximation peuvent être classées en deux grandes catégories : les méthodes **discrètes** (dans le domaine temporel) et les méthodes **continues** (dans le domaine fréquentiel).

Ce travail se propose de présenter un état de l'art des méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire, avec une attention particulière portée aux méthodes analogiques les plus répandues dans la littérature, notamment celles de **Charef** et **Oustaloup**, qui se sont avérées particulièrement efficaces et largement adoptées dans les applications pratiques.

II. 2 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire :

Dans la littérature scientifique, de nombreuses méthodes ont été proposées pour l'approximation des systèmes d'ordre non entier. Ces méthodes peuvent être classées en deux grandes catégories : les approches dans le domaine fréquentiel, dites analogiques, et celles dans le domaine temporel, qualifiées de numériques.

II .2.1 Approximation numérique des systèmes d'ordre fractionnaire :

La principale difficulté liée à l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire réside dans leur simulation dans le domaine temporel. En effet, l'expression analytique de la sortie est souvent complexe, voire impossible à implémenter directement, ce qui rend nécessaire le recours à des techniques d'approximation.

Trois grandes approches numériques sont généralement identifiées dans la littérature :

- **Le calcul direct de l'expression analytique de la sortie**, lorsque cela est possible ;
- **L'approximation directe du modèle fractionnaire par un modèle rationnel discret ;**
- **L'approximation du modèle fractionnaire par un modèle rationnel continu**, suivie d'un processus de discrétisation.

II.2.1.1 Approximation par calcul de l'expression analytique :

Détaillée dans [17], [18] et [19], la méthode consiste à calculer la sortie du système d'ordre fractionnaire à partir de sa représentation modale qui est donnée par la fonction suivante :

$$H(s) = \sum_{l=1}^L \frac{A_l}{s^{n-\lambda l}} \quad (II.1)$$

Où $l=1,2,\dots$, est la multiplicité de la valeur propre λl

La sortie est donnée par la formule suivante :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A_l}{s^{n-\lambda l}} \right\} * u(t) = h_l(t) * u(t) \quad (II.2)$$

L'expression analytique de la sortie n'est pas simple, puisqu'elle exige le calcul d'une intégrale compliquée. De plus, elle dépend de la précision utilisée dans le calcul du produit de convolution de l'entrée et $h(t)$. [20]

II.2.1.2 Approximation par un modèle rationnel discret :

Le principe de cette méthode est de remplacer , dans le modèle non entier, par son équivalent discret $w(z^{-1})$ Cette opération donne la fonction de transfert discrète suivante

$$H(z) = \frac{b_1(w(z^{-1}))^{nb_1} + \dots + b_j(w(z^{-1}))^{nb_j}}{(w(z^{-1}))^{na_1} + \dots + a_L(w(z^{-1}))^{na_L}} \quad (II.3)$$

Où $w(z^{-1})$ peut être calculé de plusieurs méthodes. Parmi lesquelles on peut citer : Euler, Tustin, Simpson, et Al Alaoui :

i. Euler (Grunwald) :

$$S^n = \left(\frac{1}{T} (1 - z^{-1}) \right)^n = \frac{1}{T^n} \left(1 - n z^{-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{-2} + \dots \right) \quad (II.4)$$

ii. Tustin :

$$S^n = \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^n = \left(\frac{2}{T} \right)^n (1 - 2 n z^{-1} + 2 n^2 z^{-2} + \dots) \quad (II.5)$$

iii. Simpson :

$$S^n = \left(\frac{3}{T} \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{1+4z^{-1}+z^{-2}} \right)^n = \left(\frac{3}{T} \right)^n (1 - 4 n z^{-1} + 2n(4n+3)z^{-2} + \dots) \quad (II.6)$$

iv. Al Alaoui

$$S^n = \left(\frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^n = \left(\frac{8}{7T} \right)^n \left(1 - \frac{8}{7} n z^{-1} + \left(-\frac{24}{49} n + \frac{32}{49} n^2 \right) z^{-2} + \dots \right)^n \quad (II.7)$$

L'inconvénient de ces méthodes est que l'ordre du modèle entier obtenu est élevé, et cela rend la simulation à temps réel dure à obtenir. [20]

II.2.1.3 Approximation en utilisant un modèle entier continu :

Cette méthode consiste à calculer la sortie d'un système d'ordre fractionnaire à partir d'un **modèle équivalent d'ordre entier**, obtenu à l'aide de techniques d'approximation continue des opérateurs fractionnaires par des fonctions rationnelles.

En général, l'analyse des systèmes fractionnaires se limite à une **bande de fréquences définie**, ce qui implique que le modèle entier obtenu doit reproduire fidèlement la dynamique du système initial **dans cette plage**.

Le processus d'approximation suit trois étapes :

- L'opérateur fractionnaire est modélisé dans une plage de fréquences limitée $[wA, wB]$
- Ce modèle est ensuite **approximé par un modèle entier continu** en utilisant une des méthodes
- Enfin, le modèle entier obtenu est **discrétisé** à l'aide de méthodes classiques, permettant ainsi le calcul de la sortie du système.

II.2.2. Approximation analogique des systèmes d'ordre fractionnaire :

Dans le cadre de la réalisation et de l'implémentation de correcteurs ou de la simulation de systèmes d'ordre non entier, il est nécessaire de remplacer les fonctions de transfert fractionnaires par des modèles entiers. Ces modèles doivent reproduire fidèlement le comportement des fonctions fractionnaires tout en étant plus faciles à manipuler sur le plan pratique [21].

Plusieurs méthodes d'approximation permettent d'atteindre cet objectif, en s'appuyant sur différentes approches, telles que l'expansion en fractions continues (CFE – Continued Fraction Expansion), qui offre une convergence rapide pour l'évaluation des fonctions, ou encore des techniques d'ajustement de courbes.

Dans la section suivante, nous présenterons brièvement le principe de certaines de ces méthodes. Une attention particulière sera portée aux méthodes de Charef et d'Oustaloup, largement utilisées dans la littérature pour leur robustesse et leur précision . [9] [22] [23] [24]

II.2.2.1 Méthodes d'approximation en utilisant l'expansion des fonctions continues :

La méthode générale d'approximation de l'opérateur intégrateur fractionnaire $G_I(S) = \frac{1}{s^m}$ en utilisant la CFE, est donnée par les fonctions suivantes :

$$G_h(S) = \frac{1}{(1+Ts)^m} \quad (II.8)$$

$$G_l(S) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^m \quad (II.9)$$

Où $G_h(S)$ est l'approximation en hautes fréquences, et $G_l(S)$ est l'approximation en basses fréquences. [20]

a) Méthode de Carlson :

La méthode proposée par Carlson tirée du processus régulier de Newton utilisé pour l'approximation itérative de la racine d'ordre α , peut être considérée comme appartenant à ce groupe [3]. Cette méthode se base sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{1/\mu} - G(s) = 0 \quad (II.10)$$

$$H(S) = (G(s))^\mu \quad (II.11)$$

En définissant $\frac{1}{\mu} \cdot m = \frac{q}{2}$ à chaque itération, partant de la valeur initiale $H_0(s)=1$, une fonction rationnelle approximée peut être donnée par

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)} \quad (II.12)$$

Le modèle d'approximation est obtenu ensuite, en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle par son approximation rationnelle [28].

b) Méthode de Matsuda :

La méthode proposée par [3] est basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire $G(s) = s^\alpha$ par une fonction rationnelle $\hat{G}(s)$ en identifiant le modèle d'approximation à partir de son gain. Le gain est calculé en utilisant M fréquences réparties dans une bande de fréquence $[\omega_0, \omega_M]$ dans laquelle se fait l'approximation. Pour un ensemble

de points sélectionnés $\omega_i, i = 0, 1, 2 \dots M$, l'approximation prend la forme :

$$\hat{G}(s) = a_0 + \frac{s-\omega_0}{a_1(s)+} \frac{s-\omega_1}{a_2(s)+} \frac{s-\omega_2}{a_3(s)+} \dots = \left[a_0; \frac{s-\omega_{i-1}}{a_i} \right] M_{i-1} \quad (II.13)$$

Où

$$a_i = f(\omega_i), f_0(\omega) = G(s), f_{i+1}(s) = \frac{s-\omega_i}{f_i(s)-a_i} \quad (II.14)$$

Le modèle d'approximation est obtenu en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle explicite par son approximation.

II.2.2.2 Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification :

En général, il est possible d'utiliser diverses techniques d'identification dans le domaine fréquentiel pour approximer une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle dont la réponse fréquentielle est aussi proche que possible de celle de la fonction originale.

Cette approximation peut être obtenue en minimisant une fonction coût définie comme suit :

$$J = \int W(s) |G(w) \hat{G}(w)|^2 dw \quad (II.15)$$

Où

- $W(s)$ est une fonction de pondération,
- $G(w)$ représente la réponse fréquentielle de la fonction irrationnelle à approximer,
- $\hat{G}(w)$ est la réponse fréquentielle de la fonction rationnelle choisie pour l'approximation.

Parmi les méthodes les plus couramment utilisées pour ce type d'approximation, on trouve les approches proposées par **Oustaloup et Charef**.

a) La méthode d'Oustaloup:

La Méthode d'Oustaloup permet d'approximer un dérivateur fractionnaire s^α avec ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) dans un domaine fréquentiel donné. Elle repose sur une **répartition récursive de pôles et zéros réels négatifs**, assurant ainsi un **comportement à phase minimale** [27, 28].

Principe de l'approximation

En pratique, un dérivateur fractionnaire ne peut être réalisé que sur un **intervalle fréquentiel limité**, adapté aux besoins de l'application considérée. L'approximation est donc restreinte à une bande de fréquence définie par $[\omega_b, \omega_h]$ avec :

$$\omega_u = \sqrt{\omega_b \cdot \omega_h} \quad (II.16)$$

où :

- ω_b est la fréquence basse (borne inférieure de la bande),
- ω_h est la fréquence haute (borne supérieure),
- ω_u est la **fréquence centrale** de la bande.

L'approximation de l'opérateur s^α dans cette bande est donnée par une **fonction rationnelle** :

$$\hat{F}(s) = C \cdot \prod_{k=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{z_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}} \quad (II.17)$$

où :

- z_k sont les **zéros** et ω_k sont les **pôles** avec C un gain de normalisation est l'**ordre de l'approximation**.

La distribution des pôles et des zéros suit une loi géométrique centrée sur ω_u à l'aide des relations suivantes :

$$\omega_0 = \alpha^{0.5} \cdot \omega_u, z_0 = \alpha^{-0.5} \cdot \omega_u \quad (II.18)$$

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \eta > 1 \text{ (facteur d'échelle)} ; \frac{z_k}{\omega_k} = \alpha > 0 \quad (II.19)$$

Le nombre total de pôles et zéros est défini à partir du paramètre N, donné par :

$$N = \frac{\log(\omega_h/\omega_b)}{2 \cdot \log(\eta)} \quad (II.20)$$

Et on peut également définir :

$$\mu = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha\eta)} \quad (II.21)$$

Cette méthode est largement utilisée pour la **synthèse de contrôleurs fractionnaires** car elle permet de maintenir une **précision acceptable** dans la bande de fréquence spécifiée tout en assurant une **mise en œuvre réalisable** par des filtres classiques (formes rationnelles).

b) La Méthode de Charef : Fonction de singularité :

La méthode appelée également "**Méthode de la fonction de singularité**", a été introduite par **Charef et al. [21,22]** pour approximer les systèmes à **comportement fractionnaire** à l'aide de **fonctions de transfert rationnelles**. Cette méthode repose sur la construction d'un produit de **pôles et de zéros réels négatifs**, soigneusement répartis, permettant de reproduire la réponse fréquentielle des opérateurs fractionnaires sur une bande de fréquence définie.

L'approche diffère selon le **type de fonction à approximer** : systèmes du premier ou second ordre et intégrateur , dérivateur.

- **Système du premier ordre fractionnaire :**

Pour un système dont la fonction de transfert est d'ordre fractionnaire du premier ordre, elle s'exprime sous la forme suivante :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{PT}\right)^\beta} \quad (II.22)$$

Cette expression correspond à un intégrateur fractionnaire tronqué, où :

- * $\beta \in (0.1)$ est l'ordre fractionnaire,
- * PT est un paramètre de fréquence caractéristique.

Selon la méthode de la fonction de singularité proposée par Charef et al. [21], cette fonction peut être approximée, lorsque $N \rightarrow \infty$ par le rapport de deux produits finis de termes du premier ordre :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (II.23)$$

Ici, $N + 1$ représente le **nombre total de singularités** (pôles et zéros), qui est directement lié à la **largeur de bande fréquentielle** sur laquelle l'approximation est valable.

Dans un contexte pratique, cette approximation est tronquée à un **nombre fini** N , ce qui donne:

$$G(s) \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (II.24)$$

Les **pôles** p_i et les **zéros** z_i de cette fonction rationnelle sont définis de manière logarithmique, comme suit :

$$p_i = (ab)^i \cdot p_0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (II.25)$$

$$z_i = (ab)^i \cdot a \cdot p_0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (II.26)$$

Les paramètres a , b et p_0 sont calculés à partir de l'ordre fractionnaire β et de l'erreur tolérée ϵ_p (exprimée en dB), selon les expressions suivantes :

$$p_0 = p_T \cdot 10^{\frac{\epsilon_p}{20\beta}}, \quad a = 10^{\frac{\epsilon_p}{10(1-\beta)}}, \quad b = 10^{\frac{\epsilon_p}{10\beta}}, \quad \beta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (II.27)$$

Cette approche permet d'approximer une pente en magnitude de -20β dB/décade à l'aide d'une structure composée de pentes élémentaires de :

- * -20 dB/décade (liées aux pôles),
 - * 0 dB/décade (liées aux zéros),
- formant ainsi une approximation en zig-zag du comportement fréquentiel souhaité.

- **Système du second ordre fractionnaire :**

Un système du second ordre fractionnaire permet de modéliser des dynamiques complexes en introduisant une puissance fractionnaire dans l'équation classique. La fonction de transfert s'écrit :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1\right)^\beta} \quad (II.28)$$

où ω_n est la pulsation propre, ξ le facteur d'amortissement, et $\beta \in (0,1)$

Selon la valeur de β , deux cas sont distingués :

- **Cas 1 :** $0 < \beta < 0.5$

La fonction est réécrite sous forme d'un produit rationnel, avec une approximation des termes fractionnaires à l'aide d'une série de pôles et de zéros. Les paramètres d'approximation sont déterminés en fonction d'une **bande de fréquence ciblée** et d'une **erreur tolérée en dB**.

▪ **Cas 2 : $0,5 < \beta < 1$**

La structure reste similaire mais l'expression rationnelle est adaptée en fonction de β . Dans les deux cas, l'approximation finale est exprimée sous forme d'une **fonction rationnelle paramétrique** utilisable pour la simulation et la commande. Les méthodes d'approximation comme **la méthode de Charef** sont utilisées pour transformer les puissances fractionnaires en fonctions rationnelles à pôles et zéros réels, assurant ainsi une implémentation numérique efficace.

• **Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire :**

Cette méthode est efficace et effortless à utiliser dont le yet est d'approximer standard une fonction rationnelle l'intégrateur non entier. Dans un chief lieu, l'opérateur est modélisé standard une fonction PPF dans une bande de fréquence d'utilité pratique. Ensuite, cette dernière est approximée standard une fonction rationnelle en utilisant la méthode de Charef exposée dans la segment précédente. Donc avec cette méthode on peut atteindre n'importe quelle précision désirée sur n'importe quelle bande de fréquences . Pour une bande de fréquences d'utilité pratique donnée $[\omega_l \ \omega_h]$, l'opérateur intégrateur présenté peut être modélisé standard la fonction de transfert PPF suivante : [21]

$$G(s) = \frac{k_l}{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m\right)} \quad (II.29)$$

En supposant que $\omega \in [\omega_l \ \omega_h]$, on a $\omega \gg \omega_c$, alors :

$$G(s) = \frac{K_l}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{K_l \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} = G_l(s) \quad (II.30)$$

Avec $K_l = 1/\omega_c^m$ et ω_c est la fréquence de coupure obtenue dans le diagramme de Bode à $-3m \text{ dB}$ qui est calculée par $\omega_c = \sqrt{10[\varepsilon / 10m] - 1}$ où ε est l'erreur maximale permise entre les pentes de l'intégrateur d'ordre fractionnaire et sa fonction PPF dans une bande fréquences donnée. Pour représenter la fonction par un modèle temps-invariant, on va l'approximer par la méthode de la fonction de singularité vue dans la section précédente . La méthode consiste en l'approximation de la pente à $-20m \text{ dB/dec}$, dans le diagramme de Bode, par une alternance de pentes à -20 dB/dec et 0 dB/dec . Cette dernière correspond à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négatif du plan complexe S .

$$P_0 < Z_0 < P_1 < Z_1 < \dots < Z_{N-1} < P_N \quad (II. 31)$$

On obtient l'approximation suivante :

$$G(S) = \frac{K_l}{\left(1 + \left(\frac{S}{\omega_c}\right)\right)^m} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{S}{z_i}\right)}{\cong K_l \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{S}{p_i}\right)} \quad (II.32)$$

Obtenue en choisissant y et ω_{max} , qui peut être fixée à $100 \omega_h$, et avec :

$$P_0 = \omega_c 10^{y/20m} \text{ et } Z_0 = aP_0 \quad (II.33)$$

$$G(s) = \frac{k_l}{\left(1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)\right)^m} \cong K_l \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (II.34)$$

Pour voir la contribution de chaque pôle, on décompose la fonction en somme de fractions simples (ou résidus). On obtient :

$$G(s) = K_l \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^2}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (II.35)$$

Avec

$$h_i = K_l \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad (II.36)$$

- **Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire :**

Pour implémenter des correcteurs d'ordre fractionnaire, la méthode d'approximation de l'intégrateur a été étendue au dérivateur d'ordre fractionnaire. Dans ce contexte, la fonction de transfert est modélisée par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF), notée : [30]

$$G(s) = K_D \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m\right) \quad (II.37)$$

où $K_D = \omega_c$ et ω_c est la fréquence de coupure obtenue dans le diagramme de Bode à -3 m dB, calculée par :

$$\omega_c = \omega_l \cdot 10^{\frac{\epsilon}{10m}} - 1 \quad (II.38)$$

avec ϵ représentant l'erreur maximale permise entre les pentes du dérivateur d'ordre fractionnaire et sa fonction ZPF dans une bande de fréquences donnée.

Pour représenter cette fonction par un modèle temps-invariant, on utilise la méthode des singularités, qui consiste à approximer la pente à $+20$ m dB/décade du diagramme de Bode de la ZPF par une alternance de pentes à $+20$ dB/décade et 0 dB/décade. Cette alternance correspond à une succession de zéros et de pôles sur l'axe réel négatif du plan complexe S . L'approximation obtenue est :

$$G(s) = K_D \prod_{i=0}^{N-6} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right) \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right) \quad (II.39)$$

Où $z_0 = \omega_c \cdot 10^{\frac{y}{20m}}$ et les paramètres y , ω_{max} (fixé à $100 \omega_h$), a , b , et N sont déterminés selon les relations définies précédemment.

En remplaçant p_i et z_i par leurs expressions respectives, on obtient l'approximation suivante :

$$G_D(s) = K_D \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right) \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)$$

(II.40)

Le calcul des résidus de cette fonction donne la formule :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N h_i \frac{s}{1+s \cdot (ab)^i \cdot p_0}$$

(II.41)

avec $G_0 = K_D$ et

$$h_i = -\frac{K_D}{p_0(ab)^i} \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^i - (ab)^j)$$

(II.42)

Cette méthode permet d'implémenter efficacement des dérivateurs d'ordre fractionnaire dans des systèmes de commande

II.3.Conclusion

La synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire repose fondamentalement sur leur approximation par des modèles d'ordre entier, afin de faciliter leur implémentation pratique, notamment dans les systèmes de commande et d'analyse.

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu théorique des principales méthodes d'approximation disponibles dans la littérature. Après une brève introduction aux approches numériques, l'accent a été mis sur les méthodes analogiques, en particulier celles de Charef et d'Oustaloup.

Ces deux approches ont été décrites en détail, car elles constituent des outils puissants pour représenter avec précision les intégrateurs et dérivateurs d'ordre fractionnaire sur une bande

de fréquences spécifiée. Elles permettent ainsi une modélisation efficace et flexible, adaptée aux besoins des applications réelles.

CHAPITRE III

Application des Méthodes d'Approximation des Systèmes d'Ordre Fractionnaire

III. 1 Introduction

Ce chapitre présente des exemples d'application des méthodes d'approximation d'Oustaloup et Matsuda, les plus courantes dans la littérature. Ces méthodes permettent de représenter un système d'ordre fractionnaire par un système d'ordre entier sur une bande de fréquence limitée. À travers des simulations MATLAB, des intégrateurs et dérivateurs fractionnaires seront approximés. L'objectif est de vérifier que l'approximation conserve la dynamique du système dans la bande choisie, et de comparer les performances des deux méthodes.

Dans cette section, nous évaluons l'efficacité de cette méthode à travers des exemples concrets. Deux paramètres essentiels sont pris en compte dans l'analyse :

- l'ordre de la dérivation et d'intégration fractionnaire α ,
- et le nombre de pôles et zéros utilisés dans l'approximation, noté N (aussi appelé ordre de troncature).

Pour cela, nous considérons deux cas :

- un cas de faible ordre : $N=5$.
- et un cas de haute précision : $N=20$.

L'analyse se fait sur la bande de fréquence $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$.

III.2 Application de la méthode d'Oustaloup

Comme présenté au chapitre II, la méthode d'Oustaloup est l'une des techniques les plus répandues pour l'approximation des dérivateurs fractionnaires. Elle consiste à remplacer l'opérateur S^α , défini sur une bande de fréquences, par une fonction de transfert rationnelle à ordre entier, constituée de pôles et de zéros répartis logarithmiquement.

III.2.1 Dérivateur fractionnaire :

La fonction de transfert de dérivateur d'ordre fractionnaire est donnée par

$$G(s) = s^\alpha$$

Nous considérons trois ordres dérivateurs ($\alpha = 0.2$; $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 0.7$) ; pour l'ordre de filtre nous considérons deux cas :

- un cas de faible ordre : $N=5$.
- et un cas de haute précision : $N=20$.

L'analyse se fait sur la bande de fréquence $[\omega l, \omega h] = [0.01, 1000]$.

▪ Pour $\alpha = 0.2$; $G(s) = s^{0.2}$

Les modèles approximatifs de l'ordre dérivateur en utilisant la méthode d'approximation pour les deux ordres de filtre $N = 5$ et $N = 20$ sont :

$$G_{\alpha=0.2;N=5}(s) = \frac{3.981 s^5 + 1111 s^4 + 2.819e04 s^3 + 7.081e04 s^2 + 1.761e04 s + 398.1}{s^5 + 442.3 s^4 + 1.779e04 s^3 + 7.081e04 s^2 + 2.791e04 s + 1000}$$

$$G_{\alpha=0.2;N=20}(s) = \frac{3.981 s^{20} + 6440 s^{19} + 3.749e06 s^{18} + 1.021e09 s^{17} + 1.428e11 s^{16} + 1.071e13 s^{15} + 4.402e14 s^{14} + 1.003e16 s^{13} + 1.275e17 s^{12} + 9.067e17 s^{11} + 3.615e18 s^{10} + 8.081e18 s^9 + 1.013e19 s^8 + 7.101e18 s^7 + 2.778e18 s^6 + 6.023e17 s^5 + 7.156e16 s^4 + 4.56e15 s^3 + 1.493e14 s^2 + 2.285e12 s + 1.259e10}{s^{20} + 1815 s^{19} + 1.186e06 s^{18} + 3.622e08 s^{17} + 5.685e10 s^{16} + 4.784e12 s^{15} + 2.206e14 s^{14} + 5.641e15 s^{13} + 8.043e16 s^{12} + 6.419e17 s^{11} + 2.871e18 s^{10} + 7.202e18 s^9 + 1.013e19 s^8 + 7.968e18 s^7 + 3.497e18 s^6 + 8.507e17 s^5 + 1.134e17 s^4 + 8.109e15 s^3 + 2.978e14 s^2 + 5.115e12 s + 3.162e10}$$

La figure 3.1 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode de dérivateur d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.2$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup.

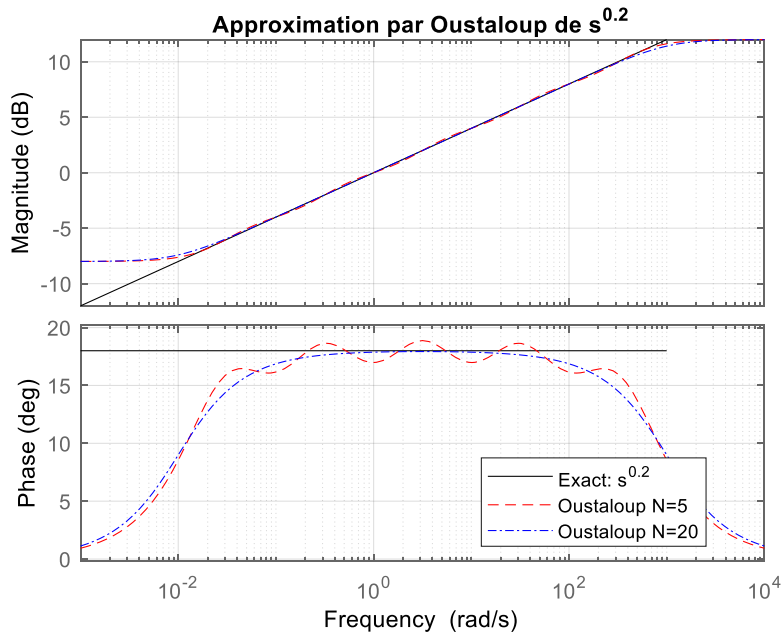


Figure III. 1 Tracé de Bode de $G(s) = s^{0.2}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup

▪ Pour $\alpha = 0.5$; $G(s) = s^{0.5}$

Les modèles approximés de l'ordre dérivateur en utilisant la méthode d'approximation pour les deux ordres de filtre $N = 5$ et $N = 20$ sont :

$$G_{\alpha=0.5;N=5}(s) = \frac{31.62 s^5 + 6248 s^4 + 1.122e05 s^3 + 1.996e05 s^2 + 3.514e04 s + 562.3}{s^5 + 624.8 s^4 + 3.549e04 s^3 + 1.996e05 s^2 + 1.111e05 s + 5623}$$

$$G_{\alpha=0.5;N=20}(s) = \frac{31.62 s^{20} + 4.692e04 s^{19} + 2.506e07 s^{18} + 6.258e09 s^{17} + 8.03e11 s^{16} + 5.524e13 s^{15} + 2.083e15 s^{14} + 4.353e16 s^{13} + 5.075e17 s^{12} + 3.311e18 s^{11} + 1.211e19 s^{10} + 2.483e19 s^9 + 2.854e19 s^8 + 1.836e19 s^7 + 6.587e18 s^6 + 1.31e18 s^5 + 1.428e17 s^4 + 8.346e15 s^3 + 2.506e14 s^2 + 3.519e12 s + 1.778e10}{s^{20} + 1979 s^{19} + 1.409e06 s^{18} + 4.693e08 s^{17} + 8.03e10 s^{16} + 1.605e17 s^{15} + 1.396e18 s^{14} + 6.809e18 s^{13} + 1.862e19 s^{12} + 2.854e19 s^{11} + 2.448e19 s^{10} + 1.171e19 s^9 + 3.107e18 s^8 + 4.515e17 s^7 + 3.519e16 s^6 + 1.409e15 s^5 + 2.639e13 s^4 + 1.778e11 s^3 + 1.409e15 s^2 + 2.639e13 s + 1.778e11}$$

La figure 3.2 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode de dérivateur d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.5$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup.

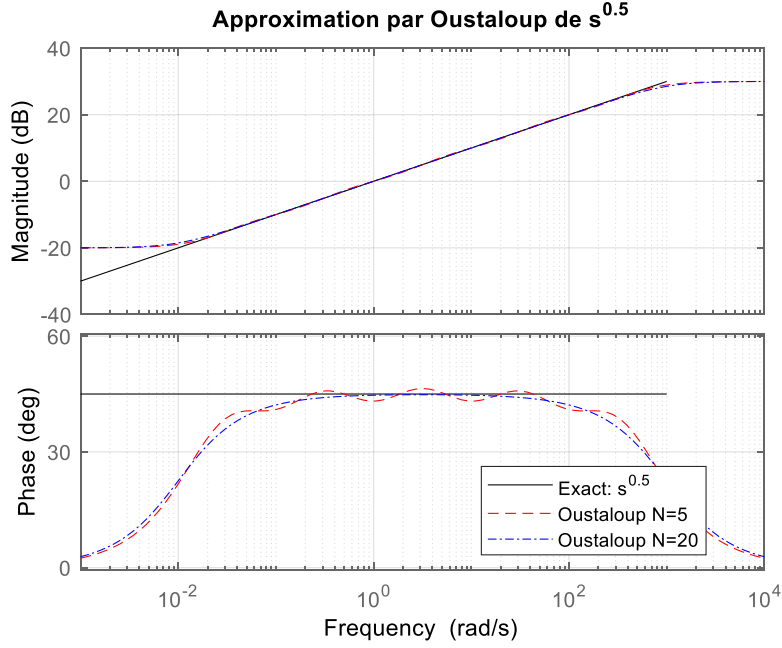


Figure III. 2 Tracé de Bode de $G(s) = s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup

- Pour $\alpha = 0.7$; $G(s) = s^{0.7}$

Les modèles approximés de l'ordre dérivateur en utilisant la méthode d'approximation pour les deux ordres de filtre $N = 5$ et $N = 20$ sont :

$$G_{\alpha=0.7;N=5}(s) = \frac{125.9 s^5 + 1.976e04 s^4 + 2.819e05 s^3 + 3.982e05 s^2 + 5.569e04 s + 707.9}{s^5 + 786.6 s^4 + 5.624e04 s^3 + 3.982e05 s^2 + 2.791e05 s + 1.778e04}$$

$$G_{\alpha=0.7;N=20}(s) = \frac{125.9 s^{20} + 1.763e05 s^{19} + 8.891e07 s^{18} + 2.096e10 s^{17} + 2.539e12 s^{16} + 1.649e14 s^{15} + 5.87e15 s^{14} + 1.158e17 s^{13} + 1.275e18 s^{12} + 7.852e18 s^{11} + 2.711e19 s^{10} + 5.248e19 s^9 + 5.694e19 s^8 + 3.458e19 s^7 + 1.171e19 s^6 + 2.199e18 s^5 + 2.263e17 s^4 + 1.249e16 s^3 + 3.539e14 s^2 + 4.692e12 s + 2.239e10}{s^{20} + 2096 s^{19} + 1.581e06 s^{18} + 5.578e08 s^{17} + 1.011e11 s^{16} + 9.824e12 s^{15} + 5.232e14 s^{14} + 1.545e16 s^{13} + 2.544e17 s^{12} + 2.344e18 s^{11} + 1.211e19 s^{10} + 3.507e19 s^9 + 5.694e19 s^8 + 5.174e19 s^7 + 2.622e19 s^6 + 7.367e18 s^5 + 1.134e18 s^4 + 9.364e16 s^3 + 3.971e15 s^2 + 7.877e13 s + 5.623e11}$$

La figure 3.3 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode de dérivateur d'ordre

fractionnaire $\alpha = 0.7$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup.

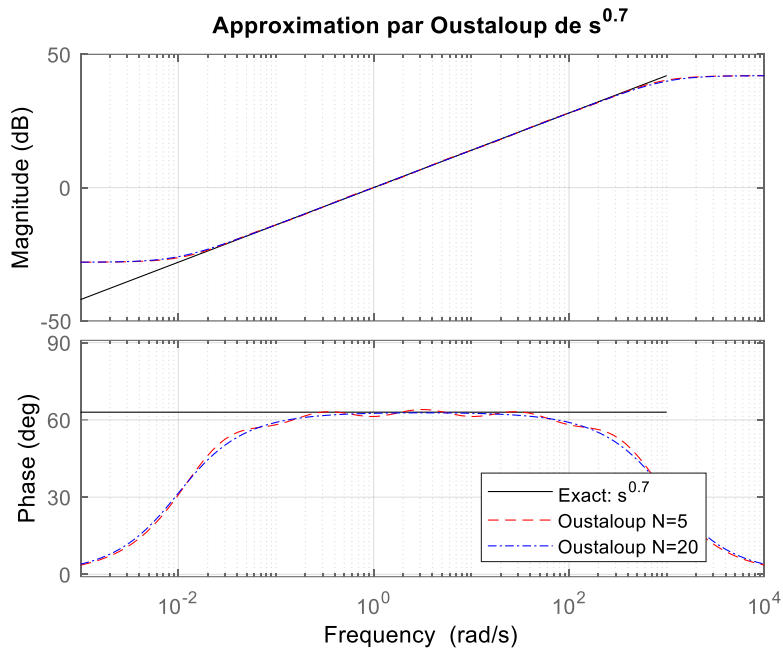


Figure III. 3 Tracé de Bode de $G(s) = s^{0.7}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup

Commentaire

Les figures 3.1- 3.3 montrent les réponses en fréquence (Amplitudes et phase) des opérateurs fractionnaire $s^{0.2}$, $s^{0.5}$ et $s^{0.7}$ de ses approximations via la méthode d'Oustaloup pour deux ordres différents : $N = 5$ et $N = 20$.

Les résultats montrent que l'augmentation de l'ordre N améliore significativement la précision de l'approximation, aussi bien en amplitude qu'en phase. En particulier, l'approximation avec $N = 20$ reproduit fidèlement la réponse exacte sur une large plage de fréquences. Ces observations confirment que pour des applications de commande exigeantes, un ordre d'approximation élevé est préférable afin d'assurer une modélisation précise des opérateurs fractionnaires.

III.2.2 Intégrateur fractionnaire :

La fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée par

$$G(s) = \frac{1}{s^\alpha}$$

Nous considérons trois ordres intégrateurs ($\alpha = 0.2$; $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 0.7$) ; pour l'ordre de filtre nous considérons deux cas :

- un cas de faible ordre : $N=5$.
- et un cas de haute précision : $N=20$.

L'analyse se fait sur la bande de fréquence $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$.

- Pour $\alpha = 0.2$; $G(s) = \frac{1}{s^{0.2}}$

La figure 3.4 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode de intégrateur d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.2$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup.

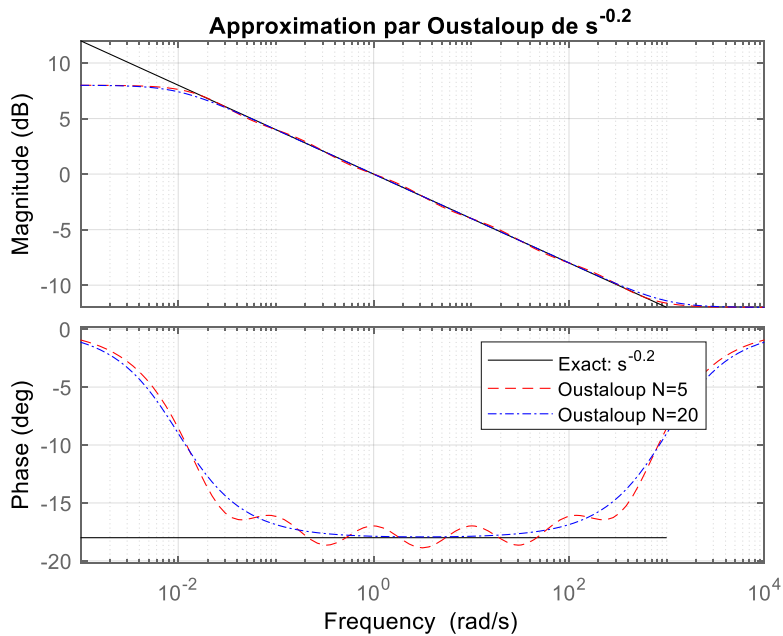


Figure III. 4 Tracé de Bode de $G(s) = \frac{1}{s^{0.2}}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup

- Pour $\alpha = 0.5$; $G(s) = \frac{1}{s^{0.5}}$

La figure 3.5 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.5$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup.

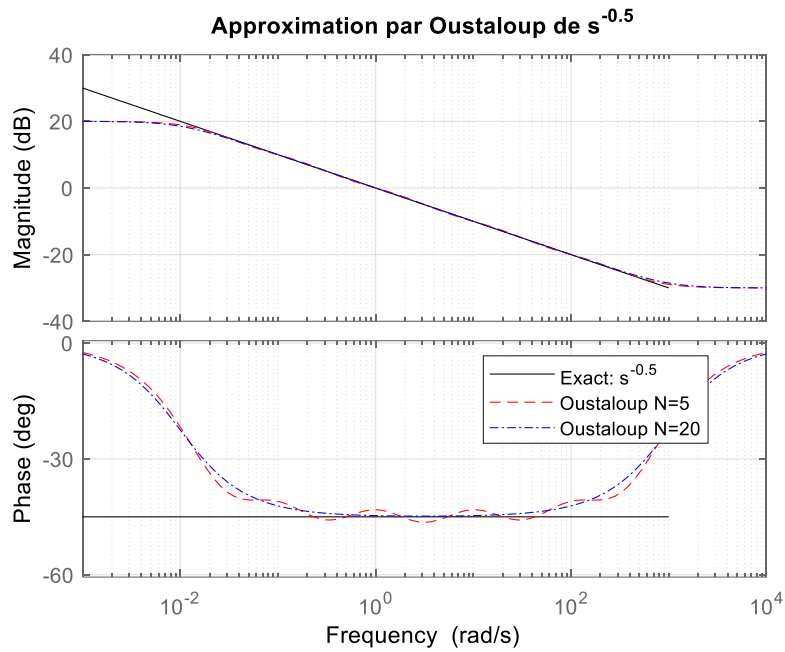


Figure III. 5 :Tracé de Bode de $G(s) = \frac{1}{s^{0.5}}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup

- Pour $\alpha = 0.7$; $G(s) = \frac{1}{s^{0.7}}$

La figure 3.6 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.7$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup.

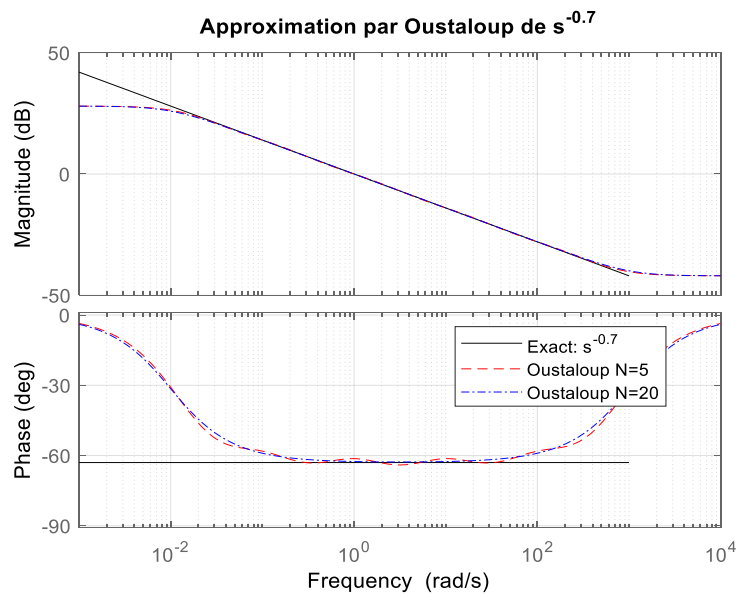


Figure III. 6 Tracé de Bode de $G(s) = \frac{1}{s^{0.7}}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup

Commentaire

Les figures 3.4 à 3.6 montrent les réponses en fréquence (Amplitudes et phase) des opérateurs fractionnaire $s^{-0.2}$, $s^{-0.5}$ et $s^{-0.7}$ de ses approximations via la méthode d'Oustaloup pour deux ordres différents : $N = 5$ et $N = 20$.

On observe que plus α est petit, plus l'erreur d'approximation, notamment en phase, est importante. À l'inverse, lorsque α augmente, l'approximation devient plus fidèle, même avec un faible ordre. De plus, un ordre N plus élevé améliore la précision globale, surtout aux basses et hautes fréquences. On en conclut que la précision de l'approximation dépend fortement de la valeur de α et de l'ordre N , et qu'il est préférable d'utiliser un ordre élevé, notamment pour les petites valeurs de α .

III. 3 Application de la méthode de Matsuda

Comme présenté au chapitre II, La méthode de Matsuda permet d'approximer une dérivation fractionnaire par une fonction rationnelle à l'aide de pôles distribués logarithmiquement, dans une plage fréquentielle définie. Elle est particulièrement utile pour les simulations numériques, car elle produit des modèles d'ordre entier compatibles avec les outils classiques d'analyse et de commande.

III.3.1 Dérivateur fractionnaire :

La fonction de transfert de dérivateur d'ordre fractionnaire est donnée par

$$G(s) = s^\alpha$$

Nous considérons trois ordres dérivateurs ($\alpha = 0.2$; $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 0.7$) ; pour l'ordre de filtre nous considérons deux cas :

- un cas de faible ordre : $N=5$.
- et un cas de haute précision : $N=20$.

L'analyse se fait sur la bande de fréquence $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$.

- **Pour $\alpha = 0.2$; $G(s) = s^{0.2}$**

Les modèles approximés de l'ordre dérivateur en utilisant la méthode d'approximation pour les deux ordres de filtre $N = 5$ et $N = 20$ sont :

$$G_{\alpha=0.2;N=5}(s) = \frac{5.329 s^5 + 2596 s^4 + 7.692e04 s^3 + 1.903e05 s^2 + 3.829e04 s + 398.1}{s^5 + 961.8 s^4 + 4.78e04 s^3 + 1.932e05 s^2 + 6.52e04 s + 1338}$$

$$G_{\alpha=0.2;N=20}(s)$$

$$\begin{aligned} & 8.539 s^{20} + 8.222e04 s^{19} + 1.581e08 s^{18} + 1.005e11 s^{17} + 2.597e13 s^{16} + \\ & 3.042e15 s^{15} + 1.722e17 s^{14} + 4.905e18 s^{13} + 7.211e19 s^{12} + \\ & 5.559e20 s^{11} + 2.266e21 s^{10} + 4.896e21 s^9 + 5.586e21 s^8 + \\ & 3.334e21 s^7 + 1.023e21 s^6 + 1.569e20 s^5 + 1.15e19 s^4 + \\ & 3.757e17 s^3 + 4.839e15 s^2 + 1.933e13 s + 1.259e10 \\ = & \frac{s^{20} + 1.535e04 s^{19} + 3.843e07 s^{18} + 2.984e10 s^{17} + 9.134e12 s^{16} + \\ & 1.246e15 s^{15} + 8.124e16 s^{14} + 2.648e18 s^{13} + 4.437e19 s^{12} + \\ & 3.889e20 s^{11} + 1.8e21 s^{10} + 4.416e21 s^9 + 5.728e21 s^8 + \\ & 3.896e21 s^7 + 1.368e21 s^6 + 2.417e20 s^5 + 2.064e19 s^4 + \\ & 7.984e17 s^3 + 1.256e16 s^2 + 6.533e13 s + 6.785e10}{s^{20} + 1.535e04 s^{19} + 3.843e07 s^{18} + 2.984e10 s^{17} + 9.134e12 s^{16} + \\ & 1.246e15 s^{15} + 8.124e16 s^{14} + 2.648e18 s^{13} + 4.437e19 s^{12} + \\ & 3.889e20 s^{11} + 1.8e21 s^{10} + 4.416e21 s^9 + 5.728e21 s^8 + \\ & 3.896e21 s^7 + 1.368e21 s^6 + 2.417e20 s^5 + 2.064e19 s^4 + \\ & 7.984e17 s^3 + 1.256e16 s^2 + 6.533e13 s + 6.785e10} \end{aligned}$$

La figure 3.7 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode de dérivateur d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.2$ et de son approximé par la méthode de Matsuda.

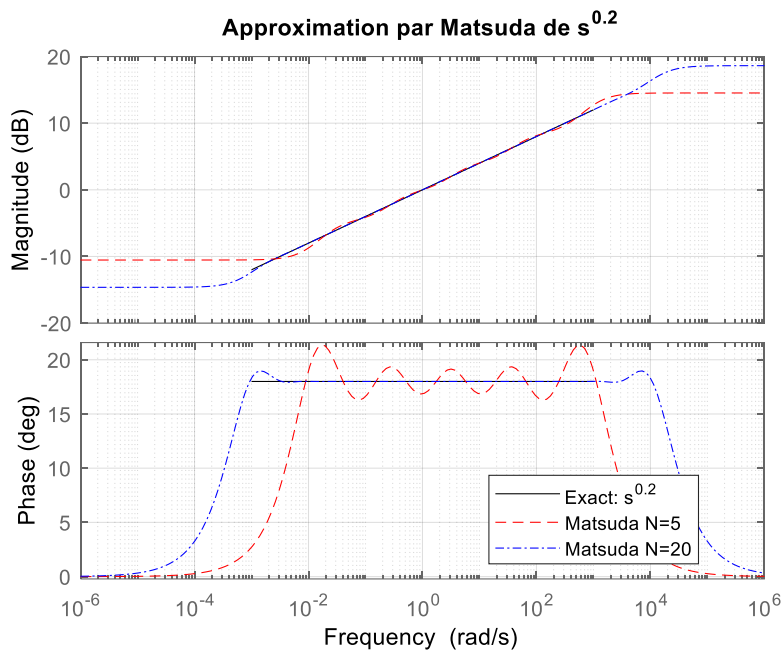


Figure III. 7. Tracé de Bode de $G(s) = s^{0.2}$ et de son approximé par la méthode de Matsuda

▪ Pour $\alpha = 0.5$; $G(s) = s^{0.5}$

Les modèles approximés de l'ordre dérivateur en utilisant la méthode d'approximation pour les deux ordres de filtre $N = 5$ et $N = 20$ sont :

$$G_{\alpha=0.5;N=5}(s)$$

$$= \frac{72.13 s^5 + 2.261e04 s^4 + 4.604e05 s^3 + 7.867e05 s^2 + 1.051e05 s + 562.3}{s^5 + 1870 s^4 + 1.399e05 s^3 + 8.187e05 s^2 + 4.022e05 s + 1.283e04}$$

$$G_{\alpha=0.5;N=20}(s)$$

$$\begin{aligned} & 235.3 s^{20} + 1.731e06 s^{19} + 2.789e09 s^{18} + 1.541e12 s^{17} + 3.527e14 s^{16} + \\ & 3.697e16 s^{15} + 1.886e18 s^{14} + 4.861e19 s^{13} + 6.484e20 s^{12} + \\ & 4.542e21 s^{11} + 1.683e22 s^{10} + 3.306e22 s^9 + 3.425e22 s^8 + \\ & 1.852e22 s^7 + 5.126e21 s^6 + 7.052e20 s^5 + 4.597e19 s^4 + \\ & \frac{1.314e18 s^3 + 1.439e16 s^2 + 4.57e13 s + 1.78e10}{s^{20} + 2.568e04 s^{19} + 8.086e07 s^{18} + 7.385e10 s^{17} + 2.584e13 s^{16} + \\ & 3.964e15 s^{15} + 2.882e17 s^{14} + 1.041e19 s^{13} + 1.925e20 s^{12} + \\ & 1.859e21 s^{11} + 9.467e21 s^{10} + 2.554e22 s^9 + 3.647e22 s^8 + \\ & 2.734e22 s^7 + 1.061e22 s^6 + 2.08e21 s^5 + 1.984e20 s^4 + \\ & 8.672e18 s^3 + 1.569e17 s^2 + 9.738e14 s + 1.324e12} \end{aligned}$$

La figure 3.8 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode de dérivateur d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.5$ et de son approximé par la méthode de Matsuda.

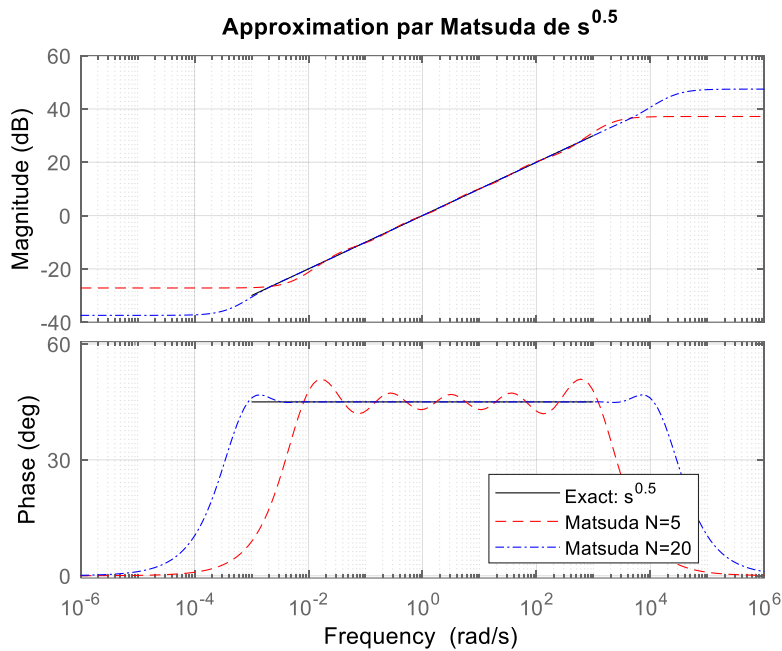


Figure III. 8. Tracé de Bode de $G(s) = s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode de Matsuda

- Pour $\alpha = 0.7$; $G(s) = s^{0.7}$

Les modèles approximés de l'ordre dérivateur en utilisant la méthode d'approximation pour les deux ordres de filtre $N = 5$ et $N = 20$ sont :

$$G_{\alpha=0.7;N=5}(s)$$

$$= \frac{495.1 s^5 + 1.179e05 s^4 + 1.874e06 s^3 + 2.495e06 s^2 + 2.498e05 s + 707.9}{s^5 + 3529 s^4 + 3.525e05 s^3 + 2.648e06 s^2 + 1.665e06 s + 6.993e04}$$

$$G_{\alpha=0.7;N=20}(s)$$

$$\begin{aligned} & 2607 s^{20} + 1.64e07 s^{19} + 2.368e10 s^{18} + 1.197e13 s^{17} + 2.53e15 s^{16} + \\ & 2.467e17 s^{15} + 1.175e19 s^{14} + 2.834e20 s^{13} + 3.544e21 s^{12} + \\ & 2.329e22 s^{11} + 8.103e22 s^{10} + 1.493e23 s^9 + 1.449e23 s^8 + \\ & 7.332e22 s^7 + 1.894e22 s^6 + 2.421e21 s^5 + 1.456e20 s^4 + \\ & 3.793e18 s^3 + 3.699e16 s^2 + 9.873e13 s + 2.24e10 \\ = & \frac{s^{20} + 4.408e04 s^{19} + 1.652e08 s^{18} + 1.694e11 s^{17} + 6.5e13 s^{16} + \\ & 1.081e16 s^{15} + 8.459e17 s^{14} + 3.275e19 s^{13} + 6.474e20 s^{12} + \\ & 6.668e21 s^{11} + 3.619e22 s^{10} + 1.041e23 s^9 + 1.583e23 s^8 + \\ & 1.266e23 s^7 + 5.248e22 s^6 + 1.102e22 s^5 + 1.131e21 s^4 + \\ & 5.347e19 s^3 + 1.058e18 s^2 + 7.328e15 s + 1.165e13}{s^{20} + 4.408e04 s^{19} + 1.652e08 s^{18} + 1.694e11 s^{17} + 6.5e13 s^{16} + \\ & 1.081e16 s^{15} + 8.459e17 s^{14} + 3.275e19 s^{13} + 6.474e20 s^{12} + \\ & 6.668e21 s^{11} + 3.619e22 s^{10} + 1.041e23 s^9 + 1.583e23 s^8 + \\ & 1.266e23 s^7 + 5.248e22 s^6 + 1.102e22 s^5 + 1.131e21 s^4 + \\ & 5.347e19 s^3 + 1.058e18 s^2 + 7.328e15 s + 1.165e13} \end{aligned}$$

La figure 3.9 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode de dérivateur d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.7$ et de son approximé par la méthode de Matsuda.

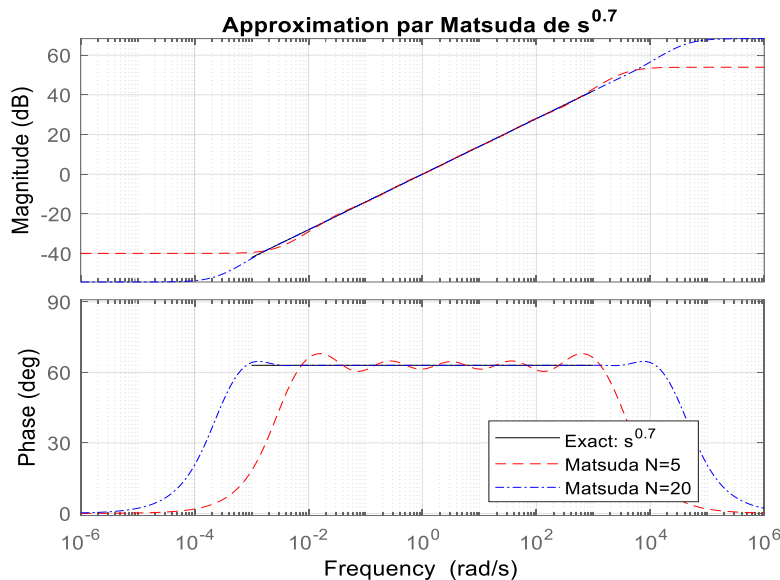


Figure III. 9 Tracé de Bode de $G(s) = s^{0.7}$ et de son approximé par la méthode de Matsuda

Commentaire

Les figures 3.7- 3.9 montrent les réponses en fréquence (Amplitudes et phase) des opérateurs fractionnaire $s^{0.2}$, $s^{0.5}$ et $s^{0.7}$ de ses approximations via la méthode de Matsuda pour deux ordres différents : $N = 5$ et $N = 20$.

Les résultats montrent que l'augmentation de l'ordre N améliore significativement la précision de l'approximation, aussi bien en amplitude qu'en phase. En particulier, l'approximation avec $N = 20$ reproduit fidèlement la réponse exacte sur une large plage de fréquences. Ces observations confirment que pour des applications de commande exigeantes,

un ordre d'approximation élevé est préférable afin d'assurer une modélisation précise des opérateurs fractionnaires.

III.3.2 Intégrateur fractionnaire :

La fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée par

$$G(s) = \frac{1}{s^\alpha}$$

Nous considérons trois ordres intégrateurs ($\alpha = 0.2$; $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 0.7$) ; pour l'ordre de filtre nous considérons deux cas :

- un cas de faible ordre : $N=5$.
- et un cas de haute précision : $N=20$.

L'analyse se fait sur la bande de fréquence $[\omega_l, \omega_h] = [0.01, 1000]$.

- Pour $\alpha = 0.2$; $G(s) = \frac{1}{s^{0.2}}$

La figure 3.10 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode d'un intégrateur d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.2$ et de son approximé par la méthode de Matsuda.

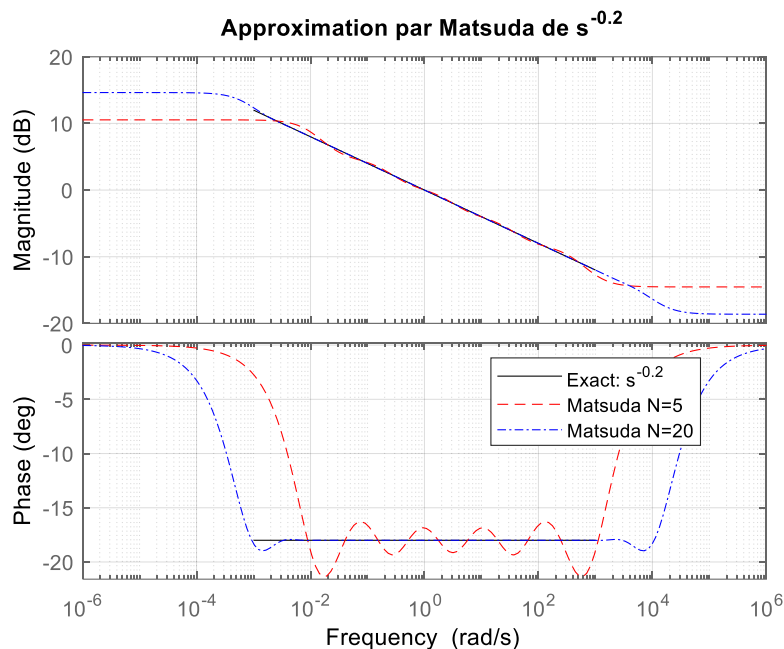


Figure III. 10. Tracé de Bode de $G(s) = \frac{1}{s^{0.2}}$ et de son approximé par la méthode de Matsuda

- Pour $\alpha = 0.5$; $G(s) = \frac{1}{s^{0.5}}$

La figure 3.11 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.5$ et de son approximé par la méthode de Matsuda.

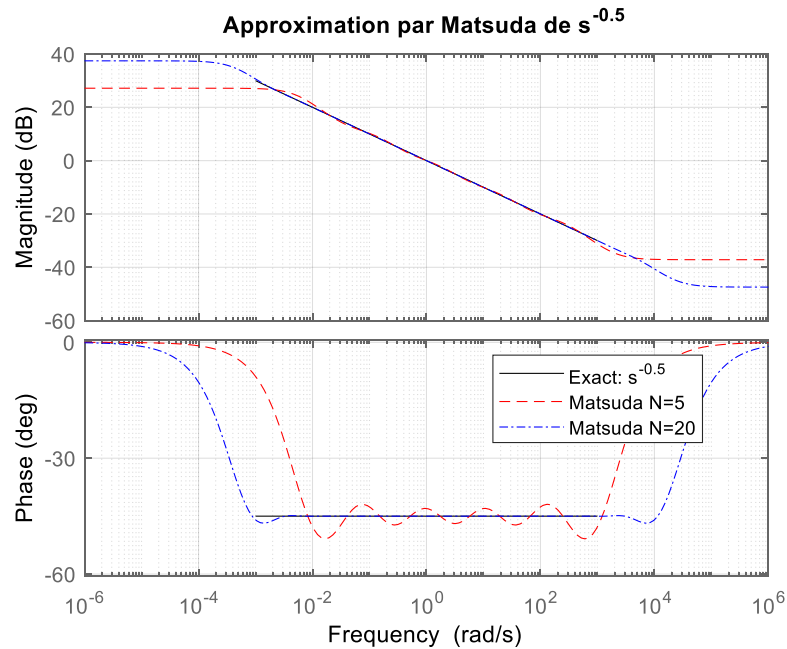


Figure III. 11 Tracé de Bode de $G(s) = \frac{1}{s^{0.5}}$ et de son approximé par la méthode de Matsuda

- Pour $\alpha = 0.7$; $G(s) = \frac{1}{s^{0.7}}$

La figure 3.12 ci-dessous représente le tracé du diagramme de Bode de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $\alpha = 0.7$ et de son approximé par la méthode de Matsuda.

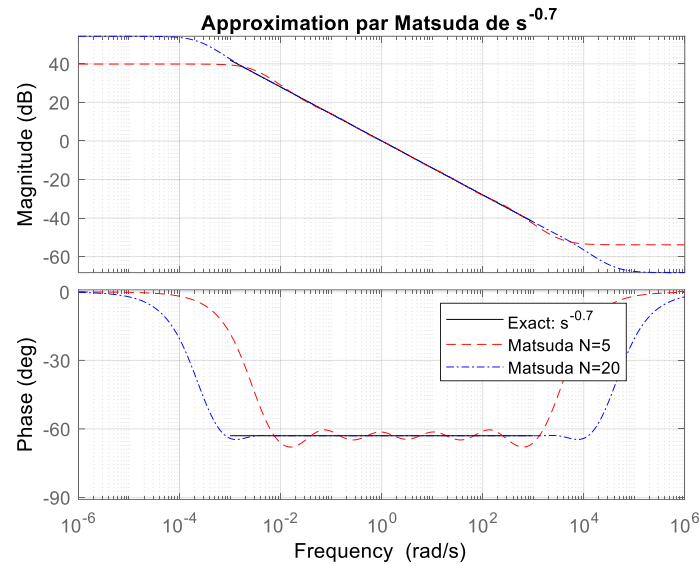


Figure III. 12 Tracé de Bode de $G(s) = \frac{1}{s^{0.7}}$ et de son approximé par la méthode de Matsuda

Commentaire

Les figures 3.10 à 3.12 montrent les réponses en fréquence (Amplitudes et phase) des opérateurs fractionnaire $s^{-0.2}$, $s^{-0.5}$ et $s^{-0.7}$ de ses approximations via la méthode de Matsuda pour deux ordres différents : $N = 5$ et $N = 20$.

On observe que plus α est petit, plus l'erreur d'approximation, notamment en phase, est importante. À l'inverse, lorsque α augmente, l'approximation devient plus fidèle, même avec un faible ordre. De plus, un ordre N plus élevé améliore la précision globale, surtout aux basses et hautes fréquences. On en conclut que la précision de l'approximation dépend fortement de la valeur de α et de l'ordre N , et qu'il est préférable d'utiliser un ordre élevé, notamment pour les petites valeurs de α .

III. 4 Etude comparative

Il s'agit, dans cette section d'effectuer une comparaison entre les deux méthodes d'approximation, en analysant les performances de chacune. Et cela en se basant sur ce qui a été fait précédemment pour voir les principales différences des deux méthodes.

- Pour $\alpha = 0.2$; $G(s) = s^{0.2}$

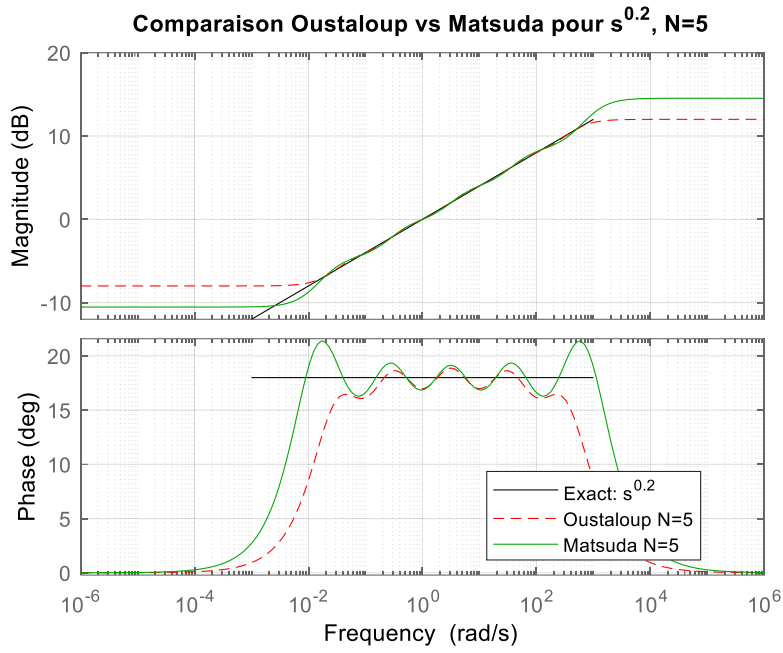


Figure III. 13: Tracé de Bode de $s^{0.2}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup et Matsuda dans la bande de fréquences $[\omega, \omega h] = [0.01, 1000]$, $N = 5$.

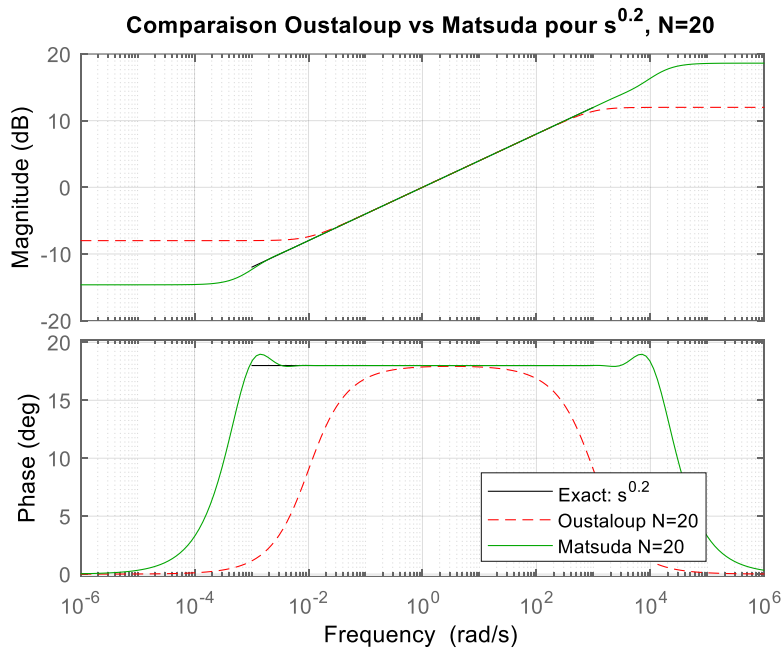


Figure III. 14: Tracé de Bode de $s^{0.2}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup et Matsuda dans la bande de fréquences $[\omega, \omega h] = [0.01, 1000]$, $N = 20$.

- Pour $\alpha = 0.5$; $G(s) = s^{0.5}$

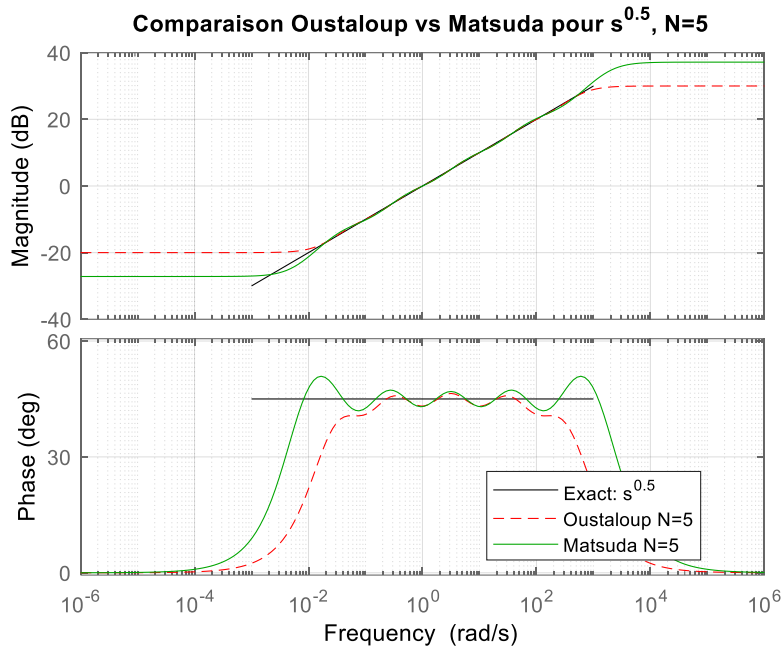


Figure III. 15: Tracé de Bode de $s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup et Matsuda dans la bande de fréquences $[\omega, \omega h] = [0.01, 1000]$, $N = 5$.

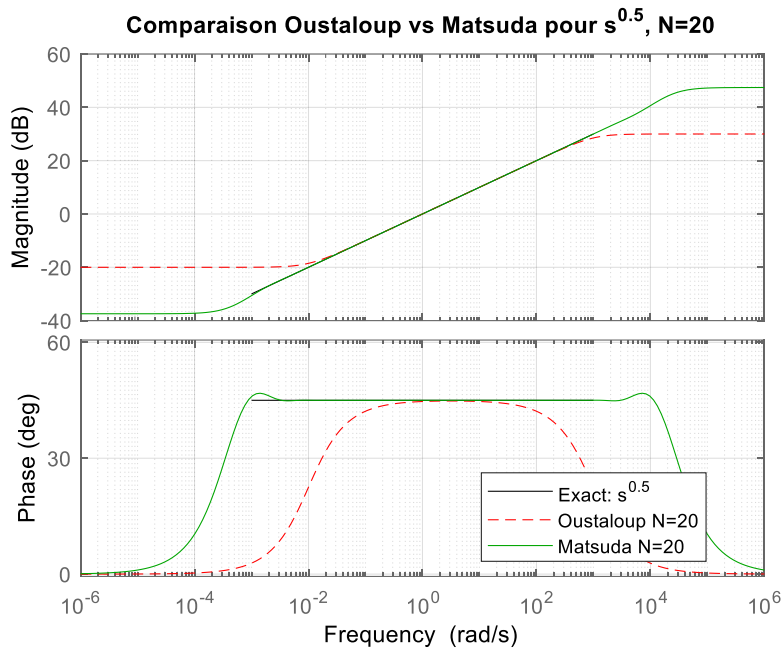


Figure III. 16: Tracé de Bode de $s^{0.5}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup et Matsuda dans la bande de fréquences $[\omega, \omega h] = [0.01, 1000]$, $N = 20$.

- Pour $\alpha = 0.7$; $G(s) = s^{0.7}$

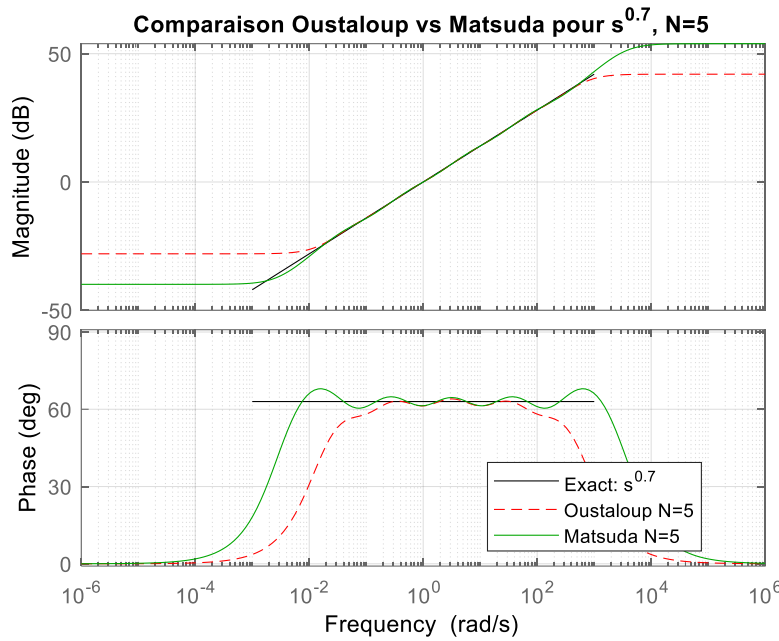


Figure III. 17: Tracé de Bode de $s^{0.7}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup et Matsuda dans la bande de fréquences $[\omega, \omega h] = [0.01, 1000]$, $N = 5$.

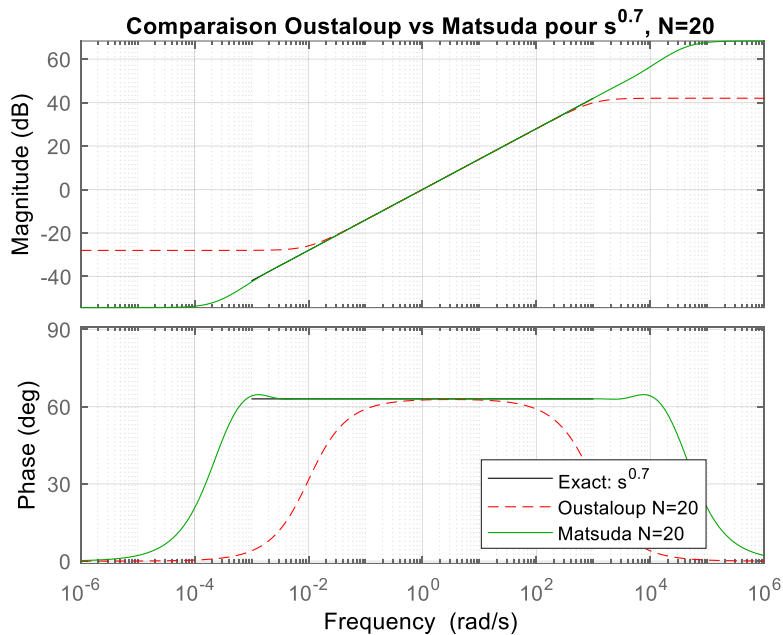


Figure III. 18: Tracé de Bode de $s^{0.7}$ et de son approximé par la méthode d'Oustaloup et Matsuda dans la bande de fréquences $[\omega, \omega h] = [0.01, 1000]$, $N = 20$.

Commentaire

D'après les résultats de comparaison, on peut voir que les deux méthodes sont efficaces et donnent de bonnes approximations, avec un léger avantage à la méthode de Matsuda. En effet, dans les figures 3.17 et 3.18 et pour l'ordre de filtre élevé, entre les fréquences 10^{-3} et

10^4 , les deux tracés se superposent parfaitement ce qui signifie que le modèle approximé à la même dynamique que le modèle fractionnaire.

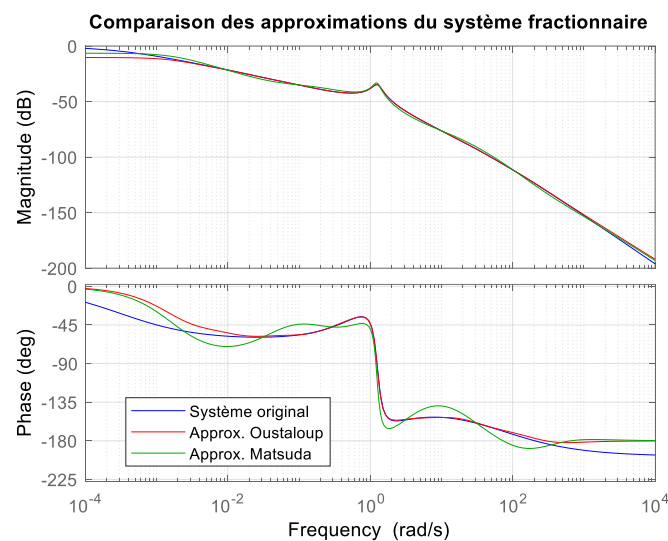
III.5 Application sur un système fractionnaire

Dans cet exemple, un modèle approché d'une fonction de transfert d'ordre fractionnaire est obtenu par différentes méthodes d'approximation, et les résultats sont comparés. La fonction de transfert d'ordre fractionnaire est donnée ci-dessous :

$$G(s) = \frac{s+1}{10s^{3.2} + 185s^{2.5} + 288s^{0.7} + 1}$$

Les méthodes d'approximation sont appliquées aux termes en puissance fractionnaire $s^{0.2}$, $s^{0.5}$ et $s^{0.7}$, et la fonction de transfert globale est calculée. Ici, l'ordre de l'approximation est de 3 et la plage de fréquences va de 0,01 à 100.

La figure ci-dessous représente un **diagramme de Bode** comparant la réponse en fréquence d'un **système d'ordre fractionnaire (FOTF)** à celles obtenues à l'aide de différentes **méthodes d'approximation** :



On observe que l'approximation de Matsuda, grâce à un ordre plus élevé, offre une meilleure précision, notamment dans la phase et le gain sur une large plage de fréquences. L'approximation d'Oustaloup modifiée améliore légèrement la performance par rapport à la version classique, mais reste moins fidèle que celle de Matsuda. Ces résultats montrent que la précision de l'approximation dépend fortement du choix de la méthode et de l'ordre utilisé.

III.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons cherché à vérifier l'hypothèse selon laquelle, dans une bande de fréquences limitée, les systèmes d'ordre fractionnaire peuvent présenter un comportement similaire à celui des systèmes d'ordre entier. Pour cela, nous avons appliqué les méthodes d'approximation d'Oustaloup et de Matsuda, en faisant varier l'ordre fractionnaire α ainsi que le nombre de pôles et de zéros ($N = 5$ et $N = 20$).

Les principaux enseignements tirés de cette étude sont les suivants :

- Les systèmes d'ordre fractionnaire reproduisent bien la dynamique des systèmes d'ordre entier dans une plage de fréquences restreinte.
- La qualité de l'approximation dépend de plusieurs paramètres : la bande de fréquences, le choix de l'ordre α , ainsi que le nombre de pôles et de zéros. Un N élevé (généralement >10) est crucial, surtout pour la méthode d'Oustaloup.
- Les deux méthodes montrent des limites pour des valeurs extrêmes de α , avec une perte notable de précision.

En comparant les deux approches :

- La méthode de Matsuda offre de meilleures performances globales que celle d'Oustaloup, notamment en termes de précision et de stabilité, même avec un faible N .
- Lorsque N est augmenté à 20, la précision s'améliore pour les deux méthodes, mais Matsuda reste plus fiable, particulièrement dans les zones de transition fréquentielle.

En résumé, bien que les deux méthodes soient efficaces dans une certaine mesure, la méthode de Matsuda s'avère plus précise et plus robuste pour l'approximation de systèmes d'ordre fractionnaire, toutes conditions confondues.

Conclusion générale

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'étude des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire, en mettant l'accent sur les méthodes d'approximation rationnelle destinées à faciliter leur traitement numérique. Les opérateurs fractionnaires, bien qu'efficaces pour modéliser des phénomènes complexes intégrant des effets de mémoire ou d'hystérésis, présentent des difficultés d'implémentation liées à leur nature irrationnelle.

Afin de surmonter ces obstacles, nous avons mené une analyse comparative entre deux méthodes d'approximation reconnues : **la méthode de Matsuda et celle d'Oustaloup**. Après avoir exposé les bases théoriques du calcul fractionnaire (dérivation, intégration d'ordre réel, transformée de Laplace), nous avons appliqué ces deux approches selon une démarche rigoureuse à travers des simulations fréquentielles (diagrammes de Bode) et temporelles (réponse indicielle).

L'étude a révélé que chaque méthode présente des avantages spécifiques. **La méthode de Matsuda**, fondée sur une expansion de Padé, s'est montrée particulièrement efficace pour des bandes de fréquences étroites et, dans les exemples analysés, elle a **produit de meilleurs résultats que celle d'Oustaloup pour des ordres de filtre élevés**, en offrant une approximation plus fidèle avec un moindre écart en fréquence. À l'inverse, **la méthode d'Oustaloup**, qui repose sur une répartition logarithmique des pôles et des zéros, demeure plus robuste et mieux adaptée à des bandes fréquentielles larges, ce qui en fait un choix privilégié dans les applications de commande robuste.

La comparaison a ainsi mis en évidence que le choix de la méthode d'approximation doit impérativement tenir compte du **contexte d'application**, notamment de l'ordre fractionnaire visé, de la plage fréquentielle, du niveau d'erreur tolérable et de la complexité de mise en œuvre.

En conclusion, ce travail a permis de clarifier les critères de sélection entre différentes méthodes d'approximation et d'offrir des éléments concrets d'aide à la décision selon les objectifs de modélisation et de contrôle. Il ouvre également des perspectives intéressantes, telles que l'exploration d'autres techniques d'approximation, l'analyse de systèmes en boucle fermée, ou encore l'application à des cas réels dans des domaines tels que l'électrochimie, la régulation thermique ou les matériaux intelligents.

Ce travail ouvre plusieurs perspectives intéressantes pour la suite. Une première orientation possible serait **l'étude d'autres techniques d'approximation**, telles que la méthode de Carlson...etc. Il serait également pertinent d'étendre cette étude aux **systèmes en boucle fermée**, afin d'évaluer l'impact de chaque approximation sur la stabilité, la robustesse et la performance des systèmes de contrôle.

Par ailleurs, une **implémentation expérimentale** sur des systèmes physiques réels permettrait de confronter les résultats de simulation aux comportements mesurés, notamment dans des domaines où les systèmes fractionnaires sont particulièrement pertinents : **électrochimie (batteries, supercondensateurs), régulation thermique, ...etc.**

Références bibliographiques

- [1] Khatir Khettab, "Techniques avancées pour la synthèse et l'amélioration des performances des systèmes de commande adaptative d'ordre fractionnaire pour les processus incertains", Thèse de Doctorat, Université de Skikda, 2016.
- [2] Yassine Bensafia, "Utilisation des filtres fractionnaires pour la conception de régulateurs adaptative", Thèse de Doctorat, Université de Skikda, 2016.
- [3] Idir, A., Bensafia, Y., & Canale, L. (2024). Influence of approximation methods on the design of the novel low-order fractionalized PID controller for aircraft system. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 46(2), 98.
- [4] Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1972). Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications.
- [5] Podlubny, Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1999.
- [6] S. Hammouche « Identification d'un modèle fractionnaire à l'aide des réseaux de neurones ». Mémoire de Magistère. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou. Soutenu en 2012
- [7] R Caponetto, G Dongola, and L Fortuna, Fractional order systems: modeling and control applications: World Scientific, 2010.
- [8] K.B Oldham and J Spanier, The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.: Elsevier Science, 1974, vol. 111.
- [9] Charef A. "Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional $PI\lambda D\mu$ controller," IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 153, pp. 714-720, 2006
- [10] B. Bouhraoua, B. Musabyimana « Commande des systèmes par un correcteur $PI\lambda D\mu$ d'ordre fractionnaire. Application : commande d'un quadri rotor », Mémoire de Master. Université Hassiba Benbouali de Chlef. Soutenu en 2016

- [11] A. SI Ammour « Contribution à la commande par mode glissants d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou. Soutenue en 2011.
- [12] I. Ndoye « Généralisation du Lemme Gronwald-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires ». Thèse de Doctorat. Université Henri Poincaré, Nancy 1 et Université Hassan II Ain Chock, Casablanca. Soutenue en 2011.
- [13] V. M. L. Fadiga « Commande H_∞ à base de modèles non entiers ». Thèse de Doctorat. Université de bordeaux. Soutenue le 12 juillet 2014
- [14] A. Djouambi « Contribution à la commande CRONE ». Thèse de Doctorat, Université Mentouri de Constantine. Soutenue en 2008
- [15] M. Assaba « Contribution à la commande d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université de Constantine. Soutenue en 2015
- [16] S. Guermah « Commande CRONE, Application à un procédé pilote de laboratoire ». Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou. Soutenue en 2011.
- [17] Idir, A., Akroum, H., Tadjer, S. A., & Canale, L. (2023, June). A comparative study of integer order PID, fractionalized order PID and fractional order PID controllers on a class of stable system. In *2023 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2023 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe)* (pp. 1-6). IEEE.
- [18] : M. AOUN, R. MALTI, F. LEVRON, et A. OUSTALLOUP « Numirical simulation of fractional systems ». ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Chicago, Illinois, USA, September 2-6, 2003
- [19] Charef, A. (2006). Modeling and analog realization of the fundamental linear fractional order differential equation. *Nonlinear Dynamics*, 46(1–2), 195–210. <https://doi.org/10.1007/s11071-006-2015-3>
- [20] Ghezli, T., Chabane, S., & Belkacem, D. (2017). *Méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire* [Mémoire de Master]. Université Mohamed Boudiaf, M'sila.
- [21] Ousaadi, Z., Akroum, H., & Idir, A. (2024). Robustness enhancement of fractionalized order proportional integral controller for speed control of indirect field-oriented control induction motor. *Przegląd Elektrotechniczny*, 100.

- [22] Charef, A., Sun, H. H., Tsao, Y. Y., & Onaral, B. (1992). Fractal system as represented by singularity function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9), 1465–1470.
- [23] Ladaci, S. (2007). *Contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire* (Thèse de doctorat). Université Mentouri Constantine, Algérie.
- [24] Vinagre, B. M., Podlubny, I., Hernández, A., & Feliu, V. (2000). Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 3(3), 231–248.
- [25] Bensafia, Y., Idir, A., Zemmit, A., & Khettab, K. (2023). Performance Improvement of Aircraft pitch angle using the Fractional Order Adaptive PID Controller. *Przegląd Elektrotechniczny*, 99(5).
- [26] TERCHILIN, BARKA .N «Commande robuste des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire». Mémoire présenté pour l'obtention Du diplôme de Master Académique , UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA, 2024.
- [27] Idir, A., Canale, L., Tadjer, S. A., & Chekired, F. (2022, June). High order approximation of fractional PID controller based on grey wolf optimization for DC motor. In *2022 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2022 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe)* (pp. 1-6). IEEE.
- [28] Bensafia, Y., Khettab, K., & Idir, A. (2022). A novel fractionalized PID controller using the sub-optimal approximation of FOTF. *Algerian Journal of Signals and Systems*, 7(1), 21-26.
- [29] H .BENZAHAIA, B.BELOUADEH «Utilisation des méthodes d'identification pour l'approximation des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire». En vue de l'Obtention du diplôme de Master, Université Mohamed Boudiaf - M'sila. Soutenue en 2021
- [30] Charef, M. (2014). *Commande d'ordre fractionnaire basée sur la fractionalisation des correcteurs classiques PID* [Mémoire de Magistère]. Université de Constantine 1.